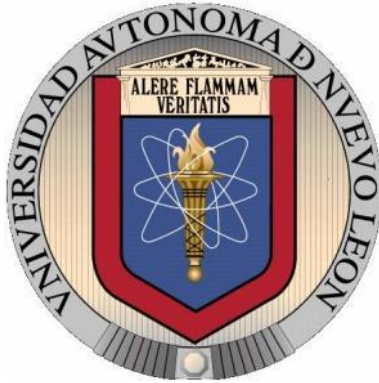


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE AGRONOMÍA**

**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**



**MODELACIÓN MATEMÁTICA DE BOMBAS INTERCONECTADAS EN  
REDES ABIERTAS PARA IRRIGACIÓN Y SU SOLUCIÓN MATRICIAL**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS AGRÍCOLAS**

**PRESENTA**

**SERGIO ZEFERINO GARZA VARA**

**MARÍN, N.L., MEXICO**

**DICIEMBRE DE 2012**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**

**FACULTAD DE AGRONOMÍA**

**SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO**



**MODELACIÓN MATEMÁTICA DE BOMBAS INTERCONECTADAS EN  
REDES ABIERTAS PARA IRRIGACIÓN Y SU SOLUCIÓN MATRICIAL**

**TESIS**

**PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS AGRÍCOLAS**

**PRESENTA**

**SERGIO ZEFERINO GARZA VARA**

**MARÍN, N.L. MÉXICO**

**DICIEMBRE DE 2012**

ESTA TESIS FUE REVISADA Y APROBADA POR EL  
COMITÉ PARTICULAR COMO REQUISITO PARCIAL PARA  
OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS AGRÍCOLAS

COMITÉ PARTICULAR

---

Dr. Juan Francisco Pissani Zúñiga  
Asesor principal

---

Ph. D. Emilio Olivares Sáenz  
Co-Asesor

---

Ph. D. Alejandro Isabel Luna Maldonado  
Co-Asesor

---

Dr. Daniel Gómez García  
Co-Asesor Externo

---

Dr. Javier de Jesús Cortés Bracho  
Co-Asesor Externo

---

Ph. D. Francisco Zavala García  
Subdirector de Estudios de Posgrado

No existe tal vez rama de la ingeniería que posea una historia tan rica como la hidráulica. Precisión de disponer de agua para satisfacer necesidades básicas corporales y domésticas; utilización de vías marítimas o fluviales para el transporte, y cruce de ellas; irrigación de cultivos; defensa contra las inundaciones; aprovechamiento de la energía de corrientes; todo esto ha forzado al hombre, desde los tiempos más antiguos, a vérselas con el agua. No ha sido un trato fácil. El habitante urbano que la observa a diario, dócil a sus necesidades, bajar mansa de la llave, no tiene idea de su idiosincrasia. No imagina con cuánta paciencia y astucia hay que manejar a esta nuestra gran amiga-enemiga; cuán a fondo hay que entender su índole altiva para poder someterla y doblegarla; cómo hay que “dorarle la píldora” para reducirla a nuestra voluntad, respetando –sin embargo– la suya. Por eso, el hidráulico ha de ser, ante todo, algo así como un psicólogo del agua, conocedor profundo de su naturaleza.

**ENZO LEVI**

## DEDICATORIA

A Dios, creador y sustentador de todas las cosas, por darme la vida y salud, por permitirme concluir esta etapa tan importante en mi vida.

A mi más grande amor, mi esposa Mireya

Por tu apoyo incondicional, por tu estímulo constante, por tu vida entregada a nuestros hijos, nietos y a mí; disculpa mis malos momentos y principalmente el tiempo que dejé de dedicarte.

A mis hijos, Sergio, Nestor Arturo y Mayeri Josephine

Mis tres tesoros.

A mis nueras, María y María Elena

Con admiración y respeto por el cariño y atención que han tenido con mis hijos y nietos.

A mis nietas, Daniela y Paulina

A las que adoro.

A mis padres, Carlos y Josefina

Por todo el amor y cariño que me brindaron.

A mis hermanos y hermanas

Con amor fraternal.

A mis amigos y amigas

Por el cariño y la amistad que me han brindado en los momentos prósperos y adversos.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Dr. Juan Francisco Pissani Zúñiga, por la dirección de este trabajo de tesis y por sus invaluable conocimientos vertidos en mi formación académica, no solo de la presente investigación, si no de muchas actividades que he tenido en mi vida. Gracias por ser un gran catedrático, gracias por la amistad que me ha brindado.

Al Dr. Emilio Olivares Sáenz, por el gran apoyo brindado en el presente trabajo y su enseñanza en los diseños experimentales.

Al Dr. Alejandro Luna Maldonado, por su apreciada colaboración en la asesoría y revisión en el presente trabajo.

Al Dr. Daniel Gómez García; no tengo palabras para agradecerle todo lo que ha hecho por mí; doy gracias a Dios por haberlo conocido, por permitirme entrar en el núcleo del más noble y sencillo de lo que son los sentimientos: una verdadera amistad.

Al Dr. Javier de Jesús Cortés Bracho; empecé siendo su maestro y terminé siendo su alumno. Le doy las gracias por el gran apoyo brindado en la asesoría y revisión del presente documento, por su enseñanza en el campo de la geohidrología y sobre todo la amistad que me ha manifestado en todo momento.

Al M.C. Manuel González Molina, por todo el apoyo y asesoría incondicional que me ha dedicado, y sobre todo, su amistad.

A José Antonio Linares Calero, por su amistad, confianza y toda la ayuda absoluta que me ha ofrecido.

Al M.C. Gilberto Rodríguez Pérez, mi compañero de posgrado, por toda la asesoría que me brindó, y sobre todo, su amistad total.

A la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro, por permitirme una superación más en la vida.

A la Facultad de Agronomía de la Universidad Autónoma de Nuevo León, por recibirme en su Posgrado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por su apoyo invaluable al concederme una beca que me permitirá obtener el grado de Doctor en Ciencias.

A mis compañeros y amigos del posgrado: Tania Flores, José Escoto, Karely Espinosa, Claudia Garza, Eleazar Lugo, Eduardo Tobías, Keren Lazarín, Kristian Castillo, Héctor Rojas, Rubén Trejo, Jaime Armendáriz, Gerardo Ontiveros, Luz Lizeth López, Yesica Valadez, Fabiola Villegas, Carlos Guillén, Cristina Patricia Aguilar Aranda, César Guerrero, Rubén López, Hugo Candelario, Antonio Flores Naveda, Gilberto Rodríguez Pérez.

## RESUMEN AUTOBIOGRÁFICO

### **Sergio Zeferino Garza Vara**

Candidato al grado de Doctor en Ciencias Agrícolas con Especialidad en Agua-Suelo.

### **Tesis:**

Modelación matemática de bombas interconectadas en redes abiertas para irrigación y su solución matricial.

### **Áreas de estudio:**

Mecánica de fluidos, Hidráulica, Matemáticas, Estadística y Riego.

### **Biografía:**

Nacido el 8 de octubre de 1953 en Nueva Rosita Coahuila, México.

Egresado de la Universidad Autónoma de Coahuila como Ingeniero Químico en junio de 1977.

Egresado de la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro con el grado de Maestro en Ciencias en la Especialidad de Riego y Drenaje en agosto de 1984.

Profesor Investigador adscrito al Departamento de Riego y Drenaje de la Universidad Autónoma Agraria Antonio Narro desde enero de 1979 a la fecha, impartiendo los cursos a nivel Licenciatura de Uso y Conservación del Agua, Hidráulica I, Hidráulica II, Hidráulica General, Equipos y Sistemas de Abastecimiento de Agua, Relación Agua–Suelo–Planta–Atmósfera; y en Posgrado los cursos de Hidráulica Avanzada y Sistemas de Riego en Conductos a Presión.

Distinciones recibidas: Mención Honorífica en el Examen de Grado celebrado el 3 de agosto de 1984, Premio de Eficiencia en 1983, Premio de Eficiencia en 1994 por el Departamento de Personal, Maestro Distinguido de Posgrado por el Rector y el Subdirector de Posgrado, Encargado del Diseño del Laboratorio de Hidráulica denominado “Jardín Hidráulico”, del Departamento de Riego y Drenaje.

Coordinador de la Maestría de Riego y Drenaje de 1990 a 1992, Jefe de Departamento de Riego y Drenaje interino de octubre del 2008 a enero del 2009.

Publicación científica en el *Journal of the International Society of Paddy and Water Environment Engineering* de la revista *Springer*, con el título: Models of the interconnection of pumps to supply water to branched networks.



## CONTENIDO

<b>ÍNDICE DE CUADROS .....</b>	<b>IX</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>IX</b>
<b>RESUMEN .....</b>	<b>XII</b>
<b>SUMMARY.....</b>	<b>XIVV</b>
<b>1. INTRODUCCION .....</b>	<b>1</b>
1.1. Hipótesis general .....	3
1.2. Objetivo general.....	3
1.3. Objetivos específicos .....	3
<b>2. REVISIÓN DE LITERATURA .....</b>	<b>5</b>
2.1. Fundamentos de la mecánica de fluidos.....	5
2.2. Flujo de conductos a presión .....	8
2.3. Bombas.....	12
2.4. Modelos científicos.....	27
2.5. Redes de tuberías.....	32
2.6. Métodos matemáticos .....	34
2.6.1. Ecuaciones y su solución.....	34
2.6.2. Soluciones hidráulicas .....	41
2.6.3. Métodos de optimización .....	43
2.6.4. Programas comerciales para el diseño de redes.....	45
<b>3. MATERIALES Y MÉTODOS.....</b>	<b>48</b>
3.1. Modelo matemático determinístico para resolver la distribución de caudales en redes abiertas, con interconexión de bombas centrífugas tipo voluta y/o sumergibles emplazadas arbitrariamente. ....	48
3.1.1. Notación.....	48
3.1.2. Desarrollo del modelo matemático.....	50
3.1.3. Procedimiento de aplicación del modelo matemático en una red .....	54
3.2. Aplicación y solución del modelo para casos de redes abiertas con interconexión de bombas centrífugas y/o sumergibles emplazadas arbitrariamente para alimentar sistemas de riego. ....	55

3.2.1. Aplicación del modelo .....	57
3.2.2. Solución del modelo .....	69
3.3. Algoritmo del programa computacional.....	94
3.4. Ejemplos .....	97
3.5. Prototipo para la validación del modelo matemático.....	1077
3.5.1. Características del prototipo.....	1077
3.5.2. Las bombas y operación del prototipo .....	10909
<b>4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN .....</b>	<b>1166</b>
4.1. Resultados del prototipo y del modelo matemático.....	1166
4.2. Prueba de Ji cuadrada ( $\chi^2$ ) .....	11818
<b>5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>	<b>1211</b>
<b>6. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>1244</b>
<b>7. APÉNDICE.....</b>	<b>1322</b>
7.1. Codificación en MATLAB del caso II subcaso 1 y el prototipo .....	1322
7.2. Codificación en MATLAB del caso único IV .....	13939
7.3. Valores de los coeficientes de pérdidas por accesorios.....	1455
7.4. Diagrama universal de Moody.....	1466
7.5. Imágenes del prototipo.....	1477
7.6. Plano del prototipo .....	1488
7.7. Segundo ejemplo .....	1500

## ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 3.4.1. Datos de las tuberías .....	98
Cuadro 3.4.2. Datos de curva característica de la bomba Grundfos (bomba 1) .....	99
Cuadro 3.4.3. Datos de curva característica de la bomba Berkeley (bomba 2).....	101
Cuadro 3.4.4. Caudal de la red en litros por segundo .....	106
Cuadro 3.5.1.1. Datos de la red .....	108
Cuadro 3.5.2.1. Datos de la curva característica de la bomba sumergible Franklin (bomba 1) .....	112
Cuadro 3.5.2.2. Datos de curva característica de la bomba sumergible Altamira, serie KOR (bomba 2) .....	112
Cuadro 4.1.1. Comparación de los caudales medidos del prototipo contra los estimados, con presiones a la salida de 35 psi. ....	116
Cuadro 4.1.2. Comparación de los caudales medidos del prototipo contra los estimados, con presiones a la salida de 65.1 psi. ....	117
Cuadro 4.1.3. Comparación de los caudales medidos del prototipo contra los estimados, con presiones a la salida de 55 y 44.8 psi .....	117
Cuadro 4.2.1. Prueba de Ji cuadrada realizada a los tres tratamientos. ....	118
Cuadro 7.7.1. Datos de las tuberías de la red. ....	151
Cuadro 7.7.2. Tres puntos de la curva característica de bomba 1 y 2, de carga versus caudal (375S1000-17DS) .....	156
Cuadro 7.7.3. Tres puntos de la curva característica de la bomba 3, de carga versus caudal (600S1500-9DS) .....	156
Cuadro 7.7.4. Tres puntos de la curva característica de la bomba 4, de carga versus caudal (1000S2500-6DS). ....	156
Cuadro 7.7.5. Resultados de los caudales en la red en litros por segundo.....	164

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1.1. Tipos de comportamiento reológico de un fluido .....	7
Figura 2.1.2. Niveles de referencia para determinar presiones absolutas y relativas ..	7
Figura 2.3.1. Rueda persa .....	13
Figura 2.3.2. Tornillo de Arquímedes .....	13
Figura 2.3.3. Bomba centrífuga tipo voluta de eje horizontal de un solo paso .....	18
Figura 2.3.4. Bombas sumergibles de pasos múltiples .....	19
Figura 2.3.5. Variando la velocidad del impulsor y su diámetro constante .....	20
Figura 2.3.6. Variando el diámetro del impulsor a velocidad constante .....	20
Figura 3.2.1. Cuatro casos y sus respectivos subcasos de redes abiertas con interconexión de bombas .....	56
Figura 3.4.1. Caso II subcaso 1. Sistema de conducción de la red abierta .....	98
Figura 3.4.2. GRUNDFOS, modelo 600S .....	99
Figura 3.4.3. BERKELEY, modelo B5EPBM .....	100
Figura 3.5.1.1. Prototipo (Caso II subcaso 1) .....	108
Figura 3.5.2.1. Curva característica de la bomba sumergible Franklin (bomba 1) ..	110
Figura 3.5.2.2. Curva característica de la bomba sumergible Altamira, serie KOR (bomba 2) .....	111
Figura 7.4.1. Diagrama universal de Moody .....	146
Figura 7.5.1 Línea de la red .....	147
Figura 7.5.2. Parte de la red .....	147
Figura 7.5.3. Aforador de engranes .....	147

Figura 7.5.4. Aforo volumétrico .....	147
Figura 7.5.5. Fuente de abastecimiento 1 .....	147
Figura 7.5.6. Fuente de abastecimiento 2 .....	147
Figura 7.7.1. Red abierta con interconexión de cuatro bombas sumergibles para alimentar a tres pivotes centrales (Caso IV). .....	152
Figura 7.7.2. Curvas características de las bombas sumergibles Grundfos. Modelo 375S. ....	153
Figura 7.7.3. Curvas características de las bombas sumergibles Grundfos. Modelo 1000S. ....	154
Figura 7.7.4. Solución del Caso Único IV, con el programa MATLAB para Windows, versión 7.12.1.0.635 (R2011a), The MathWorks, Inc.....	169

## RESUMEN

**Sergio Zeferino Garza Vara**

Candidato para el Grado de Doctor en Ciencias Agrícolas

**Especialidad:** Agua-Suelo

**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Agronomía**

**Título del estudio:** Modelación Matemática de Bombas Interconectadas en Redes Abiertas para Irrigación y su Solución Matricial.

**Número de páginas:** 169

**Áreas de Estudio:**

Mecánica de Fluidos, Hidráulica, Matemáticas, Estadística y Riego.

**Palabras Clave:**

Carga, pérdida de carga por fricción, pérdidas menores, caudales, bombas, redes abiertas, sistemas de riego, matriz, matriz jacobiana, Matlab.

**Propósitos y Métodos de Estudio:**

El propósito principal de la investigación fue la realización de un modelo matemático determinístico para la distribución de caudales en sistemas de redes abiertas con interconexión de bombas centrífugas tipo voluta y/o sumergibles emplazadas arbitrariamente, con la finalidad de alimentar adecuadamente sistemas de riego agrícolas. El modelo se fundamenta en las ecuaciones de energía del flujo y de continuidad, tomando en cuenta la energía que las bombas transmiten al agua; lo que conduce a un conjunto de ecuaciones lineales y no-lineales, que se resuelven con el método iterativo de aproximaciones sucesivas de Newton–Raphson. De esta manera se obtienen los caudales de la red de distribución. Posteriormente es posible calcular la distribución de presiones. Se construyó un prototipo de una red abierta con interconexión de bombas, con la finalidad de validar el modelo matemático, comparando los resultados del modelo con los medidos en el prototipo, donde se efectuó una prueba estadística de distribución de Ji cuadrada, la cual valida la hipótesis de que el modelo matemático utilizado se ajusta al comportamiento real de una red abierta con interconexión de bombas, con un porcentaje del 95 % de confianza de no ser rechazado.

## **Contribuciones y Conclusiones:**

El modelo matemático propuesto en este trabajo, contribuye a solucionar la distribución de caudales en redes abiertas, con interconexión de bombas centrifugas tipo voluta y/o sumergibles, emplazadas arbitrariamente.

El modelo matemático es determinístico y emplea información heurística y empírica fundamentada en las ecuaciones de la energía del flujo de agua, que toma en cuenta sus pérdidas en la red, y también se basa en la ecuación de continuidad. Es un modelo conceptual que reproduce mediante fórmulas y algoritmos matemáticos los procesos físicos del estudio, con una representación numérica referida a diferentes aspectos lógicos estructurados de la ciencia físico-matemática, que son obtenidos mediante la codificación del lenguaje computacional MATLAB para Windows, versión 7.12.0.635 (R2011a), The MathWorks, Inc.

Se desarrollaron, en forma sistemática, las ecuaciones que rigen el comportamiento hidráulico, en estado estable, de redes abiertas por las que circula un fluido incompresible en régimen turbulento. Se establecieron las expresiones hidráulicas requeridas, utilizándose la información topológica de la red, y la conformación de las matrices necesarias para solucionar cada caso, por lo que su aplicación plantea resolver un sistema de ecuaciones no lineales y lineales que rigen el equilibrio de energía y masa dentro de la red. Dicha formulación considera la inclusión de cualquier tipo de bombas, usadas en la agricultura.

**FIRMA DEL ASESOR PRINCIPAL:** \_\_\_\_\_

**DR. JUAN FRANCISCO PISSANI ZÚÑIGA**

## SUMMARY

**Sergio Zeferino Garza Vara**

Candidate to obtain the Doctor Degree in Agricultural Sciences

**Special field:** Water and Soil Sciences

**Universidad Autónoma de Nuevo León**

**Facultad de Agronomía**

**Title of the Research:** Mathematical Modeling of Pumps Interconnected in Branched Networks for Irrigation and its Solution Matrix.

**Number of pages:** 169

**Subjects of the Research Work:**

Fluid Mechanics, Hydraulics, Mathematics, Statistics and Irrigation.

**Key Words:**

Head, head lost due to friction, minor losses, pipeline flow rate, pumps, branched networks, irrigation systems, matrix, jacobian matrix, Matlab.

**Purposes and Study Methods:**

The main purpose this research was to realize a mathematical deterministic model to find solutions for branched network systems with interconnected pumps. Such pumps can be the same or different, connected randomly on the network to get a proper sourcing in agricultural irrigation systems. The model is based on the equations of energy flow and continuity, considering the energy transmitted to the water pump, it can be seen as linear and no linear equations and their solutions are found with Newton-Raphson iterative method of successive approximation. On this way the network distribution flow is obtained. Then it is possible to find the pressure distribution. In order to validate the model, a prototype branched network with pump interconnection was built. By comparing the model results and the actual prototype measurements, statistic test Chi-square was performed to validate the hypothesis that the mathematical model match to the actual behavior of a branched network with pumps interconnection, with 95 % reliability.



## **Contributions and Conclusions:**

The mathematical model proposed in this paper helps to resolve any branched network interconnection volute type centrifugal pump and/or submersible located arbitrarily.

This mathematical model is deterministic and uses heuristic and empirical information based on the equations of the water's energy flow. It also takes in account the head loss in the network, furthermore is based on the continuity equation. It is a conceptual model that reproduces the physical processes of the case studied by the use of mathematical formulas and algorithms with a numeric representation referred to logic arranged aspects of physical-mathematic science, obtained by coding computer language MATLAB for windows, version 7.12.0.635 (R2011a), The MathWorks, Inc.

This study develops, in a systematic form, the equations that govern the static hydraulic behavior living on a branched network where non compressible fluid runs on turbulence condition. With these results it is possible to establish the required hydraulic formulas by using the actual topological network data, and the definition of the necessary matrixes to solve the study, that is why the use of this model perform the solution of linear and no linear equations system that governs the mass and energy balance inside the network. This procedure allows the use of any kind of pump design common in agriculture applications.

**MAIN ADVISOR SIGNATURE:** \_\_\_\_\_

**DR. JUAN FRANCISCO PISSANI ZÚÑIGA**

## 1. INTRODUCCION

En México aproximadamente el 77 % del agua aprovechable se destina a la producción de alimentos, pero el uso eficiente de este recurso apenas llega al 46 %, aproximadamente (SAGARPA, 2010). Por lo que es imprescindible mejorar el uso eficiente del agua en la producción agrícola y para ello se tendrá que incrementar la eficiencia en el uso del agua de los Distritos y Unidades de Riego, y aumentar las zonas de riego. Otro factor importante será el de lograr un manejo integrado y sustentable del agua en cuencas hidrológicas, por lo que se requiere orientar la demanda de agua de acuerdo a la disponibilidad en las cuencas hidrológicas, de igual manera es conveniente determinar y dar a conocer el volumen y calidad del agua disponible en las diferentes cuencas y acuíferos del país. En México existen 653 acuíferos, de los cuales 101 están sobreexplotados (CONAGUA, 2011).

En las grandes extensiones agrícolas de nuestro país, sobre todo en las Unidades de Riego, existe un gran número de sistemas de redes abiertas de conducción de agua, con bombas interconectadas y emplazadas arbitrariamente, que tienen el objetivo de alimentar uno o más sistemas de riego a la vez. Por su complejidad, pueden presentar una serie de problemas y dificultades. Si estos sistemas se instauran de tal manera que las bombas y líneas de conducción se interconectan sin cálculos previos o empíricamente, se corre el riesgo de que las bombas funcionen con *flujos estrangulados*, como si las líneas de conducción tuvieran válvulas semicerradas, e incluso se pueden dar casos extremos de bombas que funcionan como si en sus salidas tuvieran válvulas completamente cerradas (es decir sin caudal), o como si estas bombas no existieran. Otras veces, estas redes se

establecen con un cálculo previo, pero realizado en una forma simplista, por que se diseñan desarticulando las líneas de conducción de la red, procurando que los flujos lleguen a los nodos con presiones aproximadamente iguales (estas operaciones se efectúan con procedimientos de prueba y error), pero estos resultados son aislados e independientes. Está claro que este procedimiento contiene fallas fundamentales por que el comportamiento global de la energía de los flujos en una red, donde todas sus partes están interactuando a la vez, resulta muy diferente a la suma de los efectos parciales que se obtienen de tales diseños simplistas.

La aplicación de los procedimientos mencionados conduce a sistemas de redes de conducción ineficientes (que ni siquiera corresponden a los sistemas reales), lo que además redundando en tarifas eléctricas excesivamente altas, porque con el factor de potencia la Comisión Federal de Electricidad sanciona y penaliza la baja eficiencia eléctrica, tomando en cuenta el factor de potencia en su artículo 64 (Reglamento de la Ley del Servicio Público de Energía Eléctrica, 1993).

Para poder diseñar de manera global y eficiente una red abierta con interconexión de bombas emplazadas arbitrariamente se puede recurrir a los modelos matemáticos, que son abstractos, y representan la relación del caso estudiado a través de las fórmulas matemáticas. Este modelo matemático debe ser determinístico, que emplee información heurística y empírica fundamentada en las ecuaciones de la energía del flujo de agua, que toma en cuenta sus pérdidas en la red, y también se basa en la ecuación de continuidad. Es un modelo conceptual que reproduce mediante fórmulas y algoritmos matemáticos los procesos físicos del estudio, con una representación numérica referida a diferentes aspectos lógicos

estructurados de la ciencia físico-matemática, obtenidos mediante la codificación en un lenguaje computacional.

### **1.1. Hipótesis general**

El modelo matemático propuesto, se ajusta con el comportamiento real de bombas interconectadas, iguales o de diferente tipo (centrífugas tipo voluta y/o sumergibles) emplazadas arbitrariamente, que conforman una red abierta, determinando la distribución de caudales, para abastecer adecuadamente sistemas de riego agrícola.

### **1.2. Objetivo general**

Desarrollar un modelo matemático integral y determinístico, para la distribución de caudales, con una solución hidráulica eficiente, de interconexión de bombas dinámicas emplazadas arbitrariamente, ya sea iguales o de diferentes tipos como: bombas centrífugas de eje horizontal y de pozo profundo (tipo sumergible), que conforman una red abierta de conducción de agua, con el propósito de abastecer adecuadamente sistemas de riego agrícola.

### **1.3. Objetivos específicos**

- a) Generar un programa computacional en MATLAB, para analizar y diseñar las redes de distribución abierta, de los casos que con mayor frecuencia se presentan en las zonas de riego agrícola de México, con el fin de abastecerlas

eficazmente. Tal código debe resultar suficientemente ágil, robusto y flexible, para experimentar fácilmente, al hacer cambios virtuales con todos los elementos de la red: bombas, conductos, nodos, y la distribución de los mismos.

- b) Facilitar la selección y el diseño de interconexión de bombas en redes abiertas.
- c) Seleccionar los diámetros más adecuados de los conductos para un determinado material.
- d) Determinar la distribución de caudales y presiones en la red.
- e) Determinar la redistribución de caudales y presiones, en el caso de que dejen de operar una o más bombas o uno o más sistemas de riego.

## 2. REVISIÓN DE LITERATURA

### 2.1. Fundamentos de la mecánica de fluidos

La viscosidad dinámica o absoluta ( $\mu$ ) es una medida cuantitativa de la resistencia que tiene un fluido para moverlo, es decir, la viscosidad determina la velocidad con que se deforma un fluido cuando se le aplica un esfuerzo cortante. El aire tiene un velocidad muy pequeña, el agua tiene una viscosidad 50 veces mayor que el aire, un aceite SAE 30 es 300 veces más viscoso que el agua, la glicerina es 5 veces más viscosa que el aceite SAE 30. Cuando un fluido se deforma al moverse en un conducto, sus capas que lo conforman se deslizan entre si y forman esfuerzos cortantes que son iguales a los cambios de velocidad con respecto a un cambio de distancia "y" perpendicular al flujo por su viscosidad:

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (2.1.1)$$

donde  $\tau$  es el esfuerzo cortante (fuerza tangencial al área por unidad de área) y  $dV/dy$  es el gradiente de velocidad, por lo que la viscosidad tiene unidades de fuerza-tiempo por unidad de área o dina-segundo por centímetro cuadrado o poise. Un fluido es newtoniano (en honor a Isaac Newton), si obedece a la ecuación (2.1.1) y es independiente del esfuerzo cortante ( $\tau$ ), y varía solamente con la temperatura y presión. Un fluido no-newtoniano no sigue la ley de la ecuación (2.1.1) y está en función del esfuerzo cortante, presión y temperatura. Los fluidos no-newtonianos se subdividen en: fluido dilatante (su viscosidad aumenta al aumentar el esfuerzo cortante, un ejemplo son las arenas movedizas, maicena con agua); fluido

pseudoplástico (su viscosidad disminuye al aumentar el esfuerzo cortante, un ejemplo es pulpa de papel en agua); fluido de Bingham (requiere cierto esfuerzo finito para que empiece a fluir y su variación es lineal como los fluidos newtonianos, los ejemplos clásicos son la mayonesa, la mostaza y la pasta dental), se ilustra en la Figura 2.1.1. Existen fluidos que su viscosidad depende del tiempo: reopéctico (Al aumentar el esfuerzo cortante y el tiempo aumenta sus viscosidad) y el tixotrópico (es el caso opuesto del fluido reopéctico). La relación de la viscosidad ( $\mu$ ) con la densidad ( $\rho$ ), se denomina viscosidad cinemática ( $\nu$ ), donde sus unidades son centímetros cuadrados por segundo (stoke) o metros cuadrados por segundo (Rubio-Sanjuán, 1960; Bird *et al.*, 2002; White, 2008):

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

White (2008), menciona que existen dos tipos de presiones, la presión absoluta que se mide a partir del vacío absoluto y toma en cuenta la presión atmosférica; y la presión relativa o manométrica, que se mide a partir de la presión atmosférica (por lo que no la toma en cuenta), es decir que mide los excedentes de la presión atmosférica en el caso de presiones absolutas mayores a la presión atmosférica o cuando es menor, mide lo que le falta a la presión absoluta para igualarse con la presión atmosférica, que es el caso de un vacío. Esto se resume de esta manera:

$$P_{absoluta} = P_{atmosférica} \pm P_{relativa}$$

lo anterior se ilustra en la Figura 2.1.2.

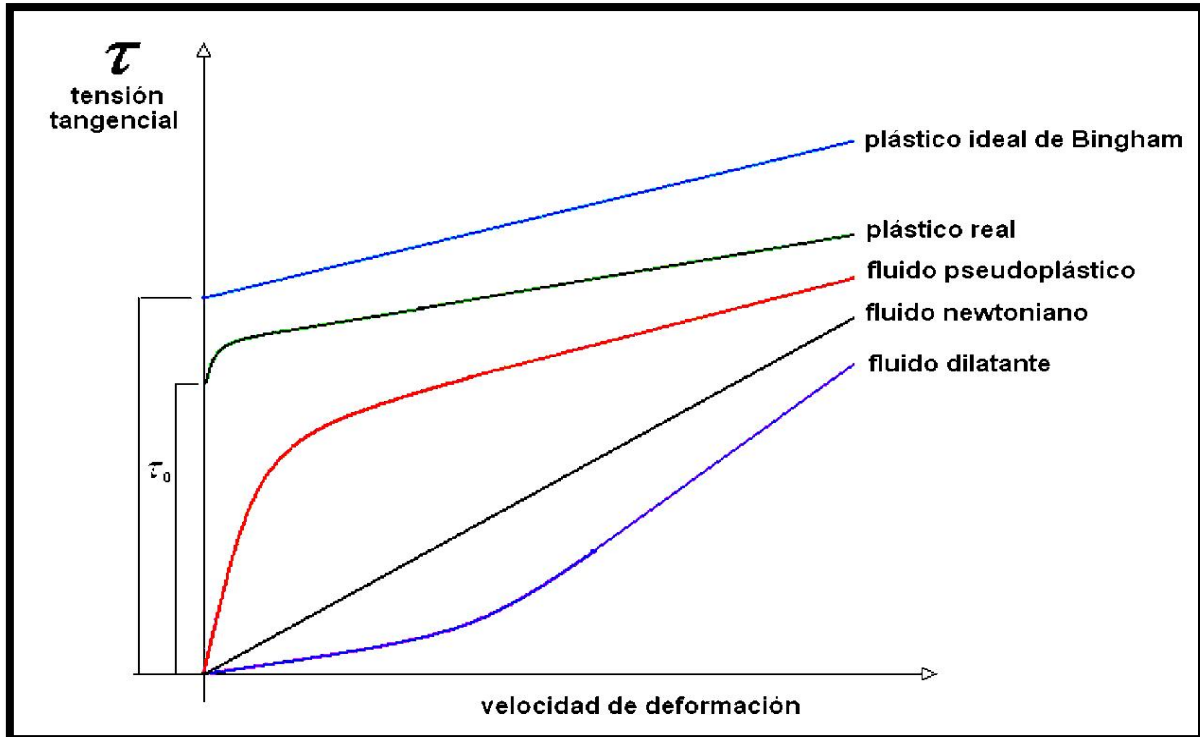


Figura 2.1.1. Tipos de comportamiento reológico de un fluido.

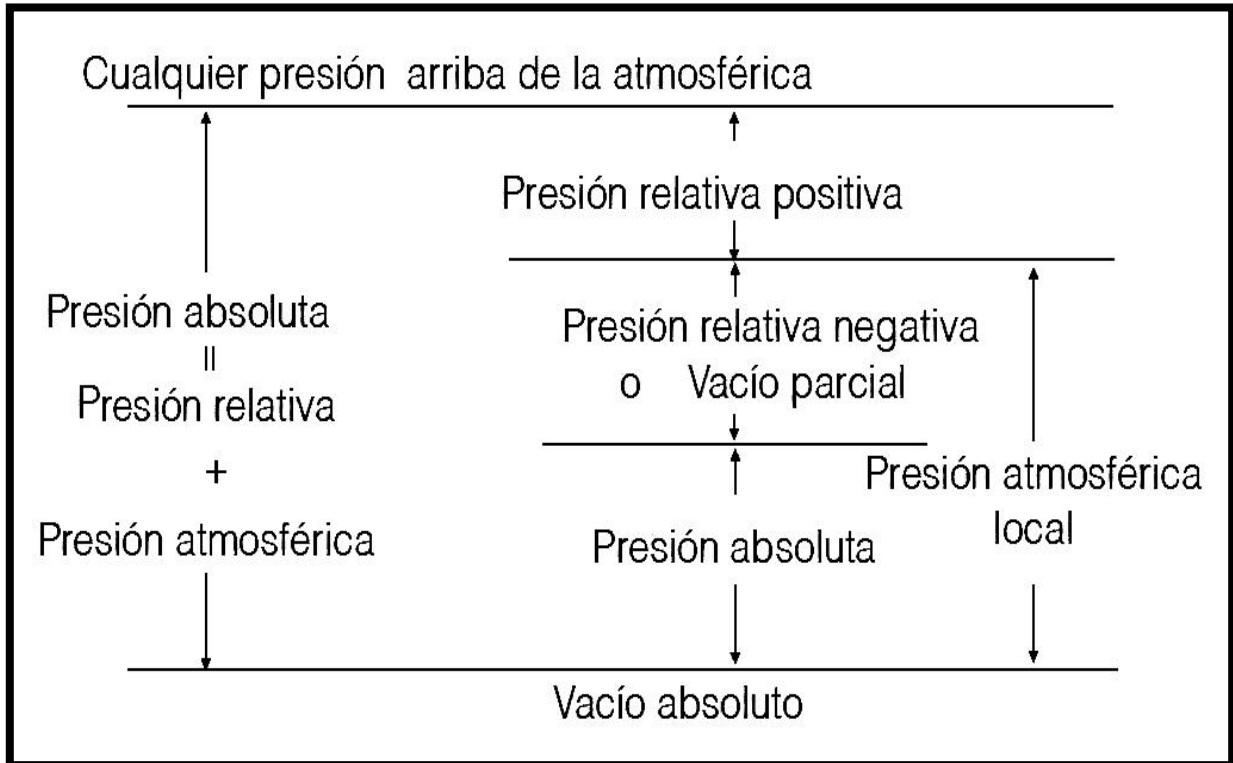


Figura 2.1.2. Niveles de referencia para determinar presiones absolutas y relativas.



Menon (2005), señala que el número de Reynolds (En honor a su autor Osborne Reynolds), es un parámetro adimensional para determinar si el flujo es laminar o turbulento. Está en función de la velocidad del flujo ( $V$ ), el diámetro ( $D$ ) y La viscosidad cinemática ( $\nu$ ). Su ecuación es la siguiente:

$$Re = \frac{VD}{\nu}$$

los tipos de flujo están definidos a continuación:

Flujo laminar:  $Re \leq 2100$

Flujo crítico:  $2100 \leq Re \leq 4000$

Flujo turbulento:  $Re \geq 4000$

en el flujo crítico no es posible determinar si es laminar o turbulento.

## 2.2. Flujo de conductos a presión

Para la deducción de las ecuaciones básicas del flujo en conductos a presión, se tienen que elaborar las hipótesis siguientes (Pérez, 1993):

Relativas al flujo:

- Permanente o estacionario.
- Turbulento.
- Distribución uniforme en la velocidad y la presión en cualquier sección transversal del conducto.

Relativas al fluido:

- Newtoniano.
- Incompresible.

- Monofásico.
- Homogéneo.
- Isotérmico.

Relativas a los conductos, tomando en cuenta solamente a un tubo que conforma una línea de conducción (porque pueden existir tuberías en serie con diferente diámetro y/o material):

- Diámetro constante.
- Un solo material.
- Espesor constante.

