UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA Y ELECTRICA

U.A.N.L.

COORDINACION DE CIENCIAS

PROBLEMARIO DE MATEMATICAS II

EJERCICIO No. 1

Ejemplo No. 1.- si $f(x)=\sqrt{x-2}$ encuentre $f(3)$, $f(5)$, $f(6)$ y $f(\sqrt{3})$

Solución: $f(3)=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$

$f(5)=\sqrt{5-2}=\sqrt{3}$

$f(6)=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$

$f(\sqrt{3})=\sqrt{\sqrt{3}-2}$

Ejemplo No. 2 Determinar $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ donde $h\neq 0$, si $f(x)=4x^2-5x+7$

Solución: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{4(x+h)^2-5(x+h)+7-(4x^2-5x+7)}{h}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{4x^2+8xh+4h^2-5x-5h+7-4x^2+5x-7}{h}=\frac{8hx-5h+4h^2}{h}=8x-5+4h$$

PROBLEMAS PROPUESTOS.-

No. 1. Suponiendo que $f(x)=\sqrt{x-1}+2x$ Encuentre $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(10)$

No. 2. Suponiendo que $f(x)=x^2-3x+1$; Encuentre $f(-2+h)$, $f(x+h)$

No. 3. Si $f(x)=2x^2+5x-3$ Encuentre cada uno de los siguientes valores donde xy h son números reales. **(a)** $f(-2)$; **(b)** $f(0)$; **(c)** $f(h+1)$; **(d)** $f(x^2-3)$; **(e)** $f(x)+f(h)$; **(f)** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si $h\neq 0$

No. 4. Si $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ cuando $x\neq -1$ Encuentre **(a)** $g(-1+2h)$, **(b)** $g(x+y)$, **(c)** $g(\frac{1}{x}-1)$

Solución:

No. 1. $f(1)=2$; $f(3)=\sqrt{2}+6$; $f(5)=12$; $f(10)=23$.

No. 2. $f(-2+h)=h^2-7h+11$; $f(x+h)=x^2+2xh+h^2-3x-3h+1$.

No. 3. $f(-2)=-5$; **(b)** $f(0)=-3$; **(c)** $f(h+1)=2h^2+9h+4$; **(d)** $f(x^2+3)=2x^4-7x^2$;

(e) $f(x)+f(h)=2x^2+5x+2h^2+5h-6$; **(f)** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x+2h+5$;

No. 4. **(a)** $g(-1+2h)=1-h^{-1}$; **(b)** $g(x+y)=\frac{x+y-1}{x+y+1}$; **(c)** $g(\frac{1}{x}-1)=1-2x$.

EJERCICIO No. 2

Ejemplo No. 1. Encuentre el dominio y rango de la función $f(x)=\sqrt{x-2}$

Solución:

Debido a que los números se limitan a los números reales, f(x) es la función de x solo para $x-2 \geq 0$ ya que para cualquier x que satisfaga esta desigualdad, se determina un valor único de f(x). Sin embargo, si $x \leq 2$, se obtiene la raiz cuadrada de un número negativo y en consecuencia no existe un número real f(x). Por lo tanto x debe de ser restringida de modo que $x \geq 2$. Así pues el dominio de f es el intervalo $[2,\infty)$ y el rango de f es $[0,\infty)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En cada uno de los ejercicios del 1 al 16 encuentre el subconjunto más grande de IR que pueda ser el dominio de f, encuentre también el rango de f.

No. 1 $f(x)= x^2-2$ No. 2 $f(x)= \sqrt{x}$ No. 3 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

No. 4 $f(x) = 3/x^2$ No. 5 $f(x) = 1/\sqrt{x}$ No.6 $f(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$

Solución: No. 1 Dominio $[-2,2]$, rango$[0,2]$;
No. 2 Dominio $(-\infty,\infty)$, rango$[-2,\infty)$;
No. 3 Dominio$[0,\infty)$, rango$[0,\infty)$;
No. 4 Dominio todos los IR excepto cero, rango$(0,\infty)$,
No. 5 Dominio $(0,\infty)$, rango $(0,\infty)$;
No. 6 Dominio $(-\infty,4) \cup (4,\infty)$, rango $(0,\infty)$

EJERCICIO No. 3

Definición: Una función f de X a Y es una función uno a uno si siempre que $a \neq b$ en x, entonces $f(a) \neq f(b)$ en Y.

Ejemplo No. 1 (a) sea $f(x) = 3x+2$ con x real. Demuestre que f es uno a uno
(b) sea $g(x) = x^2+5$ con x real. Demuestre que g no es uno a uno

Solución: (a) si $a \neq b$ entonces $3a \neq 3b$ y $3a+2 \neq 3b+2$ o sea $f(a) \neq f(b)$, por tanto f es uno a uno según la definición.
(b) la función g no es uno a uno ya que existen números diferentes en el dominio que tiene la misma imagen; por ejemplo, aunque $-1 \neq 1$, tanto $g(-1)$ como $g(1)$ son iguales a 6.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 8 averigüe si la función f es uno a uno

No. 1 $f(x) = 1/(7x+9)$ No. 2 $f(x) = 10+6x^2$ No. 3 $f(x) = 3$ No. 4 $f(x)=8x+1$

No. 5 $f(x) = 2x^2+10$ No. 6 $f(x) = 2\sqrt{x}$ No. 7 $f(x) = x^5$ No. 8 $f(x) = 2x^2-x-3$

Solución:

No. 1 sí; No. 2 No; No. 3 No; No. 4 Sí; No. 5 No; No. 6 Sí;
No. 7 Sí; No. 8 Sí.

Definición: Una función f con dominio X se llama par si $f(-a) = f(a)$ para todo número a en X o impar si $f(-a) = -f(a)$ para todo a en X.

Ejemplo No. 1: si $f(x) = 3x^4 - 2x^2+7$ Entonces:

$$f(a) = 3a^4-2a^2+7$$
$$f(-a)= 3a^4-2a^2+7$$
$$-f(a) = -3a^4+2a^2-7$$

Como $f(a) = f(-a)$ por lo tanto f es una función par.

Ejemplo No. 2: si $g(x) = 2x^5+5x^3-8x$ Entonces:

$$g(a) = 2a^5+5a^3-8a$$
$$g(-a)=-2a^5-5a^3+8a$$
$$-g(a)= -2a^5-5a^3+8a$$

como $g(-a) = -g(a)$ por lo tanto g es una función impar

Ejemplo No. 3 : si $h(x) = 2x^4+5x^3-x^2+8$ Entonces

$$h(a) = 2a^4+5a^3-a^2+8$$
$$h(-a)=2a^4-5a^3-a^2+8$$
$$-h(a) = -2a^4-5a^3+a^2-8$$

como $h(a) \neq h(-a) \neq -h(a)$ por lo tanto la función h no es par ni tampoco impar.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En cada uno de los siguientes ejercicios del 1 al 10 averigüe si f es par, impar o ninguna de las dos cosas.

No. 1 $f(x) = 2x^4-3x^2+1$ No. 2 $f(x)= 5x^3-7x$ No. 3 $f(x)=3x^3-4x$ No. 4 $f(x) = 6x^2+7$

No. 5. $f(x) = 4$ No. 6 $f(x) = 2x^2-3x+4$ No. 7 $f(x) = \sqrt[3]{x^3-4}$ No.8 $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

No. 9 $f(x) = 2x^5+5x^3-8x$ No. 10 $f(x) = 2x^4+5x^3-x^2$

Solución:

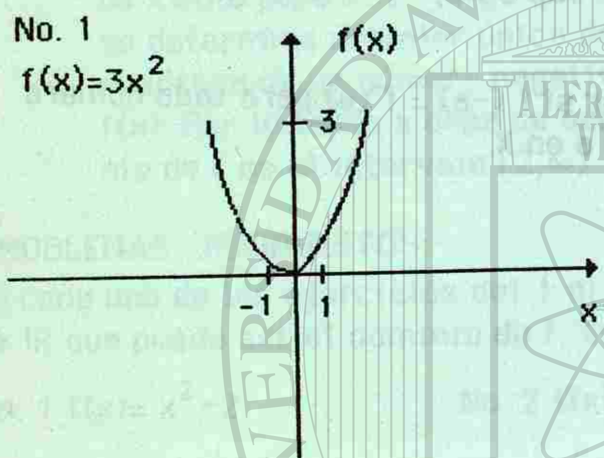
No. 1 Par; No. 2 Impar; No. 3 Impar; No. 4 Par; No. 5 Par; No. 6 Ninguno;
No. 7 Ninguno; No. 8 Ninguno; No. 9 Impar; No. 10 Ninguno.

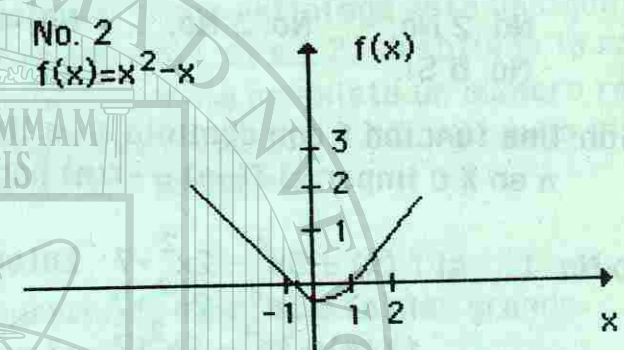
EJERCICIO No.4

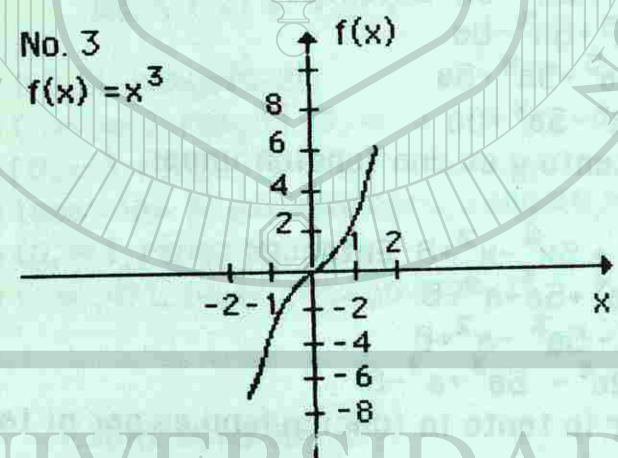
En los ejercicios del 1 al 5 trace la gráfica de f.

