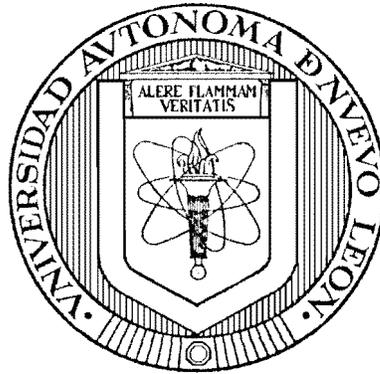


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



UNA EXTENSIÓN A LA TRANSFORMADA DE FOURIER,
TRANSFORMADA TAYLOR-FOURIER

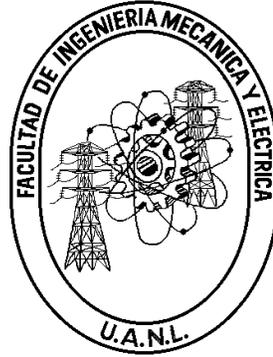
POR
MIGUEL ANGEL PLATAS GARZA

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

AGOSTO DEL 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



UNA EXTENSIÓN A LA TRANSFORMADA DE FOURIER,
TRANSFORMADA TAYLOR-FOURIER

POR
MIGUEL ANGEL PLATAS GARZA

TESIS
EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA
ELÉCTRICA

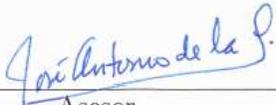
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.

AGOSTO DEL 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis “**Una extensión a la transformada de Fourier, transformada Taylor-Fourier**” realizada por **Miguel Angel Platas Garza**, matrícula número **1103410**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Doctor en Ingeniería Eléctrica**.

El Comité de Tesis

 Asesor Dr. José Antonio de la O Serna	
 Revisor Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino	 Revisor Dr. José Ramón Rodríguez Cruz
 Revisor Dr. Marco Tulio Mata Jiménez	 Revisor Dra. Gina M. Idárraga Ospina
 Vo. Bo. Dr. Moisés Hinojosa Rivera División de Estudios de Posgrado	

San Nicolás de los Garza, N.L. Agosto del 2011

A Miriam, Miguel y Leonardo...

Agradecimientos

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mi familia, especialmente a mi esposa Miriam por el apoyo moral y la compañía que siempre me ha brindado, a mis hijos Miguel y Leonardo, a mis abuelos Raymundo y Ester, y a mis padres Miguel y Ester Patricia.

A mi asesor, el Dr. José Antonio de la O Serna le agradezco el introducirme en el tema, así como sus valiosas sugerencias e interés a lo largo de este trabajo. Agradezco también a los miembros del comité de tesis: Dr. Marco Tulio Mata Jiménez, Dra. Gina María Idárraga Ospina, Dr. Ramón M. Rodríguez Dagnino y al Dr. José Ramón Rodríguez Cruz la revisión del presente trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico para la realización de mis estudios.

A los profesores, alumnos y personal del Doctorado en Ingeniería Eléctrica y a todas las personas que contribuyeron de una forma u otra en la realización de este trabajo.

Resumen

Una extensión a la transformada de Fourier, transformada Taylor-Fourier

Publicación No. _____

Miguel Angel Platas Garza

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. José Antonio de la O Serna

Agosto del 2011

La estimación armónica es un tema de importancia en muchas áreas de la ingeniería. Comúnmente la herramienta matemática usada para realizar dicho análisis es transformada de Fourier discreta (*Discrete Fourier Transform*, DFT). A pesar de ser una excelente técnica para estimar las componentes armónicas de una secuencia periódica, la DFT presenta errores cuando la señal no cumple con la propiedad ideal de periodicidad. Por ejemplo, cuando el sistema que genera la señal es sometido a un transitorio. Lo anterior se debe a que la DFT solamente generan una base completa para secuencias periódicas.

La propuesta del presente trabajo es desarrollar una extensión al análisis de Fourier al representar el comportamiento de cada armónica por una función suave (envolvente compleja) en lugar de un coeficiente constante (coeficiente de Fourier). El propósito de esta expansión es el mejorar las estimaciones de las componentes armónicas ante oscilaciones limitadas en banda.

La extensión recibe el nombre de transformada Taylor-Fourier (*Taylor Fourier Transform*, TFT) ya que está basada en la expansión de cada componente armónico en su serie de McLaurin. Por lo tanto, los coeficientes de la TFT poseen significado físico. Estos representan directamente a las armónicas y a sus derivadas.

Al utilizar un polinomio mayor a cero en la serie de McLaurin de cada armónica se obtienen mejores estimados de las envolventes complejas debido al hecho de que el subespacio generado por la base de Fourier se encuentra contenido en el subespacio generado por la base de la TFT.

Con respecto a la implementación, se tiene que en el caso discreto todos los coeficientes pueden ser calculados a la vez mediante una transformación lineal, la cual a su vez puede ser vista como un banco de filtros FIR máximamente lisos. Estos filtros poseen ganancias idénticas a las de diferenciadores ideales en vecindarios alrededor de las frecuencias armónicas. Por lo tanto se producen buenos estimados cuando el contenido frecuencia de la señal se encuentra en estos vecindarios, es decir cuando las armónicas evolucionan de manera suave.

Se desarrollan diversos métodos para reducir la carga computacional del estimador presentado. Los métodos abarcan las etapas de diseño e implementación del mismo. Se presenta un método basado en la transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) y dos métodos basados en las propiedades de la respuesta en frecuencia del estimador.

Finalmente, se presenta una serie de ejemplos para comparar el desempeño de la TFT con el de la FFT. Es importante recalcar que el desempeño se compara usando señales de sistemas físicos y no simulaciones. Como ejemplos se utilizan señales provenientes de sistemas eléctricos de potencia bajo oscilaciones, señales de presión arterial, y por último se presenta la implementación del algoritmo en Hardware, específicamente en una tarjeta FPGA.