Las ecuaciones generales que fijan el estado estacionario de una red hidráulica, las cuales determinan el estado energético del flujo o la energía específica del agua que circula en un conducto a presión, y que viene siendo la energía del agua por unidad de peso del mismo, se denomina **carga** (algebraicamente se expresa en metros de columna de agua). Cualquier fluido viaja a través de un conducto debido a una diferencia de energía o de cargas entre dos puntos (de mayor a menor). Siempre existen pérdidas graduales de energía por fricción del fluido a lo largo del conducto y pérdidas súbitas al pasar a través de un accesorio. El cambio de energía específica del agua que circula en un conducto, se cuantifica con la ecuación de Bernoulli entre punto 1 al punto 2, de la manera siguiente:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{tot\ 1-2} \quad (2.2.1)$$

$Z$  = carga por posición;  $\frac{p}{\gamma}$  = carga por presión;  $\frac{v^2}{2g}$  = carga por velocidad;  $h_{tot\ 1-2}$  = pérdida de carga total, que pierde el flujo entre los puntos 1 y 2. La ecuación que

determina la pérdida de carga total entre estos puntos, en cierta longitud del conducto con diámetro constante:

$$h_{tot_{1-2}} = h_{f_{1-2}} + \sum_{j=1}^m h_{loc_j} \quad (2.2.2)$$

$h_{f_{1-2}}$  = pérdida de carga gradual por fricción;  $h_{loc}$  = pérdida de carga local o pérdida brusca de energía, por el paso del agua a través de un accesorio;  $m$  = número total de accesorios que tienen pérdidas de carga significativas entre las secciones 1 y 2 de la tubería. Las pérdidas de carga por fricción se pueden calcular mediante la ecuación de Darcy-Weisbach:

$$h_f = f \frac{L V^2}{D 2g} = \frac{8fLQ^2}{\pi^2 D^5 g} \quad (2.2.3)$$

$L$  y  $D$  = longitud y diámetro interno del conducto ( $m$ );  $Q$  = caudal ( $m^3/s$ );  $g$  = aceleración de la gravedad terrestre ( $m/s^2$ );  $f$  = coeficiente de fricción hidráulica (adimensional). Este factor se puede determinar en régimen laminar con la fórmula de Hagen-Poiseville:

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64\nu}{VD} \quad (2.2.4)$$

Jean Louis Marie Poiseville, médico francés que investigó en 1840 el flujo de sangre en las venas, que por cierto no son aplicables al cuerpo humano, por que la sangre es un fluido no newtoniano, pero si es aplicable a la ingeniería y el físico e ingeniero alemán Gotthilf Heinrich Ludwig, que trabajó en 1839 con tubos de cobre (Azevedo y Acosta, 1976; Levi, 1989; Saldarriaga, 2008; Pickover, 2012).

La ecuación para determinar el coeficiente  $f$  en flujo turbulento es:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right) \quad (2.2.5)$$

la ecuación (2.2.5) es conocida como fórmula de Colebrook-White y fue presentada en 1938. Donde  $\varepsilon$  = rugosidad absoluta ( $m$ ), y al dividirse entre el diámetro interno del conducto se le identifica como rugosidad relativa ( $\varepsilon/D$ ). Las pérdidas locales se determinan mediante la ecuación siguiente:

$$h_{loc} = K_{loc} \left[ \frac{v^2}{2g} \right] = K_{loc} \left[ \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} \right] \quad (2.2.6)$$

$K_{loc}$  = coeficiente adimensional (adimensional). Este coeficiente generalmente está en función de la geometría espacial y del tamaño del accesorio en flujo turbulento (Nekrasov, 1966; Shames, 1995; Street, 2000; Walski, 2003).

Mott (2006), cita que una expresión totalmente empírica, para determinar la pérdida de carga por fricción, es la ecuación de Hazen-Williams:

$$h_f = \frac{10.61}{D^{4.87}} \left( \frac{Q}{C} \right)^{1.852} L$$

$C$  es el coeficiente de Hazen-Williams y depende prácticamente del material de la tubería, y si es de fierro o acero depende del tiempo de uso (si es tubería nueva, seminueva o vieja).

King *et al.* (1948), citan que las pérdidas menores pueden despreciarse si la longitud de la tubería es mayor de 1000 veces el diámetro:

$$\sum_{j=1}^m h_{loc_j} = 0 \quad (2.2.7)$$

Skousen (2004), define las válvulas como dispositivos mecánicos diseñados específicamente para dirigir, iniciar, detener o para regular el caudal, la presión de

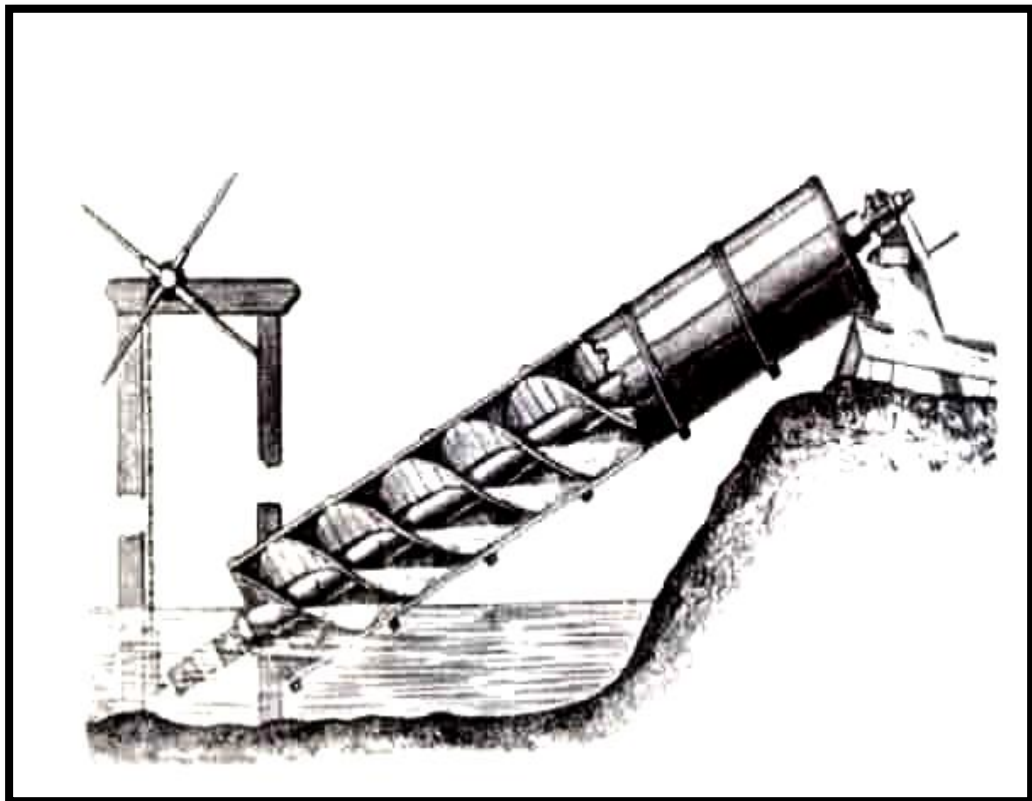
los líquidos o gases. Las válvulas pueden ser de acero, fierro, latón, bronce, plástico o con cierto número especial de aleaciones.

### **2.3. Bombas**

Karassik *et al.* (2008), citan que solo el velero puede competir con la bomba por el título de la invención más remota para convertir la energía natural como el viento en trabajo útil, y aún es de dudarse que el velero haya sido primero. Y como el velero no se clasifica como una máquina, entonces la bomba es la forma más remota de máquina que sustituyó la energía natural por el esfuerzo muscular, para satisfacer las necesidades del hombre. Las primeras bombas de las que se tiene conocimiento son las ruedas persas (Figura 2.3.1). Este dispositivo era una rueda que parte de ella estaba bajo una corriente de agua, el cual tenía cubetas que al sumergirse se llenaban de este vital líquido y posteriormente se iban vaciando a un colector en el momento en que la cubeta se encontraba en su punto más alto. Pero la más conocida de aquellas bombas es el tornillo de Arquímedes que aún persiste en la actualidad (Figura 2.3.2). En el desarrollo tecnológico través del tiempo, tomando en cuenta otras formas de energía, la bomba queda probablemente como la segunda máquina de uso más común, superado apenas por el motor eléctrico.



**Figura 2.3.1.** Rueda persa (Ecovive, 2012).



**Figura 2.3.2.** Tornillo de Arquímedes (Física-Javier, 2012).

Mataix (1982), define una bomba como una máquina que absorbe energía mecánica para restituirla a un líquido en energía hidráulica y se emplea para impulsar toda clase de líquidos.

Karassik *et al.* (2008), indica que a través del tiempo el uso de las bombas se ha extendido de tal manera que existe una gran variedad de ellas en tipos y tamaños, que en la modernidad ha sido indispensable hacer una clasificación de ellas. Esta clasificación tiene tres pasos: el primero sería la manera que agrega energía al fluido a través del tiempo, el segundo paso identifica el medio que se utiliza para agregar dicha energía, y el tercero describe el implemento utilizado para tal fin. Con el primer paso las bombas se clasifican en dinámicas y de desplazamiento positivo. Las dinámicas son aquellas bombas que agregan energía al fluido de manera continua. Las de desplazamiento positivo agregan energía al fluido en forma intermitente. En el segundo paso las bombas dinámicas se clasifican en centrífugas y de efecto especial. Las bombas centrífugas utilizan la fuerza centrífuga para impulsar a los líquidos, y las de efecto especial utilizan otros medios para trasladar a los fluidos, como lo son la elevación por gas, el ariete hidráulico, bombas de chorro o eductor y las electromagnéticas. Lo referente a bombas de desplazamiento positivo, estas se clasifican como reciprocantes y rotatorias. Las reciprocantes tienen la característica de que el fluido se dirige a un medio cerrado donde el volumen se expande para meter al fluido a la cámara y posteriormente se contrae para expulsarlo de ella, con un procedimiento recíproco o alternativo. En el tercer paso las bombas centrífugas, utilizan un impulsor o rodete que al girar con altas revoluciones expulsan al líquido por medio de la fuerza centrífuga. El medio utilizado por las bombas reciprocantes son los pistones o émbolos, y los implementos que utilizan las rotatorias son álabes,

tornillos, levas, engranes, etcétera. Los rodetes o impulsores por su forma se clasifican en abiertos o tipo propela, semiabiertos y cerrados. Y por el ángulo en que impulsan al fluido se catalogan como de flujo axial, radial y mixto.

Mays (2002), menciona que los diferentes tipos de bombas han sido descritos o definidos por varias organizaciones en sus respectivas publicaciones:

- Hydraulics Institute (HI), American National Standard for Centrifugal Pumps for Nomenclature, Definitions, Applications and Operation [American National Standards Institute (ANSI)/HI 1.1-1.5-1994].
- American Petroleum Institute (API), Centrifugal Pumps for Petroleum, Heavy Duty Chemical, and Gas Industry Services, Standard 610, 8.<sup>a</sup> edition, august 1995.
- American Society of Mechanical Engineers (ASME), Centrifugal Pumps, Performance Test Code PTC 8.2-1990. También señala que además, existen varias normas y especificaciones del American National Standards Institute (ANSI) y de American Water Works Associations (AWWA), relacionadas con las bombas centrífugas:
  - ANSI/ASME B73.1M-1991, Specification for Horizontal End Suction Centrifugal Pumps for Pumps for Chemical Process.
  - ANSI/ASME B73.1M-1991, Specification for Vertical In-Line Centrifugal Pumps for Chemicals Process.
  - ANSI/ASME B73.1M-1995, Specification for Thermoplastic and Thermoset Polymer Material Horizontal End Suction Centrifugal Pumps for Chemical Process.



- ANSI/AWWA E 101-88, Standard for Vertical Turbine Pumps-Line shaft and Submersible Types.

Karassik *et al.* (2008), señala que si existe una bomba entre esos puntos, la ecuación de Bernoulli se convierte en esta nueva expresión:

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} + Hb = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{tot_{1-2}} \quad (2.3.1)$$

$Hb$  es el trabajo neto realizado por la bomba por la unidad de peso de fluido bombeado o carga total que la bomba agrega al agua que es conocida como carga dinámica total en metros de columna de agua. Las bombas centrífugas tipo voluta de eje horizontal y las de pozo profundo, como las bombas tipo turbina y sumergibles, son las más utilizadas en el campo agrícola. Con respecto a las bombas centrífugas, la energía en forma de carga que suministra al agua ( $Hb$ ), se determina por medio de la ecuación:

$$Hb = \left( z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left( z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right) + h_{tot_{1-2}} \quad (2.3.2)$$

al término  $CF$  se le nombra *cargas fijas* y a  $CV$  se le conoce como *cargas variables*. Las cargas variables son función del caudal y las cargas fijas son constantes e independientes del caudal, y corresponde a la altura que la bomba eleva el agua, desde la fuente de abastecimiento hasta el final de la tubería de descarga en el caso de descarga libre. Si la bomba descargue el agua, abajo del nivel de la fuente de abastecimiento, las cargas fijas son negativas. Las cargas fijas y variables se determinan de la manera siguiente:

$$CF = \left( Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} \right) - \left( Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \right)$$

$$CV = h_{tot_{1-2}}$$

las cargas variables se determinan de la manera siguiente, para bombas centrífugas tipo voluta (Figura 2.3.3) y sumergibles (Figura 2.3.4) respectivamente:

$$CV = h_{tot_s} + h_{tot_d} \quad (2.3.3)$$

$$CV = h_{tot_{cb}} + h_{tot_d} \quad (2.3.4)$$

$h_{tot_s}$  = pérdidas de carga totales en la tubería de succión en bombas centrífugas tipo voluta;  $h_{tot_{cb}}$  = pérdidas de carga totales en la columna de bombeo en bombas sumergibles;  $h_{tot_d}$  = pérdidas de carga totales en la tubería de descarga en bombas centrífugas o sumergibles. La gráfica de la ecuación (2.3.2) se identifica como la curva característica de la tubería. Las ecuaciones de Darcy-Weisbach y pérdidas locales en función del caudal, en tuberías de succión o columna de bombeo y tubería de descarga, en conductos cortos:

$$h_{tot_s} = \left[ \left( f_s \frac{L_s}{D_s} + \left( \sum_{j=1}^m K_{loc_j} \right)_s \right) \frac{8}{\pi^2 D_s^4 g} \right] Q^2 \quad (2.3.5)$$

$$h_{tot_d} = \left[ \left( f_d \frac{L_d}{D_d} + \left( \sum_{j=1}^m K_{loc_j} \right)_d \right) \frac{8}{\pi^2 D_d^4 g} \right] Q^2 \quad (2.3.6)$$

$$h_{tot_{cb}} = \left[ \left( f_{cb} \frac{L_{cb}}{D_{cb}} + \left( \sum_{j=1}^m K_{loc_j} \right)_{cb} \right) \frac{8}{\pi^2 D_{cb}^4 g} \right] Q^2 \quad (2.3.7)$$

en el caso de tuberías largas, las pérdidas menores se desprecian y las ecuaciones (2.3.5), (2.3.6) y (2.3.7), se convierten en las expresiones siguientes:

$$h_{f_s} = \left[ \frac{8f_s L_s}{\pi^2 D_s^5 g} \right] Q^2$$

$$h_{f_d} = \left[ \frac{8f_d L_d}{\pi^2 D_d^5 g} \right] Q^2$$

$$h_{f_{cb}} = \left[ \frac{8f_{cb} L_{cb}}{\pi^2 D_{cb}^5 g} \right] Q^2$$

por lo tanto, en tuberías largas las cargas variables tienen la ecuación:

$$CV = h_{f_s} + h_{f_d} = \left[ \left( f_s \frac{L_s}{D_s^5} + f_d \frac{L_d}{D_d^5} \right) \frac{8}{\pi^2 g} \right] Q^2$$

$$CV = h_{f_{cb}} + h_{f_d} = \left[ \left( f_{cb} \frac{L_{cb}}{D_{cb}^5} + f_d \frac{L_d}{D_d^5} \right) \frac{8}{\pi^2 g} \right] Q^2$$



**Figura 2.3.3.** Bomba centrífuga tipo voluta de eje horizontal de un solo paso (Sobitec, 2012).



**Figura 2.3.4.** Bombas sumergibles de pasos múltiples (Rotor Pump, 2012).

Webber (1971); Mott (2006) y Saldarriaga (2008), señalan que para seleccionar una bomba, centrífuga (tipo voluta o sumergible), se requiere conocer su comportamiento realizando gráficas de sus tres características propias:

- Carga vs Caudal.
- Eficiencia vs Caudal.
- Potencia al freno vs Caudal.

Estas gráficas se conocen como curvas de rendimiento o curvas características de las bombas y las elaboran los fabricantes, operando las bombas con diámetro del impulsor constante y velocidad de rotación variable, y viceversa, tal como como se muestran en las figuras 2.3.5 y 2.3.6.

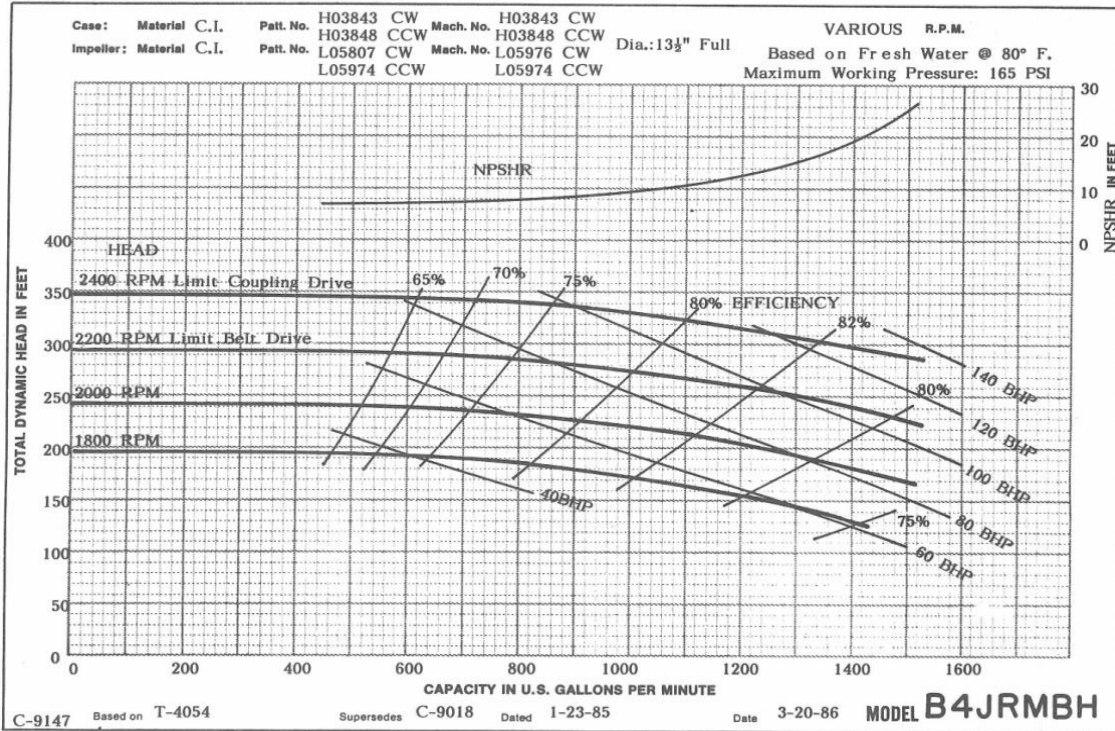


Figura 2.3.5. Variación de la velocidad del impulsor y su diámetro constante (Berkeley Pumps Catalog, 1990).

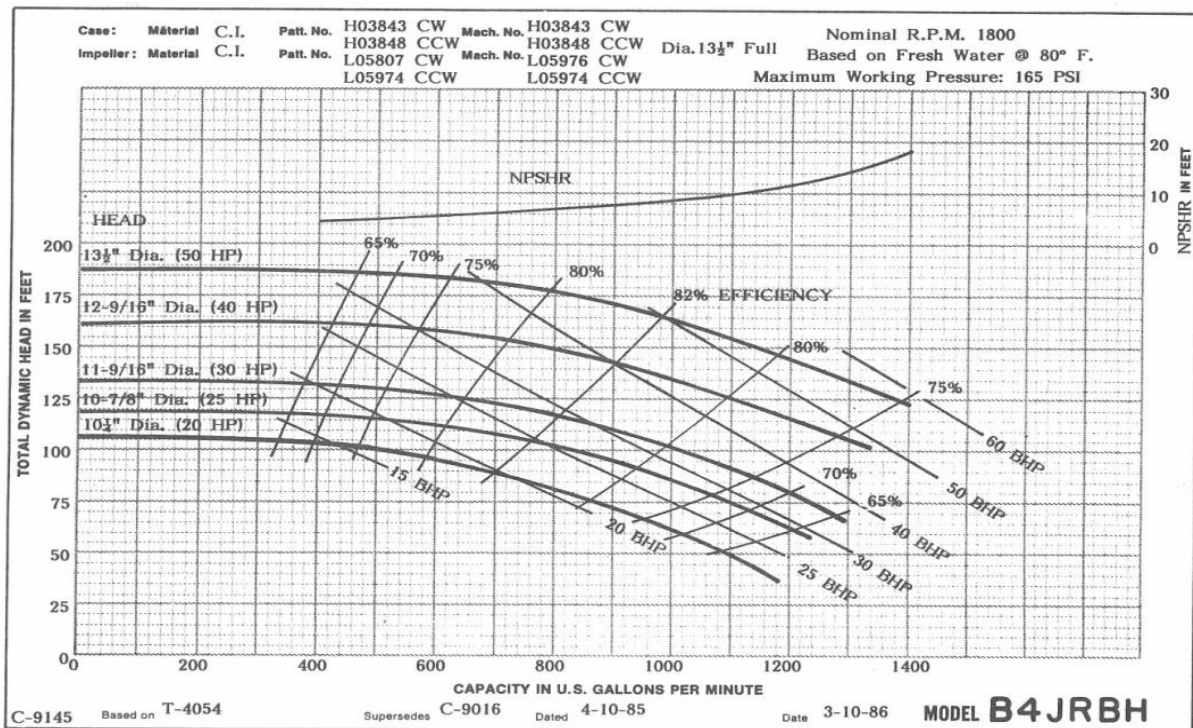


Figura 2.3.6. Variación del diámetro del impulsor a velocidad constante (Berkeley Pumps Catalog, 1990).

La potencia del conjunto motor-bomba y el agua impulsada se clasifican en tres categorías: potencia del agua, que es la potencia del flujo a la salida de la bomba (*WHP*), potencia de la bomba (*BHP*) mejor conocida como potencia al freno (brake horse power) que es la que se representa en las curvas características de las bombas. Por último la potencia del motor (*MHP*). Sus ecuaciones en el sistema internacional son las siguientes:

$$WHP = \frac{Q\gamma H_b}{76}$$

$$BHP = \frac{WHP}{Eff_b} = \frac{Q\gamma H_b}{76 Eff_b}$$

$$MHP = \frac{BHP}{Eff_m} = \frac{Q\gamma H_b}{76 Eff_b Eff_m} = \frac{Q\gamma H_b}{76 Eff_g}$$

$\gamma$  = peso específico del agua ( $Kg_f/m^3$ );  $Eff_b$  = eficiencia de la bomba;  $Eff_m$  = eficiencia del motor;  $Eff_g$  = eficiencia global que se obtiene al multiplicar la eficiencia de la bomba por la eficiencia del motor (las eficiencias están en fracción por ciento). El número 76 corrige las unidades en caballos de fuerza (AWWA, 2010).

Saldarriaga (2008), comenta que la curva característica de carga vs caudal, se puede ajustar con cierta aproximación razonable, mediante la ecuación cuadrática

$$H_b = A Q^2 + B Q + C \quad (2.3.8)$$

los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  se pueden calcular tomando tres puntos de la curva del fabricante.

Walski *et al.* (2002), señalan que para determinar el punto de operación de una bomba en una línea de conducción, se toma en el cruce de las gráficas correspondientes a las curvas que generan las ecuaciones (2.3.2) y (2.3.8).

Karassik y Carter (1985) citan que en 1687 Newton, estableció *la teoría de la similitud dinámica* el cual dio origen a la ciencia de los modelos y prototipos, y esto ha permitido a los ingenieros predecir el funcionamiento de las bombas centrífugas, es decir que dos bombas geoméricamente similares una de otra, tendrán características de funcionamiento similares. Por lo tanto se hizo necesario formular un concepto que vinculara los tres factores más importantes de las bombas: caudal, carga y velocidad del impulsor, para obtener un número índice o indicador adimensional o un número característico de una bomba, conocido como velocidad específica  $N_s$ , donde su ecuación en el sistema internacional es la siguiente:

$$N_s = \frac{n\sqrt{Q}}{(gHb)^{\frac{3}{4}}}$$

$n$  = velocidad del impulsor en revoluciones por segundo;  $g$  = constante gravitacional ( $9.81 \frac{m}{s^2}$ );  $Q$  = caudal en metros cúbicos por segundo;  $Hb$  = carga de la bomba en metros. Si se utiliza el análisis dimensional en la ecuación (2.3.17), lo que resultará serán los giros del impulsor exclusivamente, este resultado permanece sin dimensiones. Como es un número índice, se han permitido ciertas libertades como el eliminar la constante gravitacional ( $g$ ), y establecer unidades inglesas quedando la ecuación (2.3.9) de la manera siguiente:

$$N_s = \frac{n\sqrt{Q}}{H_b^{\frac{3}{4}}}$$

velocidad del impulsor en revoluciones por minuto, el caudal en galones por minuto y la carga de la bomba en pies. De esta manera se define la velocidad específica como un número índice o un indicador de la velocidad en revoluciones por minuto a la que debe girar el impulsor del modelo reducido de un determinado tipo de bomba, para descargar un caudal de un galón por minuto operando contra una carga de un pie. La velocidad específica se aplica a bombas centrífugas de un solo paso de admisión simple y doble. La velocidad específica tipo es un número que identifica al tipo de bomba y es aquella velocidad específica de operación de una bomba en particular que da la eficiencia máxima y es independiente de la velocidad rotativa a la que la bomba opera, donde existe una relación de las formas de los impulsores con su velocidad específica, donde a menor velocidad específica es más alta la carga por etapa que puede desarrollar una bomba. Otras de las aplicaciones de la velocidad específica es que está en función de los tamaños de las bombas donde ellas pueden catalogarse con un número índice. La velocidad específica de una bomba también se muestra en la forma que tienen las curvas características de las bombas. Se ha encontrado que la velocidad específica se utiliza para especificar la carga máxima de levantamiento permisible o la carga mínima de succión para evitar la cavitación en diversas condiciones de capacidad carga y velocidad.

Mott (2006) y Mataix (1982), mencionan que las leyes de afinidad de las bombas centrífugas son relaciones matemáticas que se utilizan para poder predecir el funcionamiento de las bombas, cuando cambian las características de las mismas. Estas características son el caudal, su carga, la potencia al freno, con respecto a la



velocidad del giro del impulsor. Por lo tanto existen dos leyes: la primera ley de afinidad se aplica cuando la velocidad de giro del impulsor varía, manteniendo constante el diámetro del impulsor, siendo las ecuaciones las siguientes expresiones:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{Hb_1}{Hb_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$\frac{BHP_1}{BHP_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3$$

Los subíndices 1 y 2 significan antes y después de la variación y el símbolo  $N$  se refiere a la velocidad de rotación del impulsor, en revoluciones por minuto. La segunda ley de afinidad se aplica cuando varía el diámetro del impulsor, manteniendo constante la velocidad de giro del impulsor, sus expresiones matemáticas se muestran a continuación:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\frac{Hb_1}{Hb_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

$$\frac{BHP_1}{BHP_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^3$$

Karassik y Carter (1985) definen que la carga neta de succión positiva disponible de una bomba centrífuga ( $CNSP_D$ ), como la carga disponible, para poder establecer un flujo a través de la tubería de succión hasta el centro del impulsor o

rodete de la bomba o es la diferencia entre la carga de succión absoluta existente y la presión de vapor a la temperatura dominante.

Mays (2002), cita que la carga neta de succión positiva disponible toma en cuenta la carga de la presión atmosférica local, las pérdidas de carga en la tubería de succión, el nivel de la superficie del agua de la fuente de abastecimiento, con respecto al centro del impulsor de la bomba y este valor nunca deberá reducirse hasta el valor de la carga de la presión absoluta del líquido bombeado, y por ser carga se expresa generalmente en metros columna de agua (SI). Su expresión matemática es la siguiente:

$$CNSP_D = H_{P_{atm}} \pm h_s - h_{tot_s} - H_{P_{vapor}}$$

$H_{P_{atm}}$  = carga de la presión atmosférica local;  $h_s$  = diferencia de altura entre el nivel de la superficie del agua de la fuente de abastecimiento y el centro del impulsor de la bomba (si  $h_s$  está por arriba del centro del impulsor de la bomba es positiva y si está por debajo es negativa);  $H_{P_{vapor}}$  = carga de la presión de vapor absoluta del líquido bombeado. Este último término está en función del tipo de líquido y de su temperatura. Existe también la carga neta de succión positiva requerida ( $CNSP_R$ ), es la carga de succión que realiza la bomba al líquido, desde la entrada de su carcasa hasta el centro de su impulsor y es un dato de la patente del fabricante de la bomba, según la marca, el tipo y modelo de la bomba, así como el tamaño, forma, número de álabes y la velocidad de rotación del impulsor. Para que no exista cavitación por la evaporación del agua en la tubería de succión o en la bomba se debe cumplir esta condición (SRH, 1969):

$$CNSP_D \geq CNSP_R$$

SRH (1969), cita que en las bombas de pozo profundo ya sea tipo turbina o sumergible, la carga neta de succión positiva disponible, se determina con la ecuación:

$$CNSP_D = H_{P_{atm}} + K - H_{P_{vapor}}$$

la constante  $K$  se denomina sumergencia y se define como la distancia vertical que marca la diferencia de alturas, entre el nivel dinámico del agua en el pozo y el primer impulsor de la bomba de abajo hacia arriba (tomando en cuenta la dirección del flujo).

Mott (2006), cita que existen bombas de velocidad variable en su impulsor, este tipo de bombas ofrece una alternativa más atrayente que el estrangular una válvula para cambiar un caudal, ya que lo único que pasa en este caso es disipar la energía. La bomba se debe seleccionar con la mayor capacidad de caudal que debe alimentar a la red. Existen varios tipos de impulsores mecánicos de velocidad variable y de controles electrónicos de frecuencia también variable para motores eléctricos estándar de corriente alterna, en muchos países como en México es de 60 Hz, como la velocidad de un motor de corriente alterna es directamente proporcional a la frecuencia de voltaje, la variación de la frecuencia hace que cambie la velocidad del motor. Además de los ahorros de energía, existen otros beneficios al utilizar bombas de velocidad variable:

- Mejor control del proceso. Este tipo de bomba se ajusta más a los requerimientos del sistema.

- Control de la tasa de cambio. Las bombas de velocidad variable, controlan la tasa de cambio de velocidad.
- Desgaste menor. Las velocidades más bajas reducen los desgastes sobre los sellos y rodamientos de la bomba.

Mott (2006), menciona que los datos en los catálogos de las bombas sobre  $CNSP_R$  son exclusivas para el agua, y se aplican solo para la velocidad de rotación del impulsor que se especifica en la carta. Si la bomba opera con velocidad diferente la  $CNSP_R$  que se requiere a la velocidad nueva se calcula de esta manera:

$$(CNSP_R)_2 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right) (CNSP_R)_1$$

## 2.4. Modelos científicos

La Real Academia Española (RAE, 2009), define que un modelo es un Arquetipo o un punto de referencia para imitarlo o reproducirlo. Esquema teórico, generalmente en forma matemática, de un sistema o de una realidad compleja, que se elabora para facilitar su comprensión y el estudio de su comportamiento.

De Nevers (2006), menciona que un modelo es una composición intelectual que representa una realidad y que puede manipularse para predecir las consecuencias de acciones futuras, donde gran parte de la ingeniería aplica modelos matemáticos a problemas prácticos.

Munson *et al.* (2007), definen un modelo como una representación de un sistema físico que puede usarse para predecir su comportamiento, en algún aspecto deseado.

Walski *et al.* (2003), citan como antecedente de los modelos de distribución de agua, a la civilización minoica o cretense los cuales realizaron lo que se considera la primera construcción de un acueducto a presión. Se supone que esta cultura prehelénica de la edad de bronce, establecida en la isla de Creta (ubicada al sureste de Grecia) construyó la primera tubería de conducción de agua hace más de 2000 años. Y citan que en la actualidad se utilizan modelos para el diseño y operación de los sistemas de distribución de agua y son capaces de proporcionar a las comunidades un servicio cada vez más confiable eficiente y seguro. Este incremento en la disponibilidad de modelos sofisticados y accesibles permiten que estos objetivos sean realizados de una manera más precisa que en la antigüedad, por lo que los modelos en la actualidad constituyen una parte crítica para el diseño y operación de este tipo de sistemas.

Bender (2000), señala que los modelos científicos se dividen en diferentes tipos, como por ejemplo:

- Matemáticos.
- Físicos.
- Numéricos.
- Analógicos.
- Empíricos.
- Heurísticos.
- Conceptuales.
- De Optimización.

Bender (2000), cita que los modelos matemáticos son modelos abstractos que representan a los fenómenos o la relación entre ellos a través de fórmulas matemáticas. El objetivo de un modelo matemático es entender ampliamente el fenómeno y predecir su comportamiento. El proceso para elaborar un fenómeno matemático es el siguiente:

- Encontrar un problema del mundo real.
- Formular un modelo matemático acerca del problema:
  - a) Identificando las variables (dependientes e independientes).
  - b) Establecer una ó más hipótesis.
  - c) Aplicarlos los conocimientos matemáticos necesarios.
  - d) Comparar los datos obtenidos del modelo con los reales

Es importante mencionar que un modelo matemático no es completamente exacto (Bender, 2000). Se dividen en:

- Deterministas.
- Estocásticos.

En los modelos determinísticos, los resultados son puntualmente conocidos sin que exista incertidumbre, un ejemplo clásico es la Ley de Gravitación Universal de Newton. En los modelos estocásticos los resultados son probabilísticos y por lo tanto existe incertidumbre, ya que el resultado esperado tiene una probabilidad de ocurrencia, un ejemplo típico es la Relación de Indeterminación de Heisenberg. (González, 2003).

Los modelos físicos son modelos reales, que generalmente son una copia a escala, ya sea menor o mayor, hecha en maqueta o prototipo de algún objeto de

interés. La escala no es necesariamente igual en todos los ejes, por lo que estos modelos se conocen como modelos distorsionados (La Course, 1995).

Los modelos numéricos son modelos que permiten experimentar a través de simulaciones en una computadora u ordenador de modelos matemáticos o lógicos, un ejemplo de ello es el Método de Montecarlo o el resolver un modelo matemático en forma aproximada usando métodos numéricos en un programa computacional como el resolver ecuaciones diferenciales con diferencias finitas (Schmidt, 2009).

Los modelos analógicos se basan en analogías del comportamiento de sistemas físicos. Por ejemplo, el modelaje analógico de las aguas subterráneas se efectuaba con redes eléctricas y condensadores, pero al paso de los años este procedimiento engorroso y costoso se sustituyó con el modelaje exclusivamente matemático en la medida en que hubo progresos en el aumento de la capacidad de las computadoras, razón por la cual se popularizó el uso del cálculo numérico (Skousen, 1992).

Si se toma en cuenta la información utilizada para formar un modelo, estos se pueden clasificar en:

- Heurísticos.
- Empíricos.

Los modelos heurísticos son los que se basan en la explicación de las causas o mecanismos naturales que dan lugar al fenómeno estudiado, estos modelos son representaciones gráficas para poder explicarlo mejor y entenderlo de una manera más simple como lo son los modelos de regresión. Los modelos empíricos son los que utilizan observaciones directas o los resultados que se obtienen de experimentos del fenómeno en estudio (Granger, 1999; Michalewicz *et al.*, 2000).

Según su campo de aplicación los modelos se catalogan en:

- Conceptuales.
- De Optimización.

Los modelos conceptuales son los que se reproducen mediante fórmulas y algoritmos matemáticos con cierta complejidad, los procesos físicos que se producen en la naturaleza, incluyendo suposiciones acerca de la naturaleza, por ejemplo, el Modelo Atómico de Bohr. Los modelos matemáticos de optimización son ampliamente utilizados en las diversas ramas de la ingeniería para resolver problemas que tienen más de una solución (Hutson, 1992).

Los modelos hidráulicos son una de las herramientas más utilizadas para resolver problemas que se presentan en ingeniería hidráulica, y estos modelos se subdividen en: *Modelos matemáticos*; cuando un fenómeno físico se representa en forma simplificada por un conjunto de ecuaciones que permiten describir su comportamiento, y los *Modelos físicos*, que son representaciones materiales hechas a escala de un prototipo, aplicando para ello leyes de similitud o semejanza, un ejemplo de ello es el uso de una escala reducida de una presa hidráulica o un componente de él como por ejemplo, un vertedor (CFE, 1983).

Colombo and Karney (2009), citan que en un sistema de distribución de agua las fugas pueden modelarse explorando las relaciones existentes entre las fugas y la presión tomando en cuenta un incremento en la demanda.

Cesario (1994), menciona que entre los diferentes modelos que se emplean en la hidráulica, existen los modelos de redes de conducción de agua, que se utilizan para determinar las dimensiones de los componentes de una red y



seleccionar: válvulas reguladoras, tanques de almacenamiento, bombas y otros implementos.

Deuerlein *et al.* (2008), citan que actualmente, el modelado de las válvulas de retención y válvulas de control de flujo en los sistema de redes de distribución de agua se basa en una mezcla heurística con la solución de un conjunto de ecuaciones no lineales que rigen el flujo en la red, con la finalidad de modelar el comportamiento de los dispositivos de regulación en los sistemas de distribución de agua utilizando programación no lineal.