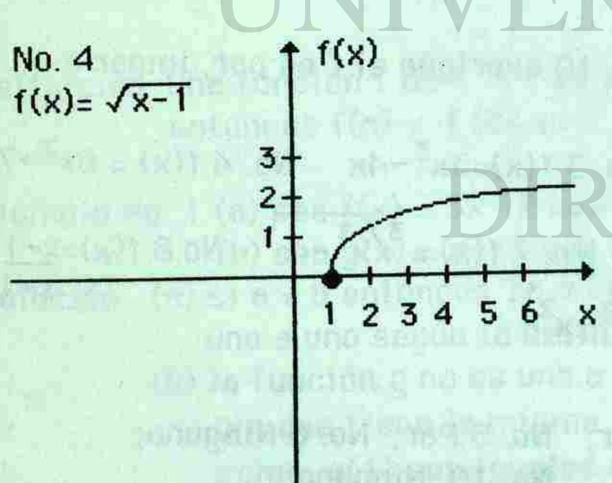
No. 1 $f(x)=3x^2$ No. 2 $f(x)=x^2-x$ No. 3 $f(x)=x^3$ No. 4 $f(x)=\sqrt{x-1}$

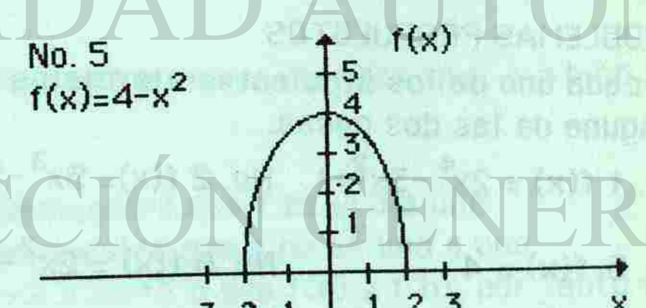
No. 5 $f(x)=4-x^2$











EJERCICIO No. 5

Ejemplo No. 1 Sean $f(x) = x-5$ y $g(x) = x^2-1$, encuentre la suma, diferencia, el producto y el cociente de f Y g.

Solución: $(f+g)(x) = x-5+x^2-1 = x^2+x-6$

$(f-g)(x) = x-5-x^2+1 = -x^2+x-4$

$(fg)(x) = (x-5)(x^2-1) = x^3-x-5x^2+5 = x^3-5x^2-x+5$

$(f/g)(x) = \dfrac{x-5}{x^2-1}$; siempre que $x^2 \neq 1$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En cada uno de los ejercicios del 1 al 5 encuentre: **(a)** la suma; **(b)** la diferencia; **(c)** el producto y **(d)** el cociente de las funciones f y g, suponiendo que para todos los valores de x estan en el dominio de f y g.

No. 1 $f(x) = x^2-1$ Y $g(x) = 3x+1$

No. 2 $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ Y $g(x) = 3x+1$

No. 3 $f(x) = \sqrt{1-x}$ Y $g(x) = \sqrt{x+2}$

No. 4 $f(x) = 3x^2$ Y $g(x) = \dfrac{1}{2x-3}$

No. 5 $f(x) = 2x^3-x+5$ Y $g(x) = x^2+x+2$

Solución: No. 1 **(a)** $(f+g)(x) = x^2+3x$ **(b)** $(f-g)(x) = x^2-3x-2$;

(c) $(fg)(x) = 3x^3+x^2-3x$; **(d)** $(f/g)(x) = \dfrac{x^2-1}{3x+1}$

No. 2 **(a)** $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2}+3x+1$; **(b)** $(f-g)(x) = \sqrt{4-x^2}-3x-1$;

(c) $(fg)(x) = \sqrt{4-x^2}(3x+1)$; **(d)** $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{3x+1}$

No. 3 **(a)** $(f+g)(x) = \sqrt{1-x}+\sqrt{x+2}$; **(b)** $(f-g)(x) = \sqrt{1-x}-\sqrt{x+2}$

(c) $(fg)(x) = \sqrt{(1-x)(x+2)}$; **(d)** $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+2}}$

No. 4 **(a)** $(f+g)(x) = \dfrac{6x^3-9x^2+1}{2x-3}$; **(b)** $(f-g)(x) = \dfrac{6x^3-9x^2-1}{2x-3}$;

(c) $(fg)(x) = \dfrac{3x^2}{2x-3}$ **(d)** $(f/g)(x) = 6x^3-9x^2$

No. 5 **(a)** $(f+g)(x) = 2x^3+x^2+7$ **(b)** $(f-g)(x) = 2x^3-x^2-2x+3$

(c) $(fg)(x) = 2x^5+2x^4+3x^3+4x^2+3x+10$

(d) $(f/g)(x) = \dfrac{2x^3-x+5}{x^2+x+2}$

EJERCICIO NO. 6

Ejemplo No. 1 Dado que f Y g estan definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ Y $g(x)=x^2-1$ determinar $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

Solución: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2-1 = x-1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 6 encuentre $(f \circ g)(x)$ Y $(g \circ f)(x)$

No. 1 $f(x) = \sqrt{x}$ Y $g(x) = x^2-1$ No. 2 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ Y $g(x) = \frac{x}{x-1}$

No. 3 $f(x) = \frac{1}{3x+1}$ Y $g(x) = \frac{2}{x^2}$ No. 4 $f(x) = x^3$ Y $g(x) = x+1$

No. 5 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ Y $g(x) = x+1$ No. 6 $f(x) = x^3-1$ Y $g(x)=\sqrt[3]{x+1}$

Solución:

No. 1 $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2-1}$ Y $(g \circ f)(x) = x-1$; No. 2 $(f \circ g)(x) = \frac{x-1}{2x-1}$ Y $(g \circ f)= \frac{-1}{x}$

No. 3 $(f \circ g)(x)= \frac{x^2}{6+x^2}$ Y $(g \circ f)(x) = 2(3x+1)^2$;

No. 4 $(f \circ g)(x)= x^3+3x^2+3x+1$ Y $(g \circ f)(x) = x^3+1$;

No. 5 $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+2}$ Y $(g \circ f)(x) = \frac{x+2}{x+1}$; No. 6 $(f \circ g)(x) = x$ Y $(g \circ f)(x) = x$

EJERCICIO No. 7

Si f Y g son dos funciones tales que $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ son igual a x; entonces f Y g son funciones inversas.

Ejemplo No. 1 En el siguiente ejercicio muestre que f Y g son funciones inversas si $f(x) = 2x-3$ Y $g(x) = \frac{x+3}{2}$

Solución: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x+3}{2}) = 2(\frac{x+3}{2}) - 3 = x+3-3 = x$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3)= \frac{(2x-3)+3}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 5 muestre que f Y g son funciones inversas una de la otra.

No. 1 $f(x) = x^3+1$; $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ No. 2 $f(x) = \sqrt{2x+1}$ $x \geq -\frac{1}{2}$ $g(x) = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}, x \geq 0$

No. 3 $f(x) = 2x-1$; $g(x) = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ No. 4 $f(x)=\sqrt[3]{x+8}$; $g(x) = x^3-8$

No. 5 $f(x) = \frac{1}{x+1}$; $g(x) = \frac{1-x}{x}$

Solución: Para todos los problemas del 1 al 5 $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$

EJERCICIO No. 8

Ejemplo No. 1 Sea $f(x) = 5-7x$ para todo numero real x. Encuentre la función inversa de f.

Solución: Si $f(x) = y$ entonces $y = 5-7x$. despejando el valor de x se obtiene $x=\frac{5-y}{7}$; como $x=g(y)$ entonces $g(y) = \frac{5-y}{7}$; como no importa cual es el simbolo que se usa para la variable independiente podemos sustituir x por y en la expresión para g obeniendo $g(x) = \frac{5-x}{7}$; entonces $f^{-1}(f(x)) = \frac{5-x}{7}$

Comprobación: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{5-x}{7}) = 5-7(\frac{5-x}{7}) = 5-5+x=x$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5-7x) = \frac{5-(5-7x)}{7} = \frac{5-5+7x}{7} = \frac{7x}{7} = x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los siguientes ejercicios del 1 al 6 Encuentre la función inversa de f:

No. 1 $f(x) = (x-1)^3$ No. 2 $f(x)=\sqrt{x-1}$ No. 3 $f(x) = 2x-1$

No. 4 $f(x) = \frac{1}{8+11x}$, $x > \frac{-8}{11}$ No. 5 $f(x) = 6-x^2$, $0 \leq x \leq \sqrt{6}$

No. 6 $f(x)=\sqrt{1-4x^2}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Solución: No. 1 $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}+1$ No. 2 $f^{-1}(x)= 1+x^2$ No. 3 $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

No. 4 $f^{-1}(x)= \frac{1-8x}{11x}$ No. 5 $f^{-1}(x) = \sqrt{6-x}$ No. 6 $f^{-1}(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$

EJERCICIO 9

EJEMPLO 1 Ecuentre el limite de las siguientes funciones, si es que existen.

(A) $\lim\limits_{X\to 3} \dfrac{4}{X-1}$; (B) $\lim\limits_{X\to 3} \dfrac{X^3-27}{X-3}$

SOLUCION:

(A) $= \lim\limits_{X\to 3} \dfrac{4}{X-1} = \dfrac{4}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2$

(B) $= \lim\limits_{X\to 3} \dfrac{X^3-27}{X-3} = \lim\limits_{X\to 3} \dfrac{(X-3)(X^2+3X+9)}{(X-3)} = \lim\limits_{X\to 3}(X^2+3X+9) = 3^2+3(3)+9 = 27$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Procediendo de manera intituitiva, encuentre los limites en los ejercicios del 1 al 10 si es que existen.

1.- $\lim\limits_{X\to 3}(X^3-5X^2+2X-1)$ 2.- $\lim\limits_{Z\to 1} \dfrac{Z-1}{Z^2-1}$ 3.- $\lim\limits_{X\to 2} \dfrac{X^3-8}{X-2}$

4.- $\lim\limits_{Y\to 1} \dfrac{\sqrt{Y}-1}{Y-1}$ 5.- $\lim\limits_{X\to 4} \dfrac{\sqrt{X}-2}{X-4}$ 6.- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$

7.- $\lim\limits_{X\to 1} \dfrac{\sqrt{X}-2}{X-1}$ 8.- $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^3-1}{t-1}$ 9.- $\lim\limits_{X\to 2} \dfrac{X^2-4}{X-2}$

10.- $\lim\limits_{X\to 3} \dfrac{2X^3-6X^2+X-3}{X-3}$

SOLUCION:

1.) -13; 3.) 12; 5.) 1/4; 7) no existe; 9.) 4;

2.) 1/2; 4.) 1/2; 6): $1/2\sqrt{2}$; 8): 3; 10.) 19.

EJERCICIO 10

EJEMPLO 1. Suponiendo que "a" es cualqquier numero real, encuentre (a) la pendiente de la recta tangente a la grrafica $y=x^2$, en punto $P[a, f(a)]$, (b) encuentre la ecuaci'on de la tangente a la grafica en el punto (3/2, 9/4).

SOLUCION: (a)

$m_{pq} = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x^2-a^2}{x-a} = \dfrac{(x+a)(x-a)}{x-a} = x+a$ $\therefore$ $m_{pq} = x +$

USANDO $y - y_1 = m(x - x_1)$ con $P(3/2, 9/4)$ y $m = 2a = 2(3/2) = 3$ tenemos

$9/4 = (3)(x - 3/2)$ que es equivalente a : $12x - 4y - 9 = 0$

OBLEMAS PROPUESTOS :

LOS EJERCICIOS 1 Y 2 ENCUENTRE (a) LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA GRAFIC EN EL PUNTO $P[a, f(a)]$; (b) LA ECUACION DE LA RECTA TANGENTE EN EL PUNTO $P[2, f(2)]$

$f(x) = 5x^2 - 4x$ 2.- $f(x) = x^4$

LUCION :

$m = 10a - 4$ 2.) $m = 4a^3$

$y = 16x - 20$ $y = 52x - 48$

OBLEMAS PROPUESTOS:

LOS EJERCICIOS 3 Y 4 ENCUENTRE (a) LA PENDIENTE EN EL PUNTO QUE SE ENCUENTRA SOB AFICA DE LA ECUACION Y CUYA ABCISA ES a . (b) ENCUENTRE TAMBIEN LA ECUACION DE L TANGENTE EN EL PUNTO P INDICADO.