Contenido

Lista de figuras	XI
Lista de tablas	XIII
Acrónimos	XIV
Nomenclatura	XV
Introducción	1
1. Expansión de señales y análisis de Fourier	11
1.1. Expansiones lineales de señal	11
1.1.1. Expansiones ortonormales	12
1.1.2. Expansiones biortogonales	15
1.1.3. Proyecciones ortogonales y mínimos cuadrados	16
1.1.4. Expansiones para señales en tiempo continuo	17
1.1.5. Expansiones para señales en tiempo discreto	18
1.2. Análisis de Fourier	19
1.2.1. La Transformada discreta de Fourier	20
1.2.2. La DFT como transformación lineal	21
1.2.3. Respuesta en frecuencia de la DFT	22
2. La transformada Taylor-Fourier	24
2.1. Introducción	24
2.2. Modelo de señal	25
2.2.1. Caso continuo	26
2.2.2. Caso discreto e implementación	28
2.2.3. Interpretación de coeficientes	30

2.3.	Bancos de filtros	30
2.4.	Convergencia	31
2.4.1.	Convergencia media cuadrática	31
2.4.2.	Convergencia puntual en $t = 0$	33
2.5.	Errores máximamente nulos	35
2.6.	Existencia de la solución	37
2.7.	Respuesta en frecuencia	38
2.8.	Ceros de la respuesta en frecuencia	40
2.9.	Control de lóbulos laterales	42
2.10.	Ejemplo teórico	43
2.11.	Discusión	46
2.12.	Conclusiones	48
3.	Reducción del costo computacional	50
3.1.	Introducción	50
3.2.	Diseño del estimador	51
3.2.1.	Obtención del estimador a partir del dominio de la frecuencia	54
3.2.2.	Obtención del estimador a partir del polinomio libre	61
3.2.3.	Comparación	65
3.2.4.	Relación entre los bancos de filtros	65
3.2.5.	Cálculo eficiente de la TFT basado en la FFT	69
3.3.	Implementación del estimador	71
3.4.	Conclusiones	72
4.	Ejemplos de aplicaciones con señales reales	74
4.1.	Sistemas de potencia	74
4.1.1.	Resultados experimentales en sistemas eléctricos de potencia	75
4.2.	Señales biomédicas	80
4.2.1.	Análisis y síntesis de una señal de presión arterial	80
4.3.	Aplicación en tiempo real mediante FPGA	81
4.3.1.	Descripción del hardware	82
4.3.2.	Etapas de diseño	83
4.3.3.	Diseño del banco de filtros	83
4.3.4.	Simulación	85
4.3.5.	Cuantificación a filtros de punto fijo	85

4.3.6. Implementación en FPGA	86
4.3.7. Resultados experimentales	86
4.4. Conclusiones	90
5. Conclusiones y recomendaciones	92
5.1. Objetivos alcanzados	93
5.2. Limitaciones	93
5.3. Publicaciones	93
5.4. Trabajos futuros	94
A. Uso de la matriz de Vandermonde en el cálculo de la solución	95
A.1. Obtención de \mathbf{B}^{-1}	96
A.1.1. Ejemplo de aplicación - Polinomio de segundo orden	97
A.1.2. Ejemplo de aplicación - Polinomio de cuarto orden	98
B. Reducción de infiltración inter-armónica	101
B.1. Efecto de la ventana en la respuesta en frecuencia	102
C. Cambios frecuenciales	104
C.0.1. Limitaciones del método	104

Lista de figuras

1.	Espectro de armónica dinámica.	5
2.	Errores de aproximación de la DFT y FFT.	7
1.1.	Relación entre los dominios del tiempo y de la frecuencia.	20
1.2.	Respuesta en frecuencia de la DFT.	23
2.1.	Respuesta en frecuencia del estimador TFT.	29
2.2.	Número de condición de la matriz de Gram.	39
2.3.	Ceros en la respuesta en frecuencia de los estimadores.	41
2.4.	Control de lóbulos laterales.	42
2.5.	Señal de entrada $s(t)$	43
2.6.	Coefficientes estimados mediante FFT.	44
2.7.	Coefficientes de orden cero estimados mediante TFT.	46
2.8.	Coefficientes de primer y segundo orden estimados mediante TFT. . .	47
2.9.	Errores de estimación.	48
3.1.	Respuestas impulsionales del filtro pasa bajas.	54
3.2.	Respuestas en frecuencia del banco de filtros de dos canales.	55
3.3.	Respuestas impulsional del filtro pasa bajas.	58
3.4.	Respuestas en frecuencia del banco de filtros de 4 canales.	59
3.5.	Relación entre las respuestas en frecuencia de 2 y 4 canales.	66
3.6.	Relación entre las respuestas en frecuencia de diferentes bancos. . . .	67
3.7.	Respuesta impulsional del filtro de 64 canales.	68
3.8.	Implementación del estimador TFT.	73
4.1.	Señal de entrada al estimador.	76
4.2.	Estimados de orden cero obtenidos mediante FT y TFT.	77
4.3.	Magnitud de los estimados TFT para 1er 2do y 3er orden.	78
4.4.	Fluctuaciones en fase y frecuencia.	79

4.5. Señal de entrada al estimador.	81
4.6. Señales reconstruidas con TFT y FFT.	82
4.7. Uso del nodo math-script.	84
4.8. Panel frontal de la etapa de diseño.	84
4.9. Panel frontal de la etapa de cuantificación.	85
4.10. Muestreo de entrada en FPGA.	86
4.11. Estimado de la primera armónica en FPGA.	86
4.12. Prueba en estado estacionario.	87
4.13. Prueba al escalón en amplitud.	88
4.14. Prueba al escalón en frecuencia.	89
4.15. Procesamiento en tiempo real.	89
4.16. Interface de usuario para FPGA.	91
C.1. Fluctuaciones en frecuencia de la 1 ^{era} , 2 ^{da} y 3 ^{era} armónica.	104
C.2. Diagrama a bloques del estimador con retroalimentación de frecuencia.	105
C.3. Frecuencia estimada de manera fija y adaptativa.	106
C.4. Frecuencia estimada con un banco de frecuencia fija en 50 Hz.	107
C.5. Frecuencia estimada al conmutar entre bancos de frecuencia fija.	107

Lista de tablas

2.1. Función de costo para las armónicas dinámicas.	45
3.1. Complejidad numérica para los diferentes métodos de diseño.	65
4.1. Función de costo $\text{NRMSE}_{\text{TFT}}$	78

Acrónimos

FT	Transformada de Fourier.
TFT	Transformada Taylor-Fourier.
DFT	Transformada de Fourier discreta.
FFT	Transformada rápida de Fourier.
IFFT	Transformada rápida de Fourier inversa.
PDS	Procesamiento digital de señales.
FIR	Filtro de respuesta impulsional finita.
IIR	Filtro de respuesta impulsional infinita.
LS	Mínimos cuadrados.
WLS	Mínimos cuadrados ponderados.
NRMSE	Error medio cuadrático normalizado.
FPGA	Matriz de arreglo de compuertas de campo.
THD	Índice de distorsión armónica total.
DBL	Cuantificación en formato de doble precisión.
FXP	Cuantificación en formato de punto fijo.