## **2.5. Redes de tuberías**

Walski *et al.* (2003), mencionan que existen dos tipos de redes; las cerradas que son un conjunto de circuitos donde el agua tiene más caminos para llegar a donde va a ser utilizada, y las abiertas o sistema dendrítico (ramificado) donde el agua solo tiene un camino para llegar al lugar requerido.

Una red es un conjunto de elementos encargados del transporte y suministro de agua con calidad, cantidad y presión adecuada, desde las fuentes de abastecimiento hasta los centros de consumo: viviendas, comercios, industrias, hidrantes para incendios y riego. Están formadas por tuberías interconectadas entre sí, formando mallas cerradas y/o sistemas abiertos. Siempre se utilizan conductos funcionando a presión (conductos cerrados), por lo general por bombeo, o por gravedad (conductos abiertos) o mixtos (Scribd, 2012).

Si se clasifican de acuerdo al funcionamiento:

- 1) Por gravedad.

2) Por bombeo.

Si se clasifican por su forma o topología:

- 1) Ramificadas o abiertas
- 2) Malladas o cerradas
- 3) Mixtas

Mays (2002), cita que entre los accesorios que se encuentran instalados en la red están los coples, que sirven para unir la tubería; codos para cambiar la dirección del flujo; válvulas normales que regulan los caudales; válvulas de retención o de un solo sentido del flujo; válvulas de admisión y expulsión de aire, que se utilizan para drenar el agua de las tuberías, pero también se tienen válvulas reductoras de presión, que estrangulan el paso del agua para conseguir a su salida una presión constante; válvulas limitadoras de caudal, que limitan el caudal de la red a un valor predeterminado independientemente de las variaciones de presión; válvulas sostenedoras de presión, que mantienen la presión constante a su salida, independientemente de las variaciones del caudal, y si la presión de entrada está por debajo del valor prefijado la válvula se cierra, hasta que la presión de entrada sea mayor a la ajustada.

Otro de los factores que intervienen en un buen diseño de conducción de agua en redes, es la selección correcta de: bombas, accesorios, válvulas reguladoras de presión, tanques de almacenamientos, además de tomar en cuenta la calidad del agua; y si alguna de estos factores falla o falta, provoca un mal diseño, lo que puede producir presiones bajas en algunas puntos donde se requiere mayor presión (Walski *et al.*, 2002).

## 2.6. Métodos matemáticos

### 2.6.1. Ecuaciones y su solución

Gómez-García (1999), menciona que la ecuación más importante de la ciencia y de la ingeniería es la ecuación lineal siguiente:

$$Ax = b$$

Existe una gran cantidad de procedimientos para su solución:

- Eliminación algebraica
  - a. Suma / Resta
  - b. Igualación
  - c. Sustitución
- Otros métodos
  - a. Regla de Cramer
  - b. Eliminación Gaussiana
  - c. Método de Gauss-Jordan
  - d. Método de Gauss-Seidel
  - e. Método de Banachiewicz
  - f. Método de Crout
  - g. Método de Cholesky
  - h. Método del Gradiente Conjugado
  - i. Algoritmo DGO
  - j. Método Rocío
  - k. Método Ana

Gómez-García (1993), cita que la naturaleza de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales tiene tres posibilidades:

- a) Solución única, que es el punto donde se intersecan las rectas.
- b) Infinidad de soluciones, cuando las rectas coinciden en todos sus puntos, entonces este sistema tiene un conjunto infinito de soluciones.
- c) No existe solución cuando las rectas son paralelas, o sea cuando las rectas no tienen ningún punto en común.

Gómez-García (1999), señala que si son pocas las ecuaciones lineales que pueden resolverse con cierta rapidez mediante técnicas simples. Sin embargo si son cuatro o más, la solución se vuelve laboriosa y debe usarse una computadora. Antes del uso de las computadoras las técnicas para resolver estas ecuaciones consumían mucho tiempo y esfuerzo, por lo tanto estos procedimientos restringieron la creatividad. Pero con el surgimiento de las computadoras se hizo posible resolver grandes sistemas de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, con la finalidad de poder enfrentar ejemplos y problemas más complicados.

Gómez-García (1999), cita que existe una serie de dificultades para solucionar los modelos lineales. Con la regla de Cramer sólo sirve para resolver exactamente sistemas cuadrados con elementos enteros, con la desventaja de que requiere una gran cantidad de operaciones. Una matriz de orden  $n$  requiere la evaluación de  $n+1$  determinantes de orden  $n$ , y cada uno de estos requiere la evaluación de  $n$  determinantes de orden  $n+1$ ; y así sucesivamente. La solución de un sistema de 20 ecuaciones tardaría casi 28 siglos, y la inversión de esa matriz tardaría lo mismo con una supercomputadora actual. La eliminación Gaussiana requiere  $(n^3 + 2n - 3)/3$

multiplicaciones para poder evaluar un determinante de orden  $n$ , o sea que un determinante de orden 30 requiere 9019 multiplicaciones y uno de orden 50 requiere 41699 multiplicaciones; claro que una supercomputadora lo haría en una fracción de segundo. Pero la eliminación Gaussiana requiere la evaluación de un cociente de números enteros y esto precisa el uso de decimales o fracciones, por lo que presenta un inconveniente de tipo aritmético. El algoritmo DGO usa un formato cómodo y sencillo en su aplicación ya que opera sólo con números enteros, para encontrar la solución exacta de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales. Es tan exacto como la regla de Cramer pero requiere sólo un poco más de operaciones que la eliminación Gaussiana.

Adicionalmente, existen sistemas lineales mal condicionados, como la matriz de Hilbert y la matriz de Wilson, las cuales presentan serios problemas de redondeo que originan soluciones inexactas (diferentes de las soluciones correctas). Otras dificultades que se presentan al resolver un sistema de ecuaciones lineales es el de poder conocer la naturaleza de su solución y saber si el sistema tiene solución única o una infinidad de soluciones o simplemente no tiene solución. También hay que tomar en cuenta que no basta saber solucionar el sistema de ecuaciones lineales, si no cómo pueden aplicarlo en los problemas que se presenten en su profesión y en los casos de dos y tres dimensiones saber la naturaleza geométrica de su solución (Gómez-García, 1999).

Una sola ecuación no lineal es la siguiente:

$$f(x) = 0$$

Gómez-García (2009); Spiegel (2001) y Stewart (2002) citan que los métodos matemáticos para resolver ecuaciones no lineales (como los que se generan en una red hidráulica), se inicia con la Serie de Taylor en torno al punto  $a$  :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{(n-1)} + \dots$$

Si  $a = 0$  , la serie de Taylor se transforma en la serie de Maclaurin:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{(n-1)} + \dots \quad (2.6.1.1)$$

Burden y Faires (1985); Chapra y Canale (2007) señalan que el método de Newton-Raphson resuelve una sola ecuación no lineal e igual a cero, y se puede deducir de la serie de Taylor, considerando tan solo sus dos primeros términos, y haciendo la sustitución:  $x = x_{i+1}$  y  $a = x_i$  en la ecuación (2.6.1.1), hasta que  $f(x_{i+1}) = 0$  y posteriormente se despeja  $x_{i+1}$ , tal como se muestra a continuación:

$$f(x) \cong f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Si  $f(x_{i+1}) = 0$  , por ser raíz:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}; \quad f'(x_i) \neq 0 \quad (2.6.1.2)$$

donde:

$f(x_i)$  = función de  $x$  en el punto  $x_i$

$f'(x_i)$  = derivada de la función de  $x$  en el punto  $x_i$

$x_{i+1}$  = punto donde se interseca la tangente de la curva con el eje  $x$ ; la ecuación

(2.6.1.2) realiza un cálculo iterativo de esta manera:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \rightarrow x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \rightarrow \dots \rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \rightarrow \dots$$

hasta que  $x_{i+1} \cong x_i$  ó  $\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \approx 0$ .

El método de Newton-Raphson es un método abierto, en el sentido de que su convergencia global no está garantizada. Una manera de aumentar la garantía de alcanzar la convergencia es seleccionar un valor inicial lo suficientemente cercano a la raíz buscada, pero esto depende mucho de la naturaleza de la propia función por qué si esta presenta múltiples puntos de inflexión o pendientes grandes en torno de la raíz, aumenta las probabilidad de divergencia, lo cual exige seleccionar un valor cercano a la raíz (Gómez-García, 2009).

El método de Newton-Raphson, para el caso de dos ecuaciones no lineales ( $f_1(x)$  y  $f_2(x)$ ):

$$f_1(x^i) = (x_1^i - x_1^{i+1}) \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} + (x_2^i - x_2^{i+1}) \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2}$$

$$f_2(x^i) = (x_2^i - x_2^{i+1}) \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} + (x_1^i - x_1^{i+1}) \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2}$$

$$f_1(x^i) = x_1^i \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} + x_2^i \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} - x_1^{i+1} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} - x_2^{i+1} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2}$$

$$f_2(x^i) = x_2^i \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} + x_1^i \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} - x_2^{i+1} \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} - x_1^{i+1} \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{bmatrix} \right\} \\
\begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \end{bmatrix} \tag{2.6.1.3}
\end{aligned}$$

Para un sistema de  $N$  ecuaciones no lineales con  $N$  incógnitas, el método de *Newton-Raphson* usa las iteraciones recurrentes:

$$X^{(i+1)} = X^{(i)} - J^{-1} F(X^{(i)})$$

siendo  $J^{-1}$  la inversa de la matriz *Jacobiana* cuyos elementos son derivadas parciales de las funciones  $f_N$ , y  $X$  es el vector de las  $x$ . El número de iteración está dado por el superíndice, tal como se muestra a continuación:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_N} \end{bmatrix}^{-1}$$



$$F(X^i) = \begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \\ \vdots \\ f_N(x^i) \end{bmatrix}$$

$$X^i = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_N^i \end{bmatrix}, \quad X^{i+1} = \begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \\ \vdots \\ x_N^{i+1} \end{bmatrix}.$$

La ecuación (2.6.1.3), para  $N$  ecuaciones se muestra de esta manera:

$$\begin{bmatrix} x_1^{i+1} \\ x_2^{i+1} \\ \vdots \\ x_N^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_N^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^i)}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^i)}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N(x^i)}{\partial x_N} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x^i) \\ f_2(x^i) \\ \vdots \\ f_N(x^i) \end{bmatrix} \quad (2.6.1.4)$$

Las dificultades que se presentan con el método de Newton-Raphson al resolver ecuaciones no lineales es cuando este método no converge y no nos presenta solución alguna, dado la naturaleza de la propia función. Otra de las dificultades que se puede presentar es que no exista convergencia en un sistema de más de tres dimensiones, y en este caso no se tiene idea de lo que sucedió ya que no existe figura alguna que nos permita identificar el comportamiento. Las soluciones de este trabajo son números reales positivos que pueden ser racionales o irracionales, siendo los irracionales aquellos números que no pueden expresarse en forma de fracciones comunes (Gómez-García, 2009).

### 2.6.2. Soluciones hidráulicas

Diseño hidráulico tomando en cuenta la longitud y el diámetro de las tuberías. La fórmula de Hazen-Williams frecuentemente se usa para el diseño de la longitud y el diámetro de las tuberías, tomando en cuenta que esto está limitado a ciertos rangos de aplicación. Esta práctica puede tener efectos perjudiciales en el diseño de conducción y podría conducir a un litigio. La fórmula de Hazen-Williams es precisa si el sistema de conducción opera dentro del flujo turbulento, ya que esta fórmula falla cuando el flujo está fuera de este régimen. La fórmula de Hazen-Williams fue desarrollada para tuberías que tienen un diámetro máximo de hasta 3.66 m pero la mayoría de los tubos tenían diámetros menores de 1.8 m. El rango del número de Reynolds que abarca esta fórmula es aproximadamente de  $10^4$  hasta  $2 \times 10^6$  (Bombardelli y García, 2003).

Saldarriaga (2008), cita que las condiciones para trabajar con Hazen-Williams son las siguientes:

- El fluido debe ser exclusivamente agua a temperaturas normales.
- El diámetro debe de ser mayor o igual a 75 mm.
- La velocidad en las tuberías debe de ser menor a 3.0 m/s.

Nahavandi (1973), utiliza un método para obtener un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, cuya resolución consiste en expresar en forma matricial la pérdida de energía en los circuitos cerrados, y la ecuación de continuidad en los nodos, donde las variables desconocidas son las cargas en los nodos y los caudales.

Mays (2002), señala que los problemas clásicos de flujos de redes de conductos a presión se resuelven determinando los caudales en cada una de las líneas de conducción que conforman la red, así como las presiones en cualquier punto de la red como en los nodos. El primero requiere la ley de conservación del caudal en cada unión de las tuberías (ecuación de continuidad). El segundo especifica una relación no lineal entre el caudal y la pérdida de carga en cada una de las líneas de conducción, donde se pueden utilizar las ecuaciones de la energía del flujo de agua: de Darcy-Weisbach y de Hazen-Williams. Esto genera un conjunto de ecuaciones no lineales que pueden resolverse usando métodos iterativos que necesariamente requieren el auxilio de una computadora.

Método lineal de dos puntos para el análisis de tuberías, propone un análisis rápido de sistemas de distribución de agua que comúnmente se basa en el método del gradiente. Este procedimiento usa una secante en lugar de una tangente (intersecando dos puntos en la función de pérdida de carga, donde las pérdidas de carga están en función del caudal) para aproximar la función de pérdida de carga en la tubería. Se desarrolla un modelo teórico para un rango de caudales en el cual la secante aproxima la función de pérdida de carga sin exceder un error permisible  $E_{max}$ . Este sistema permite la disminución del número de iteraciones dentro del error permisible para alcanzar la convergencia. El propósito de este artículo es aplicar este método en una red de distribución del agua en donde se observa el beneficio de reducir significativamente las iteraciones para lograr la convergencia que soluciona algún aspecto de la red (Zyl *et al.*, 2008).

Deuerlein (2008), señala que el campo de análisis de sistemas de redes de distribución de agua consta de dos componentes: lo externo y el núcleo interno. La primera componente consiste en un conjunto de diagramas de árbol, mientras que la segunda está formada por distintos bloques que se conectan por puentes, de tal manera que ambas componentes del flujo de redes se traslapan en lo que se denomina raíz de nodos. Este método puede ser aplicado al desarrollo de estrategias para mejorar el control y las operaciones de la red de distribución de agua.

### **2.6.3. Métodos de optimización**

Brion y Mays (1991), presentan una metodología basada en la solución de programación lineal en gran escala, para la operación óptima de estaciones de bombeo en los sistemas de distribución de agua. La metodología se basa en el control óptimo operada por computadora, que interactúa con un modelo de simulación hidráulica que es usado para resolver implícitamente ecuaciones de la conservación del flujo y la energía, describiendo el flujo hidráulico en el modelo de optimización. Esta metodología se ha aplicado en un sistema de distribución de agua a presión en Austin Texas, que ha mostrado como pueden reducirse los costos de operación usando este método, donde los autores reconocen que la solución obtenida puede ser útil, como una guía, aunque no sea necesariamente la óptima.

Montesinos *et al.* (1996), mencionan la optimización de redes de distribución de agua utilizando un algoritmo genético. Un algoritmo genético (AG), es un procedimiento de búsqueda del óptimo de una función basado en la mecánica natural darwiniana de supervivencia de los individuos mejor adaptados. En este trabajo se

ha desarrollado un algoritmo genético que permite determinar la red de distribución de agua con un costo mínimo para una topología y una condición de carga dadas. Este proceso consiste en relacionar las redes con las cadenas binarias (conjuntos de unos y ceros). Se parte de un conjunto de redes generada aleatoriamente donde se efectúan los procesos naturales de selección, cruce y mutación, para obtener un nuevo conjunto de redes más pequeña. Así generación tras generación, se llega a algo mejor adaptado, en nuestro caso una red de distribución de agua con un costo mínimo.

El algoritmo genético fue implementado en FORTRAN-77 y ejecutable en PC. Aunque no hay prueba matemática de que el óptimo ocurrido sea global, el algoritmo genético representa una perspectiva de búsqueda más global que el resto de las técnicas. El algoritmo genético inicia la búsqueda del óptimo partiendo de un conjunto de puntos obtenidos de manera aleatoria y mediante los operadores de selección, cruce y mutación, así como el valor de la función objetivo en cada uno de estos puntos llega a tener la solución deseada, sin los inconvenientes de los métodos que requieren un determinado punto de partida para alcanzar la solución deseada.

Optimización por el método de Colonia de Hormigas para sistemas de distribución de agua. Durante la década pasada evolucionaron métodos para optimizar los sistemas de distribución de agua, un ejemplo es el algoritmo genético que últimamente ha sido muy utilizado como un método de optimización. Más recientemente surgió el método de *algoritmo de optimización de colonia de hormigas* (ACOAs) que es un método basado en las conductas de las hormigas que actualmente ha sido aplicado a un gran número de problemas de optimización en

ingeniería. Este método se basa en la conducta que tienen las hormigas para buscar su comida, para ello las hormigas depositan una hormona en el camino denominada feromona para estimular a las demás hormigas a seguir ese camino, con la finalidad de encontrar la ruta más corta entre el nido y la fuente de su alimento. Para optimizar los sistemas de distribución de agua los resultados que obtienen por este método se comparan con el uso de algoritmos genéticos (Maier, 2003).

#### **2.6.4. Programas comerciales para el diseño de redes**

Saldarriaga (2008), cita que existen algunos programas comerciales y otros que fueron generados en las universidades para modelar la distribución del agua en redes:

- **PIPE 2000.** Este programa fue diseñado para flujos permanentes en tiempos prolongados (EPS, *Extended Periods Simulation*). Determina presiones y caudales en la red, permitiendo cambiar las configuraciones del sistema o las condiciones de operación. También resuelve problemas de calibración, diseño y operación. Además permite el análisis hidráulico, calidad del agua y la simulación extendida EPS. Utiliza las ecuaciones de Hazen-Williams y Darcy-Weisbach y las resuelve con el método de la teoría lineal. Funciona en entornos de Windows 95, 98, NT4, NT5 Y XP. Su ventaja en comparación con otros programas es la confiabilidad de sus resultados, como también su capacidad de modelación y análisis. Su desventaja es que no permite diseñar.

- **EPANET.** Este programa fue desarrollado por la Agencia de Protección Ambiental de Estados Unidos (EPA, *Environment Protection Agency*), para el estudio y análisis del comportamiento de redes hidráulicas a presión. Permite incorporar la simulación de tuberías, bombas de velocidad fija y variable, válvulas de estrangulación, válvulas reguladoras de presión, tanques de altura piezométrica constante o variable y sistemas de control y operación temporales de nivel y de presión. El código está escrito en lenguaje C y permite el análisis hidráulico, calidad de agua y simulación extendida utilizando las ecuaciones de Hazen-Williams, Darcy-Weisbach, Chézy-Manning, resueltas con el método del gradiente y puede funcionar en entornos: MS DOS, Windows, 95, 98, NT4, NT5, XP; UNIX. Tiene las ventajas de tener facilidad de uso, distribución gratuita, y una presentación de resultados excelente. Sus desventajas son el de no permitir el diseño y que la entrada de datos es complicada.
- **GestarCAD. Una Aplicación para el Diseño y Simulación de Redes de Riego Bajo el Entorno de AutoCAD Utilizando Objetos Active X.** Es una aplicación computarizada que utiliza métodos numéricos avanzados modernos para la simulación hidráulica, en un entorno gráfico bajo AutoCAD, codificado en Visual Basic 6.0.

Algunas de las utilidades más importantes del GestarCAD son:

- a) Optimización económica de redes.
- b) Obtención de redes de longitud mínima.

- c) Comunicación en tiempo real con GPS.
- d) Generación de curvas de nivel.
- e) Cálculo de volúmenes de excavación en zanjas para enterrar tuberías.
- f) Distribución óptima de aspersores en una parcela.
- g) Redes de flujo.

GestarCAD es una aplicación creada en la Escuela Universidad Politécnica de Huesca. Serreta *et al.* (2002), relatan que el GestarCAD y 1.0  $\beta$  constituye una versión preliminar de un paquete informático, para el dimensionado, simulación y cartografía de redes presurizadas de distribución de fluidos, orientada a los sistemas de riego.

El EPS se conoce como simulación de período extendido y esto significa simular el comportamiento de un sistema de distribución del agua en un tiempo largo, que permite al que elabora el modelo, capturar los efectos en las demandas del consumo y en los niveles de agua almacenada sobre el rendimiento del sistema. Este método integra la ecuación diferencial que representa la variación en altura de los depósitos de almacenamiento con respecto al tiempo, utilizando el análisis de la red en estado estacionario o flujo permanente, para calcular los caudales de las tuberías en función de las alturas que tiene la superficie del agua en los tanques (Mays, 2002).



### 3. MATERIALES Y MÉTODOS

#### 3.1. Modelo matemático determinístico, para resolver la distribución de caudales en redes abiertas, con interconexión de bombas centrífugas tipo voluta y/o sumergibles emplazadas arbitrariamente.

##### 3.1.1. Notación

$Hb_i$  = carga de la bomba  $i$  .

$Hf_i$  = carga de la fuente de abastecimiento  $i$  (su superficie libre).

$Hn_u$  = carga del nodo  $u$  .

$Hr_k$  = carga a la entrada al sistema de riego  $k$  .

$Zf_i$  = carga por posición de la bomba de la fuente de abastecimiento  $i$  .

$Zn_u$  = carga por posición del nodo  $u$  .

$Zr_k$  = carga por posición a la entrada al sistema de riego  $k$  .

$Pf_i$  = presión en la superficie libre de la fuente de abastecimiento  $i$  .

$Pn_u$  = presión del nodo  $u$  .

$Pr_k$  = presión de operación del sistema de riego  $k$

$K_i$  = coeficiente de pérdidas de energía.

Las cargas están dadas en metros y las presiones en kilogramo fuerza por unidad de metro cuadrado.

Donde:

- $i$  : número que identifica o etiqueta a cualquier línea de la red, bomba y fuente de abastecimiento.

$$i = 1, 2, 3, \dots, nl$$

- $j$  : número que identifica a un accesorio que tiene pérdidas locales significativas

$$j = 1, 2, 3, \dots, na$$

- $u$  : número que identifica a un nodo de la red.

$$u = 1, 2, 3, \dots, nn$$

- $k$  : número que identifica a un sistema de riego.

$$k = 1, 2, 3, \dots, nr$$

- $s$  : tubería de succión.

- $d$  : tubería de descarga.

- $cb$  : columna de bombeo.

- $na$  : número total de accesorios que tienen pérdidas de carga significativas en una línea de la red.

- $nl$  : número total de líneas de la red abierta.

- $nr$  : número total de sistemas de riegos alimentados.

- $nn$  : número total de nodos.

Existen dos tipos de cargas con respecto a la energía potencial:

- a) Cargas por presión o piezométricas, que resultan de poner un piezómetro en la tubería ( $P/\gamma$ ).

- b) Cargas totales que se miden a partir del nivel de referencia ( $H = Z + P/\gamma$ ).

### 3.1.2. Desarrollo del modelo matemático

El desarrollo del modelo matemático en redes abiertas comprende las etapas siguientes:

Primero; ubicación del nivel de referencia. Es el nivel para poder medir los cambios de energía del flujo en la red. Se puede ubicar, en cualquier parte, pero se recomienda situarlo en el nivel más bajo, ya sea que corresponda a un nivel dinámico de un acuífero en la caso de bomba sumergible o en el nivel de la superficie libre de la fuente de abastecimiento (depósito, lago, río, etc.), en el caso de bomba centrífuga.

Segundo; ubicación de los puntos principales o estratégicos para medir las cargas en la red:

- Superficies de las fuentes de abastecimiento que abastecen a la red (puntos iniciales de la red).
- Salidas de las bombas.
- Nodos.
- Entradas a los sistemas de riego (puntos finales de la red).

Tercero; identificación de los tipos de líneas que conforman la red:

- *Línea con bomba.* Son líneas que tienen una bomba. Cada línea con bomba está conformada por dos tramos. En el caso de bombas sumergibles en pozos profundos, el primer tramo es la columna de bomba (tubería vertical que está dentro del pozo, que conecta a la bomba), y el segundo tramo es la tubería de descarga (la que sale del

pozo profundo, hasta el primer nodo en la red). En la situación de una bomba centrífuga tipo voluta de eje horizontal, el primer tramo es la tubería de succión (la que está antes de la bomba) y la tubería de descarga (la que está después de la bomba para conectar al nodo).

Al aplicar la ecuación (2.3.1) a una línea con bomba, se tiene la ecuación que sigue:

$$Hf_i + Hb_i - K_i Q_i^2 - Hn_u = 0 \quad (3.1.2.1)$$

la carga en la superficie de la fuente de abastecimiento, a partir del nivel de referencia será:

$$Hf_i = Zf_i + \frac{Pf_i}{\gamma} \quad (3.1.2.2)$$

si  $Pf$  es igual a la presión atmosférica:

$$Pf = 0$$

siendo así, la ecuación (3.1.2.2) se convierte en la expresión que sigue:

$$Hf_i = Zf_i \quad (3.1.2.3)$$

la ecuación (2.3.8), de las curvas características de las bombas:

$$Hb_i = A_i Q_i^2 + B_i Q_i + C_i \quad (3.1.2.4)$$

la carga a partir del nivel de referencia en cualquier nodo será:

$$Hn_u = Zn_u + \frac{Pn_u}{\gamma} \quad (3.1.2.5)$$

si en la conducción existe una bomba centrífuga tipo voluta de eje horizontal, el coeficiente de pérdida de energía ( $K_i$ ):

$$K_i = \left\{ \left[ f_{s_i} \frac{L_{s_i}}{D_{s_i}} + \left( \sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} \right)_{s_i} \right] \frac{1}{D_{s_i}^4} + \left[ f_{d_i} \frac{L_{d_i}}{D_{d_i}} + \left( \sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} \right)_{d_i} \right] \frac{1}{D_{d_i}^4} \right\} \frac{8}{\pi^2 g} \quad (3.1.2.6)$$

la ecuación de Colebrook (Ecuación 2.2.5), para obtener el coeficiente de fricción hidráulico ( $f$ ), para cualquier tubería de la red (Saldarriaga, 2008):

$$\frac{1}{\sqrt{f_i}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon_i}{3.7 D_i} + \frac{2.51}{\text{Re}_i \sqrt{f_i}} \right)$$

si en la conducción existe una bomba tipo sumergible en un pozo profundo,

el coeficiente de pérdida de energía ( $K_i$ ):

$$K_i = \left\{ \left[ f_{CB_i} \frac{L_{CB_i}}{D_{CB_i}} + \left( \sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} \right)_{CB_i} \right] \frac{1}{D_{CB_i}^4} + \left[ f_{d_i} \frac{L_{d_i}}{D_{d_i}} + \left( \sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} \right)_{d_i} \right] \frac{1}{D_{d_i}^4} \right\} \frac{8}{\pi^2 g} \quad (3.1.2.7)$$

- *Línea entre nodos*; aplicando la ecuación (2.2.1) entre dos nodos de la red, se tiene la ecuación siguiente:

$$Hn_u - Hn_{u+1} - K_i Q_i^2 = 0$$

(3.1.2.8) en una conducción sin bomba y tenga dos diámetros diferentes, el coeficiente de pérdida de energía ( $K_i$ ):

$$K_i = \left\{ \left[ f_{1_i} \frac{L_{1_i}}{D_{1_i}} + \left( \sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} \right)_{1_i} \right] \frac{1}{D_{1_i}^4} + \left[ f_{2_i} \frac{L_{2_i}}{D_{2_i}} + \left( \sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} \right)_{2_i} \right] \frac{1}{D_{2_i}^4} \right\} \frac{8}{\pi^2 g} \quad (3.1.2.9)$$

- *Línea conectada al sistema de riego*; al aplicar la ecuación (2.2.1) en cualquier línea que salga de un nodo y se conecte a un sistema de riego, su ecuación es la siguiente:

$$Hr_k - Hn_u + K_i Q_i^2 = 0 \quad (3.1.2.10)$$

el coeficiente  $K_i$  se obtiene de la ecuación (3.1.2.9). La carga a partir del nivel de referencia, en la entrada a los sistemas de riego, es igual a:

$$Hr_k = Zr_k + \frac{Pr_k}{\gamma} \quad (3.1.2.11)$$

la energía específica o las cargas de los flujos en la red, están expresadas en las ecuaciones (3.1.2.1), (3.1.2.8) y (3.1.2.10).

La pérdida de carga total en un tramo de la red:

$$h_{tot_i} = K_i Q_i^2$$

una tubería de longitud mayor de 1000 veces su diámetro, se considera larga y es aceptable que se desprecien las pérdidas por accesorios (King et al., 1948):

$$\sum_{j=1}^{na} K_{loc_j} = 0$$

Cuarto; la ecuación que rige el balance de masa de entradas y salidas en un  $nodo_u$  de una red:

$$\left(\sum Q\right)_{entranal\ nodo_u} - \left(\sum Q\right)_{salendel\ nodo_u} = 0 \quad (3.1.2.13)$$

En resumen, para una red abierta con interconexión de bombas emplazadas arbitrariamente, se generan cuatro tipos de ecuaciones:

- Líneas con bombas (ecuación 3.1.2.1).
- Líneas entre nodos (ecuación 3.1.2.8).
- Líneas que alimentan a sistemas de riego (ecuación 3.1.2.10).
- Ecuación de continuidad (ecuación 3.1.2.13).

Las ecuaciones (3.1.2.1), (3.1.2.8), (3.1.2.10) y (3.1.2.13), conforman el **modelo matemático generalizado** para resolver una red abierta con interconexión de bombas centrífugas y/o sumergibles, emplazadas arbitrariamente para alimentar sistemas de riego. Por lo tanto el **modelo matemático** está conformado por las ecuaciones siguientes:

$$Hf_i + Hb_i - K_i Q_i^2 - Hn_u = 0 \quad (3.1.2.1)$$

$$Hn_u - Hn_{u+1} - K_i Q_i^2 = 0 \quad (3.1.2.8)$$

$$Hr_k - Hn_u + K_i Q_i^2 = 0 \quad (3.1.2.10)$$

$$\left(\sum Q\right)_{entrana\ nodo_u} - \left(\sum Q\right)_{salendel\ nodo_u} = 0 \quad (3.1.2.13)$$

### 3.1.3. Procedimiento de aplicación del modelo matemático en una red

El procedimiento a seguir en la aplicación del modelo, para obtener un conjunto de ecuaciones, que determinen la distribución de caudales en la red, es el siguiente:

- Seleccionar el tipo de bomba (bomba centrífuga tipo voluta o sumergible) y el tipo de sistema de riego.
- Ubicar el nivel de referencia.
- Enumerar los nodos.
- Enumerar las bombas.
- Enumerar los sistemas de riego.

- Enumerar las líneas de conducción y en el caso de las líneas con bomba se identificarán con el mismo número de la bomba (línea 1, bomba 1, línea 2, bomba 2, etc.).
- Identificar la clase de línea de conducción, para relacionarla con la ecuación que le corresponda:

Línea con bomba (Ec. 3.1.2.1).

Línea entre nodos (Ec. 3.1.2.8).

Línea conectada al sistema de riego (Ec. 3.1.2.10).

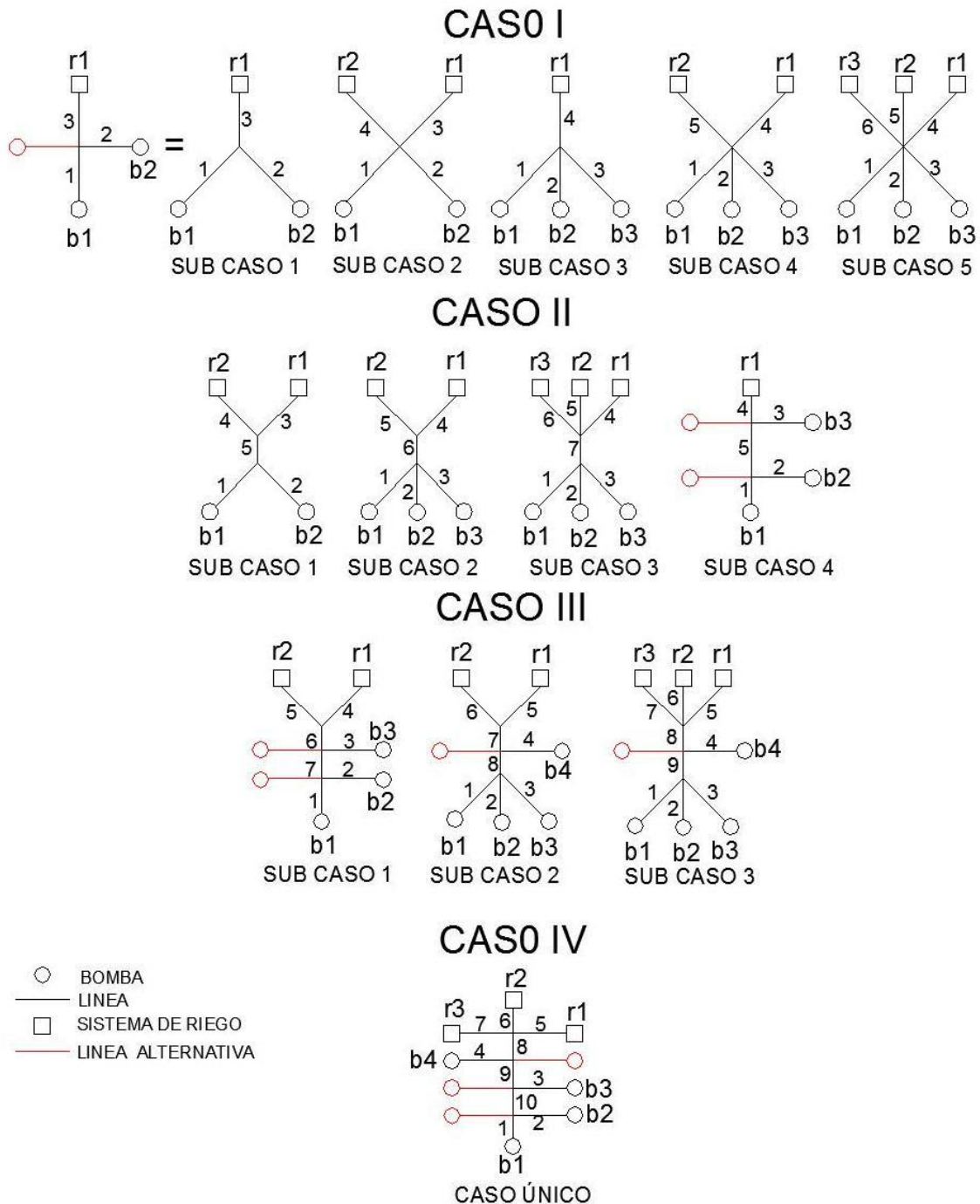
- Efectuar combinaciones de restas entre las ecuaciones de dos extremidades de la red (en caso de existir nodos entre los extremos de la red, deberá aplicarse además la ecuación (3.1.2.8), restándola a la diferencia de las dos ecuaciones de las extremidades); se repite el proceso hasta efectuar el total de combinaciones posibles, obteniéndose un conjunto de ecuaciones no-lineales.
- Por último, aplicando la ecuación (3.1.2.10) o la ecuación de continuidad, a los nodos de la red, se obtiene un conjunto de ecuaciones lineales, para obtener las entradas y salidas de caudales en cada nodo.

### **3.2. Aplicación y solución del modelo para casos de redes abiertas con interconexión de bombas centrífugas y/o sumergibles emplazadas arbitrariamente para alimentar sistemas de riego**

En este documento se presentan las ecuaciones para la aplicación y solución de cuatro casos con sus respectivos subcasos, para un total de catorce tipos de



redes abiertas que se pueden presentar en el medio agrícola mexicano (Figura 3.2.1).



**Figura 3.2.1.** Cuatro casos y sus respectivos subcasos de redes abiertas con interconexión de bombas.

### 3.2.1. Aplicación del modelo

Aplicando el procedimiento descrito en el punto 3.1.3, se obtienen el conjunto de ecuaciones no lineales y lineales, para cada caso con sus respectivos subcasos (Figura 3.2.1). Al aplicar las ecuaciones generalizadas para interconexión de bombas en diversos puntos de la red, con el fin de encontrar una solución para cualquier red abierta, se obtienen más ecuaciones que incógnitas, por lo que es necesario seleccionarlas, para lograr que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas, de tal manera que todos los caudales estén en las ecuaciones lineales y no lineales, y así proceder a solucionarlas con métodos matriciales.

**Caso I – subcaso 1** Esta red consiste en 1 nodo, 2 bombas, 1 sistema de riego y 3 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.1)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr - K_2Q_2^2 - K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.2)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.3)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0 \quad (3.2.1.4)$$

se seleccionan o eligen tres ecuaciones de las cuatro, para solucionar este subcaso.

**Caso I – subcaso 2.** Esta red consiste en 1 nodo, 2 bombas, 2 sistemas de riego y 4 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.5)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.6)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.7)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.8)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.9)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.10)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0 \quad (3.2.1.11)$$

se seleccionan cuatro ecuaciones de las siete, para solucionar este subcaso.