$f(x)=3x+2$, $p(1,5)$ 4): $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. $p(2,1/4)$

LUCION:

(a) $m=3$; (b) $3X-Y+2=0$ 4.) (a) $m = -\dfrac{2}{a^3}$, (b) $\dfrac{1}{4}x+y-3/4=0$

EJERCICIO N.=11

EJEMPLO N.º=1 ENCUENTRE $\lim\limits_{X\to 2} \sqrt{\dfrac{X^3+2X+3}{x^2+5}}$ SI ES QUE EXISTE

SOLUCION:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}} = \sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}} = \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x+3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+5)}} = \sqrt{\frac{(2)^3+2(2)+3}{(2)^2+5}} =$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

EN LOS EJERCICIOS DEL 1 AL 20 ENCUENTRE LOS LIMITES SI ES QUE EXISTEN

N.º1 $\lim\limits_{x\to 4}(5x^2-9x-8)$ N.º2 $\lim\limits_{t\to 3}(3t+4)(7t-9)$ N.º3 $\lim\limits_{x\to 7} 0$

N.º4 $\lim\limits_{X\to 1/2} \dfrac{2x^2+5x-3}{6X^2-7X+2}$ N.º5 $\lim\limits_{X\to -3} \dfrac{(3+x)}{1/X+1/3}$ N.º6 $\lim\limits_{X\to 2} \dfrac{x-2}{X^3-8}$

N.º7 $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$ N.º8 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x}+1/\sqrt{x})^6$ N.º9 $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{16x^{2/3}}{4-x^{4/3}}$

N.-10 $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt[3]{\dfrac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$ N.-11 $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$ N.-12 $\lim\limits_{x\to 6} (x+4)^3(x-6)^2$

N.-13 $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{(4t^2+5t-3)^3}{(6t+5)^4}$ N.-14 $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ N.-15 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{-2}-2^{-2}}{h}$

N.-16 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x-3}$ N.-17 $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2-5}{2t^3+6}$ N.-18 $\lim\limits_{y\to -2} \dfrac{y^3+8}{y+2}$

N.-19 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-x-12}$ N.-20 $\lim\limits_{y\to -3} \sqrt{\dfrac{y^2-9}{2y^2+7y+3}}$

SOLUCION:

N.-1 = 36; N.-4 =-7; N.-7= 8; N.-10=-2 N.-13=-64; N.-16=27; N.-19=1/7;
N.-2 =150; N.-5=-9; N.-8= 64; N.-11=-1/2; N.-14=16; N.-17=-1/22;
N.-3 =0; N.-6= 1/12; N.-9=-16/3; N.-12=0; N.-15=-1/4; N.-18=12; N.-20=$\sqrt{30}/5$

EJERCICIO Nº12

EJEMPLO N.-1 DADA $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-9}$ Determine todos los valores de "x" pra los cuales "f" es continua

SOLUCION:

El dominio de f es el conjunto de todos los numeros reales, excepto aquellos para los cuales $x^2-9=0$. Como $x^2-9=0$, cuando $x=\pm 3$, se sigue que el dominio de "f" es el conjunto de todos los numeros reales, excepto 3 y -3. La función "f" es una función racional; por tanto, "f" es continua en todos los números reales, excepto 3 y -3.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre todos los números en los que la función "f" es continua.

N.-1 $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ N.-2 $f(x)=\sqrt{2x-3}+x^2$ N.-3 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

N.-4 $f(x)=\dfrac{x+9}{x-9}$ N.-5 $f(x)=\dfrac{4x-7}{(x+3)(x^2+2x-8)}$ N.-6 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}\sqrt{25-x^2}}{x-4}$

N.-7 $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x+3}$ N.-8 $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ N.-9 $f(x)=\dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$

N.-10 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$

SOLUCION:

N.-1 Todos los $\mathbb{R}$ excepto $X=3$ N.-2 $[3/2,\infty)$; N.-3 $(-1,+1)$ N.-4 Todos los $\mathbb{R}$ excepto $X=9$

N.-5 Todos los $\mathbb{R}$ excepto $X=2, X=-3, X=-4$; N.-6 $[-5,-3] \cup [3,4) \cup (4,5]$; N.-7 Todos los R excepto $X=-3$; N.-8 $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$; N.-9 Todos los $\mathbb{R}$ excepto cuando $X=3/2, X=-1$;

N.-10 Todos los $\mathbb{R}$ excepto cuando $X=4$.

EJERCICIO Nº13

EJEMPLO N.-1 Encuentre $f'(x)$ de la función $f(x)=x^2+x$ usando la definición de la derivada.

SOLUCION:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+x+h-x^2-x}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h[(2x+h)+1]}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h+1)=2x+0+1=2x+1$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre $f'(x)$ usando la definición de la derivada.

N.-1 $f(X)=7x+3$ N.-2 $f(x)=-4$ N.-3 $f(x)=4-2x^2$ N.-4 $f(x)=4x^2+5x+3$
N.-5 $f(X)=x^3-X$ N.-6 $f(X)=\dfrac{1}{x+1}$ N.-7 $f(X)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ N.-8 $f(X)=\dfrac{2+x}{3-x}$
N.-9 $f(X)=\sqrt{2-7x}$ N.-10 $f(X)=(1+\sqrt{3})^2$

SOLUCION:

N.-1 $f'(X)=7$ N.-2 $f'(X)=0$ N.-3 $f'(X)=-4x$ N.-4 $f'(X)=8x+5$ N.-5 $f'(X)=3x^2-1$
N.-6 $f'(X)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$ N.-7 $f'(X)=\dfrac{-1}{2(x+2)^{3/2}}$ N.-8 $f'(X)=\dfrac{5}{(3-x)^2}$ N.-9 $f'(X)=\dfrac{-7}{2\sqrt{2-7x}}$
N.-10 $f'(X)=0$

EJERCICIO Nº14

EJEMPLO N.-1 Dado $f(x)=7x^4-2x^3+8x+5$;hallar $f'(x)$ aplicandolas reglas para derivar

SOLUCION:

$f'(x)= Dx(7x^4)+Dx(-2x^3)+Dx(8x)+Dx(5)= 28x^3-6x^2+8$

EJEMPLO N.-2 DADA $H(x)= (2x^3-4x^2)(3x^5+x^2)$; obtener $H'(x)$ aplicando las reglas para derivar.

SOLUCION:

$H'(x)= (2x^3-4x^2)\, Dx\, (3x^5+x^2)+(3x^5+x^2)\, Dx\, (2x^3-4x^2)= (2x^3-4x^2)(15x^4+2x)+(3x^5+x^2)(6x^2-8x)$

$H'(x)= (30x^7-60x^6+4x^4-8x^3)+(18x^7-24x^6+6x^4-8x^3)= 48x^7-84x^6+10x^4-16x^3$

En los ejercicios del 1 al 20 derive la función dada; mediante la aplicación de las reglas para derivar.

N.-1 $g(x)= 1-2x-x^2$ N.-2 $f(x)=1/8\, x^8-x^4$ N.-3 $V(R)=4/3\pi R^3$ N.-4 $g(x)=4x^4-1/4x^{-4}$

N.-5 $f(s)=\sqrt{3}(s^3-s^2)$ N.-6 $G(y)=(7-3y^3)^2$ N.-7 $f(x)= \dfrac{x}{x-1}$ N.-8 $h(x)= \dfrac{5x}{1+2x^2}$

N.-9 $f(x)= \dfrac{2x+1}{x+5}(3x-1)$ N.-10 $h(x)= \dfrac{2x^3+4}{x^2-4x+1}$

N.-11 $f(x)= 7x^4-2x^3+8x+5$. N.-12 $h(x)= (2x^3-4x^2)(3x^5+x^2)$. N.-13 $f(x)= \dfrac{3}{x^5}$

N.-14 $f(x)= \dfrac{(3x^2-5x+8)}{7}$. N.-15 $M(x)= \dfrac{2x^3-7x^2+4x+3}{x^2}$. N.-16 $S(w)= (2w+1)^3$

N.-17 $f(t)= \dfrac{\frac{3}{5t}-1}{\frac{2}{t^2}+7}$ N.-18 $G(r)= (5r-4)^{-2}$. N.-19 $h(x)= (5x-4)^2$.

N.- 20 $N(v)= 4v(v-1)(2v-3)$

SOLUCION:

N.-1 $g'(x)= -2-2x^2$. N.-2 $f'(x)= x^7-4x^3$. N.-3 $v'(R)= 4\pi R^2$. N.-5 $f'(s)= 3\sqrt{3}\, s^2-2\sqrt{3}\, s$

N.-4 $g'(x)= 16x^3+1/x^5$. N.-6 $G'(y)= -18y^2(7-3y^3)$. N.-7 $f'(x)= -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

N.-8 $h'(x)= \dfrac{5(1-2x^2)}{(1+2x^2)^2}$ N.-9 $f'(x)= \dfrac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$

N.-10 $h'(x)= \dfrac{2x^4-16x^3+6x^2-8x+16}{(x^2-4x+1)^2}$ N.-11 $f'(x)= 28x^3-6x^2+8$.

N.-12 $h'(x)= 48x^7-84x^6+10x^4-16x^3$. N.-13 $f'(x)= -15/x^6$. N.-14 $f'(x)= \dfrac{6x-5}{7}$

N.-15 $M'(x)= 2-4x^{-2}-6x^{-3}$ N.-16 $S'(w)= 6(2w+1)^2$.

N.- 17 $f'(t)= \dfrac{5(2+7t^2)(3-10t)-(3t-5t^2)(70t)}{25(2+7t^2)^2}$ N.- 18 $g'(R) = -10/(5R-4)^3$

N.- 19 $h'(x) = 10(5x-4)$

N.- 20 $N'(v) = (8v^2-8v) + (2v-3)(8v-4)$

EJERCICIO Nº15

Ejemplo N. 1 dada $f(x) = (3x^2+2)^2(x^2-5x)^3$ Determinar $f'(x)$

SOLUCION:

$f^1(x) = (3x^2+2)^2\,[3(x^2-5x)^2(2x-5)] + (x^2-5x)^3[2(3x^2+2)(6x)]$

$f^1(x) = 3(3x^2+2)(x^2-5x)^2[(3x^2+2)(2x-5) +4x(x^2-5x)]$

$= 3(3x^2+2)(x^2-5x)^2\,[6x^3-15x^2+4x-10+4x^3-20x^2]$

$f^1(x) = 3(3x^2+2)(X^2-5x)^2(10x^3-35x^2+4x-10)$

Problemas propuestos:

Derive las funciones definidas en los ejercicios 1 al 15.