Nomenclatura

\mathcal{Z}	Conjunto de números enteros no negativos.
\mathcal{R}	Conjunto de números reales.
\mathcal{C}	Conjunto de números complejos.
$L_2(\mathcal{R})$	Espacio que contiene todas las funciones cuadráticamente integrables.
$l_2(\mathcal{Z})$	Espacio que contiene todas las secuencias cuadráticamente sumables.
$x[n]$	Secuencia en tiempo discreto.
$x(t)$	Señal en tiempo continuo.
\in	Pertenece a.
\subset	Contenido en.
\forall	Para todo(a).
\exists	Existe.
\square	Fin de prueba.
$:=$	Definido como.
$\text{Re}(x)$	Parte real de x .
$\text{Im}(x)$	Parte imaginaria de x .
$ x $	Magnitud de x .
$\angle x$	Ángulo de x .
x^*	Conjugado complejo de x .
$\max(x)$	Máximo de x .
$\min(x)$	Mínimo de x .
\hat{x}	Estimado de x .
\langle, \rangle	Producto punto.
$\ x\ _p$	Norma p de x .
W_N	N -ésima raíz de -1 .

Matrices

- \mathbf{W}_N Matriz de Fourier de $N \times N$.
 \mathbf{I} Matriz identidad de dimensiones apropiadas.
 \mathbf{A}^T Transpuesta de la matriz \mathbf{A} .
 \mathbf{A}^H Hermitiana de la matriz \mathbf{A} .
 \mathbf{A}^{-1} Inversa de la matriz \mathbf{A} .
 \mathbf{A}^\dagger Pseudoinversa de la matriz \mathbf{A} .

Parámetros de la TFT

- K Orden usado en la serie de McLaurin usada para representar cada armónica.
 H Número de armónicas en el modelo.
 N Longitud de la ventana temporal (en muestras) usada para implementar el estimador.
 $\psi_{(k,h)}(t)$ Elemento de la base de la TFT asociado a la k -ésima derivada de la i -ésima armónica.
 $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ Elemento de la base dual de la TFT asociado a la k -ésima derivada de la i -ésima armónica.
 $h_{(k,h)}(t)$ Respuesta impulsional del filtro implícito en la TFT asociado a la k -ésima derivada de la i -ésima armónica.
 $H_{(k,h)}(\omega)$ Respuesta en frecuencia del filtro FIR implícito en la TFT asociado a la k -ésima derivada de la i -ésima armónica.
 $\hat{\sigma}_{(k,h)}$ Coeficiente asociado al estimado de la k -ésima derivada de la i -ésima armónica para el caso continuo.
 $\hat{\theta}_{(k,h)}$ Coeficiente asociado al estimado de la k -ésima derivada de la i -ésima armónica para el caso discreto.

Introducción

Una de las principales metas del procesamiento digital de señales (PDS) es el representar señales de la vida real, en este contexto las transformaciones y las expansiones lineales tienen un papel fundamental. Las mismas son herramientas básicas para realizar las tareas más comunes del procesamiento de señales como lo son: la adquisición, filtrado y compresión de señales.

Comúnmente las expansiones lineales de señales han surgido en distintas áreas para representar alguna señal en otro dominio en el cual se presenta alguna mejora en particular con respecto al dominio original. Debido a lo anterior, el representar una señal por la suma ponderada de los elementos de una base (componentes básicos) es una idea tan antigua como actual, ciertamente mucho más antigua que el área de procesamiento de señales.

Uno de los primeros en hacerlo fue J. Fourier en su "Théorie analytique de la chaleur"(1822) [1], en la cual se propuso resolver el problema de transferencia del calor mediante una serie trigonométrica a la cual se le conoce hoy en día como serie de Fourier, mediante dicha serie es posible representar cualquier señal periódica continua en una sumatoria de exponenciales complejas, es decir representa una base completa para señales periódicas.

Con el paso del tiempo, distintas expansiones de señales surgieron, entre las más importantes se encuentran:

La transformada Haar [2], propuesta a principios de el siglo XX, en la cual se representa dos muestras de una señal por su media y su diferencia, lo cual equivale a un filtrado pasa bajo y uno pasa alto seguidos de una etapa de diezmado por un factor de dos. Claramente la transformada Haar es el primer ejemplo de una onduleta, aunque no fue reconocido en ese entonces.

La transformada discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*, DFT) [3] y el desarrollo de algoritmos eficientes para realizar el cálculo de la misma, como la transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) [4]. Ciertamente

uno de los principales factores que influyen en la popularidad actual de la DFT es el cálculo eficiente de la misma con algoritmos de bajo costo computacional. La mayoría de estos algoritmos se basan en el uso de propiedades de simetría para disminuir el número de operaciones necesarias en el cálculo de la DFT

Las series de Fourier generalizadas [5], las cuales buscan una base ortonormal para representar la señal, es decir que los componentes en los que se descomponen la señal sean ortonormales unos a los otros. Algunos de sus ejemplos son la serie Fourier-Legendre y la serie Fourier-Bessel, en las cuales se utilizan los polinomios de Legendre y Bessel respectivamente como elementos de la base.

Las onduletas (*Wavelet transform*, WT) [6]-[7], las cuales surgieron en la década de 1980 y son la convergencia de muchos estudios realizados en distintas áreas, por ejemplo: en matemáticas puras, en geología para la correcta detección de transitorios en señales geofísicas, en PDS para realizar filtros de perfecta reconstrucción y codificación en sub-bandas. La WT se basa en el reemplazo del concepto de frecuencia por el de escala, al reemplazar la modulación por exponenciales complejas de la transformada de Fourier (*Fourier Transform*, FT) por el escalamiento de una función prototipo, esto implica una mejor representación de la señal en el plano tiempo-frecuencia, es decir se tiene la capacidad para detectar transitorios rápidos sin que éstos se diluyan en el intervalo de observación. Una de las desventajas de la WT es la carencia de significado físico de sus coeficientes, los cuales sólo reflejan el grado de similitud entre la función analizada y la onduleta elegida a su respectiva escala y desplazamiento temporal. Por esta razón la mayoría de las WT se usan principalmente en codificación [8]-[9].

Cabe mencionar que la mayoría de las transformaciones lineales usadas busca una base ortonormal en los elementos que soportan a la base, también son usadas las transformaciones biortogonales en las cuales se relaja la condición de ortogonalidad, ya que sólo es necesario que los elementos de la base estén dados por un conjunto de vectores linealmente independientes. Una revisión al tema de expansiones lineales es realizada en el Capítulo 1.