**Caso I – subcaso 3.** Esta red consiste en 1 nodo, 3 bombas, 1 sistema de riego y 4 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.12)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.13)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.14)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.15)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.16)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.17)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0$$

(3.2.1.18) se seleccionan cuatro ecuaciones de las siete, para solucionar este subcaso.

**Caso I – subcaso 4.** Esta red consiste en 1 nodo, 3 bombas, 2 sistemas de riego y 5 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.19)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.20)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.21)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.22)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.23)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.24)$$

$$Hr_2 - Hr_1 + K_5Q_5^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.25)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.26)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.27)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.28)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 = 0 \quad (3.2.1.29)$$

se seleccionan cinco ecuaciones de las once, para solucionar este subcaso.

**Caso I – subcaso 5.** Esta red consiste en 1 nodo, 3 bombas, 3 sistemas de riego y 6 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.30)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.31)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_3 - K_1Q_1^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.32)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.33)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.34)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_3 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.35)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.36)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.37)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_3 - K_3Q_3^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.38)$$

$$Hr_2 - Hr_1 - K_4Q_4^2 + K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.39)$$

$$Hr_3 - Hr_1 - K_4Q_4^2 + K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.40)$$

$$Hr_2 - Hr_3 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.41)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.42)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.43)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.44)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 - Q_6 = 0 \quad (3.2.1.45)$$

se seleccionan seis ecuaciones de las dieciséis, para solucionar este subcaso.

**Caso II – subcaso 1.** Esta red consiste en 2 nodos, 2 bombas, 2 sistemas de riego y 5 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.46)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.47)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.48)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.49)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.50)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.51)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_5 = 0 \quad (3.2.1.52)$$

$$Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0 \quad (3.2.1.53)$$

se seleccionan cinco ecuaciones de las ocho, para solucionar este subcaso.

**Caso II – subcaso 2.** Esta red consiste en 2 nodos, 3 bombas, 2 sistemas de riego y 6 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.54)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.55)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.56)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.57)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.58)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.59)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.60)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.61)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.62)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.63)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_6 = 0 \quad (3.2.1.64)$$

$$Q_4 + Q_5 - Q_6 = 0 \quad (3.2.1.65)$$

se seleccionan seis ecuaciones de las doce, para solucionar este subcaso.

**Caso II – subcaso 3.** Esta red consiste en 2 nodos, 3 bombas, 3 sistemas de riego y 7 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.66)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.67)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_3 - K_1Q_1^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.68)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.69)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.70)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_3 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.71)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.72)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.73)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_3 - K_3Q_3^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.74)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.75)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.76)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.77)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.78)$$

$$Hr_1 - Hr_3 + K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.79)$$

$$Hr_2 - Hr_3 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.80)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_7 = 0 \quad (3.2.1.81)$$

$$Q_4 + Q_5 + Q_6 - Q_7 = 0 \quad (3.2.1.82)$$

se seleccionan siete ecuaciones de las diecisiete, para solucionar este subcaso.

**Caso II – subcaso 4.** Esta red consiste en 2 nodos, 3 bombas, 1 sistema de riego y 5 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.83)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.84)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0 \quad (3.2.1.85)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.86)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.87)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.88)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_5 = 0 \quad (3.2.1.89)$$

$$Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0 \quad (3.2.1.90)$$

se seleccionan cinco ecuaciones de las ocho, para solucionar este subcaso.



**Caso III – subcaso 1.** Esta red consiste en 3 nodos, 3 bombas, 2 sistemas de riego y 7 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.91)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.92)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.93)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.94)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.95)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.96)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.97)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.98)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.99)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0 \quad (3.2.1.100)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_7 = 0 \quad (3.2.1.101)$$

$$Q_7 + Q_3 - Q_6 = 0 \quad (3.2.1.102)$$

$$Q_4 + Q_5 - Q_6 = 0 \quad (3.2.1.103)$$

se seleccionan siete ecuaciones de las trece, para solucionar este subcaso.

**Caso III – subcaso 2.** Esta red consiste en 3 nodos, 4 bombas, 2 sistemas de riego y 8 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.104)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.105)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.106)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.107)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.108)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.109)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_1 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.110)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.111)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.112)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.113)$$

$$Hb_1 - Hb_4 + Hf_1 - Hf_4 - K_1Q_1^2 + K_4Q_4^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.114)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.115)$$

$$Hb_2 - Hb_4 + Hf_2 - Hf_4 - K_2Q_2^2 + K_4Q_4^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.116)$$

$$Hb_3 - Hb_4 + Hf_3 - Hf_4 - K_3Q_3^2 + K_4Q_4^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.117)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.118)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_8 = 0 \quad (3.2.1.119)$$

$$Q_5 + Q_6 - Q_7 = 0 \quad (3.2.1.120)$$

$$Q_4 + Q_8 - Q_7 = 0 \quad (3.2.1.121)$$

se seleccionan ocho ecuaciones de las dieciocho, para solucionar este subcaso.

**Caso III – subcaso 3.** Esta red consiste en 3 nodos, 4 bombas, 3 sistemas de riego y 9 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.122)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.123)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_3 - K_1Q_1^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.124)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.125)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.126)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_3 - K_2Q_2^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.127)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.128)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.129)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_3 - K_3Q_3^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.130)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_1 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.131)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.132)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_3 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.133)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.134)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.135)$$

$$Hb_1 - Hb_4 + Hf_1 - Hf_4 - K_1Q_1^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.136)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 = 0 \quad (3.2.1.137)$$

$$Hb_2 - Hb_4 + Hf_2 - Hf_4 - K_2Q_2^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.138)$$

$$Hb_3 - Hb_4 + Hf_3 - Hf_4 - K_3Q_3^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.139)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.140)$$

$$Hr_1 - Hr_3 + K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.141)$$

$$Hr_2 - Hr_3 + K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.142)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_9 = 0 \quad (3.2.1.143)$$

$$Q_4 + Q_9 - Q_8 = 0 \quad (3.2.1.144)$$

$$Q_5 + Q_6 + Q_7 - Q_8 = 0 \quad (3.2.1.145)$$

se seleccionan nueve ecuaciones de las 25, para solucionar este subcaso.

**Caso IV – único.** Esta red consiste en 4 nodos, 4 bombas, 3 sistemas de riego y 10 líneas de conducción:

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0$$

(3.2.146)

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_2 - K_1Q_1^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.147)$$

$$Hb_1 + Hf_1 - Hr_3 - K_1Q_1^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.148)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.149)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.150)$$

$$Hb_2 + Hf_2 - Hr_3 - K_2Q_2^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.151)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.152)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_2 - K_3Q_3^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.153)$$

$$Hb_3 + Hf_3 - Hr_3 - K_3Q_3^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.154)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_1 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.155)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.156)$$

$$Hb_4 + Hf_4 - Hr_3 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0 \quad (3.2.1.157)$$

$$Hb_1 - Hb_2 + Hf_1 - Hf_2 - K_1Q_1^2 + K_2Q_2^2 = 0 \quad (3.2.1.158)$$

$$Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.159)$$

$$Hb_1 - Hb_4 + Hf_1 - Hf_4 - K_1Q_1^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.160)$$

$$Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.161)$$

$$Hb_2 - Hb_4 + Hf_2 - Hf_4 - K_2Q_2^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0 \quad (3.2.1.162)$$

$$Hb_3 - Hb_4 + Hf_3 - Hf_4 - K_3Q_3^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0 \quad (3.2.1.163)$$

$$Hr_1 - Hr_2 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0 \quad (3.2.1.164)$$

$$Hr_1 - Hr_3 + K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.165)$$

$$Hr_2 - Hr_3 + K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0 \quad (3.2.1.166)$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_{10} = 0 \quad (3.2.1.167)$$

$$Q_3 + Q_{10} - Q_9 = 0 \quad (3.2.1.168)$$

$$Q_4 + Q_9 - Q_8 = 0 \quad (3.2.1.169)$$

$$Q_8 - Q_5 - Q_6 - Q_7 = 0 \quad (3.2.1.170)$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_8 = 0 \quad (3.2.1.179)$$

se seleccionan diez ecuaciones de las veintiséis, para solucionar este subcaso.

### 3.2.2. Solución del modelo

Solución del conjunto de ecuaciones no lineales y lineales para cada caso con sus respectivos subcasos, planteados en el punto 3.2.1 (Figura 3.2.1).

De la ecuación (3.1.2.4), se obtienen las ecuaciones siguientes para los casos de que existan bombas etiquetadas como  $i = 1, 2, 3$  y  $4$ :

$$Hb_1 = A_1Q_1^2 + B_1Q_1 + C_1 \quad (3.2.2.1)$$

$$Hb_2 = A_2Q_2^2 + B_2Q_2 + C_2 \quad (3.2.2.2)$$

$$Hb_3 = A_3Q_3^2 + B_3Q_3 + C_3 \quad (3.2.2.3)$$

$$Hb_4 = A_4Q_4^2 + B_4Q_4 + C_4 \quad (3.2.2.4)$$

Al derivar parcialmente, las ecuaciones (3.3.1) al (3.3.4), con respecto a su caudal respectivo, se convierten en las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} = 2A_1Q_1 + B_1$$

$$\frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} = 2A_2Q_2 + B_2$$

$$\frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} = 2A_3Q_3 + B_3$$

$$\frac{\partial Hb_4}{\partial Q_4} = 2A_4Q_4 + B_4.$$

De la ecuación (3.1.2.3), se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$Hf_1 = Zf_1$$

$$Hf_2 = Zf_2$$

$$Hf_3 = Zf_3$$

$$Hf_4 = Zf_4.$$

De la ecuación (3.1.2.8), se obtienen las ecuaciones siguientes para los casos de que existan sistemas de riego etiquetados como  $k = 1, 2$  y  $3$ :

$$Hr_1 = Zr_1 + \frac{Pr_1}{\gamma}$$

$$Hr_2 = Zr_2 + \frac{Pr_2}{\gamma}$$

$$Hr_3 = Zr_3 + \frac{Pr_3}{\gamma}.$$

**Solución, Caso I – subcaso 1.** Esta red consiste en 1 nodo, 2 bombas, 1 sistema de riego y 3 líneas de conducción.

Las tres ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.1), (3.2.1.2) y (3.2.1.4), cuyas funciones son:

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_3Q_3^2 = 0$$

$$f_3 = Q_1 + Q_2 - Q_3 = 0.$$

De la ecuación 2.6.1.4, si  $x = Q$ :

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1Q_1$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = -2K_3Q_3$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2Q_2$$

$$J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = 1$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = 0.$$

**Solución, Caso I – subcaso 2.** Esta red consiste en 1 nodo, 2 bombas, 2 sistemas de riego y 4 líneas de conducción.

Las cuatro ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.5), (3.2.1.7), (3.2.1.10) y (3.2.1.11):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_3Q_3^2 = 0$$

$$f_3 = Hr_1 - Hr_2 + K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$



$$f_4 = Q_1 + Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{23} \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{33} \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = -2K_3 Q_3$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = 2K_4 Q_4$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = 1$$

$$J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{21} \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = 0.$$

**Solución, Caso I – subcaso 3.** Esta red consiste en 1 nodo, 3 bombas, 1 sistema de riego y 4 líneas de conducción.

Las cuatro ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.12), (3.2.1.13), (3.2.1.14) y (3.2.1.18):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1Q_1$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = -2K_4Q_4$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2Q_2$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3Q_3$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = 1$$

$$J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = 0.$$

**Solución, Caso I – subcaso 4.** Esta red consiste en 1 nodo, 3 bombas, 2 sistemas de riego y 5 líneas de conducción.

Las cinco ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.19), (3.2.1.20), (3.2.1.21), (3.2.1.25) y (3.2.1.29):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_4 = Hr_2 - Hr_1 + K_5Q_5^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_5 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1Q_1$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = -2K_4Q_4$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2Q_2$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3Q_3$$

$$J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = 2K_5Q_5$$

$$J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = 1$$

$$J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = 0$$

$$J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = 0.$$

**Solución, Caso I – subcaso 5.** Esta red consiste en 1 nodo, 3 bombas, 3 sistemas de riego y 6 líneas de conducción.

Las seis ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.30), (3.2.1.33), (3.2.1.36), (3.2.1.39), (3.2.1.40) y (3.2.1.45):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_4 = Hr_2 - Hr_1 - K_4Q_4^2 + K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_5 = Hr_3 - Hr_1 - K_4Q_4^2 + K_6Q_6^2 = 0$$

$$f_6 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 - Q_5 - Q_6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = 2K_5 Q_5$$

$$J_{56} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = 2K_6 Q_6$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = 0$$

$$J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{36} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_6} = J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = 0$$

$$J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_6} = J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = 0$$

$$J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_1} = J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_2} = J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_3} = 1$$

$$J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = -1.$$

**Solución, Caso II – subcaso 1.** Esta red consiste en 2 nodos, 2 bombas, 2 sistemas de riego y 5 líneas de conducción.

Las cinco ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.46), (3.2.1.49), (3.2.1.51), (3.2.1.52) y (3.2.1.53):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_3 = Hr_1 + Hr_2 + K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_4 = Q_1 + Q_2 - Q_5 = 0$$

$$f_5 = Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \end{bmatrix} \quad (3.2.2.5)$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1Q_1$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = -2K_3Q_3$$

$$J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = -2K_5Q_5$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2Q_2$$

$$J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = -2K_4Q_4$$

$$J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = 2K_3 Q_3$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = 1$$

$$J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = 0.$$

**Solución, Caso II – subcaso 2.** Esta red consiste en 2 nodos, 3 bombas, 2 sistemas de riego y 6 líneas de conducción.

Las seis ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.54), (3.2.1.57), (3.2.1.58), (3.2.1.63), (3.2.1.64) y (3.2.1.65):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1 Q_1^2 - K_4 Q_4^2 - K_6 Q_6^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2 Q_2^2 - K_5 Q_5^2 - K_6 Q_6^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3 Q_3^2 - K_4 Q_4^2 - K_6 Q_6^2 = 0$$

$$f_4 = Hr_1 - Hr_2 + K_4 Q_4^2 - K_5 Q_5^2 = 0$$

$$f_5 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_6 = 0$$

$$f_6 = Q_4 + Q_5 - Q_6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2 * K_1 Q_1$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{36} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_6} = -2K_6 Q_6$$

$$J_{22} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = 2K_4 Q_4$$

$$J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial f_3} = J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial f_5} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial f_1} = 0$$

$$J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial f_4} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial f_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial f_2} = 0$$



$$\begin{aligned}
J_{35} &= \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial f_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial f_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial f_3} = J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial f_6} = 0 \\
J_{54} &= \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial f_5} = J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial f_1} = J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial f_2} = J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial f_3} = 0 \\
J_{51} &= \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = 1 \\
J_{56} &= \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = -1.
\end{aligned}$$

**Solución, Caso II – subcaso 3.** Esta red consiste en 2 nodos, 3 bombas, 3 sistemas de riego y 7 líneas de conducción.

Las siete ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.66), (3.2.1.70), (3.2.1.74), (3.2.1.78), (3.2.1.79), (3.2.1.81) y (3.2.1.82):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_5Q_5^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_3 - K_3Q_3^2 - K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$f_4 = Hr_1 - Hr_2 + K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_5 = Hr_3 - Hr_1 - K_4Q_4^2 + K_6Q_6^2 = 0$$

$$f_6 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_7 = 0$$

$$f_7 = Q_4 + Q_5 + Q_6 - Q_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \\ Q_7^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \\ Q_7^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i & J_{17}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i & J_{27}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i & J_{37}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i & J_{47}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i & J_{57}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i & J_{67}^i \\ J_{71}^i & J_{72}^i & J_{73}^i & J_{74}^i & J_{75}^i & J_{76}^i & J_{77}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \\ f_7^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{17} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_7} = J_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_7} = J_{37} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_7} = -2K_7 Q_7$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{56} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = 2K_6 Q_6$$

$$J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_1} = J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_2} = J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_3} = J_{74} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_4} = J_{75} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_5} = J_{76} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_6} = 1$$

$$J_{67} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_7} = J_{77} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_7} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = 0$$

$$J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_6} = J_{47} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_7} = J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = 0$$

$$J_{57} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_7} = J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = J_{71} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_1} = J_{72} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_2} = J_{73} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_3} = 0 .$$

**Solución, Caso II – subcaso 4.** Esta red consiste en 2 nodos, 3 bombas, 1 sistema de riego y 5 líneas de conducción.

Las cinco ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.83), (3.2.1.84), (3.2.1.85), (3.2.1.89) y (3.2.1.90):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_1 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_4 = Q_1 + Q_2 - Q_5 = 0$$

$$f_5 = Q_3 + Q_5 - Q_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = 0$$

$$J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = 1$$

$$J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = -1.$$

**Solución, Caso III – subcaso 1.** Esta red consiste en 3 nodos, 3 bombas, 2 sistemas de riego y 7 líneas de conducción.

Las siete ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.95), (3.2.1.98), (3.2.1.99), (3.2.1.100), (3.2.1.101), (3.2.1.102) y (3.2.1.103):

$$f_1 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_1 - Hb_3 + Hf_1 - Hf_3 - K_1Q_1^2 + K_3Q_3^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_2 - Hb_3 + Hf_2 - Hf_3 - K_2Q_2^2 + K_3Q_3^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$f_4 = Hr_1 - Hr_2 + K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_5 = Q_1 + Q_2 - Q_7 = 0$$

$$f_6 = Q_3 + Q_7 - Q_6 = 0$$

$$f_7 = Q_4 + Q_5 - Q_6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \\ Q_7^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \\ Q_7^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i & J_{17}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i & J_{27}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i & J_{37}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i & J_{47}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i & J_{57}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i & J_{67}^i \\ J_{71}^i & J_{72}^i & J_{73}^i & J_{74}^i & J_{75}^i & J_{76}^i & J_{77}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \\ f_7^i \end{bmatrix}$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3Q_3$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = -2K_4Q_4$$

$$J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = -2K_6Q_6$$

$$J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = 2K_3 Q_3$$

$$J_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_7} = J_{37} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_7} = -2K_7 Q_7$$

$$J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = 2K_4 Q_4$$

$$J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_3} = J_{67} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_7} = J_{74} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_4} = J_{75} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_5} = 1$$

$$J_{57} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_7} = J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = J_{76} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_6} = -1$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{17} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_7} = J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = 0$$

$$J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{36} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_6} = 0$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_6} = J_{47} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_7} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = 0$$

$$J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = J_{56} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_1} = J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_2} = J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = 0$$

$$J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = J_{71} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_1} = J_{72} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_2} = J_{73} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_3} = J_{77} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_7} = 0.$$

**Solución, Caso III – subcaso 2.** Esta red consiste en 3 nodos, 4 bombas, 2 sistemas de riego y 8 líneas de conducción.

Las ocho ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.114), (3.2.1.116), (3.2.1.117), (3.2.1.104), (3.2.1.111), (3.2.1.119), (3.2.1.120) y (3.2.1.121):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1 Q_1^2 - K_5 Q_5^2 - K_7 Q_7^2 - K_8 Q_8^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_4 + Hf_4 - Hr_2 - K_4 Q_4^2 - K_6 Q_6^2 - K_7 Q_7^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_1 - Hb_4 + Hf_1 - Hf_4 - K_1 Q_1^2 + K_4 Q_4^2 - K_8 Q_8^2 = 0$$

$$f_4 = Hb_2 - Hb_4 + Hf_2 - Hf_4 - K_2 Q_2^2 + K_4 Q_4^2 - K_8 Q_8^2 = 0$$

$$f_5 = Hb_3 - Hb_4 + Hf_3 - Hf_4 - K_3 Q_3^2 + K_4 Q_4^2 - K_8 Q_8^2 = 0$$

$$f_6 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_8 = 0$$

$$f_7 = Q_4 + Q_8 - Q_7 = 0$$

$$f_8 = Q_5 + Q_6 - Q_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \\ Q_7^{i+1} \\ Q_8^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \\ Q_7^i \\ Q_8^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i & J_{17}^i & J_{18}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i & J_{27}^i & J_{28}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i & J_{37}^i & J_{38}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i & J_{47}^i & J_{48}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i & J_{57}^i & J_{58}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i & J_{67}^i & J_{68}^i \\ J_{71}^i & J_{72}^i & J_{73}^i & J_{74}^i & J_{75}^i & J_{76}^i & J_{77}^i & J_{78}^i \\ J_{81}^i & J_{82}^i & J_{83}^i & J_{84}^i & J_{85}^i & J_{86}^i & J_{87}^i & J_{88}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \\ f_7^i \\ f_8^i \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = -2K_5Q_5$$

$$J_{17} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_7} = J_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_7} = -2K_7Q_7$$

$$J_{18} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_8} = J_{38} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_8} = J_{48} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_8} = J_{58} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_8} = -2K_8Q_8$$

$$J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = -2K_6Q_6$$

$$J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = \frac{\partial Hb_4}{\partial Q_4} - 2K_4Q_4$$

$$J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = -\frac{\partial Hb_4}{\partial Q_4} + 2K_4Q_4$$

$$J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2Q_2$$

$$J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3Q_3$$

$$J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_1} = J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_2} = J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_3} = J_{74} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_4} = J_{78} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_8} = J_{85} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = J_{86} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_6} = 1$$

$$J_{68} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_8} = J_{77} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_7} = J_{87} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_7} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = J_{28} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_8} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = 0$$

$$J_{36} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_6} = J_{37} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_7} = J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_6} = 0$$



$$J_{47} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_7} = J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = J_{56} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = J_{57} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_7} = 0$$

$$J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = J_{67} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_7} = J_{71} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_1} = J_{72} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{73} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_3} = J_{75} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_5} = J_{76} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_6} = J_{81} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_1} = J_{82} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_2} = J_{83} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_3} = 0$$

$$J_{84} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_4} = J_{88} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_8} = 0.$$

**Solución, Caso III – subcaso 3.** Esta red consiste en 3 nodos, 4 bombas, 3 sistemas de riego y 9 líneas de conducción.

Las nueve ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.136), (3.2.1.138), (3.2.1.139), (3.2.1.131), (3.2.1.132), (3.2.1.133), (3.2.1.143), (3.2.1.144) y (3.2.1.145):

$$f_1 = Hb_4 + Hf_4 - Hr_1 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_4 + Hf_4 - Hr_2 - K_4Q_4^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_4 + Hf_4 - Hr_3 - K_4Q_4^2 - K_7Q_7^2 - K_8Q_8^2 = 0$$

$$f_4 = Hb_1 - Hb_4 + Hf_1 - Hf_4 - K_1Q_1^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0$$

$$f_5 = Hb_2 - Hb_4 + Hf_2 - Hf_4 - K_2Q_2^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0$$

$$f_6 = Hb_3 - Hb_4 + Hf_3 - Hf_4 - K_3Q_3^2 + K_4Q_4^2 - K_9Q_9^2 = 0$$

$$f_7 = Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_9 = 0$$

$$f_8 = Q_4 + Q_9 - Q_8 = 0$$

$$f_9 = Q_5 + Q_6 + Q_7 - Q_8 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \\ Q_7^{i+1} \\ Q_8^{i+1} \\ Q_9^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \\ Q_7^i \\ Q_8^i \\ Q_9^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i & J_{17}^i & J_{18}^i & J_{19}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i & J_{27}^i & J_{28}^i & J_{29}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i & J_{37}^i & J_{38}^i & J_{39}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i & J_{47}^i & J_{48}^i & J_{49}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i & J_{57}^i & J_{58}^i & J_{59}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i & J_{67}^i & J_{68}^i & J_{69}^i \\ J_{71}^i & J_{72}^i & J_{73}^i & J_{74}^i & J_{75}^i & J_{76}^i & J_{77}^i & J_{78}^i & J_{79}^i \\ J_{81}^i & J_{82}^i & J_{83}^i & J_{84}^i & J_{85}^i & J_{86}^i & J_{87}^i & J_{88}^i & J_{89}^i \\ J_{91}^i & J_{92}^i & J_{93}^i & J_{94}^i & J_{95}^i & J_{96}^i & J_{97}^i & J_{98}^i & J_{99}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \\ f_7^i \\ f_8^i \\ f_9^i \end{bmatrix}$$

$$J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = \frac{\partial Hb_4}{\partial Q_4} - 2K_4 Q_4$$

$$J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J_{18} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_8} = J_{28} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_8} = J_{38} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_8} = -2K_8 Q_8$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = -2K_6 Q_6$$

$$J_{37} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_7} = -2K_7 Q_7$$

$$J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = 2K_4 Q_4$$

$$J_{49} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_9} = J_{59} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_9} = J_{69} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_9} = -2K_9 Q_9$$

$$J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = - \cdot \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J_{79} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_9} = J_{88} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_8} = J_{98} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_8} = -1$$

$$J_{71} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_1} = J_{72} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_2} = J_{73} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_3} = J_{84} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_4} = J_{89} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_9} = J_{95} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_5} = J_{96} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_6} = J_{97} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_7} = 1$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = J_{17} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_7} = J_{19} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_9} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_7} = J_{29} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_9} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = 0$$

$$J_{36} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_6} = J_{39} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_9} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_6} = J_{47} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_7} = J_{48} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_8} = 0$$

$$J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = J_{56} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = J_{57} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_7} = J_{58} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_8} = J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_1} = J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = J_{67} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_7} = J_{68} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_8} = J_{74} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_4} = J_{75} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_5} = J_{76} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_6} = J_{77} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_7} = 0$$

$$J_{78} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_8} = J_{81} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_1} = J_{82} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_2} = J_{83} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_3} = J_{85} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_5} = J_{86} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_6} = J_{87} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_7} = J_{91} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_1} = 0$$

$$J_{92} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_2} = J_{93} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_3} = J_{94} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_4} = J_{99} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_9} = 0$$

**Solución, Caso IV – caso único.** Esta red consiste en 4 nodos, 4 bombas, 3 sistemas de riego y 10 líneas de conducción.

Las diez ecuaciones seleccionadas son (3.2.1.154), (3.2.1.158), (3.2.1.160), (3.2.1.163), (3.2.1.172), (3.2.1.174), (3.2.1.175), (3.2.1.176), (3.2.1.177) y (3.2.1.178):

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0$$

$$f_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0$$

$$f_4 = Hb_4 + Hf_4 - Hr_1 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 = 0$$

$$f_5 = Hr_1 - Hr_2 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0$$

$$f_6 = Hr_2 - Hr_3 + K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$f_7 = Q_1 + Q_2 - Q_{10} = 0$$

$$f_8 = Q_3 + Q_{10} - Q_9 = 0$$

$$f_9 = Q_4 + Q_9 - Q_8 = 0$$

$$f_{10} = Q_8 - Q_5 - Q_6 - Q_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \\ Q_6^{i+1} \\ Q_7^{i+1} \\ Q_8^{i+1} \\ Q_9^{i+1} \\ Q_{10}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \\ Q_6^i \\ Q_7^i \\ Q_8^i \\ Q_9^i \\ Q_{10}^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & J_{12}^i & J_{13}^i & J_{14}^i & J_{15}^i & J_{16}^i & J_{17}^i & J_{18}^i & J_{19}^i & J_{1\ 10}^i \\ J_{21}^i & J_{22}^i & J_{23}^i & J_{24}^i & J_{25}^i & J_{26}^i & J_{27}^i & J_{28}^i & J_{29}^i & J_{2\ 10}^i \\ J_{31}^i & J_{32}^i & J_{33}^i & J_{34}^i & J_{35}^i & J_{36}^i & J_{37}^i & J_{38}^i & J_{39}^i & J_{3\ 10}^i \\ J_{41}^i & J_{42}^i & J_{43}^i & J_{44}^i & J_{45}^i & J_{46}^i & J_{47}^i & J_{48}^i & J_{49}^i & J_{4\ 10}^i \\ J_{51}^i & J_{52}^i & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i & J_{56}^i & J_{57}^i & J_{58}^i & J_{59}^i & J_{5\ 10}^i \\ J_{61}^i & J_{62}^i & J_{63}^i & J_{64}^i & J_{65}^i & J_{66}^i & J_{67}^i & J_{68}^i & J_{69}^i & J_{6\ 10}^i \\ J_{71}^i & J_{72}^i & J_{73}^i & J_{74}^i & J_{75}^i & J_{76}^i & J_{77}^i & J_{78}^i & J_{79}^i & J_{7\ 10}^i \\ J_{81}^i & J_{82}^i & J_{83}^i & J_{84}^i & J_{85}^i & J_{86}^i & J_{87}^i & J_{88}^i & J_{89}^i & J_{8\ 10}^i \\ J_{91}^i & J_{92}^i & J_{93}^i & J_{94}^i & J_{95}^i & J_{96}^i & J_{97}^i & J_{98}^i & J_{99}^i & J_{9\ 10}^i \\ J_{101}^i & J_{102}^i & J_{103}^i & J_{104}^i & J_{105}^i & J_{106}^i & J_{107}^i & J_{108}^i & J_{109}^i & J_{1010}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \\ f_6^i \\ f_7^i \\ f_8^i \\ f_9^i \\ f_{10}^i \end{bmatrix} \quad (3.2.2.6)$$

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1 Q_1$$

$$J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{35} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_5} = J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J_{18} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_8} = J_{28} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_8} = J_{38} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_8} = J_{48} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_8} = -2K_8 Q_8$$

$$J_{19} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_9} = J_{29} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_9} = J_{39} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_9} = -2K_9 Q_9$$

$$J_{1\ 10} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_{10}} = J_{2\ 10} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_{10}} = -2K_{10} Q_{10}$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J_{26} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_6} = J_{56} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_6} = -2K_6 Q_6$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial Hb_3}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J_{44} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_4} = \frac{\partial Hb_4}{\partial Q_4} - 2K_4 Q_4$$

$$J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = 2K_5 Q_5$$

$$J_{66} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_6} = 2K_6 Q_6$$

$$J_{67} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_7} = -2K_7 Q_7$$

$$J_{71} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_1} = J_{72} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_2} = J_{83} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_3} = J_{8\ 10} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_{10}} = J_{94} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_4} = J_{99} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_9} = J_{10\ 8} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_8} = 1$$

$$J_{7\ 10} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_{10}} = J_{89} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_9} = J_{98} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_8} = J_{10\ 5} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_5} = J_{10\ 6} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_6} = J_{10\ 7} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_7} = -1$$

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_2} = J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = J_{14} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_4} = J_{16} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_6} = J_{17} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_7} = J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_1} = J_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = 0$$

$$J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = J_{27} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_7} = J_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_1} = J_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_2} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = J_{36} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_6} = J_{37} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_7} = J_{3\ 10} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_{10}} = 0$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{43} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_3} = J_{46} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_6} = J_{47} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_7} = J_{49} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_9} = J_{4\ 10} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_{10}} = J_{51} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_1} = 0$$

$$J_{52} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = J_{57} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_7} = J_{58} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_8} = J_{59} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_9} = J_{5\ 10} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_{10}} = J_{61} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_1} = 0$$

$$J_{62} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_2} = J_{63} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_3} = J_{64} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_4} = J_{65} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_5} = J_{68} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_8} = J_{69} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_9} = J_{6\ 10} = \frac{\partial f_6}{\partial Q_{10}} = J_{73} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_3} = 0$$

$$J_{74} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_4} = J_{75} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_5} = J_{76} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_6} = J_{77} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_7} = J_{78} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_8} = J_{79} = \frac{\partial f_7}{\partial Q_9} = J_{81} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_1} = J_{82} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_2} = 0$$

$$J_{84} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_4} = J_{85} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_5} = J_{86} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_6} = J_{87} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_7} = J_{88} = \frac{\partial f_8}{\partial Q_8} = J_{91} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_1} = J_{92} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_2} = J_{93} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_3} = 0$$

$$J_{95} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_5} = J_{96} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_6} = J_{97} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_7} = J_{910} = \frac{\partial f_9}{\partial Q_{10}} = J_{101} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_1} = J_{102} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_2} = J_{103} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_3} = J_{104} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_4} = 0$$

$$J_{109} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_9} = J_{1010} = \frac{\partial f_{10}}{\partial Q_{10}} = 0$$

### 3.3. Algoritmo del programa computacional

Se presenta el algoritmo del programa computacional realizado en MATLAB, versión 7.12.0.635 (R2011a), MathWorks para la solución de interconexión de bombas emplazadas arbitrariamente en redes abiertas que alimentan a sistemas de riego agrícolas.

Un algoritmo de un programa computacional describe en palabras los pasos y operaciones que tiene que efectuar una computadora para lograr un objetivo, que en este caso será determinar la distribución de caudales en la red.

Los algoritmos deben describir datos de entrada o la manera de alimentar el programa, las operaciones pertinentes que debe efectuar la computadora y los datos de salidas que son las respuestas que deseamos recibir.

Se desarrolló un programa computacional para cada subcaso de cada caso.

1. Datos de entrada, se harán en forma matricial.

a) Características de las tuberías:

- En cada línea de conducción que conforma la red se deben introducir al programa, las longitudes, diámetros, rugosidades absolutas según el tipo de material.

- El valor de los coeficientes de los accesorios que tienen pérdidas de carga significativas en cada línea de conducción.
- b) Establecer el nivel de referencia e introducir al programa las elevaciones de:
- Las superficies libres de las fuentes de abastecimientos.
  - Las salidas de las bombas (en el caso de un pozo profundo, es a la salida del pozo).
  - Los nodos.
  - Las entradas a los sistemas de riego.
- c) La carga de operación de cada sistema de riego.
- d) Suponer un caudal en cada línea de conducción.
- e) Ecuación de la curva característica de cada bomba (centrífugas tipo voluta y/o sumergibles). Elegir tres puntos de la curva características de cada bomba (carga vs caudal) para obtener su ecuación, introduciendo tres caudales por bomba en una matriz, y sus respectivas cargas en otra matriz.
2. Constantes del programa.
3. Cálculos que efectúa el programa.
- a) Determinación de las características hidráulicas en cada línea de conducción.
- Rugosidades relativas.
- b) Determinación de las características del flujo en cada línea de conducción.
- Velocidades.
  - Número de Reynolds.



- Coeficiente  $f$  de Darcy-Weisbach (esta operación se realiza llamando a otro programa con el nombre de Colebrook el cual lo efectúa de manera iterativa).
  - i. Ecuación de Hagen-Poiseuille. Para régimen laminar.
  - ii. Ecuación de Colebrook-White. Para régimen turbulento.
- c) Coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la ecuación (3.1.8) de la curva característica de cada bomba (carga vs caudal). Son tres ecuaciones lineales que se resuelven matricialmente por cada bomba para valorar estos coeficientes (MATLAB utiliza el polyfit).
- d) Carga de cada bomba  $H_b$ , con la ecuación de la curva característica de las bombas (está en función del caudal tomando en cuenta la ecuación (3.1.8)).
- e) Valor de cada una de las ecuaciones generalizadas obtenidas del modelo matemático. El número de estas ecuaciones es función del número de líneas de la red.
- f) Obtiene los elementos de la inversa de la matriz jacobiana ( $J^{-1}$ ).
- g) Con los caudales propuestos en la entrada de datos, por medio de la ecuación (2.6.1.4), se obtienen los nuevos caudales de manera iterativa ( $i$ ), hasta obtener los caudales que deben distribuirse en toda la red, tal como se presenta a continuación.

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ \vdots \\ Q_n^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ \vdots \\ Q_n^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & \cdots & J_{1m}^i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1}^i & \cdots & J_{nm}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1^i \\ \vdots \\ F_n^i \end{bmatrix}$$

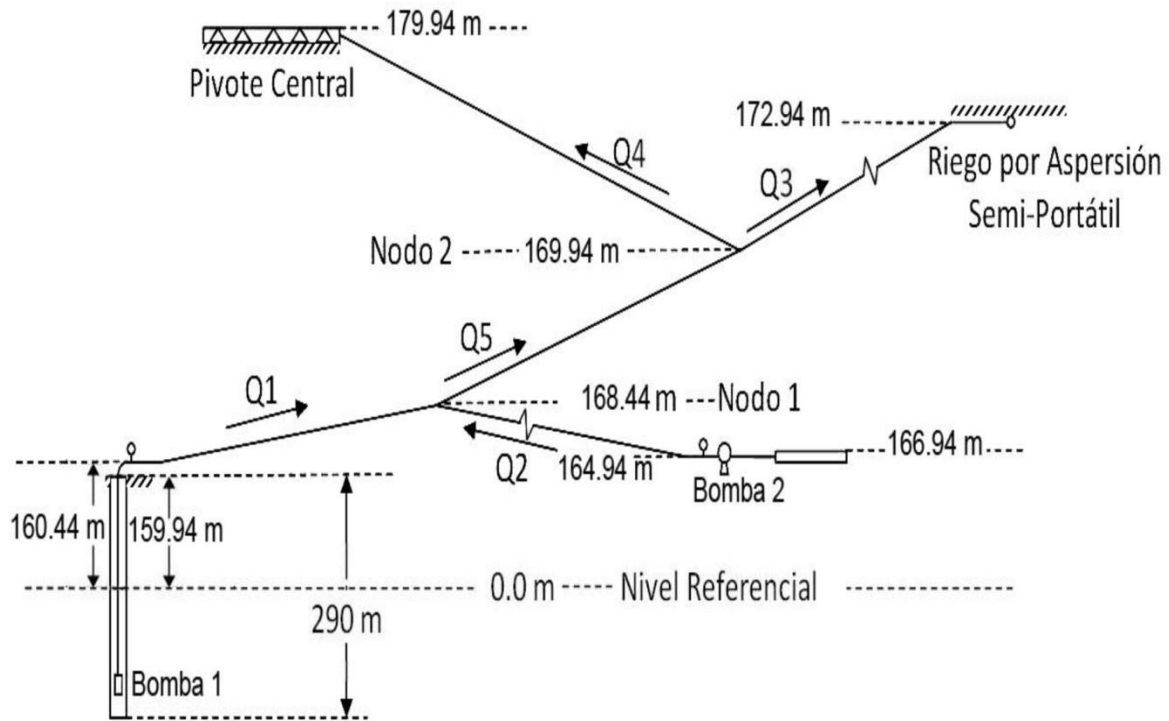
- h) Cargas piezométricas en las salidas de las bombas y en los nodos de la red.
- i) Carga dinámica total de cada bomba.