Nº1.- $f(x)=(x^2+4x-5)^4$ Nº2.- $f(x)=(x^2+4)^{-2}$ Nº3.- $g(x)=(2x-5)^{-1}(4x+3)^{-2}$

Nº4.- $f(x)= 2/(7x^2+3x-1)$ Nº5.- $f(z)=(z^2-5)^3/(z^2+4)^2$ Nº6.- $G(x)=\dfrac{(4x-1)^3(x^2+2)^4}{(3x^2+5)^2}$

Nº7.- $h(x)= (2x^3-5x^2+4)^{10}$ Nº8.- $f(x)=\dfrac{1}{4x^3+5x^2-7x+8}$ Nº9.- $f(x)=\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^4$

Nº10.- $f(x)=(3x^2+2)^2(x^2-5x)^3$ Nº11.- $f(x)=(4x^3+2x^2-x-3)$ Nº12.- $g(w)=(w^4-8w^2+15)^4$

Nº13.- $K(x)=(3x^2-5x+7)^{-1}$ Nº14.- $s(t)=\left(\dfrac{3t+4}{6t-7}\right)^3$ Nº15.- $g(x)=(3x-8)^{-2}(7x^2+4)^{-3}$

SOLUCION:

Nº1 $f'(x)=8(x+2)(x^2+4x-5)^3$ Nº2 $f'(x)=-4x/(x^2+4)^3$

nº3 $g'(x)=-2(2x-5)^{-2}(4x+3)^{-3}(12x-17)$ Nº4 $f'(x)=\dfrac{-2(14x+3)}{(7x^2+3x+1)^2}$

Nº5 $f'(z)=\dfrac{2z(z^2-5)^2(z^2+2z)}{(z^2+4)^3}$ Nº6 $G'(x)=\dfrac{4(4x-1)^2(x^2+2)^3(21x^4-3x^3+49x^2-4x+30)}{(3x^2+5)^3}$

Nº7 $h'(x)=10(2x^3-5x^2+4)^9(6x^2-10x)$ Nº8 $f'(x)=\dfrac{-12x^2-10x+7}{(4x^3+5x^2-7x+8)^2}$

Nº9 $f'(x)= \dfrac{-20(2x+1)^3}{(3x-1)^5}$ Nº10 $f'(x)=3(3x^2+2)(x^2-5x)^2(10x^3-35x^2+4x-10)$

Nº11 $f'(x)=2(4x^3+2x^2-x-3)(12x^2+4x-1)$ Nº12 $g'(x)=4(w^4-8w^2+15)^3(4w^3-16w)$

Nº13 $K'(x)=(-6x+5)(3X^2-5X+7)^{-2}$ Nº14 $s'(t)=\dfrac{-135(3t+4)^2}{(6t-7)^4}$

Nº15 $g'(x)=(3x-8)^{-2}(-3)(7x^2+4)^{-4}(14x) + (7x^2+4)^{-3}(-2)(3x-8)^{-3}(3)$

EJERCICIO Nº16

Ejemplo N.1 dada $f(x) = \sqrt[3]{2x^3-5x^2+x}$, encuentre $f'(x)$

SOLUCION:

$f'(x) = \frac{1}{3}(2x^3-5x^2+x)^{-2/3}(6x^2-10x+1) = \dfrac{6x^2-10x+1}{3(2x^3-5x^2+x)^{2/3}}$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Derive las funciones definidas en los ejercicios.

N.1 $f(x) = 4\sqrt[3]{x^2}$ N.2 $h(x) = \sqrt{2x^3-4x+5}$ N.3 $g(x)= \dfrac{x^3}{\sqrt[3]{3x-1}}$ N.9 $f(x)=\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$

N.4 $f(x) = 4\sqrt{x} + 5/\sqrt{x}$ N.5 $g(x)= \sqrt{1+4x^2}$

N.7 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{25-y^2}}$ N.8 $g(x)=\sqrt{\dfrac{2x-5}{3x+1}}$ N.6 $f(x)=(5-3x)^{2/3}$

№10 $g(t)=\sqrt{2t}\ \sqrt{2t}$ №11 $f(x)=(5-x^2)^{1/2}(x^3+1)^{1/4}$ №12 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

№13 $h(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}}$ №14 $f(x)=\sqrt{9+\sqrt{9-x}}$ №15 $f(x)=(7x+\sqrt{x^2+6})^4$

SOLUCION:

№1 $f'(x)=\dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}}$ №2 $h'(x)=\dfrac{3x^2-2}{\sqrt{2x^3-4x+5}}$ №3 $g'(x)=\dfrac{x^2(7x^2-3)}{(3x^2-1)^{4/3}}$

№4 $f'(x)=x^{-1/2}(2-\frac{5}{2}x^{-1})$ №5 $g'(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{1+4x^2}}$ №6 $f'(x)=\dfrac{-2}{(5-3x)^{1/3}}$

№7 $g'(y)=\dfrac{y}{(25-y^2)^{3/2}}$ №8 $g'(x)=\dfrac{17}{2(3x+1)^{3/2}(2x-5)^{1/2}}$ №9 $g'(x)=\dfrac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

№10 $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}(1-\dfrac{1}{t})$ №11 $f'(x)=\frac{1}{4}x(5-x^2)^{-1/2}(x^3+1)^{-3/4}(-7x^3+15x-4)$

№12 $F'(x)=\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ №13 $h'(x)=\dfrac{x+5}{6\sqrt{x-1}\ \sqrt[3]{(x+1)^4}}$

№14 $f'(x)=\dfrac{-1}{4\sqrt{9+\sqrt{9-x}}\ \sqrt{9-x}}$ №15 $f'(x)=4(7x+\sqrt{x^2+6})^3(7+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+6}})$

EJERCICIO №17

EJEMPLO №1

Dado $(x+y)^2-(x-y)^2=x^4+y^4$, encontrar D_xy

SOLUCION:

Diferenciando implicitamente respecto a "x" tenemos

$2(x+y)(1+D_xy)-2(x-y)(1-D_xy)=4x^3+4y^3D_xy$

$(2x+2y)(1+D_xy)-(2x-2y)(1-D_xy)=4x^3+4y^3D_xy$

$2x+2xD_xy+2y+2yD_xy-2x+2xD_xy+2y-2yD_xy=4x^3+4y^3D_xy$

$D_xy[4x-4y^3]=4x^3-4y$

$D_xy=\dfrac{4x^3-4y}{4x-4y^3}=\dfrac{4(x^3-y)}{4(x-y^3)}=\dfrac{x^3-y}{x-y^3}$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 15, halle D_xy por diferenciación implicita

№1 $x^2+y^2=16$ №2 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ №3 $x^2y^2=x^2+y^2$

№4 $\sqrt{xy}+2x=\sqrt{y}$ №5 $\dfrac{y}{\sqrt{x}-y}=2+x^2$ №6 $3x^4y^2-7xy^3=4-8y$

№7 $(x+y)^2-(x-y)^2=x^4+y^4$ №8 $x^{2/3}+y^{2/3}=4$ №9 $3x^2+\sqrt[3]{xy}=2y^2+20$

№10 $2x^3+x^2y+y^3=1$ №11 $5x^2+2x^2y+y^2=8$ №12 $5x^2-xy-4y^2=0$

№13 $x^2y^3+4xy+x-6y=2$ №14 $4-7xy=(y^2+4)^5$ №15 $(y^2-9)^4=(4x^2+3x-1)^2$

SOLUCION:

№1 $D_xy=\dfrac{-x}{y}$ №2 $D_xy=\dfrac{-\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ №3 $D_xy=\dfrac{x-xy^2}{x^2y-y}$

№4 $D_xy=\dfrac{y+4\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-x}$ №5 $D_xy=\dfrac{2+5x^2-4x^{3/2}y}{2\sqrt{x}(x^2+3)}$ №6 $D_xy=\dfrac{7y^3-12x^3y^2}{6x^4y-21xy^2+8}$

№7 $D_xy=\dfrac{x^3-y}{x-y^3}$ №8 $D_xy=-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1/3}$ №9 $D_xy=\dfrac{-(y+18y^{2/3}x^{5/3})}{(x-12x^{2/3}y^{5/3})}$

№ 10 $DxY=\dfrac{-(6x^2+2xy)}{(x^2+3y^2)}$ № 11 $DxY=\dfrac{-(10x+4xy)}{(2x^2+2y)}$ № 12 $DxY=\dfrac{y-10x}{-x-8y}$

№ 13 $DxY=\dfrac{-(1+4y+2xy^3)}{(3x^2y^2+4x-6)}$ № 14 $DxY=\dfrac{-7y}{(7x+10y)(y^2+4)^4}$

№ 15 $DxY=\dfrac{(4x^2+3x-1)(8x+3)}{4y(y^2-9)^3}$

EJERCICIO №18

Ejemplo № 1 .- Hallar todas las derivadas de la función definida por $f(x)=8x^4+5x^3$

Solución: $f'(x)=32x^3+15x^2$

$f''(x)=96x^2+30x$

$f'''(x)=192x+30$

$f^{(4)}(x)=192$

$f^{(5)}(x)=0$

$f^{(n)}(x)=0$ para $x\geq 5$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre la segunda derivada de la función definida por la ecuación dada.

№ 1 $g(s)=2s^4-4s^3+7s-1$ № 2 $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ № 3 $G(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x^2}}$

№ 4 $f(x)=8x^4+5x^3-x^2+7$ № 5 $f(x)=\sqrt{9+x^2}$ № 6 $f(x)=(3x^2+1)^4$

№ 7 $s(t)=3t^3-(1/t)+1$ № 8 $f(x)=x^{-2}+x^{-1}$ № 9 $f(x)=5x^3+4\sqrt{x}$

№ 10 $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

SOLUCION:

№ 1 $g''(s)=24s^2-24s$ № 2 $f''(x)=(x^2+1)^{-3/2}$

№ 3 $G''(x)=(6-8x^2)(3+2x^2)^{-5/2}$ № 4 $F''(x)=96x^2+30x-2$ № 5 $f''(x)=\dfrac{9}{(9+x^2)^{5/2}}$

№ 6 $f''(x)=24(3x^2+1)^3+432x^2(3x^2+1)^2$ № 7 $s''(t)=18t-2/t^3$

Nº 8 $f''(x) = 6x^{-4} + 2x^{-3}$ Nº 9 $f''(x) = 30x - x^{-3/2}$ Nº 10 $f''(x) = 4(x^2 + 4)^{-3/2}$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 11 al 13 encuentre la tercera derivada de la función dada:

Nº 11 $y = x^4 - 2x^2 + x - 5$ Nº 12 $y = (1 + x)^{3/2}$ Nº 13 $y = x\sqrt{9-x}$

SOLUCION:

Nº 11 $y''' = 24x$ Nº 12 $y''' = -3/8\,(1+x)^{-3/2}$ Nº 13 $y''' = \dfrac{3x - 54}{8(9-x)^{5/2}}$

EJERCICIO Nº 19

EJEMPLO Nº 1 Encuentre el maximo y el minimo absoluto de $f(x)=1/X$ en el intervalo cerrado $[-2, 3]$

SOLUCION:

$f(x) = 1/x = x^{-1}$

$f'(x) = -x^{-2} = -1/x^2$

Si $f'(x) = 0$

$0 = -1/x^2$

Cuando $f'(x) = 0$

No se puede determinar

$f'(x)$ No existe

Cuando $x = 0$

Si $f(x) = 1/x$

$f(-2) = -1/2 = -0.5$

$f(0) = 1/0$ Indeterminado

$f(3) = 1/3 = 0.33$

SOLUCION: No hay extremos relativos, solamente absolutos.