Análisis armónico

Cuando se toca el tema de expansiones lineales de señales, un punto importante es el significado físico de los coeficientes de la expansión, ya que estos pueden

indicar fenómenos difícilmente detectables en la señal original. Basados en este punto, la FT es una herramienta importante, ya que la información que se puede obtener del análisis armónico es muy variada, por ejemplo puede indicar patologías en diagnósticos médicos, fallas en sistemas eléctricos de potencia, vibraciones en sistemas mecánicos, etc. Por esta razón la estimación armónica es un tópico de interés en muchas áreas, algunos ejemplos de sus aplicaciones son mostrados en [10]-[12]. Todas estas aplicaciones tienen un punto en común: Usan técnicas de estimación armónica basadas en la Transformada de Fourier¹.

El presente trabajo pretende extender las técnicas de análisis armónico presentes en la FT, es decir: se pretende desarrollar una expansión de la FT, la cual mejore a ésta en sus puntos débiles, de los cuales el principal punto a tratar en este trabajo es la condición estacionaria implícita en la FT, ya que ésta representa cada armónica por una constante en amplitud y fase sobre todo el intervalo de observación. En contraparte nuestra propuesta consiste en usar un polinomio de McLaurin para representar la evolución de cada armónica, lo cual representa un modelo más flexible, el cual permite variaciones de las armónicas dentro del intervalo de observación. La variación permitida en cada armónica está descrita por un polinomio de orden K . El planteamiento anterior inició con investigaciones para mejorar la estimación fasorial en condiciones oscilatorias [13]. En éste, la estimación se efectúa solamente en la frecuencia fundamental. La idea fue generalizar [13]-[14] a todas las armónicas.

Las principales ventajas de la expansión propuesta serán el mejorar los coeficientes de Fourier, y añadir nuevos coeficientes, los cuales estarán relacionados con la razón de cambio de las armónicas.

Planteamiento del problema

El principal problema de la DFT es que se supone una señal estrictamente periódica, lo cual implica una frecuencia fundamental f_1 y coeficientes de Fourier c_i constantes sobre todo el intervalo de observación.

Por otro lado, es bien conocido que las señales de campo difícilmente cumplen la propiedad ideal de periodicidad, sobre todo bajo condiciones oscilatorias en las cuales las armónicas contienen variaciones dentro del intervalo de observación². Cuando

¹El análisis de Fourier es la herramienta más popular para realizar la estimación armónica, mas no es la única. Existen numerosas técnicas para lograr este fin.

²A las cuales se les denomina armónicas dinámicas en este trabajo.

esto pasa, lo mejor que pueden hacer las técnicas actuales es estimar las armónicas por el mejor valor promedio sobre toda la ventana de observación truncando las variaciones que se desean capturar, en una manera similar a cuando se toma una fotografía de un objeto en movimiento y se produce una imagen borrosa, ya que el rollo fotográfico considera una imagen estática. Entonces, si se aproxima la evolución de cada armónica por un modelo de señal más relajado (un polinomio de McLaurin en lugar de una constante) se representa de una manera más adecuada las variaciones en amplitud y/o fase de cada armónica. Este comportamiento dinámico que pueden llegar presentar las armónicas bajo condiciones transitorias se le denomina armónica dinámica, y es explicado a continuación.

El concepto de armónica dinámica

Para ilustrar el concepto de armónica dinámica, considere una señal periódica $x_p(t)$ de frecuencia fundamental f_1 , la cual posee coeficientes de Fourier c_i $i = 0, \pm 1, \dots, \pm H$ constantes

$$x_p(t) = \sum_{i=-H}^H c_i e^{j2\pi i f_1 t}. \quad (0.1)$$

Una de las formas en las que se puede modelar la pérdida de periodicidad durante un transitorio es modulando en amplitud a $x_p(t)$ por una señal aperiódica paso-bajo de energía finita³ $m(t) = a(t)e^{\phi(t)}$ [13], la cual tiene un ancho de banda $\beta \lll f_1$. En el dominio temporal la envolvente $m(t)$ afecta a $x_p(t)$ ocasionando una pérdida de la periodicidad en la señal resultante $x_a(t)$.

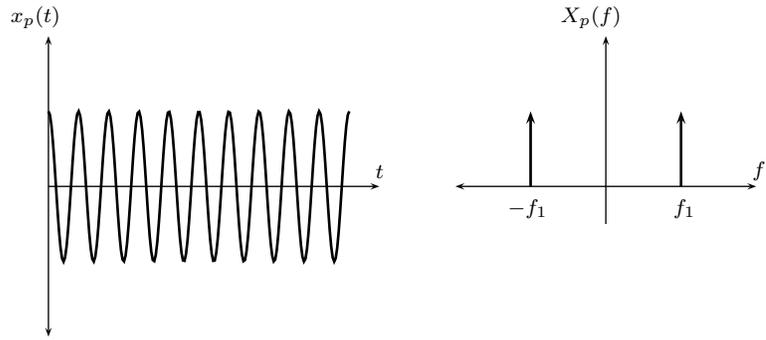
$$x_a(t) = m(t)x_p(t) = m(t) \left(\sum_{i=-H}^H c_i e^{j2\pi i f_1 t} \right) = \sum_{i=-H}^H c_i(t) e^{j2\pi i f_1 t}, \quad (0.2)$$

donde $c_i(t)$ representa una copia escalada por el coeficiente c_i de la portadora $m(t)$, dicha copia recibe el nombre de armónica dinámica en este trabajo, ya que en el dominio de la frecuencia el espectro de $m(t)$ es modulado a cada frecuencia armónica y ponderado por su respectivo coeficiente:

$$X_a(f) = M(f) * \left(\sum_{i=-H}^H c_i \delta(2\pi i f_1 t) \right) = \sum_{i=-H}^H c_i M(f - 2\pi i f_1 t). \quad (0.3)$$

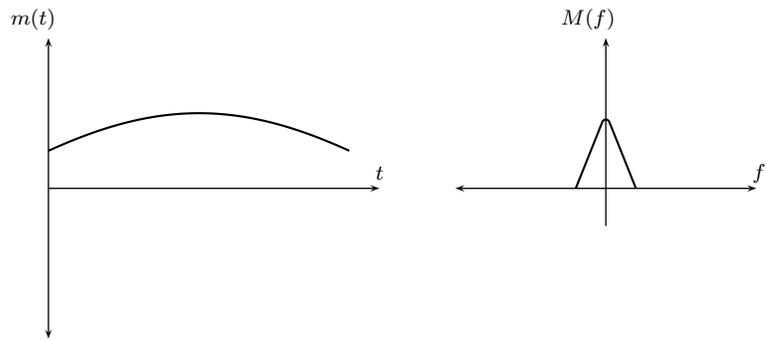
Note que el espectro de la señal resultante alrededor de la i -ésima armónica está

³Por lo tanto continuamente diferenciable [15].