4. Datos de salida.
  - a) Distribución de caudales en la red.
  - b) Distribución de cargas en la red.

### 3.4. Ejemplo

Se resolverá el caso II subcaso 1, con el ejemplo siguiente: un pivote central y un sistema de riego por aspersión semi-portátil de 49.93 y 40 has, respectivamente, son irrigados por una bomba centrífuga horizontal tipo voluta (BERKELEY, modelo B5EPBM de 75 hp y el diámetro del impulsor es de — pulgadas, con 3600 rpm) y otra bomba de pozo profundo sumergible (GRUNDFOS 600S15009DS de 150 hp con 3500 rpm). El sistema se ilustra en la Figura 3.4.1, y los datos del proyecto del sistema de conducción se muestran en el cuadro 3.4.1. Al pivote central se le suministrará un caudal aproximado de 50.0 lps, con una carga de operación de 28.12 m de columna de agua, y al sistema semi-portátil un gasto de 40 lps, con una carga de operación de 31.64 m de columna de agua. La solución que se plantea es la siguiente: el nivel de referencia se ubica en superficie del nivel dinámico del pozo profundo. Las presiones en el nivel dinámico del pozo y en la superficie libre del agua almacenada en el depósito son iguales a la presión atmosférica, por lo que al operar con presiones relativas en las fuentes de abastecimiento se consideran iguales a cero. El nivel dinámico se encuentra a una profundidad de 159.94 m.

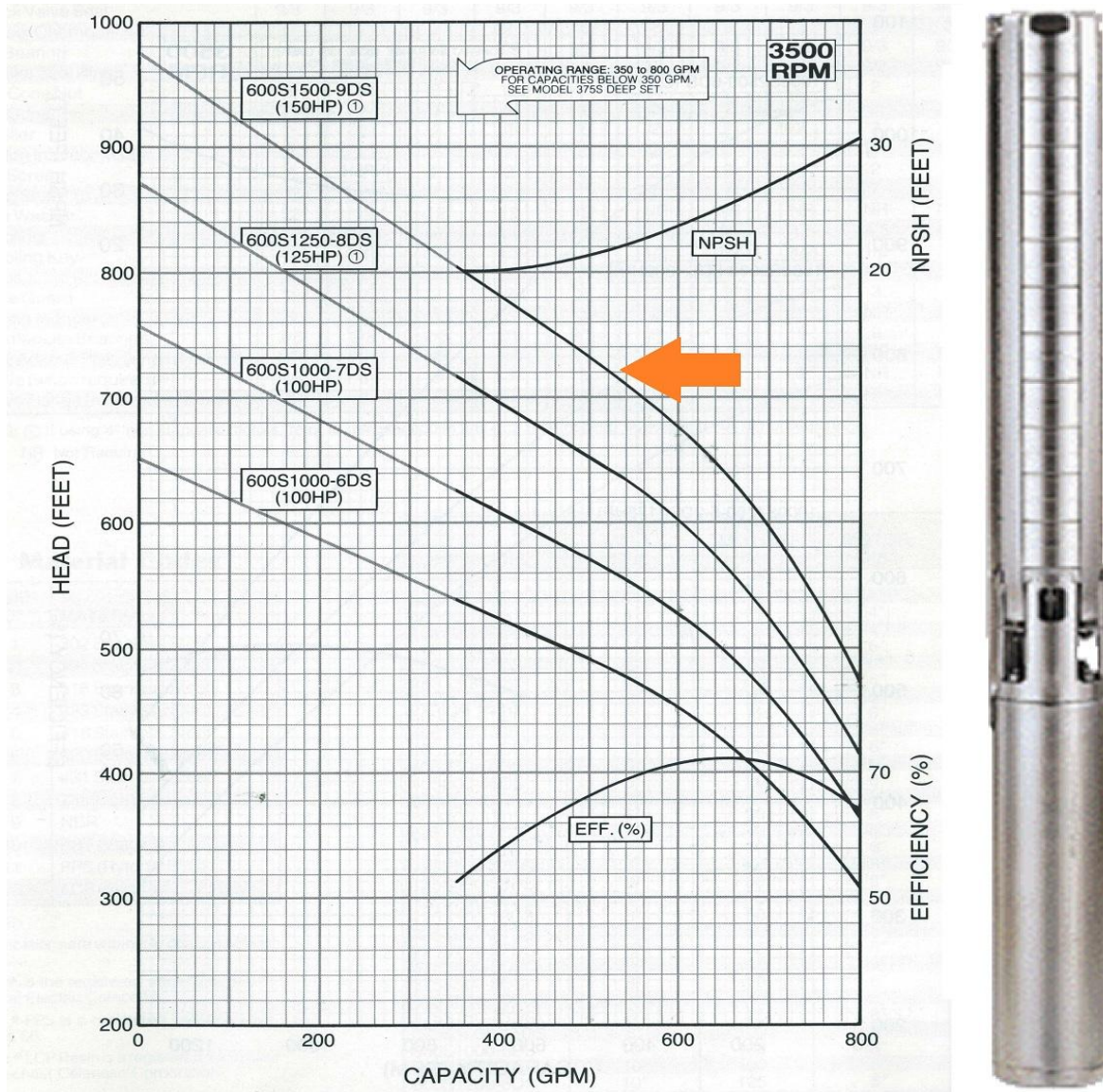
En el apéndice 7.7 se presenta la solución de un ejemplo del caso IV.



**Figura 3.4.1.** Caso II subcaso 1. Sistema de conducción de la red abierta.

**Cuadro 3.4.1.** Datos de la tubería.

TRAMO I	MATERIAL	DIÁMETRO NOMINAL (pulgadas)	DIÁMETRO INTERIOR (mm)	LONGITUD (m)
1 <sub>CB</sub>	ACERO, CÉDULA 40	6	154.05	275.50
1 <sub>d</sub>	PVC, RD 41	6	160.10	300.00
2 <sub>s</sub>	ACERO, CÉDULA 40	10	254.51	4.00
2 <sub>d</sub>	PVC, RD 41	8	208.50	1600.00
3	PVC, RD 41	8	208.50	1730.00
4	PVC, RD 41	8	208.50	670.00
5	PVC, CLASE 7	10	237.80	195.00



**Figura 3.4.2.** Curva característica de la bomba sumergible Grundfos, modelo 600S. (Groundwater Catalog, 1993).

**Cuadro 3.4.2.** Datos de curva característica de la bomba Grundfos (bomba 1).

$H_{B1}$ (pies)	$Q_1$ (GPM)	$H_{B1}$ (m)	$Q_1$ ( $m^3/s$ )
733.00	500.00	223.42	0.03154
675.00	600.00	205.74	0.03785
594.00	700.00	181.05	0.04416

Al tomar tres puntos de la curva señalada en la figura 3.6.2, (Cuadro 3.6.2) se obtiene la ecuación de la curva característica de la bomba GRUNDFOS, modelo 600S1500-9DS de 150 hp, de 3600 rpm:

$$H_{B1} = -88029.70Q_1^2 + 3306.48Q_1 + 206.703 \tag{3.4.1}$$

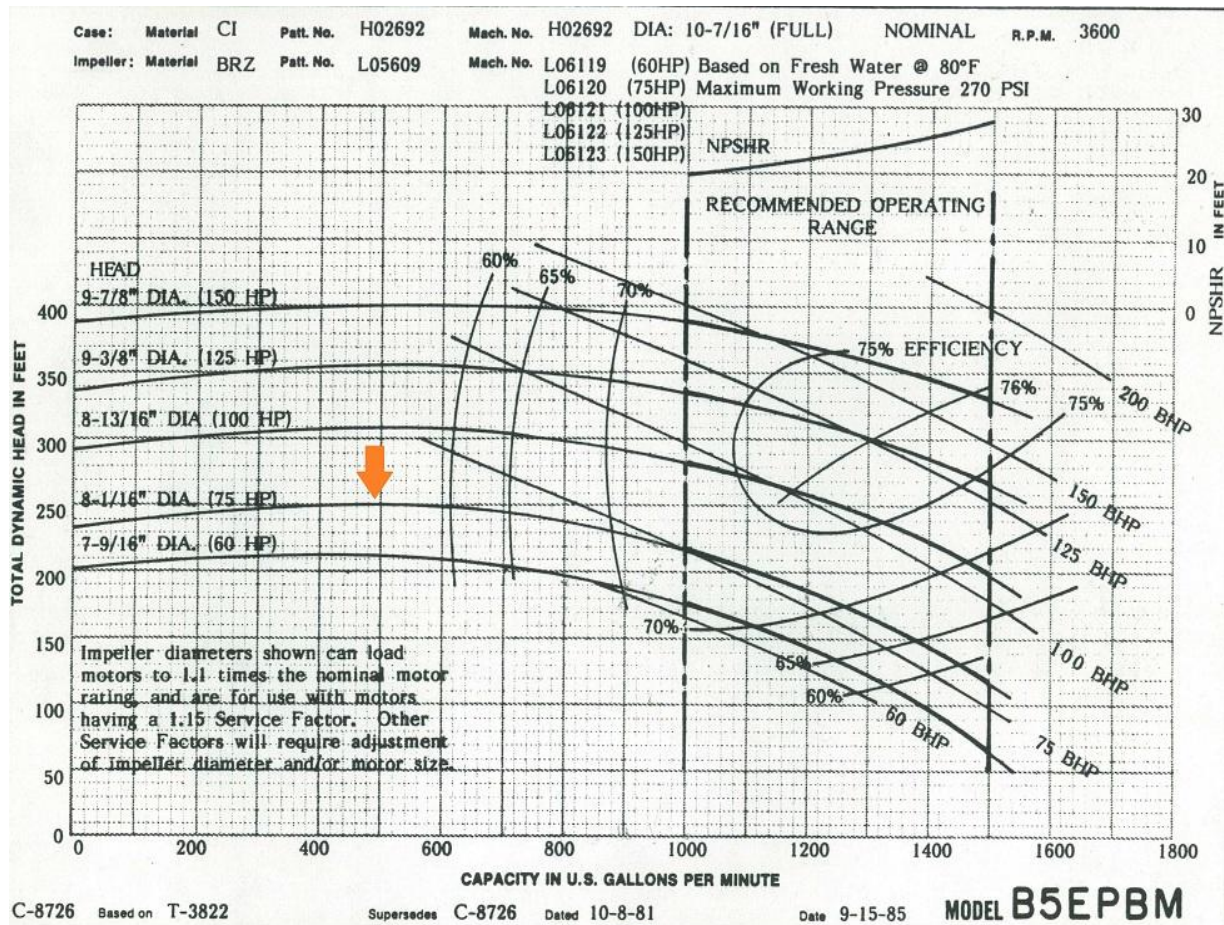


Figura 3.4.3. Curva característica de la bomba centrífuga Berkeley, modelo B5EPBM (Berkeley pumps catalog, 1990).

**Cuadro 3.4.3.** Datos de curva característica de la bomba Berkeley (bomba 2).

$H_{B2}$ (pies)	$Q_2$ (GPM)	$H_{B2}$ (m)	$Q_2$ (m <sup>3</sup> /s)
250.00	600.00	76.20	0.03785
230.00	900.00	70.10	0.05678
185.00	1200.00	56.39	0.07571

Igualmente, al tomar tres puntos de la curva característica de la bomba centrífuga (Cuadro 3.4.3), modelo E5EPBM de diámetro del impulsor de — de pulgada, de 75 hp, se obtiene la ecuación siguiente:

$$H_{B2} = -10618.30Q_2^2 + 682.566Q_2 + 65.5768 \quad (3.4.2)$$

las derivadas parciales de las ecuaciones (3.4.1) y (3.4.2), con respecto a sus gastos son:

—

—

La entrada de datos debe de ser de manera matricial, para que el programa pueda identificarlos, mediante su renglón y columna.

Z, vector de alturas medidas desde el nivel de referencia, en metros.

Zf, vector de las alturas de las fuentes de abastecimiento.

Zf(1) y Zf(2); niveles de las fuentes de abastecimiento de las bombas 1 y 2, respectivamente.

Zr(1) y Zr(2); niveles a la entrada de los sistemas de riego 1 y 2, respectivamente.

Zn(1) y Zn(2); niveles de los nodos 1 y 2, respectivamente.

Zsb(1) y Zsb(2); niveles a la salida del agua en las bombas 1 y 2, respectivamente. En bombas sumergibles es a la salida del pozo.

Por lo tanto los valores de los datos de entrada son los siguientes:

Zf, matriz de 1x2; Zf(1) = 0.0; Zf(2) = 166.94;

Zf = [0.0, 166.94].

Zr, matriz de 1x2; Zr(1) = 172.94; Zr(2) = 179.94;

Zr = [172.94, 179.94].

Zn, matriz de 1x2; Zn(1) = 168.44; Zn(2) = 169.94;

Zn = [168.44, 169.94].

Zsb, matriz de 1x2; Zsb(1) = 160.44; Zsb(2) = 169.94;

Zsb = [160.44, 164.94].

$Q_b$ ; matriz de gastos de las curvas características de las bombas en litros por segundo. Matriz de 2x3. El primer renglón 3 caudales de la bomba 1; segundo renglón 3 caudales de la bomba 2.

$Q_b = [31.64, 37.85, 44.16; 37.85, 56.78, 75.71]$ .

$H_b$ ; matriz de cargas de las curvas características de las bombas en metros. Matriz de 2x3. El primer renglón 3 cargas de la bomba 1; segundo renglón 3 cargas de la bomba 2.

$H_b = [223.42, 205.74, 181.05; 76.20, 70.10, 56.39]$ .

L; matriz de 5x2 de longitudes de cada línea de conducción en metros. Matriz de 5x2.

$L = [275.50, 300.0; 4.0, 1600.0; 850.0, 880.0; 390.0, 280.0; 100.0, 95.0]$

D; matriz de diámetros interiores en milímetros. Matriz de 5x2.

$D = [154.05, 160.10; 254.51, 208.50; 208.50, 208.50; 208.50, 208.50; 237.80, 237.80]$ .

k; vector de los coeficientes de pérdidas de carga locales, por tramo de cada línea de conducción.

$k_{11}$ ; tramo de succión o columna de bombeo en la línea 1.

$k_{12}$ ; tramo de descarga en la línea 1.

$k_{21}$ ; tramo de succión o columna de bombeo en la línea 2.

$k_{22}$ ; tramo de descarga en la línea 2.

$k_{31}$ ; primer tramo de la línea 3.

$k_{32}$ ; segundo tramo de la línea 3.

$k_{41}$ ; primer tramo la línea 4.

$k_{42}$ ; segundo tramo de la línea 4.

$k_{51}$ ; primer tramo de la línea 5.

$k_{52}$ ; segundo tramo de la línea 5.

Los valores de los coeficientes de pérdidas de carga locales, por tramo de cada línea de conducción son (apéndice 7.3):

$$k_{11} = [12.50, 0.16, 0.80, 4.0, 0.39, 0.20, 0.20]$$

$$k_{12} = [0.61, 0.40]$$

$$k_{21} = [0.78, 0.39, 0.07]$$

$$k_{22} = [0.08, 4.0, 0.39, 0.2, 0.2, 0.16]$$

$$k_{31} = [0.40, 0.18]$$

$$k_{32} = [0.2, 0.39, 1.80]$$

$$k_{41} = [1.80, 0.18]$$

$$k_{42} = [0.8, 0.8, 0.39]$$

$$k_{51} = [0.0]$$

$$k_{52} = [0.0]$$



RA; matriz de 5x2 de rugosidades absolutas en milímetros. Primer subíndice, número de línea (renglón). Segundo subíndice, número de tramo en la línea (columna).

RA = [0.1500, 0.0015; 0.1500, 0.0015; 0.0015, 0.0015; 0.0015, 0.0015; 0.0015, 0.0015].

a; si a = 1 es bomba sumergible; si a es diferente de 1 es voluta, en bomba 1:

a = 1

b; si b = 1 es bomba sumergible; si b es diferente de 1 es voluta, en bomba 2:

b = 5.

Cargas de operación en metros de columna de agua, del sistema de riego semi portátil y el pivote central son:

HPr(1); carga de operación del sistema de riego 1:

HPr(1) = 31.64

HPr(2); carga de operación de todo el sistema de riego 2:

HPr(2) = 28.12

su matriz de 1x2 es:

HPr = [31.64, 28.12].

q; vector de gastos supuestos en cada línea, en litros por segundo [q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, q<sub>4</sub>, q<sub>5</sub>]. Matriz de 1x5. Los valores supuestos son:

q = [40, 40, 40, 40, 40].

Las cinco ecuaciones a solucionar son las siguientes:

$$f_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 = 0$$

$$f_3 = Hr_1 - Hr_2 + K_3Q_3^2 - K_4Q_4^2 = 0$$

$$f_4 = Q_1 + Q_2 - Q_5 = 0$$

$$f_5 = Q_3 + Q_4 - Q_5 = 0.$$

Los elementos de la matriz Jacobiana son las derivadas parciales de las cinco ecuaciones anteriores con respecto al caudal de cada conducto que conforma la red, por lo tanto, los elementos no nulos, son:

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial Hb_1}{\partial Q_1} - 2K_1Q_1$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} = -2K_3Q_3$$

$$J_{15} = \frac{\partial f_1}{\partial Q_5} = J_{25} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_5} = -2K_5Q_5$$

$$J_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial Hb_2}{\partial Q_2} - 2K_2Q_2$$

$$J_{24} = \frac{\partial f_2}{\partial Q_4} = J_{34} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_4} = -2K_4Q_4$$

$$J_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial Q_3} = 2K_3Q_3$$

$$J_{41} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_1} = J_{42} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_2} = J_{53} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_3} = J_{54} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_4} = 1$$

$$J_{45} = \frac{\partial f_4}{\partial Q_5} = J_{55} = \frac{\partial f_5}{\partial Q_5} = -1.$$

Con estos valores se resuelve iterativamente la ecuación que sigue, iniciando con cualquier valor en los caudales (litros por segundo):

$$\text{para } i=1: Q_1^i = Q_2^i = Q_3^i = Q_4^i = Q_5^i = 40$$

$$\begin{bmatrix} Q_1^{i+1} \\ Q_2^{i+1} \\ Q_3^{i+1} \\ Q_4^{i+1} \\ Q_5^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^i \\ Q_2^i \\ Q_3^i \\ Q_4^i \\ Q_5^i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{11}^i & 0 & J_{13}^i & 0 & J_{15}^i \\ 0 & J_{22}^i & 0 & J_{24}^i & J_{25}^i \\ 0 & 0 & J_{33}^i & J_{34}^i & 0 \\ J_{41}^i & J_{42}^i & 0 & 0 & J_{45}^i \\ 0 & 0 & J_{53}^i & J_{54}^i & J_{55}^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_3^i \\ f_4^i \\ f_5^i \end{bmatrix}$$

**Cuadro 3.4.4.** Caudales de la red en litros por segundo.

Caudal	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6
Q <sub>1</sub>	40.0	31.96	30.23	30.10	30.10	30.10
Q <sub>2</sub>	40.0	68.98	62.07	61.19	61.13	61.13
Q <sub>3</sub>	40.0	43.19	40.71	40.46	40.45	40.45
Q <sub>4</sub>	40.0	57.75	51.59	50.83	50.79	50.79
Q <sub>5</sub>	40.0	100.94	92.30	91.29	91.23	91.23

La última columna (i = 6) del cuadro 3.4.4, proporciona la distribución de caudales de la red abierta en lps. Por lo tanto, la bomba sumergible suministra un gasto de 30.10 lps y la bomba centrífuga provee un caudal de 61.13 lps. El pivote central recibe un caudal de 50.79 lps con la carga que requiere de 28.12 m (40 psi). El sistema de riego por aspersión semi-portátil obtiene un caudal de 40.45 con su carga de operación de 31.64 m (45 psi). El caudal de la línea de conducción 5 que se encuentra entre los dos nodos tiene un caudal de 91.23 lps.

Las cargas dinámicas totales en metros de las bombas 1 y 2, se determinan con las ecuaciones de las gráficas de las curvas características de las bombas (3.4.1 y 3.4.2):

$$HB(1) = 226.80 \text{ m}$$

$$HB(2) = 67.22 \text{ m}$$

cargas medidas a partir del nivel referencial o simplemente cargas son:

$$Hr(1) = 204.58 \text{ m}$$

$$Hr(2) = 208.6 \text{ m}$$

cargas de los nodos 1 y 2 son:

$$Hn(1) = 212.61 \text{ m}$$

$$Hn(2) = 210.26 \text{ m}$$

cargas piezométricas en metros de los nodos 1 y 2, se obtienen restando el nivel del nodo 1 a Hn(1) y del nodo (2) a Hn(2):

$$HPn(1) = 44.17 \text{ m}$$

$$HPn(2) = 40.32 \text{ m}$$

cargas a las salidas de las bombas son:

$$Hsb(1) = 215.94 \text{ m}$$

$$Hsb(2) = 242.86 \text{ m}$$

cargas piezométricas a las salidas de las bombas, se obtienen restando sus niveles, a las cargas de las bombas:

$$HPsb(1) = 55.51 \text{ m}$$

$$HPsb(2) = 77.92 \text{ m.}$$

las velocidades en las líneas de conducción en metros por segundo.

línea 1:

$$v(1, 1) = v_{CB} = 1.61 \text{ (tramo 1)}$$

$$v(1, 2) = v_d = 1.50 \text{ (tramo 2)}$$

línea 2:

$$v(2, 1) = v_s = 1.20 \text{ (tramo 1)}$$

$$v(2, 2) = v_d = 1.79 \text{ (tramo 2)}$$

línea 3:

$$v(3) = 1.18$$

línea 4:

$$v(4) = 1.49$$

línea 5:

$$v(5) = 2.05$$

coeficientes de fricción hidráulica de la ecuación de Darcy-Weisbach, en las líneas de conducción (adimensionales).

línea 1:

$$f(1, 1) = f_{CB} = 0.0207 \text{ (tramo 1)}$$

$$f(1, 2) = f_d = 0.0152 \text{ (tramo 2)}$$

línea 2:

$$f(2, 1) = f_s = 0.0187 \text{ (tramo 1)}$$

$$f(2, 2) = f_d = 0.0140 \text{ (tramo 2)}$$

línea 3:

$$f(3) = 0.0151$$

línea 4:

$$f(4) = 0.0145$$

línea 5:

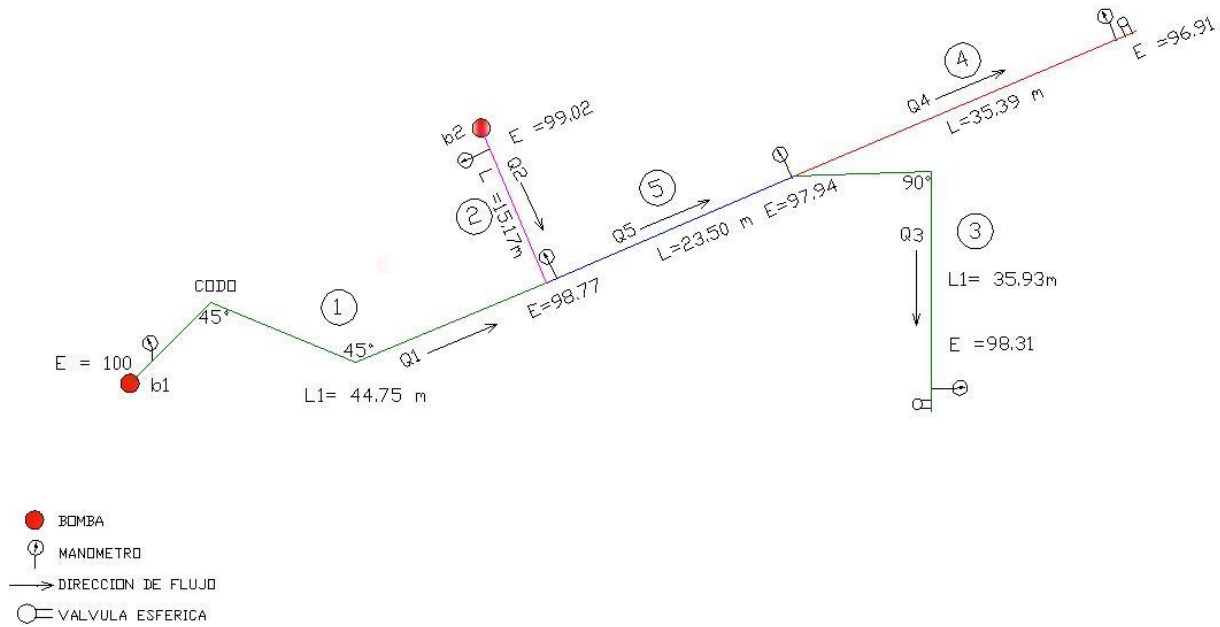
$$f(5) = 0.0133 .$$

### 3.5. Prototipo para la validación del modelo matemático.

Se construyó un prototipo para validar el modelo matemático, localizándose en un predio ubicado en el Municipio de Arteaga, Estado de Coahuila, México cuyas coordenadas geográficas son: 25° 27' 13" de latitud Norte y 100° 52' 15" de longitud Oeste, con una altitud de 1649 metros sobre el nivel del mar.

#### 3.5.1. Características del prototipo

El prototipo pertenece al Caso II Subcaso 1 (Figura 3.5.1.1); cuenta con dos bombas sumergibles: la bomba que se etiquetó como bomba 1 es marca Franklin modelo FPS 4400 de 2.0 hp, su curva característica se ilustra en la figura 3.5.2.1 de este apartado, mientras que la bomba 2 es marca Sistemas Altamira modelo KOR2 R10-7 de 1 hp se puede ubicar en la figura 3.5.2.2. El prototipo consta de 2 nodos y 5 líneas de conducción, dos líneas con bombas, dos líneas que simulan alimentar los sistemas de riego y una línea entre nodos, para seleccionar el conjunto de ecuaciones que resuelvan la red del prototipo. Las características físicas del prototipo se ilustran en el cuadro 3.5.1.1.



**Figura 3.5.1.1.** Prototipo (Caso II subcaso 1).

**Cuadro 3.5.1.1.** Datos de la red.

I	Material	D nominal (pulgadas)	D (mm)	L (m)
1 <sub>CB</sub>	PVC	1 ½	40.5	1.25
1 <sub>d</sub>	PVC	1 ½	40.5	44.75
2 <sub>CB</sub>	PVC	1	26.6	3.84
2 <sub>d</sub>	PVC	1	26.6	15.17
3	PVC	1 ½	40.5	35.93
4	PVC	¾	20.9	35.39
5	PVC	2	52.5	23.50

### 3.5.2. Las bombas y operación del prototipo

Aforo de los caudales:

Se verificó que los gastos aforados, por los medidores volumétricos de engranes correspondieron a los gastos aforados volumétricamente:

- Los gastos de entrada fueron aforados por medidores volumétricos de engranes.
- Los gastos de salida fueron aforados con un recipiente de 80 litros y un cronómetro.

Las presiones fueron medidas con un manómetro de Bourdon, que fue calibrado con manómetro de mercurio.

En el prototipo se probaron tres tratamientos, con tres repeticiones, donde cada tratamiento consistió:

1. 35 psi en las salidas de las líneas 3 y 4.
2. 50 psi en las salidas de las líneas 3 y 4.
3. 55 y 44.8 psi en las salidas de las líneas 3 y 4 respectivamente.

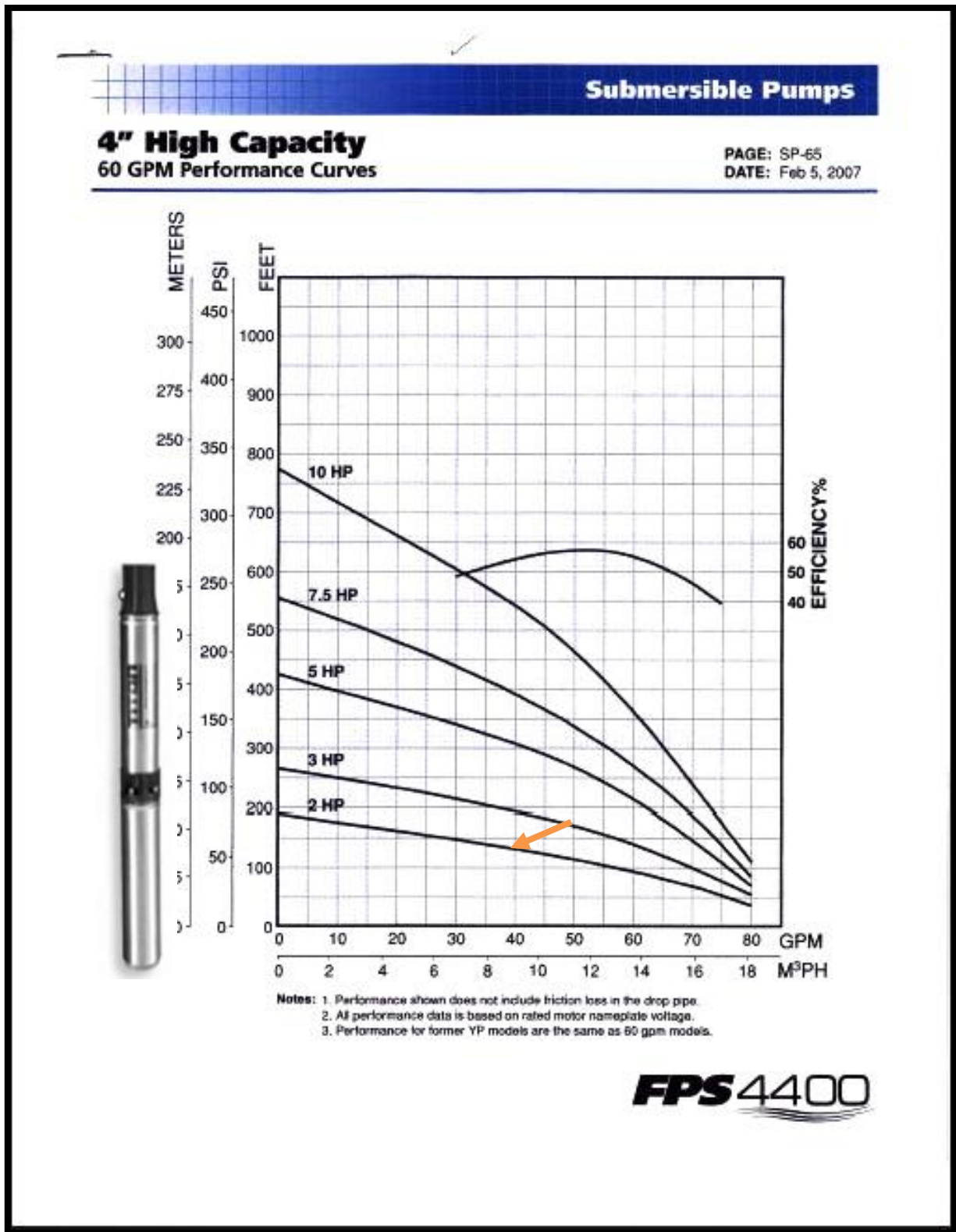


Figura 3.5.2.1. Curva característica de la bomba sumergible Franklin: bomba 1 (Franklin Electric MJ2157, 2008).

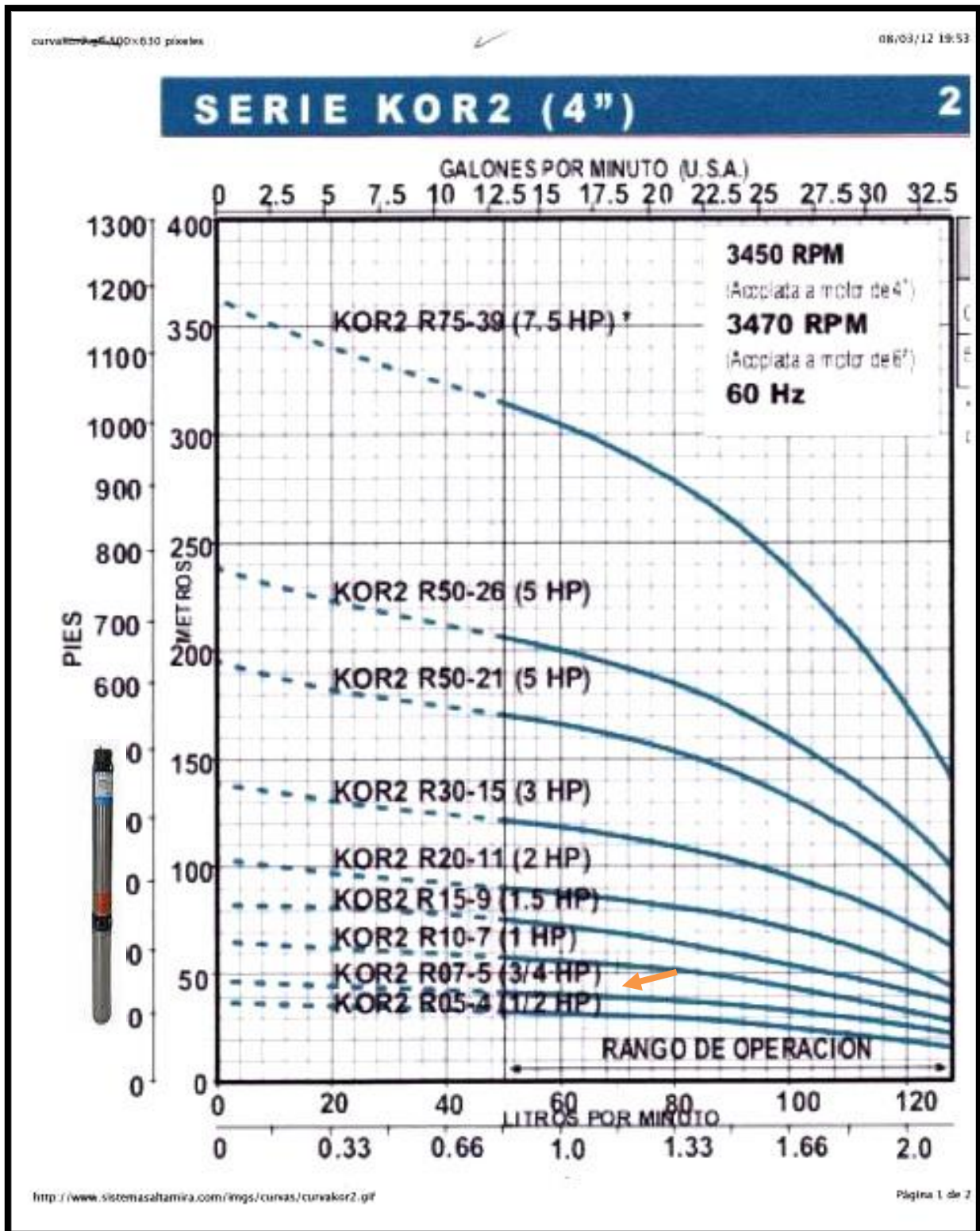


Figura 3.5.2.2. Curva característica de la bomba sumergible Altamira, serie KOR: bomba 2 (Jimaja de México, 2010).



**Cuadro 3.5.2.1.** Datos de la curva característica de la bomba sumergible Franklin (bomba 1).

$H_{B1}$ (pies)	$Q_1$ (GPM)	$H_{B1}$ (m)	$Q_1$ (m <sup>3</sup> /s)
170.01	15.00	51.82	0.00095
162.01	20.00	49.38	0.00126
154.99	25.00	47.24	0.00158

Al tomar tres puntos de la curva señalada en la Figura 3.7.2, (Cuadro 3.7.2), se obtiene la ecuación de la curva característica de la bomba 1, modelo FPS 4400 Franklin de 2 hp:

$$H_{B1} = 1878520.225 Q_1^2 - 12022.497 Q_1 + 61.546 \quad (3.7.2.1)$$

**Cuadro 3.5.2.2.** Datos de curva característica de la bomba sumergible Altamira, serie KOR (bomba 2).

$H_{B2}$ (pies)	$Q_2$ (GPM)	$H_{B2}$ (m)	$Q_2$ (m <sup>3</sup> /s)
190.29	13.16	58.00	0.00083
187.01	15.85	57.00	0.00100
173.88	18.54	53.00	0.00117

Igualmente, al tomar tres puntos de la curva característica de la bomba sumergible en la Figura 3.7.3 (Cuadro 3.7.3), Altamira, serie KOR, de 3/4 hp con 3450 rpm, se obtiene la ecuación siguiente:

$$H_{B2} = -51903114.30 Q_2^2 + 89100.346 Q_2 + 19.803 \quad (3.7.2.2)$$

las derivadas parciales de las ecuaciones (3.7.2.1) y (3.7.2.2), con respecto a sus gastos son:

$$\frac{\partial H_{B1}}{\partial Q_1} = 3757040.45 Q_1 - 12022.497$$

$$\frac{\partial H_{B2}}{\partial Q_2} = -103806228.374 Q_2 + 89100.346$$

Las 5 ecuaciones seleccionadas del modelo del caso II, subcaso 1 son las siguientes: (3.3.46), (3.3.59), (3.3.51), (3.3.52) y (3.3.53).