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6 encuentre el máximo y el minimo absolutos de "f" en el intervalo cerrado indicado:

Nº 1 $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$, $[-1,3]$ Nº 2 $f(x) = 1 - x^{2/3}$, $[-1,8]$ Nº 3 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ $[-2, 1/2]$

Nº 4 $f(x) = (x-2)^{2/3}$, $[1,5]$ Nº 5 $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$, $[-4,0]$

Nº 6 $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$, $[-1,1]$

SOLUCION:

Nº 1 MAX=20, MIN=-4/3 Nº 2 MAX=1, MIN=-3 Nº 3 MAX=2, MIN=-1

Nº 4 MAX=$\sqrt[3]{9}$, MIN= 0 Nº 5 MAX= 144, MIN= 0 Nº 6 MAX=9, MIN= - 9/8

EJERCICIO Nº 20

EJEMPLO Nº 1 Encuentre los números criticos de $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x$

SOLUCION:

$f'(x) = 3x^2 + 14x - 5$

$f'(x) = 0$ $f'(x)$ no existe

$0 = 3x^2 + 14x - 5$

* NOTA: Como $f'(x)$ siempre existe no tiene números críticos cuando $f'(x)$ no existe

$$\begin{matrix} 3x & -1 \\ x & 5 \\ 3x^2 & -5 \end{matrix} \qquad 15x - x = 14x$$

$0 = (3x-1)(x+5)$

$0 = 3x - 1$ $0 = x + 5$

$+1 = 3x$ $-5 = x$

$1/3 = x$ Numeros criticos

PROBLEMAS PROPUESTOS:

Encuentre los números criticos de las funciones en los ejercicios del 1 al 10.

Nº 1 $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2\ 12x$ Nº 2 $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ Nº 3 $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$

Nº 4 $g(x) = 2x + 5$ Nº 5 $f(w) = w^4 - 32w$ Nº 6 $k(R) = R^5 - 2R^3 + R - 12$

Nº 7 $k(z) = 4z^3 + 5z^2 - 42z + 7$ Nº 8 $f(s) = \dfrac{s^2}{5s + 4}$ Nº 9 $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$

Nº 10 $f(x) = x^{4/3} + x^{1/3}$

SOLUCION:

Nº 1 $x = \pm 1, x = -3$ Nº 2 $x = \pm 2, x = 0$ Nº 3 $x = \dfrac{3}{8}$

Nº 4 NO EXISTEN Nº 5 $w = 2$ Nº 6 $R = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}, R = \pm 1$

Nº 7 $z = \dfrac{3}{2}, z = -\dfrac{7}{3}$ Nº 8 $s = 0, s = -\dfrac{8}{5}$ Nº 9 NO HAY NUMEROS CRITICOS

Nº 10 $x = -1, x = 0$

EJERCICIO Nº21

EJEMPLO Nº1 Encuentre los extremos locales de $F(X)=X^3-6X^2+9X+1$.

Describa los intervalos en los cuales F es creciente o decreciente.

SOLUCION:

$F(X)=X^3-6X^2+9X+1$ — F'(X) Siempre existe para todos los valores de x.

$F'(X)=3X^2-12X+9$

$F'(X)=0$ — $F(X)=X^3-6X^2+9X+1$

$0=3X^2-12X+9=3(X^2-4X+3)$ — F(1)=5 MAXIMO RELATIVO

$0=3(X-3)(X-1)$ — F(3)=1 MINIMO RELATIVO

$\left.\begin{matrix}X=3\\X=1\end{matrix}\right\}$ NUMEROS CRITICOS

INTERVALO	F'(X)	FUNCION
$(-\infty,+1)$	+	CRECIENTE $(-\infty,1]$
$(1,3)$	−	DECRECIENTE $[1,3]$
$(3,\infty)$	+	CRECIENTE $[3,\infty)$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre los extremos locales de F, describa los intervalos en los cuales F es creciente o decreciente.

Nº1 $F(X)=5-7X-4X^2$ — Nº2 $F(X)=X^3-X^2-40X+8$ — Nº3 $F(X)=X^4-8X^2+1$

Nº4 $F(X)=X^{4/3}+4X^{1/3}$ — Nº5 $F(X)=X^{2/3}(8-X)$ — Nº6 $F(X)=X^2\sqrt[3]{X^2-4}$

Nº7 $F(X)=10X^3(X-1)^2$ — Nº8 $F(X)=X^3-3X^2+3X+7$

Nº9 $F(X)=4X^3-3X^4$ — Nº10 $F(X)=X\sqrt{4-X^2}$

SOLUCION:

Nº1 MAX=F(−7/8)=129/16, CRECIENTE EN $(-\infty,-7/8]$, DECRECIENTE EN $[-7/8,\infty)$

Nº2 MAX=F(−3.33)=93.19, MIN=F(4)=−104, CRECIENTE$(-\infty,-3.33]$ Y $[4,\infty)$ Y DECRECIENTE EN $[-3.33, 4]$

Nº3 MAX=F(0)=1, MIN=F(±2)=−15; CRECIENTE EN $[-2,0]$ Y $[2,\infty)$ Y DECRECIENTE EN $(-\infty,-2)$ Y $[0,2]$

Nº4 MIN=F(−1)=−3; CRECIENTE $[-1,\infty)$; DECRECIENTE EN $(-\infty,-1]$

Nº5 MAX=F(16/5)=10.41, MIN=F(0)=0; CRECIENTE $[0,16/5]$ Y DECRECIENTE $(-\infty,0]$ Y $[16/5,\infty)$

Nº6 MAX=F(0)=0, MIN=F($\pm\sqrt{3}$)=−3; CRECIENTE $[-\sqrt{3},0]$ Y $[\sqrt{3},\infty)$ Y DECRECIENTE EN $(-\infty,-\sqrt{3}]$ Y $[0,\sqrt{3}]$

Nº7 MAX=F(3/5)=0.346, MIN=F(1)=0; CRECIENTE $(-\infty,3/5]$ Y $[1,\infty)$ Y DECRECIENTE EN $[3/5,1]$

Nº8 MAX=F(1)=8, CRECIENTE EN $(-\infty,\infty)$

Nº9 MAX=F(1)=1, CRECIENTE EN $(-\infty,1]$, DECRECIENTE EN $[1,\infty)$

Nº10 MAX=F(−2)=0, MIN=F($-\sqrt{2}$)=−2, MAX=F($\sqrt{2}$)=2, MIN=F(2)=0, CRECIENTE EN $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$; DECRECIENTE $[-2,-\sqrt{2}]$ Y $[\sqrt{2}, 2]$

EJERCICIO Nº 22

EJEMPLO No. 1 Sea $f(x) = x^5 - 5x^3$. Use el criterio de la segunda derivada para encontrar los extremos locales de f. Discuta la concavidad, encuentre los puntos de inflexión y dibuje la grafica de f.

SOLUCION:

$f(x) = x^5 - 5x^3$

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 = 5x^2(x^2-3)$

$f''(x) = 20x^3 - 30x = 10x\,(2x^2-3)$

La formula para f'(x) nos muestra que los números criticos son, 0, $-\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$.

los valores de f'' en estos números son:

$f''(-\sqrt{3}) = -30\sqrt{3} < 0$

$f''(0) = 0$

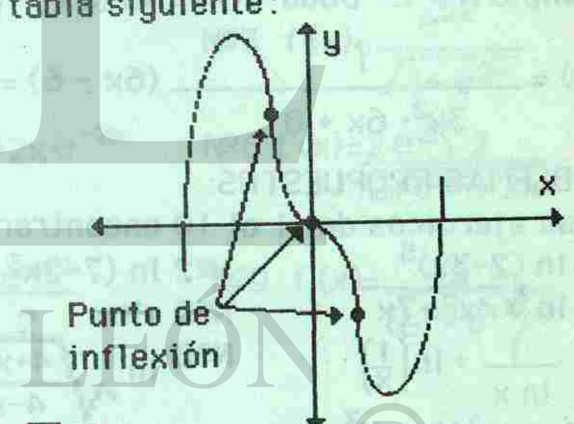
$f''(\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}(6-3) = 30\sqrt{3} > 0$

Usando el criterio de la segunda derivada vemos que f tiene un minimo local en $\sqrt{3}$ un máximo local en $-\sqrt{3}$ dados por $f(\sqrt{3}) = -6/\sqrt{3}$ y $f(-\sqrt{3}) = 6/\sqrt{3}$ respectivamente.

Como $f''(0) = 0$, el criterio de la segunda derivada no puede aplicarse en 0 y por ello nos vemos obligados a usar la primera derivada. Si $-\sqrt{3} < x < 0$ entonces $f'(x) < 0$ y si $0 < x < \sqrt{3}$ entonces $f'(x) < 0$. Como f'(x) no cambia de signo cuando x rebasa a cero, entonces no puede haber ni un mínimo ni un máximo en X=0

Para encintrar los puntos de inflexión resolvemos la ecuación $f''(x)= 0$, es decir, $10x(2x^2 -3) = 0$. Las soluciones, odenadas de acuerdo a su magnitud, son $-\sqrt{6}/2$, 0 y $\sqrt{6}/2$ con esto construimos la tabla siguiente:

Intervalo	F''(x)	Concavidad
$(-\infty,-\sqrt{6}/2)$	−	Hacia abajo
$(-\sqrt{6}/2,0)$	+	Hacia arriba
$(0,\sqrt{6}/2)$	−	Hacia abajo
$(\sqrt{6}/2,\infty)$	+	Hacia arriba



Como el signo de f''(x) cambia cuando x aumenta y rebasa cada uno de los números $-\sqrt{6}/2$, 0 y $\sqrt{6}/2$, los puntos (0,0), $(-\sqrt{6}/2, 21\sqrt{6}/8)$ y $(\sqrt{6}/2, -21\sqrt{6}/8)$ son puntos de inflexión. Dibujamos la grafica, donde hemos usado escalas diferentes en cada eje para lograr mayor claridad.

Problemas propuestos:

En los ejercicios del 1 al 8 aplique el criterio de la segunda derivada (siempre y -- cuando sea posible) para encontrar los extremos locales de f. discuta la concavidad, encuentre las abcsisas de los puntos de inflexión:

№1 $f(x) = 3x^4-4x^3+6$ №2 $f(x) = 8x^2-2x^4$ №3 $f(x) = 2x^6-6x^4$

№4 $f(x) = 3x^5-5x^3$ №5 $f(x) = x^2 - \frac{27}{x^2}$ №6 $f(x) = x^{2/3}(1-x)$

№7 $f(x)= \frac{x^2}{x^2+1}$ №8 $f(x)= \sqrt[3]{x^2}(3x+10)$

SOLUCION:

№1 MIN= $f(1)=5$, hacia arriba $(-\infty,0)$ y $(2/3, \infty)$, hacia abajo $(0, 2/3)$, punto de inflexión en $x=0$, $x=2/3$.

№2 MIN= $f(0)$; MAX= $f(\pm\sqrt{2})=8$, hacia arriba $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$, hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{2/3})$ y $(\sqrt{2/3}, \infty)$; punto de inflexión en $x=\pm\sqrt{2/3}$.