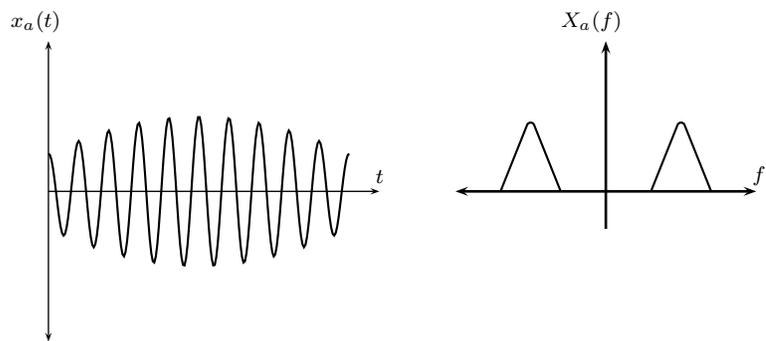
(a) Señal periódica $x_p(t)$.

(b) Espectro señal periódica.



(c) Señal pasa bajas $m(t)$.

(d) Espectro señal pasa bajas.



(e) Señal aperiódica $x_a(t)$.

(f) Espectro señal aperiódica.

Figura 1: Pérdida de periodicidad de una señal al ser modulada en amplitud por una señal pasa bajas, (a)-(b) señal original, (c)-(d) variación en amplitud y (e)-(f) señal aperiódica resultante.

dado por una copia escalada de la envolvente en lugar de un coeficiente constante c_i . Este planteamiento se muestra en la Fig. 1.

Como se observa en la Fig. 1, el espectro de las armónicas dinámicas se concentra alrededor de vecindarios centrados en las frecuencias armónicas, siempre y cuando el ancho de banda β de la envolvente $m(t)$ sea lo suficientemente pequeño. Basado en lo anterior, una correcta estimación del espectro de la i -ésima armónica dinámica debe de extraer el contenido frecuencial del mismo adecuadamente, esto es, el estimador debe poseer una respuesta en frecuencia con ganancia unitaria en $f = f_1 \pm \beta$ y ganancias nulas en $f = f_i \pm \beta$ para $i = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Por otro lado, la respuesta en frecuencia implícita en el análisis de Fourier sólo cumple las condiciones anteriores para $\beta = 0$, por tal motivo los estimados de Fourier sólo están libres de distorsión en este caso.

Otro enfoque interesante del problema es el del álgebra lineal, Considere a la FT como una base, cuyos elementos se dan por exponenciales complejas de la forma $e^{j2\pi i f_1 t}$ para $i = 0, \pm 1, \dots, \pm H$, y cuyo subespacio está compuesto de todas las señales periódicas limitadas a la banda de frecuencia $|\omega| < H f_1$ y pertenecientes a $L_2(\mathcal{R})$, entonces es claro que al agregar los elementos $t^i e^{j2\pi k f_1 t}$ se incrementará el espacio generado por la base, siempre y cuando se garantice la independencia lineal de todos sus elementos.

En este trabajo se generará una nueva base al unir la base de la FT más un complemento, ambos linealmente independientes, por lo tanto el subespacio correspondiente a la nueva base será mayor al subespacio generado por la FT.

Se elige como nueva base a polinomios de McLaurin modulados en cada frecuencia armónica. Por lo tanto si el orden de los polinomios es 0, la base se reduce a la base de Fourier, mientras que para órdenes mayores de cero la base englobará a la base de Fourier. La transformación lineal generada por esta base se nombra transformada Taylor-Fourier (*Taylor-Fourier Transform*, TFT) debido a que se basa en aproximar el comportamiento de cada armónica por una serie de potencias.

Por ejemplo, considere que los espacios generados por las bases de Fourier, Taylor-Fourier y alguna onduleta están dados por los conjuntos nombrados \mathcal{FT} , \mathcal{TFT} y \mathcal{WT} en la Fig. 2

Entonces de la Fig. 2 se tiene que, ya que \mathcal{FT} está contenido en \mathcal{TFT} , siempre se garantiza un error Taylor-Fourier menor al de Fourier para cualquier señal $s(t)$ arbitraria. Note que \mathcal{FT} representa al conjunto del todas las señales periódicas de

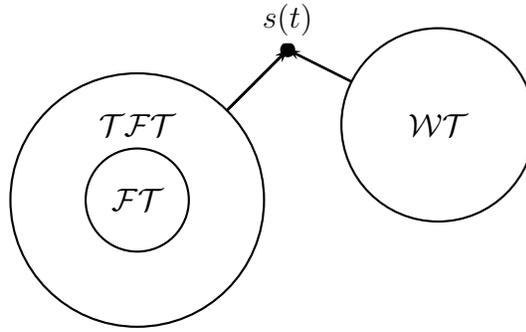


Figura 2: Errores de aproximación de la DFT y FTT.

energía finita, y \mathcal{TFT} representa al conjunto de todas las señales de energía finita en las cuales la evolución de sus armónicas se da por polinomios de McLaurin de orden K .

Mientras que para el caso de una transformación cuyo subespacio no englobe al espacio generado por la base de Fourier, como el caso de la \mathcal{WT} no se puede garantizar lo anterior, es decir en ocasiones la \mathcal{WT} representará mejor una señal, pero en ocasiones la \mathcal{FT} tendrá el error menor, dependiendo de que tipo de señal se analice. En general la eficiencia de una base al representar una señal se puede determinar a partir de la similitud entre la señal a estimar y los elementos de la base. Por lo tanto se tiene que la señal será mejor representada por FT si es semejante a una señal periódica continua, pero será mejor representada por la WT si ésta es semejante a la onduleta madre elegida para generar la WT.

Comparación con otras técnicas

Ahora que se tiene conciencia del tipo de expansión generado por la TFT y su propósito, es posible establecer un marco de comparación con respecto a otras técnicas de estimación armónica no basadas en la DFT. A continuación se revisa brevemente las ventajas y desventajas que presenta cada una de ellas.

El filtrado selectivo en frecuencia [16] es una herramienta útil para estimar el contenido armónico de una señal periódica. Es posible diseñar filtros para atenuar los errores implícitos en el análisis de Fourier [17]-[18]. Algunos ejemplos de estas técnicas son mostrados en [19]-[20]. La desventaja general de este tipo de métodos es

el retardo generado en el proceso de filtrado. El algoritmo TFT entra en esta categoría ya que el mismo puede interpretarse como un banco de filtros FIR máximamente lisos [21], los cuales son diseñados específicamente para resolver el problema de estimación armónica ante oscilaciones y representan la solución óptima a un problema de minimización.