$k$ ; vector de los coeficientes de pérdidas de carga locales, por tramo de cada línea de conducción.

$$k_{11} = [0.18, 2.20, 0.80, 10.00]$$

$$k_{12} = [0.40, 0.40, 0.40, 0.16]$$

$$k_{21} = [0.18, 2.20, 0.80, 10.0]$$

$$k_{22} = [0.16, 0.57]$$

$$k_{31} = [1.0, 0.18]$$

$$k_{32} = [0.80]$$

$$k_{41} = [0.30, 0.40]$$

$$k_{42} = [0.0]$$

$$k_{51} = [0.0]$$

$$k_{52} = [0.0].$$

Para todos los tratamientos:

$$Z_r (1) = 1.40 \text{ m}$$

$$Z_r (2) = 0.0 \text{ m}$$

Tratamiento 1 (35 psi, equivale a 24.61m de columna de agua, en cada una de las salidas de las líneas 3 y 4).

$$HPr (1) = 24.61 \text{ m (carga piezométrica)}$$

$$HPr (2) = 24.61 \text{ m (carga piezométrica)}$$

$H_r (1)$  y  $H_r (2)$  cargas medidas a partir del nivel de referencia:

$$H_r (1) = Z_r (1) + HPr (1)$$

$$Hr(2) = Zr(2) + HPr(2)$$

$$Hr(1) = 26.01 \text{ m}$$

$$Hr(2) = 24.61 \text{ m.}$$

- Repetición 1:

$$Zf(1) = 2.36 \text{ m}$$

$$Zf(2) = 1.54 \text{ m}$$

- Repetición 2:

$$Zf(1) = 2.34 \text{ m}$$

$$Zf(2) = 1.53 \text{ m}$$

- Repetición 3:

$$Zf(1) = 2.31 \text{ m}$$

$$Zf(2) = 1.52 \text{ m}$$

Tratamiento 2 (50 psi, equivale a 45.77m de columna de agua, en cada una de las salidas de las líneas 3 y 4).

$$HPr(1) = 45.77 \text{ m (carga piezométrica)}$$

$$HPr(2) = 45.77 \text{ m (carga piezométrica)}$$

$$Hr(1) = 47.17 \text{ m}$$

$$Hr(2) = 45.77 \text{ m.}$$

- Repetición 1:

$$Zf(1) = 2.80 \text{ m}$$

$$Zf(2) = 1.35 \text{ m}$$

- Repetición 2:

$$Zf(1) = 2.32 \text{ m}$$

$$Z_f (2) = 1.28 \text{ m}$$

- Repetición 3:

$$Z_f (1) = 2.30 \text{ m}$$

$$Z_f (2) = 1.33 \text{ m}$$

Tratamiento 3 (55 y 44.8 psi, equivale a 38.67m y 31.50m de columna de agua, en cada una de las salidas de las líneas 3 y 4 respectivamente).

$$H_{Pr} (1) = 38.67 \text{ m (carga piezométrica)}$$

$$H_{Pr} (2) = 31.50 \text{ m (carga piezométrica)}$$

$$H_r (1) = 40.07 \text{ m}$$

$$H_r (2) = 31.50 \text{ m.}$$

- Repetición 1:

$$Z_f (1) = 2.33 \text{ m}$$

$$Z_f (2) = 1.28 \text{ m}$$

- Repetición 2:

$$Z_f (1) = 2.22 \text{ m}$$

$$Z_f (2) = 1.29 \text{ m}$$

- Repetición 3:

$$Z_f (1) = 2.16 \text{ m}$$

$$Z_f (2) = 1.26 \text{ m}$$

## 4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1. Resultados del prototipo y del modelo matemático

Los resultados de los tratamientos de las mediciones realizadas en el prototipo (caso II subcaso 1), se compararon con los resultados del modelo matemático, los cuales se muestran en los cuadros 4.1.1, 4.1.2 y 4.1.3. En ellos se muestra que los valores obtenidos en el prototipo tuvieron una gran similitud a los valores del modelo, a pesar de los diferentes tratamientos.

**Cuadro 4.1.1. Tratamiento 1.** Comparación de los caudales medidos del prototipo contra los estimados por el modelo matemático aplicado, considerando presiones a la salida de 35 psi en los manómetros de las líneas 3 y 4.

CAUDAL	PROTOTIPO (lps)	MODELO (lps)	RESIDUO (lps)
Q <sub>1</sub>	3.10	2.99	0.11
	3.06	2.99	0.07
	3.02	2.99	0.03
Q <sub>2</sub>	1.46	1.4	0.06
	1.55	1.4	0.15
	1.42	1.4	0.02
Q <sub>3</sub>	3.62	3.66	-0.04
	3.64	3.66	-0.02
	3.67	3.66	0.01
Q <sub>4</sub>	0.71	0.73	-0.02
	0.73	0.73	0
	0.77	0.73	0.04
Q <sub>5</sub>	4.48	4.39	0.09
	4.49	4.39	0.1
	4.46	4.39	0.07

**Cuadro 4.1.2. Tratamiento 2.** Comparación de los caudales medidos del prototipo contra los estimados por el modelo matemático, considerando presiones a la salida de 65.1 psi en los manómetros de las líneas 3 y 4.

	PROTOTIPO*	MODELO	RESIDUO
	(lps)	(lps)	(lps)
Q <sub>1</sub>	1.26	1.28	-0.02
	1.20	1.24	-0.04
	1.20	1.24	-0.04
Q <sub>2</sub>	0.99	1.11	-0.12
	1.08	1.12	-0.04
	1.06	1.11	-0.05
Q <sub>3</sub>	1.80	1.94	-0.14
	1.74	1.91	-0.17
	1.77	1.91	-0.14
Q <sub>4</sub>	0.41	0.45	-0.04
	0.43	0.45	-0.02
	0.42	0.45	-0.03
Q <sub>5</sub>	2.30	2.39	-0.09
	2.24	2.36	-0.12
	2.22	2.35	-0.13

**Cuadro 4.1.3. Tratamiento 3.** Comparación de los caudales medidos del prototipo contra los estimados por el modelo matemático, considerando presiones a la salida de 55 y 44.8 psi en los manómetros de las líneas 3 y 4, respectivamente.

	PROTOTIPO*	MODELO	RESIDUO
	(lps)	(lps)	(lps)
Q <sub>1</sub>	1.75	1.86	-0.11
	1.77	1.85	-0.08
	1.79	1.85	-0.06
Q <sub>2</sub>	1.27	1.25	0.02
	1.26	1.25	0.01
	1.28	1.25	0.03
Q <sub>3</sub>	2.14	2.25	-0.11
	2.16	2.24	-0.08
	2.14	2.24	-0.1
Q <sub>4</sub>	0.86	0.85	0.01
	0.89	0.86	0.03
	0.87	0.86	0.01
Q <sub>5</sub>	2.96	3.11	-0.15
	3.18	3.1	0.08
	3.20	3.1	0.1

## 4.2. Prueba de Ji cuadrada ( $\chi^2$ )

Se efectuó una prueba de Ji cuadrada con los datos de los caudales medidos y los estimados por el modelo, aplicando la fórmula siguiente:

$$\chi^2_{Calculada} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \right]$$

donde:

$$\chi^2_{Calculada} = \text{Ji cuadrada.}$$

$O_i$  = Datos observados

$E_i$  = Datos esperados

**Cuadro 4.2.1.** Prueba de Ji cuadrada realizada a los tres tratamientos.

<b>PROTOTIPO</b> <b>(lps)</b>	<b>MODELO</b> <b>(lps)</b>	<b>RESIDUO</b> <b>(lps)</b>	<b>JI CUADRADA</b> $\chi^2$
3.10	2.99	0.11	0.00405
3.06	2.99	0.07	0.00164
3.02	2.99	0.03	0.0003
1.46	1.4	0.06	0.00257
1.55	1.4	0.15	0.01607
1.42	1.4	0.02	0.00029
3.62	3.66	-0.04	0.00044
3.64	3.66	-0.02	0.00011
3.67	3.66	0.01	0.00003
0.71	0.73	-0.02	0.00055
0.73	0.73	0	0
0.77	0.73	0.04	0.00219
4.48	4.39	0.09	0.00185
4.49	4.39	0.1	0.00228
4.46	4.39	0.07	0.00112

1.26	1.28	-0.02	0.00031
1.20	1.24	-0.04	0.00129
1.20	1.24	-0.04	0.00129
0.99	1.11	-0.12	0.01297
1.08	1.12	-0.04	0.00143
1.06	1.11	-0.05	0.00225
1.80	1.94	-0.14	0.0101
1.74	1.91	-0.17	0.01513
1.77	1.91	-0.14	0.01026
0.41	0.45	-0.04	0.00356
0.43	0.45	-0.02	0.00089
0.42	0.45	-0.03	0.002
2.30	2.39	-0.09	0.00339
2.24	2.36	-0.12	0.0061
2.22	2.35	-0.13	0.00719
1.75	1.86	-0.11	0.00651
1.77	1.85	-0.08	0.00346
1.79	1.85	-0.06	0.00195
1.27	1.25	0.02	0.00032
1.26	1.25	0.01	0.00008
1.28	1.25	0.03	0.00072
2.14	2.25	-0.11	0.00538
2.16	2.24	-0.08	0.00286
2.14	2.24	-0.1	0.00446
0.86	0.85	0.01	0.00012
0.89	0.86	0.03	0.00105
0.87	0.86	0.01	0.00012
2.96	3.11	-0.15	0.00723
3.18	3.1	0.08	0.00206
3.20	3.1	0.1	0.00323
<b>SUMATORIA</b>			<b>0.15117</b>

Ji cuadrada calculada y de tablas, con 44 grados de libertad:

$$\chi^2_{Calculada} = 0.1511728 < \chi^2_{Tabla_{GL=44}} = 60.48$$

Por tanto no se rechaza  $H_0$  con un nivel de significancia  $\alpha = 0.05$



Las características tan sobresalientes del lenguaje de programación MATLAB, permitió determinar las curvas características de las bombas de carga versus descarga, y resolver el procedimiento matricial usando instrucciones propias de MATLAB.

El método iterativo de aproximaciones sucesivas de Newton-Raphson, cuando se aplica a una sola ecuación no lineal, converge a la solución tanto más rápido como buena sea la primera aproximación. Puede converger a una raíz no deseada, o incluso divergir y hasta llegar a un proceso donde una iteración es igual a otra anterior formando un sinfín de ciclos. Lo anterior es característico del método de Newton Raphson. Por ello, resulta sorprendente que en la generalización de las ecuaciones hidráulicas que aquí se plantean, el proceso converja a la solución, y lo que es más notable: converge rápidamente en apenas seis iteraciones y para este caso no se ha obtenido alguna divergencia.

Optativamente, una vez determinados los caudales con el proceso iterativo anterior, se calcula la distribución de presiones en la red.

Tomando en cuenta solamente el aspecto matemático, cuando los caudales son muy pequeños comparado con los diámetros de la tubería que conforma la red, el modelo produce otro resultado con gastos positivos y negativos, lo que significa que los caudales negativos se les debe cambiar de sentido, dando una incongruencia ya que para este caso los sistemas de riego alimentarían a las bombas.

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El modelo matemático desarrollado es determinístico y emplea información heurística y empírica fundamentada en las ecuaciones de la energía del flujo de agua, que toma en cuenta sus pérdidas en la red, y también se basa en la ecuación de continuidad. Es un modelo conceptual que reproduce mediante fórmulas y algoritmos matemáticos los procesos físicos del estudio, con una representación numérica referida a diferentes aspectos lógicos estructurados de la ciencia físico-matemática, cuyos resultados numéricos son obtenidos mediante la codificación en el lenguaje computacional MATLAB para Windows, versión 7.12.0.635 (R2011a), The MathWorks, Inc.

En forma sistemática se han desarrollado las ecuaciones que rigen el comportamiento hidráulico en estado estacionario, de redes abiertas por las que circula un fluido incompresible en régimen turbulento. Con este antecedente se establecen las expresiones hidráulicas requeridas, al utilizar la información topológica de la red, y la conformación de las matrices necesarias para solucionar cada caso, por lo que su aplicación plantea la resolución del sistema de ecuaciones no lineales y lineales que rigen el equilibrio de energía y masa dentro de la red. Dicha formulación considera la inclusión de cualquier tipo de las bombas dinámicas más usadas en la agricultura.

Usando el programa de MATLAB para Windows, con el modelo matemático presentado en este trabajo, cada análisis de la red puede efectuarse fácil y rápidamente para la toma de decisiones, permitiendo la obtención de un diseño

razonablemente eficiente, luego de probar una serie de opciones alternativas con el programa, como sería la evaluación de:

- La distribución de caudales en la red y la entrega de caudales en los sistemas de riego.
- La distribución de presiones en los nodos, tomando en cuenta la presión al inicio de los sistemas de riego.
- Las pérdidas de carga de las líneas que conforman la red.
- Las eficiencias con que funcionan las bombas.
- La selección del RD (relación de diámetros estandarizados) cuando se trata de tuberías de PVC.
- La disposición física y topográfica de la red.

De esta evaluación se podrá detectar:

- Déficit o excesos de caudales que se suministran a los sistemas de riego.
- Déficit o excesos de caudales en las líneas de la red.
- Déficit o excesos de presiones en la red.
- Velocidades irrazonablemente bajas o altas en las líneas de la red.
- Tuberías cuyos diámetros son insuficientes o están excedidos.
- Bombas que operan fuera de su rango permisible.
- Bombas funcionando con baja eficiencia.
- Bombas con caudales estrangulados.

Finalmente, la persona que maneje el programa tendrá la facilidad de:

- Seleccionar las bombas más apropiadas.

- Seleccionar los diámetros de los conductos más adecuados.
- Mejorar la eficiencia de energía del conjunto de bombas en la red.

Se ha validado la hipótesis general con un porcentaje del 95 % que expresa que el modelo matemático propuesto se ajusta con el comportamiento real de una interconexión de bombas que conforman una red abierta con un número determinado de nodos, para abastecer sistemas de riego agrícola.

El modelo matemático propuesto en este trabajo soluciona cualquier red abierta con interconexión de bombas centrifugas tipo voluta y/o sumergibles emplazadas arbitrariamente.

Se recomienda en trabajos posteriores:

Incluir los modelos de optimización, en el medio agrícola, usando procedimientos como la programación lineal y el algoritmo genético.

Se amplíe este estudio para una combinación de redes abiertas y cerradas tomando en cuenta la topología de las redes, para abastecer de agua a las poblaciones.

## 6. BIBLIOGRAFÍA

- Azevedo, J.M., y G. Acosta A. 1976. Manual de hidráulica. Sexta edición. Editorial Harla. México. 578 p.
- AWWA (American Water Works Association). 2010. Basic Science Concepts and Applications for Water. Third Edition. USA. 626p.
- Bender, E. A., 2000. An introduction to mathematical modeling. Dover Publication Inc. New York, N. Y. U.S.A. 253 pp.
- Berkeley Pumps Catalog, 902. 1990. E. Wisconsin, Delevan. 53115, 59012-95TP, March. U.S.A.
- Bird, R. B., W. E. Stewart, y E. N. Lightfoot. 2002. Fenómenos de transporte. Reverté Ediciones, S.A. de C.V. México. pp. 1-1 - 1-34.
- Bombardelli, F. A., y M. H. García. 2003. Hydraulics design of large-diameter pipes. Journal of Hydraulics Engineer. ASCE. pp. 839-846.
- Brion, L. M., and L. W. Mays. 1991. Methodology for optimal operation of pumping stations in water distribution system. Journal of Hydraulics Engineering, Vol. 117, No. 11, ASCE 1551-1569.
- Burden, R. L., y J. D. Faires. 1985. Análisis numérico. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 721 p.
- Cengel, Y. A., and J. M. Cimbala. 2010. Fluid mechanics fundamentals and applications. Second Edition. McGraw-Hill. New York. USA. 980 p.
- Cesario, A. L. 1991. Network analysis from planning, engineering, operation and management perspectives. Journal of the American Water Works Association. Vol. 83, No 2, pp. 38-42.

- Chapra, S. C., y R. P. Canale. 2007. Métodos numéricos para ingenieros. Quinta Edición. McGraw-Hill, China. 977 p.
- Colombo, A. F., and B. W. Karney. 2009. Leaks and water use representation in water distribution system models: Finding and working equivalence. Journal of Hydraulics Engineering, Vol. 135, No. 3, ASCE 234-239.
- CFE, (Comisión Federal de Electricidad). 1983. Manual de diseño de obras civiles. Hidrotecnia. A.2.15. Técnicas experimentales. Instituto de Investigaciones Eléctricas de México D. F. pp. 2.15.1 - 2.15.133.
- CFE, (Comisión Federal de Electricidad). 1993. Reglamento. (<http://www.cfe.gob.mx/QuienesSomos/MarcoLegalNormativo/Documents/reglamentolspee.pdf> , consultado el 08/05/2012).
- CNA (Comisión Nacional del Agua). 2006. Estadística del agua en México. Edición 2006, 17-18.
- De Nevers, N. 2006. Mecánica de fluidos para ingenieros químicos, Tercera edición, C.E.C.S.A., México. 633p.
- Deuerlein, J. W. 2008. Decomposition model of a general water supply network graph. Journal of Hydraulics Engineering, Vol 134, No 6, ASCE 822-832.
- Deuerlein, J. W., A. R. Simpson, and S. Dempe. 2009. Modeling the behavior of flow regulating devices in water distribution systems using constrained non-linear programming. Journal of Hydraulics Engineering.doi: 10.1061/(ASCE) HY. 1943 - 7900.0000108.
- Ecovive. 2012. Rueda persa. (<http://www.ecovive.com/energia-hidraulica>, consultado el 12/ 06/ 2012).

- Física-Javier. 2012. Tornillo de Arquímedes. (<http://fisica-javier.blogspot.mx/p/arquimedes.html>, consultado el 12/06/2012).
- Franklin Electric. 2008. Franklin Pump Catalog MJ2157. USA.
- Giles, R. V. 1969. Mecánica de los fluidos e hidráulica. Teoría y problemas. Segunda edición. Editorial Mc Graw-Hill. Serie de compendios Schaum. Colombia. 273 p.
- Gómez-García, D. 1993. Programación lineal y su codificación en Turbo Pascal. Coordinación General de Estudios de Posgrado e Investigación. Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, Coahuila, México. 237 p.
- Gómez-García, D. 1999. Alianza familiar de las matrices. Coordinación General de Estudios de Posgrado e Investigación. Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, Coahuila, México. 266 p.
- Gómez-García, D. 2009. Raíces de polinomios, cálculo numérico y aplicaciones. Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas. Consejo Estatal de Ciencia y Tecnología y Universidad Autónoma de Coahuila. Saltillo, Coahuila, México. 121 p.
- González-Manteiga, M. T. 2003. Modelos matemáticos discretos en las ciencias de la naturaleza. Teoría y problemas. Ed. Díaz de Santos. España. 240 p.
- Granger C. W. J. 1999. Empirical modeling in economics: Specification and evaluation. Cambridge University Press. England. 112 p.
- Groundwater Catalog. 1993. Grundfos stainless steel pumps for groundwater applications. California, USA.
- Hutson G. F. 1992. Cause, effect, efficiency and soft systems models warwick business school research paper. Vol. 44, No. 4, pp. 333- 344.

- Jimaja de México. 2010. Catálogo de Bombas Altamira. México.
- Karassik, I. J., y R. Carter. 1985. Bombas centrífugas, selección, operación y mantenimiento. Décima tercera edición, C.E.C.S.A., México. 560 p.
- Karassik, I. J., J. P. Messina, Cooper, and C. C. Heald. 2008. Pump handbook. Third edition. McGraw-Hill, New York. pp. 1.1-1.7.
- King, H. W., C. O. Wisler, and J. G. Woodburn. 1948. Hydraulics. Fifth Edition, Wiley International Edition, New York, N.Y. USA. 351 p.
- Levi, E. 1989. El agua según la ciencia. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. Ediciones Castell Mexicana, S.A. México. 677 p.
- La Course, D. 1995. Handbook of Solid Modeling. Mc Graw-Hill. U.S.A.
- Maier, H. R., A. R. Simpson, A. C. Zecchin, W. K. Foong, K. Y. Phang, H. Y. Seah, and C. L. Tan. 2003. Ant colony optimization for design of water distribution systems. Journal of Water Resources Planning and Management. ASCE. 200-209.
- Mataix, C. 1982. Mecánica de fluidos y máquinas hidráulicas. Segunda edición. Alfaomega Grupo Editor, S.A. de C.V. y Oxford University Press. México. 660 p.
- MATLAB for Windows. 2011. Versión 7.12.0.635 (R2011a), The MathWorks Inc.
- Mays, L. W. 2002. Manual de sistemas de distribución de agua. Primera edición. Ed. McGraw-Hill, España.
- Nahavandi, A. N. 1973. Matrix method for analysis of Hydraulics networks. Journal of the Hydraulics Division. ASCE. Vol. 99. pp. 47-63.



- Michalewicz, Z., D. B. Fogel, and S. Verlag. 2002. Adaptive computing in design and manufacture VI. Ed. Springer Verlag London Berlin Heiderberg. New York. U.S.A. 397 p.
- Montesinos M<sup>a</sup>. P., A. García-Guzmán, J. L. Ayuso., 1996. Optimización de redes de distribución de agua utilizando un algoritmo genético. Ingeniería del agua. Vol. 4, Núm. 1. pp. 71-77.
- Mott, R. L., 2006. Mecánica de fluidos. Sexta edición. Pearson Educación, México. 628 p.
- Munson, B. R., D. F. Young, y T. H. Okiishi. 2007. Fundamentos de Mecánica de Fluidos. Limusa Wiley, México. 867 p.
- Nekrasov, B. 1966. Hidráulica. Segunda edición. Editorial MIR. URSS. 279 p.
- Pérez, G. R. 1993. Dimensionado óptimo de redes de distribución de agua ramificadas considerando los elementos de regulación. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia. Departamento de Ingeniería y Medio Ambiente. Valencia, España. pp. 3.1 - 3.48.
- Pickover, C. A. 2012. El libro de la física. Del big bang hasta la resurrección cuántica, 250 hitos de la historia de la física. Edición española: Cillero & de Motta Traducción. China. 527 p.
- RAE (Real Academia Española). 2009. Diccionario de la lengua española. Modelo. Vigésima segunda edición. (<http://lema.rae.es/drae/?val=modelo>, consultado el 31/07/2012).
- Rotor Pump. 2012. Bombas sumergibles de pasos múltiples. Rotor Pump. (<http://www.rotorpump.com/documentacion.asp>, consultado el 15/06/2012).

- Rubio-Sanjuán, I. 1960. Hidráulica general y aplicada con motores hidráulicos. Quinta edición. Editorial Labor, S. A. España. 631 p.
- Saldarriaga, J. 2008. Hidráulica de tuberías. Abastecimiento de aguas, redes, riegos. Primera edición. Alfaomega, Bogotá, Colombia. 690 p.
- SAGARPA (Secretaría de Agricultura y Ganadería, Desarrollo Rural, Pesca y Alimentación). 2010. Proyectos Estratégicos, Tecnificación del Riego.
- Schmidt, H. 2009. Introduction to numerical analysis for engineering. Massachusetts Institute of Technology. Boston, Massachusetts. U.S.A.
- Scribd. 2012. Clasificación de redes de conducción de agua. (<http://es.scribd.com/doc/52791579/-REDES>, consultado el 01/08/2012).
- Serrata, O. A., B. D. Iglesias, S. R. Aliod, y C. C. González. 2002. GestarCAD. Una aplicación para el diseño y simulación de redes de riego bajo entorno AutoCAD utilizando Objetos active X. XIV Congreso Internacional de Ingeniería Gráfica, Santander, España.
- Shames, I. H. 1995. Mecánica de fluidos. Tercera edición. Mc Graw-Hill Interamericana S.A. Santafé de Bogotá, Colombia. 825 p.
- Shashi-Menon, E. 2005. Piping calculations manual. Ed. Mc Graw Hill. New York, USA. 666 p.
- Skousen, R. 1992. Analogy and structure. Kluwer Academic Publisher. Netherlands. 392 p.
- Skousen, P. L. 2004. Valve Handbook. Second Edition. McGraw-Hill. U.S.A. 447 p.

- Sobitec. 2012. Bombas centrífugas horizontales tipo voluta de etapa simple. (<http://www.sobitec.com/index.php?nombre=Categorias&area=176&seccion=429>, consultado el 15/06/2012).
- Sotelo-Ávila, G. 1998. Hidráulica General. Volumen 1. Fundamentos. Editorial Limusa, S.A. de C.V. México. 561p.
- Spiegel, M. R. 2001. Matemáticas avanzadas para ingeniería y ciencias. McGrawHill. México, D.F. 498 p.
- SRH (Secretaría de Recursos Hidráulicos). 1969. Proyectos de plantas de bombeo para aguas superficiales con fines de riego (Generalidades). Plan Nacional de Pequeña Irrigación. Secretaría de Recursos Hidráulicos, México, D.F. 137 p.
- Stewart, J. 2002. Cálculo multivariable. Cuarta edición. Thompson Learning, Inc. México. 1151 p.
- Streeter, V. L., E. B. Wylie, y K. W. Bedford. 2000. Mecánica de fluidos. Novena Edición. McGraw-Hill, Santa Fe de Bogotá, Colombia. 740 p.
- Walski, T. M., T. E. Bernard, S. R. Durrans, and M. E. Meadows. 2002. Computer applications in Hydraulics engineering connecting theory to practice. Fifth Edition. Haestad Press, Waterbury, C.T., U.S.A. 375 p.
- Walski T. M., D. W. Chase, D.A. Savic, W. Grayman, S. Beckwith, and E. Koelle. 2003. Advanced water distribution modeling and management. Haested Press, Waterbury, C. T. U.S.A. 751 p.
- Webber N. B. 1971. Fluid mechanics for civil engineers. Ed. Chapman and Hall. New York, U.S.A. 340 p.

White, F. M. 2008. Mecánica de fluidos. Sexta Edición, McGraw Hill, México.  
864p.

Zyl, J. E., P. Kumar and M. Gupta. 2008. Two-point linearization method for the analysis of pipe network. Journal of Hydraulics Engineering, ASCE 1179.

## 7. APÉNDICE

### 7.1. Codificación en MATLAB del caso II subcaso 1 y el prototipo

```

function [X, F, HPn, Hn, HPSb, Hsb, HB, v, RR, Re, f, Sk, Q] =
CASO2SUB1 (Zf, Zr, Zn, Zsb, HPr, Qb, Hb, L, D, k11, k12, k21, k22, k31, k32, k41, k42, k51, k5
2, RA, a, b, q)
%           [X, F, HPn, Hn, HPSb, Hsb, HB, v, RR, Re, f, Sk, Q] =
CASO2SUB1 (Zf, Zr, Zn, Zsb, HPr, Qb, Hb, L, D, k11, k12, k21, k22, k31, k32, k41, k42, k51, k5
2, RA, vc, a, b, q)
%
%
%   SOLUCIONA UNA RED ABIERTA DE: 5 LÍNEAS, 2 NODOS, 2 SISTEMAS DE
RIEGO
%
%   - DATOS DE ENTRADA -
%   Lo primero es ubicar el nivel de referencia en cualquier lugar.
%   Es preferible que el nivel de referencia se ubique en el nivel de la
%   fuente de abastecimiento que esté más bajo, ya sea el nivel dinámico
%   de un pozo en el caso de que sea bomba sumergible ó el nivel de la
%   superficie del agua de la fuente de abastecimiento en el caso de
%   bomba centrífuga tipo voluta.
%
%   ***TODAS LAS CARGAS O ALTURAS ESTAN EN METROS DE COLUMNA DE AGUA***
%
%
%   Z           alturas medidas desde el nivel de referencia.
%
%   Zf          Matriz de 1x2, que corresponde a las alturas de las
%               superficies libres de las fuentes de abastecimiento de
%               agua, que pueden ser niveles dinámicos de acuíferos, si
%               son bombas sumergibles, o estanques, lagos, ríos, etc.,
%               si son bombas centrífugas horizontales tipo voluta de
un           .           %           solo paso.
%   Zf(1), Zf(2) niveles de las fuentes de abastecimiento de las bombas
%               1 y 2.
%
%   Zr          Matriz de 1x2, que corresponde a las alturas o niveles
%               de las entradas a los sistemas de riego.
%   Zr(1),Zr(2) alturas a la entrada de los sistemas de riego 1 y 2
%               respectivamente.
%
%   Zn          Matriz de 1x2 que corresponde a los niveles de los
%               nodos.
%
%   Zn(1),Zn(2) alturas de los nodos 1 y 2, respectivamente.
%
%   Zsb         Matriz de 1x4, alturas de las salidas de las bombas.
%               En bombas sumergibles es a la salida del pozo.
%   Zsb(1),Zsb(2) Alturas de la salida del agua en las bombas 1 y 2
%               respectivamente.
%
%   Qb         caudales de las curvas características de las bombas, en

```

```

%      litros por segundo. Matriz de 2x3.
%      El primer renglón, 3 caudales de la bomba 1; segundo renglón
%      3 caudales de la bomba 2.
%
% Hb      cargas de las curvas características de las bombas en
metros.
%      Matriz de 2x3.
%      El primer renglón 3 cargas de la bomba 1; segundo renglón 3
%      cargas de la bomba 2.
%
%      Las siguientes matrices son de 5x2, que comprenden dos
tramos
%      por línea de conducción que conforma la red:
%      Primer subíndice (renglón): número de línea.
%      Segundo subíndice (columna): número de tramo en la línea.
%
% L      Matriz de 5x2, de longitudes de las tuberías en metros.
%
% D      Matriz de 5x2 de diámetros interiores, en milímetros.
%
% RA     Matriz de 5x2 de rugosidades absolutas, en milímetros.
%
%
%
% k      10 vectores de coeficientes adimensionales de pérdidas de
%      cargas locales o por accesorios, por tramo, cada línea
%      comprende dos tramos:
%      k11 en el tramo de succión o columna de bombeo en la línea 1
%      k12 en el tramo de descarga en la línea 1
%      k21 en el tramo de succión o columna de bombeo en la línea 2
%      k22 en el tramo de descarga en la línea 2
%      k31 en el primer tramo de la línea 3
%      k32 en el segundo tramo de la línea 3
%      k41 en el primer tramo la línea 4
%      k42 en el segundo tramo de la línea 4
%      k51 en el primer tramo de la línea 5
%      k52 en el segundo tramo de la línea 5
%
%      selección del tipo de bomba:
% a      si a == 1 es bomba sumergible; si a es diferente de 1 es
%      voluta, en bomba 1.
% b      si b == 1 es bomba sumergible; si b es diferente de 1 es
%      voluta, en bomba 2.
%
%
% q      vector de gastos supuestos en cada línea, en litros por
%      segundo [Q1 Q2 Q3 Q4 Q5]. Matriz de 1x5.
%
%      - RESULTADOS -
% Q      vector columna de distribución de gastos en la red en litros
%      por segundo.
%      [Q1 Q2 Q3 Q4 Q5]'.
%
% H      vector de distribución de cargas totales en la red, en
metros
%      medidas a partir del nivel de referencia.
%      H = carga por posición + carga piezométrica.