№3 MAX= $f(0)=0$, MIN= $f(\pm\sqrt{2})=-8$, hacia arriba $(-\infty, -\sqrt{6/5})$ y $(\sqrt{6/5}, \infty)$; hacia abajo $(-\sqrt{6/5}, \sqrt{6/5})$; punto de inflexión en $x=\pm\sqrt{6/5}$

№4 MAX= $f(-1)=2$, MIN= $f(1)=-2$, hacia arriba $(-1/\sqrt{2}, 0)$ y $(1/\sqrt{2},\infty)$,hacia abajo $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ y $(0, 1/\sqrt{2})$; punto de infelxión en $x=0$, $x=\pm 1/\sqrt{2}$

№5 Hacia arriba $(-\infty, -3)$ y $(3,\infty)$; hacia abajo $(-3,0)$ y $(0,3)$, punto de infexión en $x=\pm 3$

№6 MAX= $f(2/5)=(2/5)^{2/3}(1-2/5)$, MIN= $f(0)=0$; hacia arriba $(-\infty, -1/5)$, hacia abajo $(-1/5, 0)$ y $(0,\infty)$; punto de inflexión en $x=-1/5$

№7 MIN = $f(0)=0$, hacia arriba $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, hacia abajo $(-\infty, -\sqrt{3}/3)$ y $(\sqrt{3}/3, \infty)$ – punto de inflexión en $x=\pm\sqrt{3}/3$

№8 MAX = $f(-4/3)= 7.27$, MIN = $f(0)=0$, hacia arriba $(2/3, \infty)$, hacia abajo $(-\infty, 2/3)$, - punto de inflexión en $x=2/3$

EJERCICIO №23

Ejemplo № 1.- Dada $f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 8)$,hallar $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2- 6x + 8}(6x - 6) = \frac{6x - 6}{3x^2- 6x + 8}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicos del 1 al 10 encontrar $f'(x)$, donde $f(x)$ es la expresión dada.

№1 $\ln (2-3x)^5$ №2 $\ln (7-2x^3)^{1/2}$ №3 $\ln(3x^2-2x+1)$

№4 $\ln \sqrt[3]{4x^2+7x}$ №5 $x\ln x$ №6 $\ln x^3 + (\ln x)^3$

№7 $\frac{1}{\ln x} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ №8 $\ln\sqrt[4]{\frac{4+x^2}{4-x^2}}$ №9 $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{(9x-4)^2}$

№10 $\ln\frac{x^2(2x-1)^3}{(x+5)^2}$

SOLUCION:

№1 $f'(x)=\frac{-15}{2-3x}$ №2 $f'(x)=\frac{-3x^2}{7-2x^3}$ №3 $f'(x)=\frac{6x-2}{3x^2-2x+1}$

№4 $f'(x)=\frac{8x+7}{3(4x^2+7x)}$ №5 $f'(x)= 1+\ln x$ №6 $f'(x)=\frac{3+3\ln^2 x}{x}$

№10 $f'(x)=\frac{2}{x}+\frac{6}{2x-1}-\frac{2}{x+5}$

№7 $f'(x)= (-1/x)[1/(\ln x)^2+1]$ №8 $f'(x)=\frac{8x}{16-x^4}$

№9 $f'(x)=\frac{x}{x^2+1}-\frac{18}{9x-4}$

EJERCICIO № 24

Ejemplo №1 Dada $f(x)= e^{1/x^2}$ hallar $f'(x)$

SOLUCION:

$$f'(x)=e^{1/x^2}\left(\frac{-2}{x^3}\right)= \frac{-2\,e^{1/x^2}}{x^3}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre $f'(x)$, donde $f(x)$ es la expresióbn dada.

№1 e^{-5x} №2 e^{3x} №3 $\sqrt{1+e^{2x}}$

№4 $\frac{1}{e^{x+1}}$ №5 x^2e^{-2x} №6 $(e^{2x} + 2x)^{1/2}$

№7 $(e^{4x}-5)^3$ №8 $e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$ №9 $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x+ e^{-x}}$

№10 $e^{x\ln x}$

SOLUCION:

№1 $f'(x)=-5e^{-5x}$ №2 $f'(x)=3e^{3x}$ №3 $f'(x)=\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

№4 $f'(x)=\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$ №5 $f'(x)=-2x^2e^{-2x}+2xe^{-2x}$ №6 $f'(x)=\frac{2e^{2x}-2}{2\sqrt{e^{2x}+2x}}$

№7 $f'(x)=3(e^{4x}-5)^2 4e^{4x}$ №8 $f'(x)=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}+\frac{e^{x/2}}{2}$ №9 $f'(x)=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

№10 $f'(x)=e^{x\ln x}(1+\ln x)$

EJERCICIO Nº 25

Ejemplo Nº1 Dada $y=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(x+2)\sqrt{x+3}}$ encuentre y' por derivación logaritmica.

SOLUCION:

Tomando el logaritmo natural y aplicando las propiedades de los logaritmos

$$\ln y=\ln \frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}}= 1/3 \ln (x+1) - \ln (x+2) - 1/2 \ln (x+3)$$

Diferenciando implicitamente respecto a "x" y aplicando las formulas

$$\frac{1}{y} D_xy= \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2(x+3)}$$

Multiplicando ambos miembros por y obtenemos

$$D_xy= (y) \frac{2(x+2)(x+3) - 6(x+1)(x+3) - 3(x+1)(x+2)}{6(x+1)(x+2)(x+3)}$$

Sustituyendo "y" por su valor obtenemos

$$D_xy=\frac{(x+1)^{1/3}}{(x+2)(x+3)^{1/2}} \bullet \frac{2x^2+10x+12-6x^2-24x-18-3x^2-9x-6}{6(x+1)(x+2)(x+3)} \quad \text{y asi}$$

$$D_xy=\frac{-7x^2-23x-12}{6(x+1)^{2/3}(x+2)^2(x+3)^{3/2}}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicos del 1 al 8 encuentre D_xy por derivación logaritmica

Nº1 $y=\frac{(x^2+3)^5}{\sqrt{x+1}}$ Nº2 $y= (x+1)^2(x+2)^3 (x+3)^4$ Nº3 $y= \sqrt[3]{2x+1}\,(4x-1)^2 (3x+5)^4$

Nº4 $y=\frac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}}$ Nº5 $y=\frac{3x}{[(x+1)(x+2)]^{1/2}}$ Nº6 $y= \sqrt{x^2+1}\,\ln(x^2-1)$

Nº7 $y=\frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x+1}\,(7x+2)^3}$ Nº8 $y=\frac{(x^2+3)^{2/3}(3x-4)^4}{\sqrt{x}}$

SOLUCION:

Nº1 $D_xy= \frac{(19x^2+20x-3)(x^2+3)^4}{2(x+1)^{3/2}}$ Nº2 $D_xy=(9x^2+34x+29)(x+1)(x+2)^2(x+3)^3$

Nº2 $D_xy=\left[\frac{2}{3(2x+1)} + \frac{8}{4x-1} + \frac{12}{3x+5}\right] \sqrt[3]{2x+1}\,(4x-1)^2(3x+5)^4$

Nº4 $D_xy= \frac{8x^9-4x^7+15x^2+10}{5(x^7+1)^{6/5}}$ Nº5 $D_xy=\frac{3(3x+4)}{2(x+1)^{3/2} (x+2)^{3/2}}$

Nº6 $D_xy=\frac{x\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x\sqrt{x^2+1}}{x^2-1}$ Nº7 $D_xy=\left[\frac{4}{2x-3} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{21}{(7x+2)}\right] \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x+1}\,(7x+2}$

Nº8 $D_xy= \left[\frac{(x^2+3)^{2/3}(3x-4)^4}{\sqrt{x}}\right]\left[\frac{4x}{3(x^2+3)} + \frac{12}{(3x-4)} - \frac{1}{2x}\right]$

EJERCICIO Nº 26

EJEMPLO Nº1 Dado $f(x)=5^{x^4}$ encontrar f'(x)

SOLUCION:

$f'(x)= 5^{x^4}\ln 5(4x^3)$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre f'(x) para la expresión dada f (x).

No.1 $\log_{10}(3x+1)$ No.2 3^{5x} No.3 4^{3x^2}

No.4 $2^{5x}\,3^{4x^2}$ No.5 $\frac{\log_{10}x}{x}$ No.6 $\sqrt{\log_a x}$

No.7 $\log_{10}[\log_{10}(x+1)]$ No.8 x^x No.9 $(x^2+1)^{3x}$

No.10 $x^{x^2}e^{x^3}$

Solución:

No.1 $f'(x) = \frac{3}{(3x+1)\ln 10}$ No.2 $f'(x) = (5 \ln 3)\, 3^{5x}$

No.3 $f'(x)= 6x\; 4^{3x^2}\ln 4$ No.4 $f'(x) = 2^{5x}\, 3^{4x^2}(5 \ln 2 + 8x \ln 3)$

No.5 $f'(x) = \frac{1- \ln 10 \log_{10} x}{x^2 \ln 10}$ No.6 $f'(x) = \frac{1}{2x \ln a \sqrt{\log_a x}}$

No.7 $f'(x) = \frac{1}{(x + 1) \ln^2 10\; \log_{10}(x + 1)}$ No.8 $f'(x) = x^x (1 + \ln x)$

No.9 $f'(x) = \left[3 \ln (x^2 + 1) + \frac{6x^2}{x^2+1} \right] (x^2 + 1)^{3x}$

No.10 $f'(x) = (2x \ln x + x + 3x^2)\, x^{x^2} e^{x^3}$

EJERCICIO Nº 27

Ejemplo Nº1 Dado $f(x)=\dfrac{\text{sen}x}{1-2\cos x}$ encontrar $f'(x)$

SOLUCION:

$$f'(x)=\frac{(1-2\cos x)(\cos x)-\text{sen}x(2\text{sen}x)}{(1-2\cos x)^2}=\frac{\cos x-2(\cos^2x+\text{sen}^2x)}{(1-2\cos x)^2}=\frac{\cos x-2}{(1-2\cos x)^2}$$

Ejemplo Nº2 Dado $y=(1+\cos 3x^2)^4$ encontrar D_xy

SOLUCION:

$$D_xy=4(1+\cos 3x^2)^3(-\text{sen}3x^2)(6x)=-24x\,\text{sen}3x^2(1+\cos 3x^2)^3$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En cada uno de los ejeercicios del 1 al 20 encuentre $f'(x)$ suponiendo que $f(x)$ es igual a la expresión dada.