El filtrado adaptable [22] también puede ser usado para estimar los componentes armónicos de una señal [23]-[24]. Estas técnicas usan filtros con coeficientes variantes en el tiempo, los cuales se actualizan mediante algoritmos recursivos de minimización. Generalmente, la principal desventaja de estos filtros es la complejidad numérica, ya que es necesario aumentar la carga computacional del algoritmo para realizar el proceso recursivo de actualización de coeficientes.

Entre los filtros adaptables más comúnmente usados se encuentra al filtro de Kalman [25]. Algunos ejemplos de aplicación se encuentran en [26]-[27]. En [27] se muestra la aplicación de este filtro para estimar la primera armónica de una señal bajo oscilación. Cabe destacar que en esta aplicación en particular el modelo de señal se expande de manera similar a la de la TFT (usando una serie de McLaurin). La principal ventaja del uso del filtro de Kalman en el análisis armónico es su respuesta inmediata (el proceso de filtrado tiene un retraso de una muestra) por lo cual sus estimados son casi instantáneos. Entre sus desventajas se tiene la complejidad numérica. Ya que, a diferencia de la TFT, es necesario usar todo el modelo en la etapa de implementación aunque sólo se este interesado en un ciertos parámetros del mismo. Además, la complejidad de las ecuaciones recursivas aumenta con respecto al número de parámetros en el modelo.

Algunas WT pueden ser usadas para realizar análisis armónico [28], para lograr este fin la WT elegida debe de estar acotada en frecuencia. La popularidad de la WT se debe a sus propiedades matemáticas [29]. En adición, la WT es una herramienta muy eficiente computacionalmente⁴ y es capaz de representar la señal con pocos coeficientes (en comparación con la DFT) lo que las hace útiles en tareas como la compresión de señales [30]. A pesar de lo anterior, al igual que las herramientas anteriores la WT también tiene puntos débiles: En el caso específico del análisis armónico, la principal desventaja de la WT es la dificultad existente para relacionar los coeficientes de la transformación con el contenido armónico de la señal de entrada, ya que por lo general estos carecen de significado físico. Entonces

⁴El implementar una WT puede presentar una menor carga computacional que la FFT: Por ejemplo la transformada Haar.

el análisis añade la etapa extra de obtener parámetros de utilidad en el monitoreo de un sistema a través de los coeficientes [31]. Comúnmente la WT analiza el contenido frecuencial de la señal de entradas por bandas separadas por octavas la cual no es una separación adecuada para realizar el análisis armónico (es posible encontrar más de una frecuencia armónica en una banda e incluso componentes inter-armónicos). Lo anterior se cumple, por ejemplo, en el caso de la (*Harmonic Wavelet Transform*, HWT) [28].

También existen algoritmos híbridos [32]-[34] los cuales hacen uso de los métodos mencionados en conjunto con diversos algoritmos como redes neuronales, algoritmos genéticos, lógica difusa, entre otros. El principal problema de estos algoritmos híbridos es su complejidad. Por otro lado el uso de distintos métodos al mismo tiempo provoca distintas fuentes de error.

En resumen, debido a que la TFFT es una expansión de la FT se tiene que ambas poseen características semejantes, entre otras se tiene a la facilidad y factibilidad de implementación, la posibilidad de implementar de manera eficiente la transformación mediante FFT y el significado físico de coeficientes. Ciertamente la popularidad de la FFT se debe en parte a estas características. En adición a lo anterior, la TFFT tiene la capacidad de procesar señales bajo oscilaciones acotadas en frecuencia. Entre las desventajas de la TFFT destacan la existencia de retardos temporales, generación de errores ante cambios considerables en la señal de entrada y la resolución constante en el plano tiempo-frecuencia⁵.

Objetivo

El objetivo principal del presente trabajo es desarrollar una expansión al análisis de Fourier, la cual se nombra transformada Taylor-Fourier, los objetivos secundarios son:

- Elaborar algoritmos eficientes para disminuir la carga computacional.
- Comparar el desempeño con métodos comúnmente usados.
- Implementar el algoritmo y evaluar los resultados.

⁵A pesar de esto es posible detectar transitorios mediante las coeficientes de mayor orden de la serie de McLaurin.

Organización de la tesis

La tesis está estructurada de la siguiente manera:

Capítulo 1 El propósito de este Capítulo es hacer el documento auto-contenido.

Dentro del mismo se presenta un resumen breve de las herramientas usadas a lo largo del trabajo. Si el lector está familiarizado con temas como expansiones de señal y análisis frecuencial, puede empezar en el capítulo 2.

Capítulo 2 Se muestra el método propuesto, desde el modelo de señal hasta las propiedades matemáticas del estimador. Se da especial énfasis a la máxima planecia de la respuesta en frecuencia alrededor de las frecuencias armónicas, así como la colocación de un conjunto de ceros de la función de transferencia en dichas frecuencias. Dentro de este Capítulo, también se presenta un ejemplo teórico para evaluar el funcionamiento del estimador.

Capítulo 3 Enfocado principalmente en la reducción del costo computacional necesario para realizar el cálculo de la transformación propuesta. Se presentan distintos enfoques, la mayoría de los mismos se basa en reducir la carga usando la respuesta en frecuencia del filtro asociado al estimador, también se presenta un método que hace uso de la FFT para disminuir la carga computacional del estimador.

Capítulo 4 Se presentan distintos ejemplos con señales reales. Las cuales son de distinta naturaleza. Se presentan análisis en línea y fuera de línea.

Capítulo 1

Expansión de señales y análisis de Fourier

Como se mencionó en la introducción, este trabajo está enfocado en la expansión lineal de señales. A continuación se muestra un resumen acerca de este tema, el cual es tomado de [6] y [35].

1.1. Expansiones lineales de señal

Dada alguna señal x de algún espacio \mathcal{S}^1 , nos interesa encontrar un conjunto de señales elementales $\varphi_i(t)$ para ese espacio, tal que sea posible representar la señal original x como una combinación lineal de dicho conjunto.

$$x = \sum_i \alpha_i \varphi_i, \quad i \in \mathcal{Z}, \quad (1.1)$$

donde \mathcal{Z} representa el conjunto de los números enteros.

De especial interés es el caso en el que cualquier $x \in \mathcal{S}$ puede ser representada por una combinación lineal como la dada en (1.1), en este caso se dice que el conjunto elegido como base es completo, es decir $\mathcal{S} = \text{span}\{\varphi_i\}$.