```

```

%      Carga por posición = altura de la tubería o de la superficie
%      de la fuente de abastecimiento, medida a partir del nivel de
%      referencia.
%      Carga piezométrica = altura del agua en el piezómetro de la
%      tubería.
%
%      Hf(1)   Carga total de la fuente de abastecimiento 1: Hf(1) =
%              Zf(1)+HPf(1)
%      Hf(2)   carga total de la fuente de abastecimiento 2: Hf(2) =
%              Zf(2)+HPf(2)
%              Hf1=Zf1; Hf2=Zf.(Por que la presión atmosférica relativa es
%              igual cero); HPf(1) = 0; HPf(2) = 0.
%
%      Hn(1),Hn(2)   cargas totales de los nodos 1 y 2, respectivamente.
%
%      Hsb(1),Hsb(2)   cargas totales a las salidas de las bombas 1 y 2,
%                      respectivamente; en bombas sumergibles es en la
%                      salida del pozo.
%
%      Hr(1)       carga total a la entrada del sistema de riego 1.
%      Hr(2)       carga total a la entrada del sistema de riego 2.
%
%      HB          cargas dinámicas totales de las bombas, en metros, (bomba
%                  centrífuga tipo voluta o sumergible).
%      HB(1)       carga dinámica total de la bomba 1.
%      HB(2)       carga dinámica total de la bomba 2.
%
%
%      *** CARGAS PIEZOMÉTRICAS,EN METROS DE COLUMNA DE AGUA ***
%
%      HP          matriz de distribución de cargas por presión en la red o en
%                  fuentes de abastecimiento, medidas a partir del centro de la
%                  tubería o a partir de la superficie libre del líquido en las
%                  fuentes de abastecimiento (carga piezométrica).
%
%      HPf         cargas por presión en las superficies de las fuentes de
%                  abastecimiento. Si están a la presión atmosférica: HPf1 = 0
%
y      HPf2 = 0, por ser presiones relativas.
%
%      HPr         matriz de 1x2 de las cargas de operación de los sistemas
de      riego o la presión a la entrada de los sistemas de riego
en      metros de columna de agua.
%
%      HPr(1),HPr(2)   cargas piezométricas a las entradas de los sistemas
%                      de riego 1 y 2.
%
%
%      HPn(1),HPn(2)   cargas por presión en los nodos 1 y 2,
%                      respectivamente
%
%      HPSb(1),HPSb(2)   cargas por presión a las salidas de las bombas
%                      1 y 2 respectivamente, en bombas sumergibles, es a
la      salida del pozo
%

```

```

%
%      *** DATOS CALCULADOS ***
% Rutinas utilizadas: Colebrook

clc      % limpia la pantalla
clf      % limpia la pantalla gráfica

% Conversión de litros por segundo a metros cúbicos por segundo.
Q = (q/1000)';
Qb = Qb/1000;

% conversión de milímetros a metros
D = D/1000;
RA = RA/1000;

% Constantes
vc = 0.000001007 % viscosidad cinemática del agua, en metros cuadrados
%                por segundo
g = 9.81;      % aceleración de la gravedad terrestre en m/s
HPf(1) = 0;    % carga de la presión atmosférica relativa, de la fuente
de
%              abastecimiento 1.
HPf(2) = 0;    % carga de la presión atmosférica relativa, de la fuente
de
%              abastecimiento 2.

Hf(1) = Zf(1) + HPf(1);
Hf(2) = Zf(2) + HPf(2);
Hr(1) = Zr(1) + HPr(1);
Hr(2) = Zr(2) + HPr(2);

% Variables
% Matrices con elementos de ceros
f = zeros(5,2); % Matriz de 5x2 de coeficiente de fricción
%                hidráulica.
v = zeros(5,2); % Matriz de 5x2 de velocidades.
Re = zeros(5,2); % Matriz de 5x2 de números de Reynolds.
RR = zeros(5,2); % Matriz de 5x2 de rugosidades relativas.
Sk = zeros(5,2); % Matriz de 5x2 de sumatorias de k locales.
HPn = zeros(1,2); % Matriz de 1x2 de cargas piezométricas en nodos.
Hn = zeros(1,2); % Matriz de 1x2 de cargas totales en nodos
%                (Hn = Zn + HPn).
HPsb = zeros(1,2); % Cargas piezométricas en las salidas de las
bombas.
Hsb = zeros(1,2); % Cargas totales en las salidas de las bombas
%                (Hsb = Zsb + HPsb).
HB = zeros(1,2); % Cargas dinámicas totales de las bombas.

% suma de los coeficientes de pérdidas por cargas locales, por tramo
de
% cada línea de conducción de la red.
Sk11 = sum(k11); Sk12 = sum(k12);
Sk21 = sum(k21); Sk22 = sum(k22);
Sk31 = sum(k31); Sk32 = sum(k32);

```



```

Sk41 = sum(k41); Sk42 = sum(k42);
Sk51 = sum(k51); Sk52 = sum(k52);
Sk(1,1) = Sk11; Sk(1,2) = Sk12;
Sk(2,1) = Sk21; Sk(2,2) = Sk22;
Sk(3,1) = Sk31; Sk(3,2) = Sk32;
Sk(4,1) = Sk41; Sk(4,2) = Sk42;
Sk(5,1) = Sk51; Sk(5,2) = Sk52;

% curva característica de la bomba 1
p1 = polyfit(Qb(1,:), Hb(1,:),2); % polinomio 1 (Ecuación de la curva
% característica de la bomba 1)
dp1 = polyder(p1); % derivada del polinomio 1

% curva característica de la bomba 2
p2 = polyfit(Qb(2,:), Hb(2,:),2); % polinomio 2 (Ecuación de la curva
% característica de la bomba 2)
dp2 = polyder(p2); % derivada del polinomio 2

X = Q;
x = Q;

for i = 1:9 % ciclo.
    J = zeros(5); % matriz jacobiana de ceros de 5x5.
    Q = x;
    for j = 1:5 % ciclo anidado.
        v(j,1) = 4*Q(j)/(pi*(D(j,1))^2);
        v(j,2) = 4*Q(j)/(pi*(D(j,2))^2);
        RR(j,1) = RA(j,1)/D(j,1);
        RR(j,2) = RA(j,2)/D(j,2);
        Re(j,1) = v(j,1)*D(j,1)/vc;
        Re(j,2) = v(j,2)*D(j,2)/vc;
        f(j,1) = Colebrook(RR(j,1),Re(j,1));
        f(j,2) = Colebrook(RR(j,2),Re(j,2));
    end

    % variables
    K1 =
    ((f(1,1)*L(1,1)/D(1,1)+Sk(1,1))*1/D(1,1)^4+(f(1,2)*L(1,2)/D(1,2)+Sk(1,2))*1
    /D(1,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K2 =
    ((f(2,1)*L(2,1)/D(2,1)+Sk(2,1))*1/D(2,1)^4+(f(2,2)*L(2,2)/D(2,2)+Sk(2,2))*1
    /D(2,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K3 =
    ((f(3,1)*L(3,1)/D(3,1)+Sk(3,1))*1/D(3,1)^4+(f(3,2)*L(3,2)/D(3,2)+Sk(3,2))*1
    /D(3,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K4 =
    ((f(4,1)*L(4,1)/D(4,1)+Sk(4,1))*1/D(4,1)^4+(f(4,2)*L(4,2)/D(4,2)+Sk(4,2))*1
    /D(4,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K5 =
    ((f(5,1)*L(5,1)/D(5,1)+Sk(5,1))*1/D(5,1)^4+(f(5,2)*L(5,2)/D(5,2)+Sk(5,2))*1
    /D(5,2)^4)*(8/(pi^2*g));

    HB(1) = polyval(p1,Q(1)); % valor del polinomio 1 (Ec. curva
    % característica de la bomba 1)
    dHB1 = polyval(dp1,Q(1)); % valor de la derivada del polinomio 1

```

```

HB(2) = polyval(p2,Q(2));      % valor del polinomio 2 (Ec. curva
                                % característica de la bomba 2)
dHB2 = polyval(dp2,Q(2));     % valor de la derivada del polinomio 2

Hn(1) = Hf(1) + HB(1) - K1*Q(1)^2; % carga total del nodo 1.
HPn(1) = Hn(1) - Zn(1);        % carga piezométrica del nodo 1.
Hn(2) = Hn(1) - K5*Q(5)^2;    % carga total del nodo 2.
HPn(2) = Hn(2) - Zn(2);      % carga piezométrica del nodo 2.

h11 =
(f(1,1)*L(1,1)/D(1,1)+Sk(1,1))*1/D(1,1)^4*(8/(pi^2*g))*Q(1)^2;
h21 =
(f(2,1)*L(2,1)/D(2,1)+Sk(2,1))*1/D(2,1)^4*(8/(pi^2*g))*Q(2)^2;
    % Carga piezométrica en la salida de la bomba 1.
    if a == 1 % bomba sumergible.

        HPSb(1) = HB(1)+ Hf(1) - Zsb(1) - v(1,1)^2/(2*g) - h11;

    else % bomba centrifuga tipo voluta.
        HPSb(1) = HB(1) + Zf(1)- Zsb(1) - v(1,2)^2/(2*g) - h11;
    end

    % Carga piezométrica en la salida de la bomba 2.
    if b == 1 % bomba sumergible.
        HPSb(2) = HB(2)+ Zf(2) - Zsb(2) - v(2,1)^2/(2*g) - h21;

    else % bomba centrifuga tipo voluta.
        HPSb(2) = HB(2) + ZF(2) - Zsb(2) - v(2,2)^2/(2*g) - h21;
    end

    % Cargas totales en las salidas de las bombas (medidas a partir
del % nivel de referencia).
Hsb(1) = HPSb(1) + Zsb(1);
Hsb(2) = HPSb(2) + Zsb(2);

    % matriz jacobiana
J(1,1) = dHB1-2*K1*Q(1);
J(1,3) = -2*K3*Q(3);
J(1,5) = -2*K5*Q(5);
J(2,2) = dHB2-2*K2*Q(2);
J(2,4) = -2*K4*Q(4);
J(2,5) = -2*K5*Q(5);
J(3,3) = 2*K3*Q(3);
J(3,4) = -2*K4*Q(4);
J(4,1) = 1;
J(4,2) = 1;
J(4,5) = -1;
J(5,3) = 1;
J(5,4) = 1;
J(5,5) = -1;
det(J);

    % lado derecho

```

```

F(1) = HB(1)+ Hf(1)- Hr(1)- K1*Q(1)^2- K3*Q(3)^2 - K5*Q(5)^2;
F(2) = HB(2)+ Hf(2)- Hr(2)- K2*Q(2)^2- K4*Q(4)^2- K5*Q(5)^2;
F(3) = Hr(1)- Hr(2)+ K3*Q(3)^2- K4*Q(4)^2;
F(4) = Q(1) + Q(2)- Q(5);
F(5) = Q(3) + Q(4)- Q(5);
F = [F(1) F(2) F(3) F(4) F(5)]';
x = x - J\F;
X = [X x];

end

% conversión de metros cúbicos por segundo a litros por segundo
X = 1000*X;
Q = 1000*Q;
% Gráficas de gastos
xlabel('\bfIteraciones')
hold on
ylabel('\bfGastos')
plot(X') % líneas
plot(X', '*') % puntos
legend('Q_1', 'Q_2', 'Q_3', 'Q_4', 'Q_5', 0)
title('\bfRedes hidráulicas abiertas a presión')
shg

end

```

## Programa auxiliar Colebrook

```

function f = Colebrook(RR,Re)
% f = Colebrook(RR,Re)
% Usando la fórmula de Colebrook calcula el coeficiente de fricción
% hidráulica de Darcy Weisbach f
% Datos:
% RR rugosidad relativa adimensional
% Re número de Reynolds adimensional
if Re <= 2300 % FLUJO LAMINAR
f2 = 64/Re;
else % FLUJO TURBULENTO
f1 = 0.02; % valor inicial propuesto de f
ya = 0; % valor artificial para empezar el while
while ya == 0;
f2 = 1/(-2*log10(RR/3.71+2.51/(Re*sqrt(f1))))^2;
if (abs(f1-f2) < 0.0001)
ya = 1;
end
f1 = f2;
end
end
f = f2;

```

## 7.2. Codificación en MATLAB del caso único IV

```

function [X, F, HPn, Hn, HPSb, Hsb, HB, v, RR, Re, f, Sk, Q] =
CASOUNICO4 (Zf, Zr, Zn, Zsb, HPr, Qb, Hb, L, D, k11, k12, k21, k22, k31, k32, k41, k42, k51, k
52, k61, k62, k71, k72, k81, k82, k91, k92, k101, k102, RA, vc, a, b, c, d, q, n)
%           [X, F, HPn, Hn, HPSb, Hsb, HB, v, RR, Re, f, Sk, Q] =
%
CASOUNICO4 (Zf, Zr, Zn, Zsb, HPr, Qb, Hb, L, D, k11, k12, k21, k22, k31, k32, k41, k42, k51, k
52, k61, k62, k71, k72, k81, k82, k91, k92, k101, k102, RA, a, b, c, d, q, n)
%       SOLUCIONA UNA RED ABIERTA, CASO ÚNICO 4: 10 líneas, 4 nodos, 3
%       sistemas de riego.
%       *** DATOS CALCULADOS ***
%
% Rutinas utilizadas: Colebrook

clc           % limpia la pantalla
clf           % limpia la pantalla gráfica

% Conversión de litros por segundo a metros cúbicos por segundo.
Q = (q/1000)';
Qb = Qb/1000;
% conversión de milímetros a metros
D = D/1000;
RA = RA/1000;
% Constantes
g = 9.81;           % aceleración de la gravedad terrestre en m/s.
vc = 0.000001007   % viscosidad cinemática del agua, en metros cuadrados
%                 % por segundo.
HPf(1) = 0; % carga de la presión atmosférica relativa
% (fuente de abastecimiento de la bomba 1).
HPf(2) = 0; % carga de la presión atmosférica relativa
% (fuente abastecimiento de la bomba 2).
HPf(3) = 0; % carga de la presión atmosférica relativa
% (fuente de abastecimiento de la bomba 3).
HPf(4) = 0; % carga de la presión atmosférica relativa
% (fuente de abastecimiento de la bomba 4).

Hf(1) = Zf(1) + HPf(1); % carga total de la fuente de abastecimiento
1.
Hf(2) = Zf(2) + HPf(2); % carga total de la fuente de abastecimiento
2.
Hf(3) = Zf(3) + HPf(3); % carga total de la fuente de abastecimiento
3.
Hf(4) = Zf(4) + HPf(4); % carga total de la fuente de abastecimiento
4.

Hr(1) = Zr(1) + HPr(1); % carga total en la entrada del sistema de
% riego 1.
Hr(2) = Zr(2) + HPr(2); % carga total en la entrada del sistema de
% riego 2.
Hr(3) = Zr(3) + HPr(3); % carga total en la entrada del sistema de
% riego 3.

% Variables
f = zeros(10,2); % coeficiente de fricción hidráulica.

```

```

v = zeros(10,2); % velocidades en m/s.
Re = zeros(10,2); % números de Reynolds.
RR = zeros(10,2); % rugosidades relativas.
Sk = zeros(10,2); % sumatorias de k locales.
HPn = zeros(1,4); % carga piezométrica en los nodos.
Hn = zeros(1,4); % cargas totales en los nodos (Hn = Zn + HPn).
HPSb = zeros(1,4); % cargas piezométricas a las salidas de las bombas.
Hsb = zeros(1,4); % cargas totales en las salidas de las bombas
% (Hsb = Zsb + HPSb).
HB = zeros (1,4); % cargas dinámicas totales de las bombas.

% suma de los coeficientes de pérdidas por carga locales por linea y
% tramo.
Sk(1,1) = sum(k11); Sk(1,2) = sum(k12);
Sk(2,1) = sum(k21); Sk(2,2) = sum(k22);
Sk(3,1) = sum(k31); Sk(3,2) = sum(k32);
Sk(4,1) = sum(k41); Sk(4,2) = sum(k42);
Sk(5,1) = sum(k51); Sk(5,2) = sum(k52);
Sk(6,1) = sum(k61); Sk(6,2) = sum(k62);
Sk(7,1) = sum(k72); Sk(7,2) = sum(k72);
Sk(8,1) = sum(k81); Sk(8,2) = sum(k82);
Sk(9,1) = sum(k91); Sk(9,2) = sum(k92);
Sk(10,1) = sum(k101); Sk(10,2) = sum(k102);

% curvas características de las bombas:
p1 = polyfit(Qb(1,:), Hb(1,:),2); % polinomio 1 (Ecuación de la
curva % característica carga vs caudal
de % la bomba 1)
dp1 = polyder(p1); % derivada del polinomio 1

p2 = polyfit(Qb(2,:), Hb(2,:),2); % polinomio 2 (Ecuación de la
curva % característica carga vs caudal
de % la bomba 2)
dp2 = polyder(p2); % derivada del polinomio 2

p3 = polyfit(Qb(3,:), Hb(3,:),2); % polinomio 3 (Ecuación de la
curva % característica carga vs caudal
de % la bomba 3)
dp3 = polyder(p3); % derivada del polinomio 3

p4 = polyfit(Qb(4,:), Hb(4,:),2); % polinomio 4 (Ecuación de la
curva % característica carga vs caudal
de % la bomba 4)
dp4 = polyder(p4); % derivada del polinomio 4

X = Q;

```

```

x = Q;

for i = 1:n
    J = zeros(10);           % matriz jacobiana de ceros de 10x10
    Q = x;
    for j = 1:10
        v(j,1) = 4*Q(j)/(pi*(D(j,1))^2);
        v(j,2) = 4*Q(j)/(pi*(D(j,2))^2);
        RR(j,1) = RA(j,1)/D(j,1);
        RR(j,2) = RA(j,2)/D(j,2);
        Re(j,1) = v(j,1)*D(j,1)/vc;
        Re(j,2) = v(j,2)*D(j,2)/vc;
        f(j,1) = Colebrook(RR(j,1),Re(j,1)); % llamando al programa
Colebrook
        f(j,2) = Colebrook(RR(j,2),Re(j,2)); % llamando al programa
Colebrook
    end

    % coeficientes para determinar pérdidas de carga de cada línea de
    % conducción de la red, al ser multiplicados por el caudal al
    % cuadrado (Ki*Q^2).
    K1 =
    ((f(1,1)*L(1,1)/D(1,1)+Sk(1,1))*1/D(1,1)^4+(f(1,2)*L(1,2)/D(1,2)+Sk(1,2))*1
    /D(1,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K2 =
    ((f(2,1)*L(2,1)/D(2,1)+Sk(2,1))*1/D(2,1)^4+(f(2,2)*L(2,2)/D(2,2)+Sk(2,2))*1
    /D(2,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K3 =
    ((f(3,1)*L(3,1)/D(3,1)+Sk(3,1))*1/D(3,1)^4+(f(3,2)*L(3,2)/D(3,2)+Sk(3,2))*1
    /D(3,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K4 =
    ((f(4,1)*L(4,1)/D(4,1)+Sk(4,1))*1/D(4,1)^4+(f(4,2)*L(4,2)/D(4,2)+Sk(4,2))*1
    /D(4,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K5 =
    ((f(5,1)*L(5,1)/D(5,1)+Sk(5,1))*1/D(5,1)^4+(f(5,2)*L(5,2)/D(5,2)+Sk(5,2))*1
    /D(5,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K6 =
    ((f(6,1)*L(6,1)/D(6,1)+Sk(6,1))*1/D(6,1)^4+(f(6,2)*L(6,2)/D(6,2)+Sk(6,2))*1
    /D(6,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K7 =
    ((f(7,1)*L(7,1)/D(7,1)+Sk(7,1))*1/D(7,1)^4+(f(7,2)*L(7,2)/D(7,2)+Sk(7,2))*1
    /D(7,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K8 =
    ((f(8,1)*L(8,1)/D(8,1)+Sk(8,1))*1/D(8,1)^4+(f(8,2)*L(8,2)/D(8,2)+Sk(8,2))*1
    /D(8,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K9 =
    ((f(9,1)*L(9,1)/D(9,1)+Sk(9,1))*1/D(9,1)^4+(f(9,2)*L(9,2)/D(9,2)+Sk(9,2))*1
    /D(9,2)^4)*(8/(pi^2*g));
    K10 =
    ((f(10,1)*L(10,1)/D(10,1)+Sk(10,1))*1/D(10,1)^4+(f(10,2)*L(10,2)/D(10,2)+Sk
    (10,2))*1/D(10,2)^4)*(8/(pi^2*g));

    HB(1) = polyval(p1,Q(1)); % valor del polinomio 1 (CDTB1).
    % Ecuación de la curva característica
    % de la bomba 1.
    dHB1 = polyval(dp1,Q(1)); % valor de la derivada del polinomio 1.

```

```

HB(2) = polyval(p2,Q(2)); % valor del polinomio 2 (CDTB2).
                                % Ecuación de la curva característica
                                % de la bomba 2.
dHB2 = polyval(dp2,Q(2)); % valor de la derivada del polinomio 2.
HB(3) = polyval(p3,Q(3)); % valor del polinomio 3 (CDTB3).
                                % Ecuación de la curva característica
                                % de la bomba 3.
dHB3 = polyval(dp3,Q(3)); % valor de la derivada del polinomio 3.
HB(4) = polyval(p4,Q(4)); % valor del polinomio 4 (CDTB4).
                                % Ecuación de la curva característica
                                % de la bomba 4.
dHB4 = polyval(dp4,Q(4)); % valor de la derivada del polinomio 4.

Hn(1) = Hf(1) + HB(1) - K1*Q(1)^2;
Hn(2) = Hn(1) - K10*Q(10)^2;
Hn(3) = Hn(2) - K9*Q(9)^2;
Hn(4) = Hn(3) - K8*Q(8)^2;
HPn(1) = Hn(1) - Zn(1); % carga piezométrica del nodo 1.
HPn(2) = Hn(2) - Zn(2); % carga piezométrica del nodo 2.
HPn(3) = Hn(3) - Zn(3); % carga piezométrica del nodo 3.
HPn(4) = Hn(4) - Zn(4); % carga piezométrica del nodo 4.

% Pérdidas de carga en las columnas de las bombas
h11 =
(f(1,1)*L(1,1)/D(1,1)+Sk(1,1))*1/D(1,1)^4*(8/(pi^2*g))*Q(1)^2;
h21 =
(f(2,1)*L(2,1)/D(2,1)+Sk(2,1))*1/D(2,1)^4*(8/(pi^2*g))*Q(2)^2;
h31 =
(f(3,1)*L(3,1)/D(3,1)+Sk(3,1))*1/D(3,1)^4*(8/(pi^2*g))*Q(3)^2;
h41 =
(f(4,1)*L(4,1)/D(4,1)+Sk(4,1))*1/D(4,1)^4*(8/(pi^2*g))*Q(4)^2;

% carga piezométrica en la salida de la Bomba 1.
if a == 1 % bomba sumergible.
    HPsb(1) = HB(1) + Zf(1) - Zsb(1) - v(1,1)^2/(2*g) - h11;
else % bomba centrífuga voluta.
    HPsb(1) = HB(1) + Zf(1) - Zsb(1) - v(1,2)^2/(2*g) - h11;
end
% carga piezométrica en la salida de la Bomba 2.
if b == 1 % bomba sumergible.
    HPsb(2) = HB(2) + Zf(2) - Zsb(2) - v(2,1)^2/(2*g) - h21;
else % bomba centrífuga voluta.
    HPsb(2) = HB(2) + Zf(2) - Zsb(2) - v(2,2)^2/(2*g) - h21;
end
% carga piezométrica en la salida de la Bomba 3.
if c == 1 % bomba sumergible.
    HPsb(3) = HB(3) + Zf(3) - Zsb(3) - v(3,1)^2/(2*g) - h31;
else % bomba centrífuga voluta.
    HPsb(3) = HB(3) + Zf(3) - Zsb(3) - v(3,2)^2/(2*g) - h31;
end
% carga piezométrica en la salida de la Bomba 4.
if d == 1 % bomba sumergible.
    HPsb(4) = HB(4) + Zf(4) - Zsb(4) - v(4,1)^2/(2*g) - h41;
else % bomba centrífuga voluta.
    HPsb(4) = HB(4) + Zf(4) - Zsb(4) - v(4,2)^2/(2*g) - h41;
end

```

```

end
% Cargas a las salidas de las bombas, medidas a partir del nivel
de
% referencia

Hsb(1) = HPSb(1) + Zsb(1);
Hsb(2) = HPSb(2) + Zsb(2);
Hsb(3) = HPSb(3) + Zsb(3);
Hsb(4) = HPSb(4) + Zsb(4);

% matriz jacobiana
J(1,1) = dHB1 - 2*K1*Q(1);
J(1,5) = -2*K5*Q(5);
J(3,5) = -2*K5*Q(5);
J(4,5) = -2*K5*Q(5);
J(1,8) = -2*K8*Q(8);
J(2,8) = -2*K8*Q(8);
J(3,8) = -2*K8*Q(8);
J(4,8) = -2*K8*Q(8);
J(1,9) = -2*K9*Q(9);
J(2,9) = -2*K9*Q(9);
J(3,9) = -2*K9*Q(9);
J(1,10) = -2*K10*Q(10);
J(2,10) = -2*K10*Q(10);
J(2,2) = dHB2 - 2*K2*Q(2);
J(2,6) = -2*K6*Q(6);
J(5,6) = -2*K6*Q(6);
J(3,3) = dHB3 - 2*K3*Q(3);
J(4,4) = dHB4 - 2*K4*Q(4);
J(5,5) = 2*K5*Q(5);
J(6,6) = 2*K6*Q(6);
J(6,7) = -2*K7*Q(7);
J(7,1) = 1;
J(7,2) = 1;
J(8,3) = 1;
J(8,10) = 1;
J(9,4) = 1;
J(9,9) = 1;
J(10,8) = 1;
J(7,10) = -1;
J(8,9) = -1;
J(9,8) = -1;
J(10,5) = -1;
J(10,6) = -1;
J(10,7) = -1;

% La solución de las 9 ecuaciones para resolver la distribución de
caudales.
F(1) = HB(1) + Hf(1) - Hr(1) - K1*Q(1)^2 - K5*Q(5)^2 - K8*Q(8)^2 -
K9*Q(9)^2 - K10*Q(10)^2;
F(2) = HB(2) + Hf(2) - Hr(2) - K2*Q(2)^2 - K6*Q(6)^2 - K8*Q(8)^2 -
K9*Q(9)^2 - K10*Q(10)^2;
F(3) = HB(3) + Hf(3) - Hr(1) - K3*Q(3)^2 - K5*Q(5)^2 - K8*Q(8)^2 -
K9*Q(9)^2;
F(4) = HB(4) + Hf(4) - Hr(1) - K4*Q(4)^2 - K5*Q(5)^2 - K8*Q(8)^2;

```



```

F(5) = Hr(1) - Hr(2) + K5*Q(5)^2 - K6*Q(6)^2;
F(6) = Hr(2) - Hr(3) + K6*Q(6)^2 - K7*Q(7)^2;
F(7) = Q(1) + Q(2) - Q(10);
F(8) = Q(3) + Q(10) - Q(9);
F(9) = Q(4) + Q(9) - Q(8);
F(10) = Q(8) - Q(5) - Q(6) - Q(7);
F = [F(1) F(2) F(3) F(4) F(5) F(6) F(7) F(8) F(9) F(10)]';
x = x - J\F;
X = [X x];

end

% conversión de metros cúbicos por segundo a litros por segundo
X = 1000*X;
Q = 1000*Q;

% Gráfica de la variación del caudal en cada línea de la red en cada
% iteración
xlabel('\bfIteraciones')
hold on
ylabel('\bfGastos')
plot(X') % líneas
plot(X', '*') % puntos
legend('Q_1', 'Q_2', 'Q_3', 'Q_4', 'Q_5', 'Q_6', 'Q_7', 'Q_8', 'Q_9', 'Q_10')
title('\bfRedes hidráulicas abiertas a presión')
shg

end

```

### Programa auxiliar Colebrook

```

function f = Colebrook(RR,Re)
% f = Colebrook(RR,Re)
% Usando la fórmula de Colebrook calcula el coeficiente de fricción
% hidráulica de Darcy Weisbach f
% Datos:
% RR rugosidad relativa adimensional
% Re número de Reynolds adimensional
if Re <= 2300 % FLUJO LAMINAR
f2 = 64/Re;
else % FLUJO TURBULENTO
f1 = 0.02; % valor inicial propuesto de f
ya = 0; % valor artificial para empezar el while
while ya == 0;
f2 = 1/(-2*log10(RR/3.71+2.51/(Re*sqrt(f1))))^2;
if (abs(f1-f2) < 0.0001)
ya = 1;
end
f1 = f2;
end
end
f = f2;

```

### 7.3. Valores de los coeficientes de pérdidas por accesorios de la ecuación (Walski *et al.*, 2003):

$$h_{loc} = K_{loc} \left[ \frac{v^2}{2g} \right] = K_{loc} \left[ \frac{8Q^2}{\pi^2 D^4 g} \right]$$

Coeficientes pérdidas locales	Valor
$K_{\text{Depósito-tubería}}$	0.78
$K_{\text{Válvula de pie de asiento}}$	12.5
$K_{\text{Válvula check}}$	4
$K_{\text{Válvula de compuerta}}$	0.39
$K_{\text{Te de flujo en línea}}$	0.4
$K_{\text{Te de flujo perpendicular}}$	1.8
$K_{\text{Codo } 90^\circ}$	0.8
$K_{\text{Codo } 45^\circ}$	0.2
$K_{\text{Ensanchamiento brusco } 6'' \rightarrow 8''}$	0.16
$K_{\text{Ensanchamiento brusco } 8'' \rightarrow 10''}$	0.16
$K_{\text{Ensanchamiento cónica } 5'' \rightarrow 8''}$	0.08
$K_{\text{Ensanchamiento brusco } 6'' \rightarrow 10''}$	0.61
$K_{\text{Contracción brusca } 10'' \rightarrow 8''}$	0.18
$K_{\text{Contracción cónica } 10'' \rightarrow 6''}$	0.07
$K_{\text{Ensanchamiento brusco } 10'' \rightarrow 12''}$	0.16
$K_{\text{Contracción brusca } 12'' \rightarrow 6''}$	0.37
$K_{\text{Contracción brusca } 12'' \rightarrow 8''}$	0.18
$K_{\text{Cruz de flujo en línea}}$	0.5
$K_{\text{Cruz de flujo perpendicular}}$	0.75

### 7.4. Diagrama universal de Moody para obtener el coeficiente de fricción hidráulica de la ecuación de Darcy-Weisbach

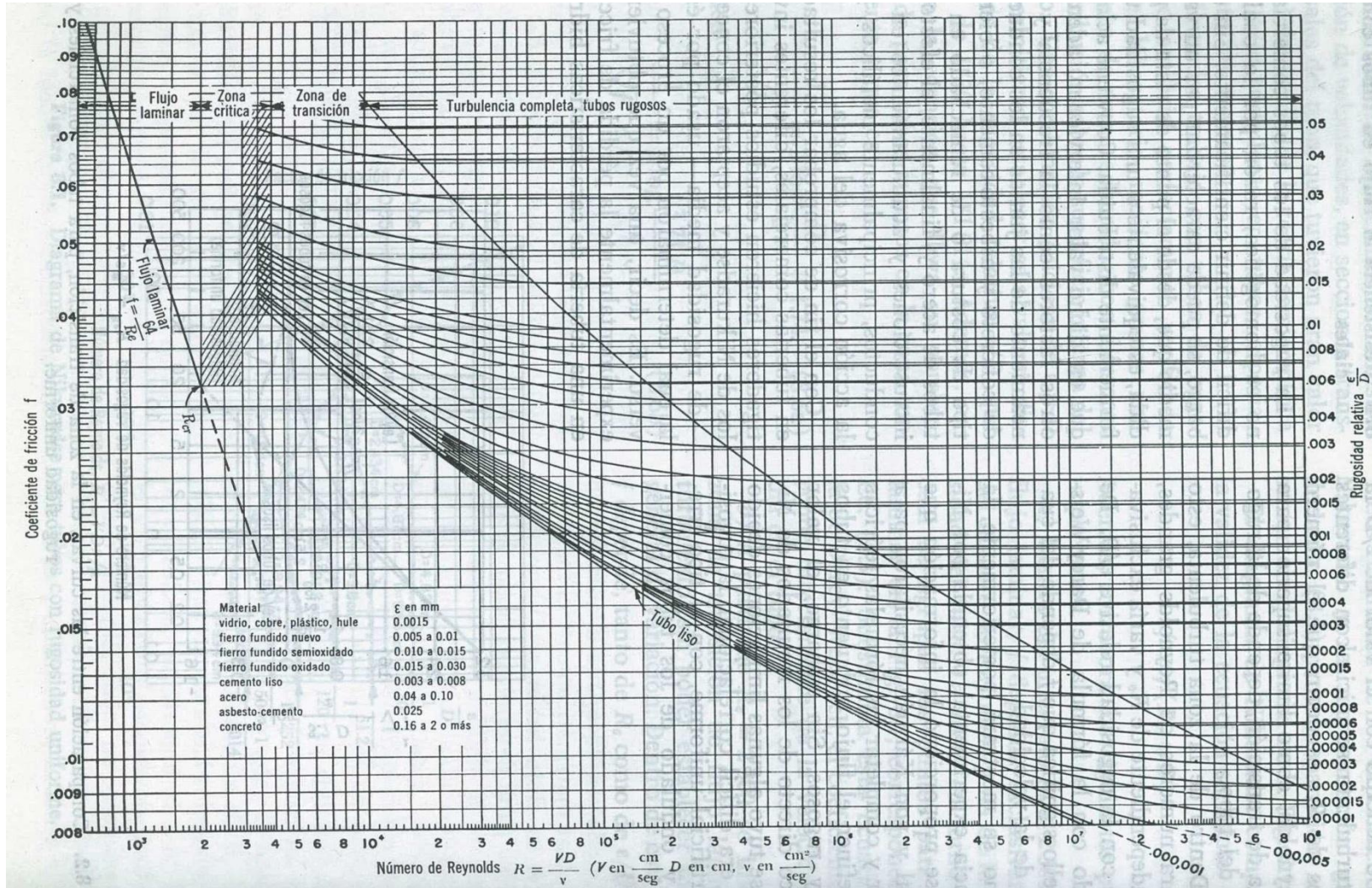


Figura 7.4.1. Diagrama universal de Moody (Sotelo, 1998).

### 7.5. Imágenes del prototipo



**Figura 7.5.1.** Línea de la red.



**Figura 7.5.2.** Parte de la red.



**Figura 7.5.3.** Aforador de engranes



**Figura 7.5.4.** Aforo volumétrico

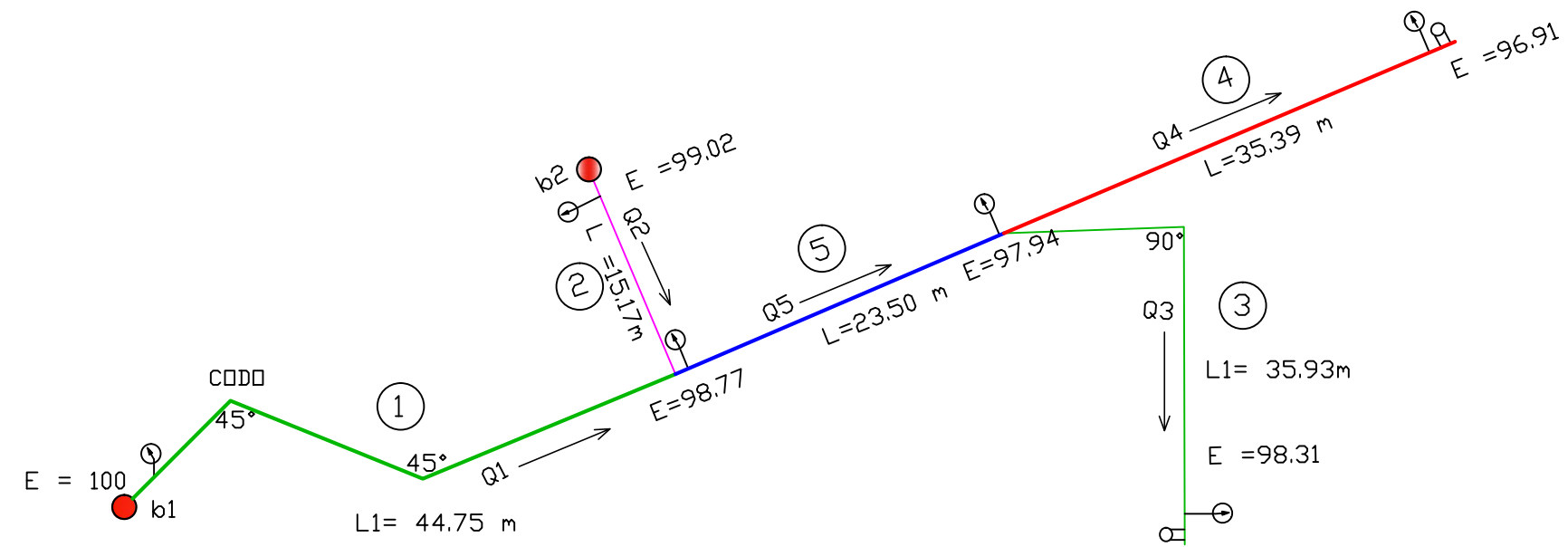
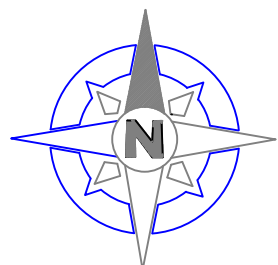


**Figura 7.5.5.** Fuente de abastecimiento 1



**Figura 7.5.6.** Fuente de abastecimiento 2

## **7.6. Plano del prototipo**



**CUADRO DE INFORMACION DEL SISTEMA**

PRESION A LA SALIDA DE LA RED	65.1 PSI
PRESION A LA SALIDA DE LA RED	55 Y 44.8 PSI
PRESION A LA SALIDA DE LA RED	35 PSI
MODELO DE LA BOMBA	FPS 4400 DE 2.0 HP
MODELO DE LA BOMBA	KOR2 R10-7 DE 1 HP

**DATOS DE LA RED**

i	MATERIAL	D NOMINAL (PLG)	D (MM)	L (M)
1CB	PVC	1 1/2"	40.5	1.25
1d	PVC	1 1/2"	40.5	44.75
2CB	PVC	1"	26.6	3.84
2d	PVC	1"	26.6	15.17
3	PVC	1 1/2"	40.5	35.93
4	PVC	3/4"	20.9	35.39
5	PVC	2"	52.5	23.50

**SIMBOLOGIA**

- BOMBA
- MANOMETRO
- DIRECCION DEL FLUJO
- VALVULA ESFERICA

E = ELEVACION  
Q = CAUDAL

**DIAMETROS DE TUBERIA**

- TUBERIA HIDRAULICA DE PVC 2"
- TUBERIA HIDRAULICA DE PVC 1 1/2"
- TUBERIA HIDRAULICA DE PVC 1"
- TUBERIA HIDRAULICA DE PVC 3/4"

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON  
AREA DE ESTUDIOS DE POSGRADO  
 FACULTAD DE AGRONOMIA  
 CARRETERA ZUAZUA-MARIN KM 17.5, MARIN, NUEVO LEON CP. 66700, MEXICO

UNIDAD DE RIEGO

DISEÑO MC. SERGIO Z. GARZA VARA APROBÓ: DR. JUAN F. PISSANI ZUÑIGA

ARTEAGA, COAHUILA. MAYO, 2012

PLANO

ESCALA:

## 7.7. Segundo ejemplo de interconexión de bombas

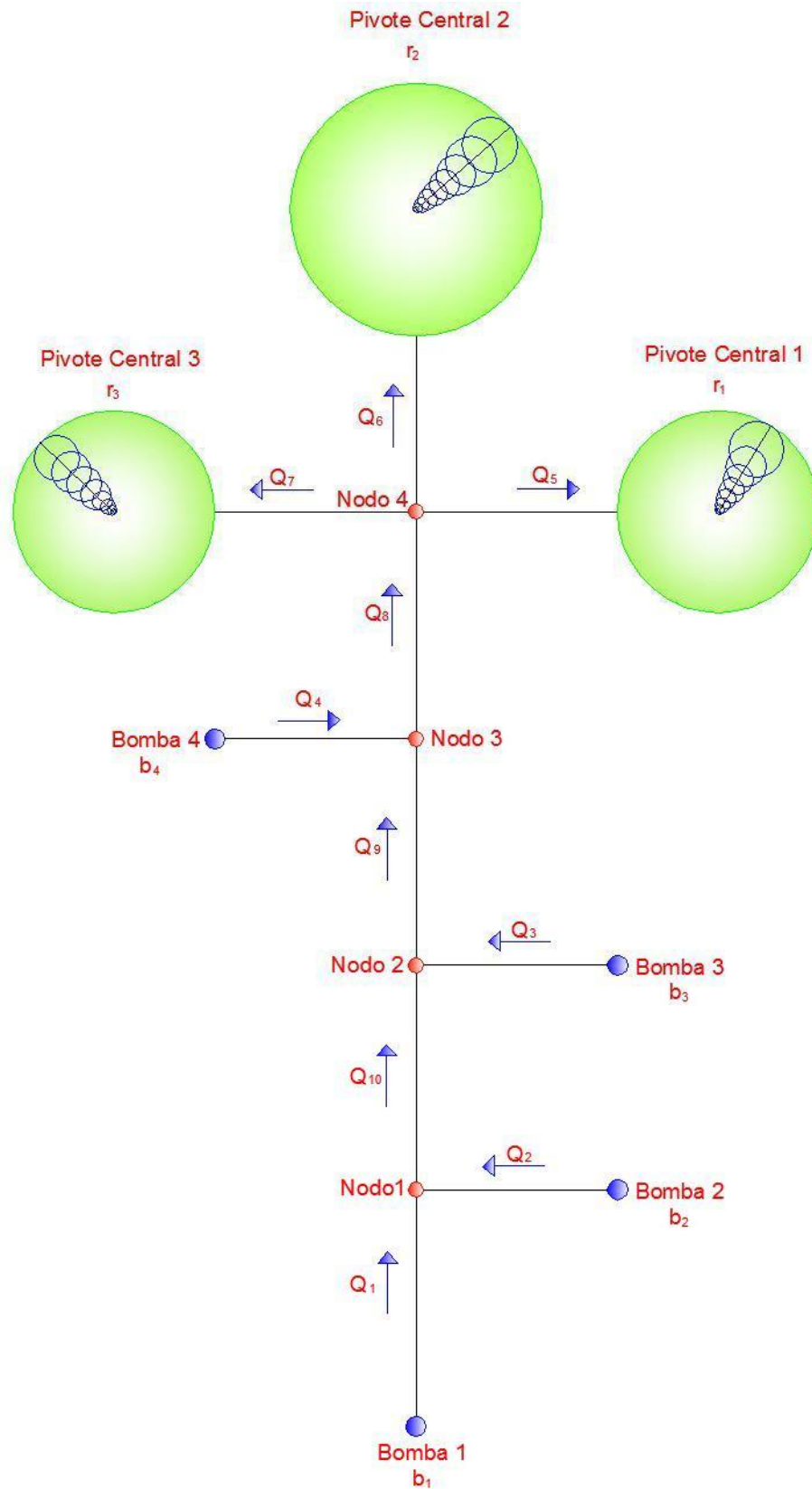
El segundo ejemplo de solución de una red abierta con interconexión de bombas para alimentar a sistemas de riego. Se seleccionó el caso más complejo (Caso IV). Figura 7.7.1.