Nº1 $\text{sen}(8x+3)$
Nº2 $\cot(x^3-2x)$
Nº3 $\tan\sqrt[3]{5-6x}$
Nº4 $\cos^2 3x$
Nº5 $\text{sen}\, e^{-2x}$
Nº6 $x^2\csc 5x$
Nº7 $x^2\sec^3 4x$
Nº8 $(\text{sen}5x-\cos 5x)^5$
Nº9 $\text{sen}\sqrt{x}+\sqrt{\text{sen}x}$
Nº10 $\sec 2x/(\tan 2x+1)$
Nº11 $\ln(\csc x+\cot x)$
Nº12 $\text{sen}(2x+3)^4$
Nº13 $\ln\ln\sec 2x$
Nº14 $\csc(\cot 4x)$
Nº15 $\tan^3 2x-\sec^3 2x$
Nº16 $(\tan x)^{3x}$
Nº17 $\csc(4x)$
Nº18 $\tan^2 x$
Nº19 $\sqrt{\cot 3x}$
Nº20 $\sec^2x\tan^2x$

SOLUCION:

Nº1 $f'(x)=8\cos(8x+3)$

Nº2 $f'(x)=(2-3x^2)\csc^2(x^3-2x)$

Nº3 $f'(x)=\dfrac{-2\sec^2\sqrt[3]{5-6x}}{\sqrt[3]{(5-6x)^2}}$

Nº4 $f'(x)=-6\cos 3x\,\text{sen}3x$

Nº5 $f'(x)=-2e^{-2x}\cos e^{-2x}$

Nº6 $f'(x)=-5x^2\csc 5x\cot 5x+2x\csc 5x$

Nº7 $f'(x)=12x^2\sec^3 4x\tan 4x+2x\sec^2 4x$

Nº8 $f'(x)=25(\text{sen}5x-\cos 5x)^4(\text{sen}5x+\cos 5x)$

Nº9 $f'(x)=\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen}x}}$

Nº10 $f'(x)=\dfrac{(\tan 2x+1)(2\sec 2x\tan 2x)-2\sec^3 2x}{(\tan 2x+1)^2}$

Nº11 $f'(x)=-\csc x$

Nº12 $f'(x)=8(2x+3)^3\cos(2x+3)^4$

Nº13 $f'(x)=\dfrac{2\tan 2x}{\ln\sec 2x}$

Nº14 $f'(x)=[\csc(\cot 4x)][\cot(\cot 4x)(\csc^2 4x)(4)]$

Nº15 $f'(x)=6\tan 2x\sec^2 2x(\tan 2x-\sec^2 2x)$

Nº16 $f'(x)=3(\tan x)^{3x}\left[\dfrac{x\sec^2 x}{\tan x}+\ln(\tan x)\right]$

Nº17 $f'(x)=-4\cot 4x\csc 4x$

Nº18 $f'(x)=2\tan x\sec^2 x$

Nº19 $f'(x)=\dfrac{-3cs^2 3x}{2\sqrt{\cot 3x}}$

Nº20 $f'(x)=4\tan^5x+6\tan^3x+2\tan x$

EJERCICIO Nº 28

Ejemplo Nº1 dado $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ encontrar $f'(x)$

SOLUCION:

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\left[\frac{-1}{(x+1)^2}\right]=\frac{-1}{(x+1)^2+1}=\frac{-1}{x^2+2x+2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 20 encuentre $f'(x)$, suponiendo que $f(x)$ es igual a la expresión dada.

Nº1 $f(x)=2\cos^{-1}\sqrt{x}$
Nº2 $\sec^{-1}(5x)$
Nº3 $\text{sen}^{-1}\sqrt{1-x^2}$
Nº4 $\cot^{-1}(2/x)+\tan^{-1}(x/2)$
Nº5 $4\,\text{sen}^{-1}(x/2)+x\sqrt{4-x^2}$
Nº6 $\sec^{-1}x+\csc^{-1}x$
Nº7 $x\cot^{-1}x+\ln\sqrt{1+x^2}$
Nº8 $\text{sen}^{-1}2x$
Nº9 $\sec^{-1}4x$
Nº10 $(1+\text{arc}\cos 3x)^2$
Nº11 $\dfrac{\text{arc}\tan e^{2x}}{e^{2x}}$
Nº12 $\text{arc sen}\, x-x\sqrt{1-x^2}$
Nº13 $2x^3\tan^{-1}x+\ln(1+x^2)-x^2$
Nº14 $\text{sen}^{-1}(x/3)$
Nº15 $\tan^{-1}(x^2)$
Nº16 $e^{-x}\text{arc}\sec e^{-x}$
Nº17 $x^2\sec^{-1}5x$
Nº18 $\ln \text{arc}\tan x^2$
Nº19 $\text{arc sen}(\ln x)$
Nº20 $1/\text{sen}^{-1}(x)$

SOLUCION:

Nº1 $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{x-x^2}}$

Nº 2 $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}$

Nº3 $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Nº4 $f'(x)=\dfrac{4}{4+x^2}$

Nº5 $f'(x)=2\sqrt{4-x^2}$

Nº6 $f'(x)=0$

Nº7 $f'(X)=\cot^{-1}x$

Nº8 $f'(x)\ \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

Nº9 $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{16x^2-1}}$

Nº10 $f'(x)=\dfrac{6(1+\text{arcsen}\,3x)}{\sqrt{1-9x^2}}$

Nº11 $f'(x)=\dfrac{2}{1+e^{4x}}-\dfrac{2\arctan e^{2x}}{e^{2x}}$

Nº 12 $f'(x)=\dfrac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Nº13 $f'(x)=6x^2\tan^{-1}x$

Nº14 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

Nº15 $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$

Nº16 $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{\sqrt{e^{2x}-1}}-e^{-x}\text{arcsec}\,e^{-x}$

Nº17 $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{25x^2-1}}+2x\sec^{-1}5x$

Nº18 $f'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^4)\,\text{arc}\tan x^2}$

Nº19 $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$

Nº20 $f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}\,(\text{sen}^{-1}x)^2}$

EJERCICIO Nº 29

EJEMPLO Nº1 Hallar $D_x y$ si $y = \tanh(1 - x^2)$

SOLUCION: $D_x y = -2x \operatorname{sech}^2(1-x^2)$

EJEMPLO Nº2. Obtener $\frac{dy}{dx}$ si $y = \ln \operatorname{senh} x$

SOLUCION:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{senh} x}(\cosh x) = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \coth x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre $f'(x)$, suponiendo que $f(x)$ es igual a la expreción dada.

Nº1. $\operatorname{sech}^2 4x$ Nº2. $e^x \cosh x$ Nº3. $\ln(\tanh x)$

Nº4. $x^{\operatorname{senh} x}$ Nº5. $\operatorname{senh} 5x$ Nº6. $\cosh\sqrt{4x^2+3}$

Nº7. $\frac{\operatorname{sech} x^2}{x^2+1}$ Nº8. $\frac{\coth x}{\cot x}$ Nº9. $3\cosh^2 x \operatorname{senh} x$

Nº10. $\operatorname{senh}^2(3x)$

SOLUCION:

Nº1. $f'(X) = -8\operatorname{sech}^2 4x \tanh 4x$ Nº2. $f'(x) = e^{2x}$ Nº3. $f'(x) = 2\operatorname{csch}(2x)$

Nº4 $f'(x) = x^{\operatorname{senh}x-1}(x\cosh x \ln x + \operatorname{senh} x)$ Nº5 $f'(x) = 5\cosh(5x)$

Nº6 $f'(x) = \frac{4x\operatorname{senh}\sqrt{4x^2+3}}{\sqrt{4x^2+3}}$ Nº7 $f'(x) = \frac{-2x\operatorname{sech}x^2[1+(x^2+1)\tanh x^2]}{(x^2+1)^2}$

Nº8 $f'(x) = \frac{-(\cot x \operatorname{csch}^2 x + \csc^2 x \coth x)}{\cot^2 x}$ Nº9 $f'(x) = 3\cosh^3 + 6\cosh x \operatorname{senh}^2 x$

Nº10 $f'(x) = 6\operatorname{senh}3x\cosh 3x$

EJERCICIO Nº30

Ejemplo Nº1 Encontrar $f'(x)$ si $f(x) = \tanh^{-1}(\cos 2x)$

Solución:

$$f'(x) = \frac{-2\operatorname{sen}2x}{1-\cos^2(2x)} = \frac{-2\operatorname{sen}2x}{\operatorname{sen}^2(2x)} = -2\csc 2x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 10 encuentre $f'(x)$, suponiendo que $f(x)$ es igual a la expresión dada

Nº1 $\operatorname{senh}^{-1} e^x$ Nº2 $\cosh^{-1}\sqrt{x}$ Nº3 $\tanh^{-1}(x^2-1)$ Nº4 $\frac{1}{\operatorname{senh}^{-1}x^2}$

Nº5 $\cosh^{-1}\ln 4x$ Nº6 $\operatorname{senh}^{-1}x^2$ Nº7 $x^2\cosh^{-1}x^2$ Nº8 $(\coth^{-1}x^2)^3$

Nº9 $\coth^{-1}(3x+1)$ Nº10 $\cosh^{-1}(\csc x)$

SOLUCION:

Nº1 $f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}$ Nº2 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ Nº3 $f'(x) = \frac{2x}{(2x^2-x^4)}$

Nº4 $f'(x) = \frac{-2x}{(\operatorname{senh}^{-1}x^2)^2\sqrt{x^4+1}}$ Nº5 $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln^2 4x-1}}$

Nº6 $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$ Nº7 $f'(x) = 2x(\cosh^{-1}x^2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}})$

Nº8 $f'(x) = \frac{6x(\coth^{-1}x^2)^2}{1-x^4}$ Nº9 $f'(x) = \frac{-1}{2x+3x^2}$ Nº10 $f'(x) = -\csc x$

EJERCICIO Nº31

Ejemplo Nº1 DADA $(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = X^4 + Y^4$ Encontrar $D_x y$

$2(x+y)(1+D_x y) - 2(x-y)(1-D_x y) = 4x^3 + 4y^3 D_x y$ de lo cual se obtiene

$2x+2y+(2x+2y)D_x y - 2x + 2y + (2x-2y)D_x y = 4x^3 + 4y^3 D_x y$

$D_x y(4x - 4y^3) = 4x^3 - 4y$

$D_x y = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios de 1 al 10use derivación implicita para encontrar $D_x y$

Nº1 $3y - x^2 + \ln xy = 2$ Nº2 $y^3 + x^2 \ln y = 5x + 3$ Nº3 $xe^y + 2x - \ln(y+1) = 3$

Nº4 $y^3 + xe^y = 3x^2 - 10$ Nº5 $xy = \tan(xy)$ Nº6 $e^x \cos y = xe^y$

Nº7 $\ln(x+y) = \tan^{-1}(xy)$ Nº8 $x^2 \tanh y = \ln y$ Nº9 $\ln xy + x + y = 2$

Nº10 $x = \ln(x+y+1)$

SOLUCION:

Nº1 $D_x y = \frac{y(2x^2-1)}{x(3y+1)}$ Nº2 $D_x y = \frac{5y - 2xy\ln y}{3y^2 + x^2}$ Nº3 $D_x y = \frac{2+e^y}{(y+1)^{-1} - xe^y}$

Nº4 $D_x y = \frac{6x - e^y}{3y^2 + xe^y}$ Nº5 $D_x y = \frac{-y}{x}$ Nº6 $D_x y = \frac{e^x \cos y - e^y}{e^x \operatorname{sen} y + xe^y}$

Nº7 $D_x y = \frac{xy + y^2 - x^2y^2 - 1}{x^2y^2 + 1 - x^2 - xy}$ Nº8 $D_x y = \frac{2x\tanh y}{y^{-1} - x^2\operatorname{sech}^2 y}$

Nº9 $D_x y = \frac{-xy + y}{xy + x}$ Nº10 $D_x y = x + y$

EJERCICIO Nº32

EJEMPLO Nº1 Sea $w=x^2y^3 \operatorname{sen} z+e^{xz}$, Encuentre $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$

SOLUCION:

$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy^3 \operatorname{sen} z + ze^{xz}$; $\frac{\partial w}{\partial y} = 3x^2y^2 \operatorname{sen} z$; $\frac{\partial w}{\partial z} = x^2y^3\cos z + xe^{xz}$

Ejemplo Nº2 Encuentre las segundas derivadas parciales de "f" suponiendo que $f(x,y)=x^3y^2-2x^2y+3x$

SOLUCION:

Como $f_x(x,y)=3x^2y^2-4xy+3$ y $f_y=f_y(x,y)=2x^3y-2x^2$ tenemos que:

$f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2-4xy+3)=6xy^2-4y$

$f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2-4xy+3)=6x^2y-4x$

$f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y-2x^2)=6x^2y-4x$

$f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y-2x^2)=2x^3$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 1 al 15 encuentre las primeras derivadas parciales.