Si la base es completa se garantiza la existencia de los elementos de la base dual $\tilde{\varphi}_i$, entonces es posible obtener los coeficientes de la expansión al aplicar el producto punto entre la señal y cada uno de los elementos de la base dual [6, Def. 2.2, p. 19].

$$\alpha_i = \langle \tilde{\varphi}_i, x \rangle \quad (1.2)$$

¹Donde \mathcal{S} puede ser de dimensiones finitas como los espacios euclidianos \mathcal{R}^n y \mathcal{C}^n o de dimensiones infinitas como los espacios de Hilbert $l_2(\mathcal{Z})$ y $L_2(\mathcal{R})$.

donde los elementos de la base dual son el único conjunto en \mathcal{S} que cumple con:

$$\langle \varphi_i, \tilde{\varphi}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}, \quad i, j \in \mathcal{Z}. \quad (1.3)$$

Un caso particular es cuando los elementos de la base forman un conjunto ortonormal y completo, es decir los elementos de la base son ortonormales los unos a los otros:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}, \quad i, j \in \mathcal{Z}, \quad (1.4)$$

y cualquier señal perteneciente a \mathcal{S} se puede representar por una combinación lineal de los mismos.

El caso ortonormal es tan importante, que comúnmente se toma como referencia en la forma de clasificar las bases. La importancia del caso ortonormal radica en su sencillez matemática, la cual es de gran utilidad en el momento de implementación, note que de (1.3) y (1.4) se deduce: $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$ para este caso. Por lo tanto, los coeficientes de la aproximación se obtienen al aplicar producto punto con respecto a los elementos de la base directamente, con lo cual el problema de encontrar los elementos de la base dual es eliminado.

En las siguientes secciones se presentan ambos casos, expansiones ortonormales en las cuales los elementos de la base forman un conjunto ortonormal y expansiones biortogonales en las cuales la condición de ortogonalidad se relaja a la independencia lineal de los elementos de la base.

1.1.1. Expansiones ortonormales

Las expansiones ortonormales juegan un papel fundamental dentro de la teoría de tratamiento de señales debido a su manera elegante y eficiente de representar una señal. Además su naturaleza ortonormal permite garantizar estabilidad numérica [30]. Ciertamente una de las primeras bases ortonormales fue la serie de Fourier, por esta razón, es común llamar series de Fourier generalizadas a las bases ortonormales, la única diferencia de la series de Fourier con respecto a las series de Fourier generalizadas, es que en la primera se usa como elementos de la base a exponenciales complejas adecuadamente moduladas en múltiplos de una frecuencia fundamental, mientras que en la segunda se elige a cualquier conjunto de señales que cumplan las condiciones de ortonormalidad y completitud para cierto espacio dado.

Definición 1.1 Un conjunto de elementos $\{\varphi_i\}$ es llamado una base ortonormal para el espacio \mathcal{S} si para cada x en \mathcal{S} se tiene que:

$$x = \sum_i \alpha_i \varphi_i, \quad i \in \mathcal{Z}, \quad (1.5)$$

y además los elementos de la base cumplen con:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Los coeficientes de la expansión α_i son llamados coeficientes de Fourier de x con respecto a φ_i .

Las condiciones (1.5) y (1.6) son llamadas las condiciones de completitud y ortonormalidad de la base, respectivamente. En relación a los coeficientes α_i se tiene que:

Lema 1.1 Cada uno de los coeficientes de Fourier α_k está dado por [6]:

$$\alpha_k = \langle \varphi_k, x \rangle. \quad (1.7)$$

Prueba. Lo anterior puede ser probado mediante la propiedad de linealidad del producto punto y la ortogonalidad de los elementos de la base. Por ejemplo, considere que x es expresada por (1.5), entonces:

$$\langle \varphi_k, x \rangle = \langle \varphi_k, \sum_i \alpha_i \varphi_i \rangle, \quad (1.8)$$

y debido a las propiedades de linealidad del producto punto se tiene que:

$$\langle \varphi_k, x \rangle = \sum_i \alpha_i \langle \varphi_k, \varphi_i \rangle. \quad (1.9)$$

Finalmente, aplicando la propiedad de ortonormalidad de los elementos de la base (1.3) se deriva

$$\langle \varphi_k, x \rangle = \alpha_k. \quad (1.10)$$

□

Note que los coeficientes de la expansión indican la proyección de la señal de entrada en cada uno de los elementos de la base, por esta razón se pueden tomar como indicadores del grado de similitud entre la señal de entrada y el elemento de la base asociado al coeficiente. Este punto es importante porque a partir del mismo se

puede deducir que elementos utilizar para representar cierta señal: La señal se debe de asemejar a los elementos de la base usada debido a que el segmento de la señal no proyectado en los elementos de la base será el error de la aproximación.

Para el caso de dimensiones finitas, es suficiente tener un conjunto ortonormal de tamaño n para generar una base ortonormal. Pero, para el caso de dimensiones infinitas no es suficiente tener un conjunto ortonormal de vectores infinito para generar una base. El siguiente teorema es tomado de [6] y muestra varios enunciados equivalentes, los cuales permiten verificar si un sistema ortonormal es también una base para cierto espacio dado.

Teorema 1.1 *Dado un sistema ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ en el espacio de Hilbert \mathcal{E} , lo siguiente es equivalente:*

1. *El conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ es una base ortonormal de \mathcal{E} .*
2. *Si $\langle \varphi_i, x \rangle = 0$ para $i = 1, 2, \dots$, entonces $x = 0$.*
3. *El espacio generado por $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ es denso en \mathcal{E} .*
4. *Por cada x en \mathcal{E} , se tiene que la igualdad de Parseval*

$$\|x\|^2 = \sum_i |\langle \varphi_i, x \rangle|^2 \quad (1.11)$$

se cumple.

5. *Por cada x_1 y x_2 en \mathcal{E} se cumple la igualdad de Parseval generalizada*

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \sum_i \langle \varphi_i, x_1 \rangle^* \langle \varphi_i, x_2 \rangle. \quad (1.12)$$

Los puntos anteriores indican la capacidad de la base ortonormal para representar a cualquier $x \in \mathcal{E}$. Note que de una u otra manera toda la información contenida en x es capturada en algún coeficiente de la base. Es importante destacar que la propiedad de ortonormalidad no es una condición necesaria para garantizar la completitud de la base. Realmente la popularidad de las bases ortonormales se debe a la sencillez matemática con la que éstas representan una señal. Por lo tanto, aunque son deseadas, las propiedades de ortogonalidad no son necesarias para construir una base para cierto espacio de Hilbert dado como se muestra a continuación.