Consiste en una red de interconexión de cuatro bombas sumergibles de pozos profundos que alimentan a tres pivotes centrales, El primero y el tercero tienen un radio de 332.23 m, para irrigar 34.68 has cada uno, con un caudal requerido por pivote central de 35.0 lps. El segundo pivote, tiene un radio de 398.68 m, e irriga 49.93 has, con un caudal de 50.0 lps. Las cuatro bombas son marca GRUNDFOS: Las bombas 1 y 2 son modelos 375S1000-17DS (Figura 7.7.2). La bomba 3 es modelo 600S1500-9DS (Figura 7.7.3). La bomba 4 es modelo 1000S 2500-6DS (Figura 7.7.4). La red abierta con los sistemas de riego está en un terreno prácticamente plano, donde los datos de las tuberías que conforman la red y su croquis se presentan en el Cuadro 7.7.1 y la Figura 7.7.1, respectivamente.

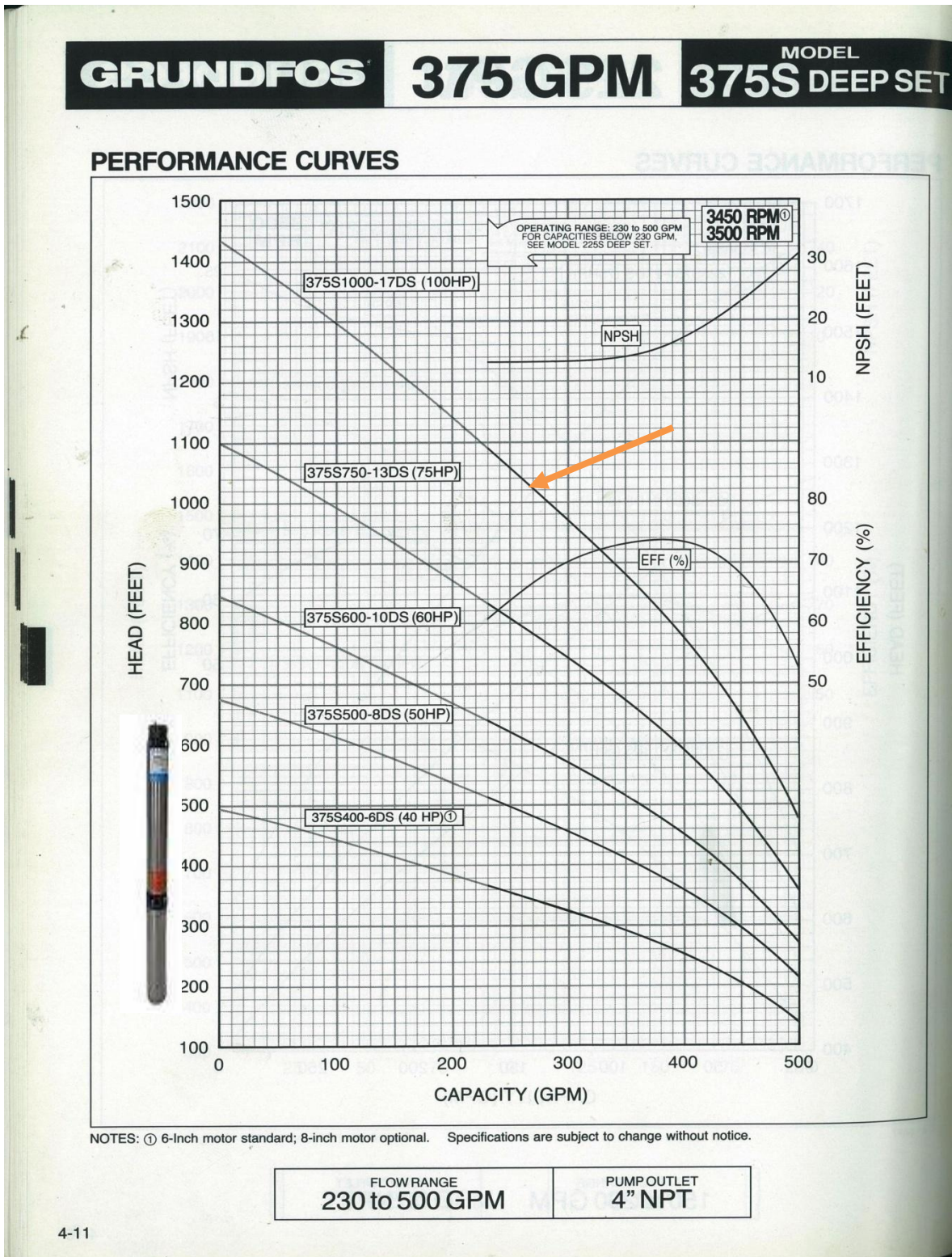
**Cuadro 7.7.1.** Datos de las tuberías de la red.

<b>I</b>	<b>Material</b>	<b>Diámetro Nominal (pulgadas)</b>	<b>Diámetro Interior (mm)</b>	<b>Longitud (m)</b>
1 <sub>CB</sub>	Acero	5	128.19	160
1 <sub>d</sub>	PVC	6	160.1	190
2 <sub>CB</sub>	Acero	5	128.19	160
2 <sub>d</sub>	PVC	6	160.1	200
3 <sub>CB</sub>	Acero	6	154.05	160
3 <sub>d</sub>	PVC	6	160.1	120
4 <sub>CB</sub>	Acero	8	202.72	160
4 <sub>d</sub>	PVC	8	208.5	500
5 <sub>1</sub>	PVC	6	160.1	300
5 <sub>2</sub>	PVC	6	160.1	125
6 <sub>1</sub>	PVC	8	208.5	400
6 <sub>2</sub>	PVC	8	208.5	100
7 <sub>1</sub>	PVC	6	160.1	300
7 <sub>2</sub>	PVC	6	160.1	52
8 <sub>1</sub>	PVC	12	308.81	300
8 <sub>2</sub>	PVC	12	308.81	80
9 <sub>1</sub>	PVC	10	259.74	200
9 <sub>2</sub>	PVC	10	259.74	60
10 <sub>1</sub>	PVC	8	208.5	100
10 <sub>2</sub>	PVC	8	208.5	90





**Figura 7.7.1.** Red abierta con interconexión de cuatro bombas sumergibles para alimentar a tres pivotes centrales (Caso IV)



**Figura 7.7.2.** Curvas características de las bombas sumergibles Grundfos. Modelo 375S (Groundwater Catalog, 1993).

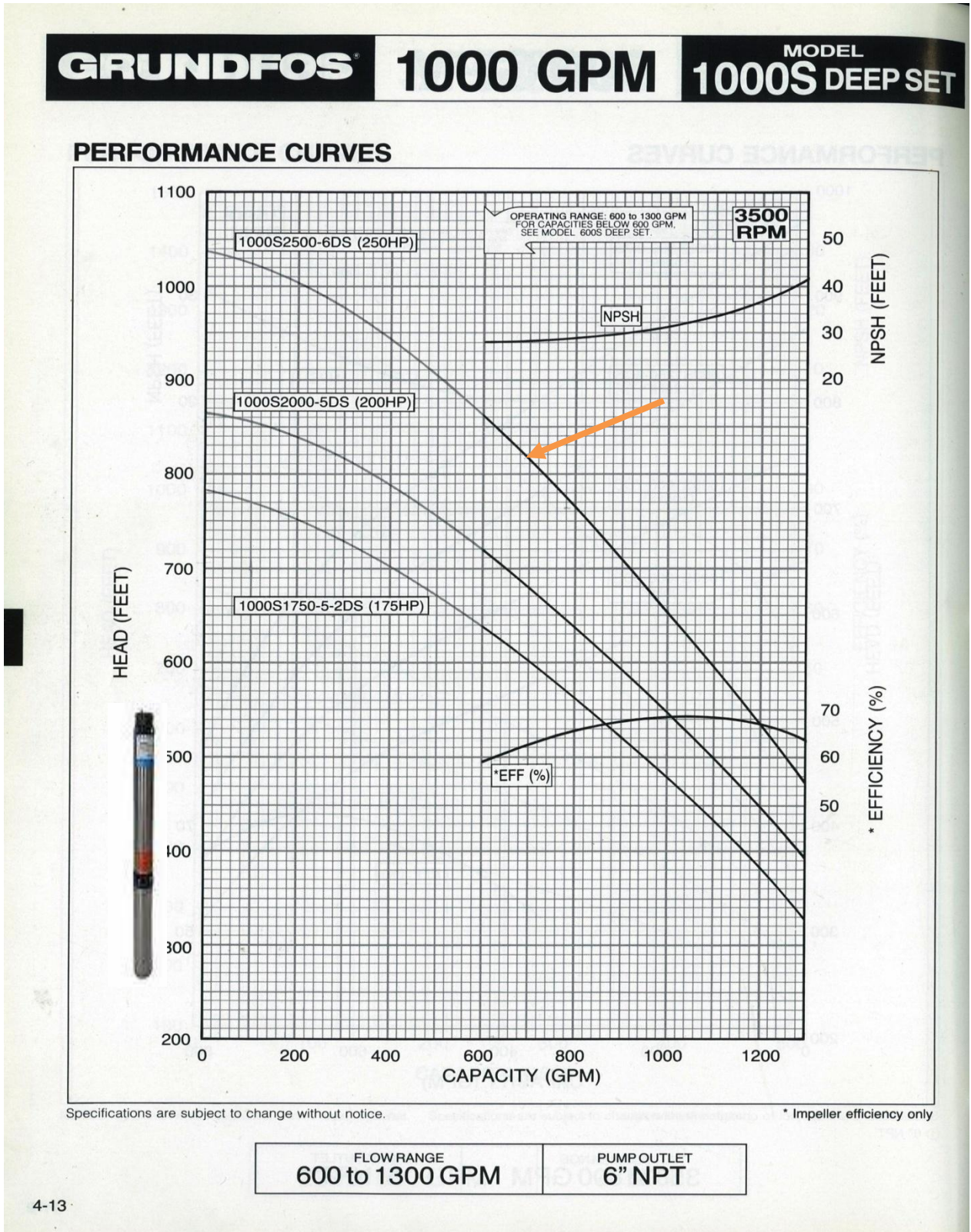


Figura 7.7.3. Curvas características de las bombas sumergibles Grundfos. Modelo 1000S (Groundwater Catalog, 1993).

Las cargas a las entradas de los pivotes centrales 1 y 3 son 35 psi (24.61 metros de columna de agua) y en el pivote central 2 es de 40 psi (28.12 metros de columna de agua). El nivel dinámico del pozo 1 se encuentra a 216.0 m, a un caudal supuesto de 23.0 lps, el nivel dinámico del segundo pozo está a 212.1 m, con un caudal de 23 lps, el tercero está a 209.8 m, con un caudal de 25 lps y el cuarto está a 205.6 m con un caudal de 40 lps. Según las pruebas de bombeo de cada pozo. El nivel de referencia se ubicará en el nivel dinámico del primer pozo por ser el más profundo. Por lo tanto las alturas de los niveles dinámicos con respecto al nivel referencial son:  $Z_f(1) = 0.0$  m, el nivel dinámico del pozo 1;  $Z_f(2) = 5.0$  m, nivel dinámico del pozo 2;  $Z_f(3) = 8.0$  m, nivel dinámico del pozo 3;  $Z_f(4) = 12.0$  m, nivel dinámico del pozo 4. Nivel de la entrada al pivote central 1,  $Z_r(1) = 207.0$  m; nivel de la entrada al pivote central 2,  $Z_r(2) = 206.0$  m; nivel de la entrada al pivote central 3,  $Z_r(3) = 208.0$  m; nivel del nodo ;  $Z_n(1) = 216.10$  m; del nodo ,  $Z_n(2) = 216.90$  m, del nodo 3;  $Z_n(3) = 217.80$  m y del nodo 4,  $Z_n(4) = 218.50$  m. Niveles de las tuberías a las salidas del pozo: bomba 1 = 216.50 m; bomba 2 = 217.60 m; bomba 3 = 218.30 m; bomba 4 = 218.10 m. La rugosidad absoluta de la tubería de acero es 0.15 mm y la de PVC es 0.0015 mm; La viscosidad cinemática del agua es  $0.000001 \text{ m}^2/\text{s}$ .  $a = 1$ ;  $b = 1$ ;  $c = 1$ ;  $d = 1$ , para elegir bombas sumergibles. Se tomaron en cuenta los coeficientes de pérdidas locales significativas en accesorios de las tuberías como: válvulas, contracciones, ensanchamiento, tees, codos. El programa de MATLAB, tiene en todas las líneas que conforman la red siempre 2 tramos, para el caso de que se tenga en una línea dos diámetros diferentes, por lo tanto, en el caso de que tenga un solo diámetro también debe dividirse en 2 tramos, seleccionándose las longitudes respectivas.

Los datos de los cuadros 2, 3 y 4, son los tres puntos escogidos de las curvas características de cada bomba.

**Cuadro 7.7.2.** Tres puntos de la curva característica de bomba 1 y 2, de carga versus caudal (375S1000-17DS).

$H_B$ (pies)	$Q_B$ (gpm)	$H_B$ (m)	$Q_B$ ( $m^3/s$ )
968	300	295.05	0.01892
878	350	267.61	0.02208
772	400	235.31	0.02523

**Cuadro 7.7.3.** Tres puntos de la curva característica de la bomba 3, de carga versus caudal (600S1500-9DS).

$H_B$ (pies)	$Q_B$ (gpm)	$H_B$ (m)	$Q_B$ ( $m^3/s$ )
781	400	238.05	0.02523
732	500	223.11	0.03154
675	600	205.74	0.03785

**Cuadro 7.7.4.** Tres puntos de la curva característica de la bomba 4, de carga versus caudal (1000S2500-6DS).

$H_B$ (pies)	$Q_B$ (gpm)	$H_B$ (m)	$Q_B$ ( $m^3/s$ )
764	800	232.87	0.02523
652	1000	198.73	0.03154
534	1200	162.76	0.03785

La entrada de datos debe de ser de manera matricial, para que el programa pueda identificarlos, mediante su renglón y su columna.

$Z$ , es el vector de alturas medidas desde el nivel de referencia, en metros.

$Z_f$ , es el vector de las alturas de las fuentes de abastecimiento.

$Z_f(1)$ ,  $Z_f(2)$ ,  $Z_f(3)$  y  $Z_f(4)$ ; niveles de las fuentes de abastecimiento de las bombas 1,2, 3 y 4, respectivamente.

Zr(1), Zr(2) y Zr(3); niveles a la entrada de los sistemas de riego 1, 2 y 3, respectivamente.

Zn(1), Zn(2), Zn(3) y Zn(4); niveles de los nodos 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Zsb(1), Zsb(2), Zsb(3) y Zsb(4); niveles a la salida del agua en las bombas 1, 2, 3 y 4, respectivamente. En bombas sumergibles el nivel se toma a la salida del pozo.

Zf, es una matriz de 4x1.

$Z_f = [0.0, 5.0, 8.0, 12.0]$ .

Zr, es una matriz de 3x1.

$Z_r = [207.0, 206.0, 208.0]$ .

Zn, es una matriz de 4x1.

$Z_n = [216.10, 216.9, 217.80, 218.50]$ .

Zsb, es una matriz de 4x1.

$Z_{sb} = [216.50, 217.60, 218.30, 218.10]$ .

$Q_B$ ; matriz de gastos de las curvas características de las bombas en litros por segundo. Matriz de 4x3. El primer renglón 3 caudales de la bomba 1; segundo renglón 3 caudales de la bomba 2; tercer renglón 3 caudales de la bomba 3; cuarto renglón 3 caudales de la bomba 4.

$Q_B = [18.92, 22.08, 25.23; 18.92, 22.08, 25.23; 25.23, 31.54, 37.85; 50.46, 63.08, 75.70]$ .

$H_B$ ; matriz de cargas de las curvas características de las bombas en metros. Matriz de 4x3. El primer renglón 3 cargas de la bomba 1; segundo renglón 3 cargas de la bomba 2; tercer renglón 3 cargas de la bomba 3; cuarto renglón 3 cargas de la bomba 4.

$H_B = [295.05, 267.61, 235.31; 295.05, 267.61, 235.31; 238.05, 223.11, 205.74; 232.87, 198.73, 162.76].$

L; matriz de longitudes de cada línea de conducción en metros. Matriz de 10x2.

$L = [266.0, 190.0; 262.0, 200.0; 260.0, 120.0; 256.0, 500.0; 300.0, 125.0; 400.0, 100.0; 300.0, 52.0; 300.0, 80; 200.0, 60.0; 100.0, 90.0].$

D; matriz de diámetros interiores en milímetros. Matriz de 10x2.

$D = [128.19, 160.10; 128.19, 160.10; 154.05, 160.10; 202.72, 208.50; 160.10, 160.10; 208.50, 208.50; 160.10, 160.10; 308.81, 308.81; 259.74, 259.74; 208.50, 208.50].$

k; vector de los coeficientes de pérdidas de carga locales por tramo de cada línea de conducción.

$k_{11}$ ; tramo de succión o columna de bombeo en la línea 1.

$k_{12}$ ; tramo de descarga en la línea 1.

$k_{21}$ ; tramo de succión o columna de bombeo en la línea 2.

$k_{22}$ ; tramo de descarga en la línea 2.

$k_{31}$ ; primer tramo de la línea 3.

$k_{32}$ ; segundo tramo de la línea 3.

$k_{41}$ ; primer tramo la línea 4.

$k_{42}$ ; segundo tramo de la línea 4.

$k_{51}$ ; primer tramo de la línea 5.

$k_{52}$ ; segundo tramo de la línea 5.

$k_{61}$ ; primer tramo la línea 6.

$k_{62}$ ; segundo tramo de la línea 6.

$k_{71}$ ; primer tramo de la línea 7.

$k_{72}$ ; segundo tramo de la línea 7.

$K_{81}$ ; primer tramo de la línea 8.

$K_{82}$ ; segundo tramo de la línea 8.

$K_{91}$ ; primer tramo de la línea 9.

$K_{92}$ ; segundo tramo de la línea 9.

$K_{101}$ ; primer tramo de la línea 10.

$K_{102}$ ; segundo tramo de la línea 10.

Sus valores son:

$$k_{11} = [12.50, 0.16, 0.80, 4.0, 0.39, 0.40]$$

$$k_{12} = [0.16, 0.40]$$

$$k_{21} = [12.50, 0.16, 0.80, 4.0, 0.39, 0.40]$$

$$k_{22} = [0.16, 1.80]$$

$$k_{31} = [12.50, 0.16, 0.80, 4.0, 0.39, 0.40]$$

$$k_{32} = [1.80, 0.61]$$

$$k_{41} = [12.50, 0.16, 0.80, 4.0, 0.39, 0.40]$$

$$k_{42} = [1.80, 0.16]$$

$$k_{51} = [0.75, 0.37]$$

$$k_{52} = [0.80, 0.80, 0.39]$$

$$k_{61} = [0.50, 0.18]$$

$$k_{62} = [0.80, 0.80, 0.39]$$

$$k_{71} = [0.75, 0.37]$$

$$k_{72} = [0.80, 0.80, 0.39]$$

$$k_{81} = [0.40]$$

$$k_{82} = [0.0]$$



$$k_{91} = [0.0]$$

$$k_{92} = [0.0]$$

$$k_{101} = [0.0]$$

$$k_{102} = [0.16].$$

RA; matriz de 7x2 de rugosidades absolutas en milímetros. Primer subíndice (renglón): número de línea. Segundo subíndice (columna): número de tramo en la línea.

$$RA = [0.1500, 0.0015; 0.1500, 0.0015; 0.1500, 0.0015; 0.0015, 0.0015; 0.0015, 0.0015; 0.0015, 0.0015; 0.0015, 0.0015].$$

vc, es la viscosidad cinemática del agua, en metros cuadrados por segundo.

$$vc = [1.0 \text{ e-}006].$$

a; si a = 1 es bomba sumergible; si a es diferente de 1 es voluta, en bomba 1.

$$a = 1.$$

b; si b = 1 es bomba sumergible; si b es diferente de 1 es voluta, en bomba 2.

$$b = 1.$$

c; si c = 1 es bomba sumergible; si c es diferente de 1 es voluta, en bomba 3.

$$c = 1.$$

d; si d = 1 es bomba sumergible; si d es diferente de 1 es voluta, en bomba 4.

$$d = 1.$$

Hpr; vector de cargas de operación de los sistemas de riego o carga a la entrada de los sistemas de riego, en metros de columna de agua: [Hpr<sub>1</sub>, Hpr<sub>2</sub>, Hpr<sub>3</sub>].

$$HPr = [24.61, 28.12, 24.61].$$

HPr(1); carga de operación de todo el sistema de riego 1. Matriz de 1x3.

$$HPr(1) = 24.61.$$

HPr(2); carga de operación de todo el sistema de riego 2. Matriz de 1x3.

$$HPr(2) = 28.12.$$

HPr(3); carga de operación de todo el sistema de riego 1. Matriz de 1x3.

$$HPr(3) = 24.61.$$

q; vector de gastos supuestos en cada línea, en litros por segundo: [q<sub>1</sub>, q<sub>2</sub>, q<sub>3</sub>, q<sub>4</sub>, q<sub>5</sub>, q<sub>6</sub>, q<sub>7</sub>, q<sub>8</sub>, q<sub>9</sub>, q<sub>10</sub>]. Matriz de 1x10. Los valores supuestos son:

$$q = [30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 30].$$

De la fórmula (3.1.8) se obtiene la ecuación de la curva característica de la bomba 1 y 2 (375S1000-17DS) es:

$$H_{B1} = -248878.5975Q_1^2 + 1520.4782Q_1 + 355.3727$$

$$H_{B2} = -248878.5975Q_2^2 + 1520.4782Q_2 + 355.3727$$

$$\frac{\partial H_{B1}}{\partial Q_1} = 497757.195Q_1 + 1520.4782$$

$$\frac{\partial H_{B2}}{\partial Q_2} = 497757.195Q_2 + 1520.4782$$

La ecuación de la curva característica de las bombas 3 (600S1500-9DS) es:

$$H_{B3} = -30515.2941Q_3^2 - 635.3171Q_3 + 273.5036$$

$$\frac{\partial H_{B3}}{\partial Q_3} = -61030.5882Q_3 - 635.3171$$

La ecuación de la curva característica de las bombas 4 (1000S 2500-6DS) es:

$$H_{B4} = -22980.6536Q_4^2 - 4105.8479Q_4 - 351.0889$$

$$\frac{\partial H_{B4}}{\partial Q_4} = -45961.3072Q_4 - 4105.8479$$

Las diez ecuaciones a solucionar son las siguientes:

$$F_1 = Hb_1 + Hf_1 - Hr_1 - K_1Q_1^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0$$

$$F_2 = Hb_2 + Hf_2 - Hr_2 - K_2Q_2^2 - K_6Q_6^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 - K_{10}Q_{10}^2 = 0$$

$$F_3 = Hb_3 + Hf_3 - Hr_1 - K_3Q_3^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 - K_9Q_9^2 = 0$$

$$F_4 = Hb_4 + Hf_4 - Hr_1 - K_4Q_4^2 - K_5Q_5^2 - K_8Q_8^2 = 0$$

$$F_5 = Hr_1 - Hr_2 + K_5Q_5^2 - K_6Q_6^2 = 0$$

$$F_6 = Hr_2 - Hr_3 + K_6Q_6^2 - K_7Q_7^2 = 0$$

$$F_7 = Q_1 + Q_2 - Q_{10} = 0$$

$$F_8 = Q_3 + Q_{10} - Q_9 = 0$$

$$F_9 = Q_4 + Q_9 - Q_8 = 0$$

$$F_{10} = Q_8 - Q_5 - Q_6 - Q_7 = 0$$

La solución consiste en encontrar los caudales de cada línea que conforma la red, para que las 10 ecuaciones anteriores, resulten ser cero o próximas a cero.

Las derivadas parciales de  $F_1$  hasta  $F_{10}$  con respecto a todos los caudales de la red, son los elementos de la inversa de la matriz jacobiana como se muestra a continuación:

$$J(1,1) = \frac{\partial F_1}{\partial Q_1} = \frac{\partial H_{B1}}{\partial Q_1} - 2K_1Q_1$$

$$J(1,3) = \frac{\partial F_1}{\partial Q_3} = \frac{\partial H_{B3}}{\partial Q_3} + 2K_3Q_3$$

$$J(1,6) = \frac{\partial F_1}{\partial Q_6} = -2K_6Q_6$$

$$J(2,2) = \frac{\partial F_2}{\partial Q_2} = \frac{\partial H_{B2}}{\partial Q_2} - 2K_2 Q_2$$

$$J(2,3) = \frac{\partial F_2}{\partial Q_3} = \frac{\partial H_{B3}}{\partial Q_3} + 2K_3 Q_3$$

$$J(2,6) = \frac{\partial F_2}{\partial Q_6} = -2K_6 Q_6$$

$$J(3,3) = \frac{\partial F_3}{\partial Q_3} = \frac{\partial H_{B3}}{\partial Q_3} - 2K_3 Q_3$$

$$J(3,4) = \frac{\partial F_3}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J(3,7) = \frac{\partial F_3}{\partial Q_7} = -2K_7 Q_7$$

$$J(4,4) = \frac{\partial F_4}{\partial Q_4} = -2K_4 Q_4$$

$$J(4,5) = \frac{\partial F_4}{\partial Q_5} = -2K_5 Q_5$$

$$J(5,1) = \frac{\partial F_5}{\partial Q_1} = J(5,2) = \frac{\partial F_5}{\partial Q_2} = 1$$

$$J(6,3) = \frac{\partial F_6}{\partial Q_3} = J(6,6) = \frac{\partial F_6}{\partial Q_6} = 1$$

$$J(7,4) = \frac{\partial F_7}{\partial Q_4} = J(7,5) = \frac{\partial F_7}{\partial Q_5} = 1$$

$$J(5,6) = \frac{\partial F_5}{\partial Q_6} = J(6,7) = \frac{\partial F_6}{\partial Q_7} = -1$$

$$J(7,7) = \frac{\partial F_7}{\partial Q_7} = -1.$$

Los demás elementos de la matriz son igual a cero.

Datos de salida.

En el cuadro 7.7.5, se tienen los caudales obtenidos por la ecuación (3.2.2.6) de manera iterativa.

**Cuadro 7.7.5.** Resultados de los caudales en la red en litros por segundo.

	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7
Q(1) =	30.000	24.2666	23.3999	23.3750	23.3748	23.3748	23.3748
Q(2) =	30.000	24.6032	23.8360	23.8157	23.8197	23.8156	23.8156
Q(3) =	30.000	25.3039	24.5564	24.5266	24.5260	24.5259	24.5259
Q(4) =	30.000	50.2323	48.8123	48.7852	48.7847	48.7847	48.7847
Q(5) =	30.000	35.3874	35.2390	35.3000	35.3070	35.3076	35.3077
Q(6) =	30.000	53.8681	50.4122	50.1795	50.1632	50.1619	50.1618
Q(7) =	30.000	35.1505	34.9533	35.0230	35.0308	35.0315	35.0316
Q(8) =	30.000	124.4060	120.6045	120.5025	120.5010	120.5010	120.5010
Q(9) =	30.000	74.1734	71.7923	71.7174	71.7164	71.7163	71.7163
Q(10) =	30.000	48.8698	47.2359	47.1908	47.1904	47.1904	47.1904

Caudales en litros por segundo, que circulan en la red:

$$Q(1) = 23.37$$

$$Q(2) = 23.82$$

$$Q(3) = 24.53$$

$$Q(4) = 48.78$$

$$Q(5) = 35.31$$

$$Q(6) = 50.16$$

$$Q(7) = 35.03$$

$$Q(8) = 120.50$$

$$Q(9) = 71.72$$

$$Q(10) = 47.19.$$

Cargas piezométricas, en metros de columna de agua, en los nodos de la red:

$$HPn(1) = 26.98$$

$$HPn(2) = 24.86$$

$$HPn(3) = 22.64$$

$$HPn(4) = 19.74$$

Cargas en metros de columna de agua, medidas a partir del nivel de referencia, en los nodos de la red:

$$Hn(1) = 243.08$$

$$Hn(2) = 241.76$$

$$Hn(3) = 240.44$$

$$Hn(4) = 238.24$$

Cargas piezométricas en metros de columna de agua, a la salida de cada bomba:

$$HPsb(1) = 27.75$$

$$HPsb(2) = 26.86$$

$$HPsb(3) = 24.45$$

$$HPsb(4) = 26.07.$$

Cargas en metros de columna de agua, medidas a partir del nivel de referencia, a la salida de cada bomba:

$$H_{sb}(1) = 244.25$$

$$H_{sb}(2) = 244.46$$

$$H_{sb}(3) = 242.75$$

$$H_{sb}(4) = 244.17.$$

Carga dinámica total de cada bomba, en metros de columna de agua:

$$HB(1) = 254.93$$

$$HB(2) = 250.42$$

$$HB(3) = 239.57$$

$$HB(4) = 237.26$$

Velocidades en las líneas de conducción que conforman la red en metros por segundo (el primer subíndice se refiere a la línea de conducción; el segundo, al tramo en la misma línea de conducción):

$$v(1,1) = 1.81; \quad v(1,2) = 1.16$$

$$v(2,1) = 1.85; \quad v(2,2) = 1.18$$

$$v(3,1) = 1.32; \quad v(3,2) = 1.22$$

$$v(4,1) = 1.51; \quad v(4,2) = 1.43$$

$$v(5,1) = 1.75; \quad v(5,2) = 1.75$$

$$v(6,1) = 1.47; \quad v(6,2) = 1.47$$

$$v(7,1) = 1.74; \quad v(7,2) = 1.74$$

$$v(8,1) = 1.61; \quad v(8,2) = 1.61$$

$$v(9,1) = 1.35; \quad v(9,2) = 1.35$$

$$v(10,1) = 1.38; \quad v(10,2) = 1.38.$$

## Coeficientes de fricción Hidráulica de la ecuación de Darcy-Weisbach

(adimensional):

$$f(1,1) = 0.0215; \quad f(1,2) = 0.0160$$

$$f(2,1) = 0.0215; \quad f(2,2) = 0.0159$$

$$f(3,1) = 0.0209; \quad f(3,2) = 0.0158$$

$$f(4,1) = 0.0194; \quad f(4,2) = 0.0146$$

$$f(5,1) = 0.0148; \quad f(5,2) = 0.0148$$

$$f(6,1) = 0.0145; \quad f(6,2) = 0.0145$$

$$f(7,1) = 0.0148; \quad f(7,2) = 0.0148$$

$$f(8,1) = 0.0133; \quad f(8,2) = 0.0133$$

$$f(9,1) = 0.0141; \quad f(9,2) = 0.0141$$

$$f(10,1) = 0.0147; \quad f(10,2) = 0.0147.$$

Suma de los coeficientes de pérdidas por accesorios, por tramo en cada línea

de conducción (adimensional):

$$Sk(1,1) = 18.25; \quad Sk(1,2) = 0.56$$

$$Sk(2,1) = 18.25; \quad Sk(2,2) = 1.96$$

$$Sk(3,1) = 18.25; \quad Sk(3,2) = 2.41$$

$$Sk(4,1) = 18.25; \quad Sk(4,2) = 1.96$$

$$Sk(5,1) = 1.12; \quad Sk(5,2) = 1.99$$

$$Sk(6,1) = 1.99; \quad Sk(6,2) = 1.99$$

$$Sk(7,1) = 1.12; \quad Sk(7,2) = 1.99$$

$$Sk(8,1) = 0.40; \quad Sk(8,2) = 0.0$$

$$Sk(9,1) = 0.0; \quad Sk(9,2) = 0.0$$

$$Sk(10,1) = 0.0; \quad Sk(10,2) = 0.16.$$



Número de Reynolds en las líneas de conducción (adimensional):

$$\text{Re}(1,1) = 230555.19; \quad \text{Re}(1,2) = 184602.56$$

$$\text{Re}(2,1) = 234902.37; \quad \text{Re}(2,2) = 188083.29$$

$$\text{Re}(3,1) = 201300.41; \quad \text{Re}(3,2) = 193693.49$$

$$\text{Re}(4,1) = 304275.93; \quad \text{Re}(4,2) = 295840.84$$

$$\text{Re}(5,1) = 278842.04; \quad \text{Re}(5,2) = 278842.04;$$

$$\text{Re}(6,1) = 304191.83; \quad \text{Re}(6,2) = 304191.83$$

$$\text{Re}(7,1) = 276661.72; \quad \text{Re}(7,2) = 278842.04$$

$$\text{Re}(8,1) = 493378.29; \quad \text{Re}(8,2) = 493378.29$$

$$\text{Re}(9,1) = 349108.08; \quad \text{Re}(9,2) = 349108.08$$

$$\text{Re}(10,1) = 286172.68; \quad \text{Re}(10,2) = 286172.68.$$

Rugosidades relativas en las líneas de conducción (adimensional):

$$\text{RR}(1,1) = 0.001170293; \quad \text{RR}(1,2) = 0.000009659$$

$$\text{RR}(2,1) = 0.001170138; \quad \text{RR}(2,2) = 0.000009659$$

$$\text{RR}(3,1) = 0.000973710; \quad \text{RR}(3,2) = 0.000009659$$

$$\text{RR}(4,1) = 0.000739937; \quad \text{RR}(4,2) = 0.000007415$$

$$\text{RR}(5,1) = 0.000009369; \quad \text{RR}(5,2) = 0.000009369$$

$$\text{RR}(6,1) = 0.000007194; \quad \text{RR}(6,2) = 0.000007194$$

$$\text{RR}(7,1) = 0.000009369; \quad \text{RR}(7,2) = 0.000009369$$

$$\text{RR}(8,1) = 0.000004935; \quad \text{RR}(8,2) = 0.000004935$$

$$\text{RR}(9,1) = 0.000005854; \quad \text{RR}(9,2) = 0.000005854$$

$$\text{RR}(10,1) = 0.000007062; \quad \text{RR}(10,2) = 0.000007062$$

```

337 - HFn(2) = Hn(2) - Zn(2); % Nodo 2.
338 - HFn(3) = Hn(3) - Zn(3); % Nodo 3.
339 - HFn(4) = Hn(4) - Zn(4); % Nodo 4.
340
341 % Fórmulas de carga en las columnas de las bombas.
342 - h11 = (E(1,1)*L(1,1)/D(1,1)+SK(1,1))*1/D(1,1)^4*(B/(p1^2*g))^0(1)^2;
343 - h21 = (E(2,1)*L(2,1)/D(2,1)+SK(2,1))*1/D(2,1)^4*(B/(p1^2*g))^0(2)^2;
344 - h31 = (E(3,1)*L(3,1)/D(3,1)+SK(3,1))*1/D(3,1)^4*(B/(p1^2*g))^0(3)^2;
345 - h41 = (E(4,1)*L(4,1)/D(4,1)+SK(4,1))*1/D(4,1)^4*(B/(p1^2*g))^0(4)^2;
346
347 % Carga piezométrica en la salida de la bomba 1.
348 - if a == 1 % Bomba sumergible.
349 - HFab(1) = HB(1) + ZF(1) - Z4b(1) - v(1,1)^2/(2*g) - h11;
350 - else
351 - HFab(1) = HB(1) + ZF(1) - Z4b(1) - v(1,2)^2/(2*g) - h11;
352 - end
353
354 % Carga piezométrica en la salida de la bomba 2.
355 - if b == 1 % Bomba sumergible.
356 - HFab(2) = HB(2) + ZF(2) - Z4b(2) - v(2,1)^2/(2*g) - h21;
357 - else
358 - HFab(2) = HB(2) + ZF(2) - Z4b(2) - v(2,2)^2/(2*g) - h21;
359 - end
360
361 % Carga piezométrica en la salida de la bomba 3.
362 - if c == 1 % Bomba sumergible.
363 - HFab(3) = HB(3) + ZF(3) - Z4b(3) - v(3,1)^2/(2*g) - h31;
364 - else
365 - HFab(3) = HB(3) + ZF(3) - Z4b(3) - v(3,2)^2/(2*g) - h31;
366 - end
367

```

Figura 7.7.4. Solución del Caso Único IV, con el programa MATLAB para Windows, versión 7.12.1.0.635 (R2011a), The MathWorks, Inc.