Nº1 $f(x,y)=3x^3-4x^2y+3xy^2+7x-8$ Nº2 $f(x,y)=6x+3y-7$ Nº3 $f(x,y)=3xy+6x-y^2$

Nº4 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ Nº5 $f(x,y)=2x^4y^3-xy^2+3y+1$ Nº6 $f(x,y)=(x^3-y^2)^2$

Nº7 $f(\theta,\varnothing)=\operatorname{sen} 3\theta\cos 2\varnothing$ Nº8 $f(u,w)=\arctan(u/w)$

Nº9 $f(x,y)=x\cos(x/y)$ Nº10 $f(x,y)=\sqrt{4x^2-y^2}\sec x$

Nº11 $f(x,y,z)=4xyz+\ln(2xyz)$ Nº 12 $f(r,\theta,\varnothing)=4r^2\operatorname{sen}\theta+5e^r\cos\theta\operatorname{sen}\varnothing-2\cos\varnothing$

Nº13 $f(x,y,z)=(y^2+z^2)^x$ Nº14 $f(r,s,v)=(2r+3s)^{\cos v}$

Nº15 $f(r,s,v,p)=r^3\tan s+\sqrt{s}\,e^{v^2}-v\cos 2p$

SOLUCION:

Nº1 $f_x(x,y)=9x^2-8xy+3y^2+7$, $f_y(x,y)=-4x^2+6xy-8$

Nº2 $f_x(x,y)=6$; $f_y(x,y)=3$

Nº3 $f_x(x,y)=3y+6$; $f_y(x,y)=3x-2y$

Nº4 $f_x(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $f_y(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Nº5 $f_x(x,y)=8x^3y^3-y^2$; $f_y(x,y)=6x^4y^2-2xy+3$

Nº6 $f_x(x,y)=6x^5-6x^2y^2$; $f_y(x,y)=-4x^3y-4x^3$

Nº7 $f_\theta(\theta,\varnothing)=3\cos 2\varnothing\cos 3\theta$; $f_\varnothing(\theta,\varnothing)=-2\operatorname{sen}3\theta\operatorname{sen}2\varnothing$

Nº8 $f_u(u,w)=\frac{w}{u^2+w^2}$; $f_w(u,w)=\frac{-u}{w^2+u^2}$

Nº9 $f_x(x,y)=\frac{-x}{y}\operatorname{sen}(x/y)+\cos(x/y)$; $f_y(x,y)=\frac{x^2}{y^2}\operatorname{sen}(x/y)$

Nº10 $f_x(x,y)=\sec x\tan x\sqrt{4x^2-y^2}+\frac{4x\sec x}{\sqrt{4x^2-y^2}}$; $f_y(x,y)=-\frac{y\sec x}{\sqrt{4x^2-y^2}}$

Nº11 $f_x(x,y,z)=4yz+1/x$, $f_y(x,y,z)=4xz+1/y$; $f_z(x,y,z)=4xy+1/z$

Nº12 $f_r(r,\theta,\varnothing)=8r\operatorname{sen}\theta+5e^r\cos\theta\operatorname{sen}\varnothing$; $f_\theta(r,\theta,\varnothing)=4r^2\cos\theta-5e^r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varnothing$

$f_\varnothing(r,\theta,\varnothing)=5e^r\cos\theta\cos\varnothing+2\operatorname{sen}\varnothing$

Nº13 $f_x(x,y,z)=(y^2+z^2)^x\ln(y^2+z^2)$; $f_y(x,y,z)=2xy(y^2+z^2)^{x-1}$; $f_z(x,y,z)=2xz(y^2+z^2)^{x-1}$

Nº14 $f_r(r,s,v)=2\cos v\,(2v+3s)^{\cos v-1}$; $f_s(r,s,v)=3\cos v\,(2r+3s)^{\cos v-1}$;

$f_v(r,s,v)=-\operatorname{sen}v(2r+3s)^{\cos v}\ \ln(2r+3s)$

Nº15 $f_r(r,s,v,p)=3r^2\tan s$; $f_s(r,s,v,p)=r\sec^2 s+\frac{e^{v^2}}{2\sqrt{5}}$; $f_v(r,s,v,p)=2r\sqrt{s}\,e^{v^2}-\cos 2p$

$f_p(r,s,v,p)=2v\operatorname{sen}2p$

PROBLEMAS PROPUESTOS:

En los ejercicios del 16 al 20 verifique que $Wxy = Wyx$

Nº16 $W=xy^4-2x^2y^3+4x^2-3y$ Nº17 $W=\frac{x^2}{x+y}$ Nº19 $W=y^2e^{x^2}+\frac{1}{x^2y^3}$

Nº18 $W=x^3e^{-2y}+y^{-2}\cos x$

Nº20 $W=x^2\cosh(z/y)$

Nº21 Sea $W=3x^2y^3z+2xy^4z^2-yz$ encuentre $Wxyz$; $Wxyz=18xy^2+16y^3z$

Nº22 Sea $W=u^4vt^2-3uv^2t^3$ encuentre $wtut$; $Wtut=8u^3v-18v^2t$

Nº23 Sea $W=\frac{x^2}{y^2+z^2}$ encuentre $\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial y^2}$; $\frac{\partial^3 W}{\partial z\partial y^2}=\frac{8x^2z(y^2+z^2)^2-48x^2y^2z(y^2+z^2)}{(y^2+z^2)^5}$

Nº24 Sea $W=r^4s^3t-3s^2e^{rt}$ verifique que $Wrrs=Wrsr=Wsrr$

$Wrrs=Wrsr=wsrr=36r^2s^2t-6st^2e^{rt}$

EJERCICIO Nº33

Ejemplo Nº1 sean $W=u^3+e^{2v}$, $u=xy^2$ y $u=x^3\operatorname{sen}y$ encuentre $\frac{\partial W}{\partial x}$ y $\frac{\partial W}{\partial y}$

Solución

$\frac{\partial W}{\partial x}=(3u^2)(y^2)+(2e^{2v})(3x^2\operatorname{sen}y)=3u^2y^2+6e^{2v}x^2\operatorname{sen}y$

$\frac{\partial W}{\partial y}=(3u^2)(2xy)+(2e^{2v})(x^3\cos y)=6u^2xy+2e^{2v}x^3\cos y$

Si deseamos expresar estas derivadas parciales en terminos de "x" y "y" solamente, podemos hacerlo sustituyendo xy^2 en lugar de u y $x^3\operatorname{sen}y$ en lugar de v

Problemas propuestos:

En los ejercicios 1 y 2 encuentre $\partial W/\partial x$ y $\partial W/\partial y$

Nº1 $W=u^2\operatorname{sen}v$, $u=x^3-2y^3$, $v=xy^2$ Nº2 $W=u^3+u^2v-3v$, $u=\operatorname{sen}xy$, $v=y\ln x$

En los ejercicios 3 y 4 encuentre $\partial W/\partial r$ y $\partial W/\partial s$

Nº3 $W=\sqrt{u^2+v^2}$, $u=re^{-s}$, $v=s^2e^{-r}$ Nº4 $W=e^{t/v}$, $t=r^2-s^2$, $v=r^3+s^3$

En los ejercicios 5 y 6 encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$

Nº5 $z=\frac{r+s}{v}$, $r=x\cos y$, $s=y\operatorname{sen}x$, $v=2x-y$ Nº6 $z=uv^2+v\ln W$, $u=2x-y$, $v=x-2y$, $W=-2x+2y$

En los ejercicios 7 y 8 encuentre $\partial r/\partial u$, $\partial r/\partial v$, $\partial r/\partial t$

Nº7 $r=x^3+3y-xy^2$, $x=u+v\ln t$, $y=v^2-\ln ut$ Nº8 $r=x\cos y$, $x=u^2-vt$, $y=v^2-ut$

Nº9 Encuentre $\partial p/\partial r$ suponiendo que $p = u^2 \cos vw$, $u = xye^{rs}$, $v = \operatorname{sin} xyr$

$w = ys + r\operatorname{sen} x$

Nº10 Encuentre $\partial s/\partial y$ suponiendo que $s = tr^2 \tan^{-1} uv$, $t = x + y^2 z$

$r = x^2 + 3yz$; $u = xz^2$, $v = xyz$

Solución:

Nº1 $\dfrac{\partial W}{\partial x} = (2u\operatorname{sen}v)(3x^2) + (u^2\cos v)(y^2)$; $\dfrac{\partial W}{\partial y} = (2u\operatorname{sen}v)(-6y) + (u^2\cos v)(2xy)$

Nº2 $\dfrac{\partial W}{\partial x} = (3u^2+2uv)(y\cos xy) + (u^2-3)(y/x)$; $\dfrac{\partial W}{\partial y} = (3u^2+2uv)(x\cos xy) + (u^2-3)\ln x$

Nº3 $W_r = \dfrac{ue^{-s}}{\sqrt{u^2+v^2}} - \dfrac{vs^2 e^{-r}}{\sqrt{u^2+v^2}}$; $W_s = \dfrac{-ure^{-s}}{\sqrt{u^2+v^2}} + 2vse^{-r} / \sqrt{u^2+v^2}$

Nº4 $\dfrac{\partial W}{\partial r} = \dfrac{e^{t/v}}{v}(2r) + \dfrac{-te^{t/v}}{v^2}(3r^2)$; $\dfrac{\partial W}{\partial s} = (-2s)\dfrac{e^{t/v}}{v} + (3s^2)\dfrac{-te^{t/v}}{v^2}$

Nº5 $Z_x = v^{-1}\cos y + v^{-1}y\cos x - 2(r+s)v^{-2}$; $Z_y = -v^{-1}x\operatorname{sen}y + v^{-1}\operatorname{sen}x + (r+s)v^{-2}$

Nº6 $Z_x = 2v^2 + (2uv + \ln w) - 2vw^{-1}$; $Z_y = -v^2 + (2uv + \ln w)(-2) + 2vw^{-1}$

Nº8 $r_u = \cos y(2u) + (x\operatorname{sen}y)(t)$; $r_v = \cos y(-t) + 2v(-x\operatorname{sen}y)$

$r_t = \cos y(-v) + (-x\operatorname{sen}y)(-u)$

Nº9 $P_r = (2u\cos vw)(Sxye^{rs}) + (-u^2 w\operatorname{sen}vw)(s/r) + (-u^2 v\operatorname{sen}vw)(\operatorname{sen}x)$

Nº10 $\dfrac{\partial s}{\partial y} = (r^2\tan^{-1}uv)(2yz) + (2rt\tan^{-1}uv)(3z) + \dfrac{\partial s}{\partial u}(0) + \dfrac{tr^2u}{1+u^2v^2}(xz)$