1.1.2. Expansiones biortogonales

El caso general, en el cual la condición de ortonormalidad de los elementos de la base se relaja, es también importante. En este caso las expansiones reciben el nombre de expansiones biortogonales, ya que además de la base, existe una base dual, la cual genera el mismo subespacio que la base, y además sus elementos son tal que la condición de biortogonalidad es cumplida.

Definición 1.2 *En general el conjunto $\{\varphi_i, \tilde{\varphi}_i\}$ forma un par de bases biortogonales de un espacio de Hilbert \mathcal{E} si y sólo si:*

1. Para cada $i, j \in \mathcal{Z}$

$$\langle \varphi_i, \tilde{\varphi}_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.13)$$

2. Existen constantes $A > 0$, $B < 0$, $\tilde{A} > 0$, $\tilde{B} < 0$ tal que:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle \varphi_k, x \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \quad (1.14)$$

$$\tilde{A}\|x\|^2 \leq \sum_k |\langle \tilde{\varphi}_k, x \rangle|^2 \leq \tilde{B}\|x\|^2 \quad (1.15)$$

se cumplen para cualquier $x \in \mathcal{E}$.

En el caso biortogonal, la condición de ortonormalidad de los elementos de la base se reemplaza por la condición de independencia lineal de los mismos, entonces la fórmula de expansión de señal (1.5) se convierte en:

$$x = \sum_k \tilde{\alpha}_k \tilde{\varphi}_k = \sum_k \alpha_k \varphi_k \quad (1.16)$$

con: $\tilde{\alpha}_k = \langle \varphi_k, x \rangle$ y $\alpha_k = \langle \tilde{\varphi}_k, x \rangle$. Nótese que en el caso biortogonal es posible representar la señal como una combinación de los elementos de la base o de la base dual ya que ambas generan el mismo subespacio.

Un problema de las bases biortogonales es que los coeficientes se calculan a partir de los elementos de la base dual y no de la base (como en el caso de la base ortonormal). Lo anterior añade una etapa extra a la solución del problema. Además es posible que al añadir nuevos elementos a la base se pierda la propiedad de independencia lineal de los mismos.

1.1.3. Proyecciones ortogonales y mínimos cuadrados

Ya sea en el caso de una expansión ortonormal o una biortogonal, se presentarán errores cuando la señal no pertenece al espacio generado por la base. Es decir, cuando la señal a representar pertenece a un espacio de Hilbert \mathcal{E}^2 , pero la base elegida³ $\{\varphi_i, \tilde{\varphi}_i\}$ solamente genera un subespacio cerrado al mismo $\mathcal{S} \subset \mathcal{E}$. Entonces no es una base para \mathcal{E} , pero si para \mathcal{S} , y la mejor aproximación (proyección) $\hat{x} \in \mathcal{S}$ a $x \in \mathcal{E}$ está dada por:

$$\hat{x} = \sum_i \alpha_i \varphi_i \quad (1.17)$$

con $\alpha_i = \langle \tilde{\varphi}_i, x \rangle$. La notación \hat{x} indica estimado o proyección de x , existe un error debido a que $\hat{x} \in \mathcal{S}$ y $x \in \mathcal{E}$, el cual es tal que

$$x = \hat{x} + x_\perp, \quad (1.18)$$

donde x_\perp representa al error de aproximación, el cual cumple con:

$$x_\perp \perp \mathcal{S}, \quad (1.19)$$

debido a que $\langle x_\perp, \sum_i \beta_i \varphi_i \rangle = 0$ para cualquier conjunto arbitrario de coeficientes $\beta_i \in \mathcal{R}$. Lo anterior también se cumple para el caso particular $x_\perp \perp \hat{x}$. Entonces se tiene que se cumple el teorema pitagórico:

$$\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|x_\perp\|^2. \quad (1.20)$$

Un aspecto muy importante de (1.17), es que minimiza la norma del error, es decir de todas las señales $\tilde{x} = \sum_i \beta_i \varphi_i$ que pertenecen a \mathcal{S} , el valor mínimo de $\|x - \tilde{x}\|$ es alcanzado para $\beta_i = \alpha_i \forall i$.

Las ecuaciones normales del problema de mínimos cuadrados

Los coeficientes obtenidos por la solución de mínimos cuadrados, son tal que cumplen con el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\langle \varphi_i, x \rangle = \sum_j \alpha_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (1.21)$$

a las cuales se les conoce como ecuaciones normales del problema de mínimos cuadrados.

²El cual se asume separable.

³Ya sea ortonormal o biortogonal.

Lema 1.2 Las ecuaciones normales representan las restricciones necesarias para minimizar la función de costo

$$J = \|x - \hat{x}\|_2 \quad (1.22)$$

implícita en el problema de mínimos cuadrados.

Prueba. La función es mínima si:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = -2\langle \varphi_i, x - \hat{x} \rangle = 0, \quad \forall i \quad (1.23)$$

esto es, si el error de aproximación es ortogonal a todos los elementos de la base, es decir:

$$\langle \varphi_i, x - \hat{x} \rangle = 0, \quad \forall i. \quad (1.24)$$

Usando (1.17), se puede reescribir (1.23) por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\langle \varphi_i, x - \sum_j \alpha_j \varphi_j \rangle = 0, \quad \forall i, \quad (1.25)$$

las cuales representan las ecuaciones normales de mínimos cuadrados (1.21).

$$\langle \varphi_i, x \rangle = \sum_j \alpha_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle, \quad \forall i \quad (1.26)$$

□

1.1.4. Expansiones para señales en tiempo continuo

Para el caso de señales en tiempo continuo pertenecientes a $L_2(\mathcal{R})$ se tiene que las ecuaciones de análisis y síntesis se representan por:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \varphi_k(t), \quad (1.27)$$

y

$$\alpha_k = \int \tilde{\varphi}_k^*(t) x(t) dt, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1.28)$$

respectivamente.

Usando (1.21) se tiene que las ecuaciones normales de mínimos cuadrados en el caso continuo se dan por:

$$\int \varphi_i^*(t) x(t) dt = \sum_j \alpha_j \int \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots \quad (1.29)$$

La desventaja de manejar señales continuas radica en la complejidad computacional requerida para encontrar los coeficientes de la aproximación, debido a que es necesario conocer la función $x(t)$ y los elementos de la base dual $\tilde{\varphi}(t)$ para calcular los coeficientes de la aproximación usando (1.28). Por esta razón, la mayoría de las expansiones utilizadas en la práctica son discretas, las cuales se revisan a continuación.

1.1.5. Expansiones para señales en tiempo discreto

En el caso de secuencias $x[n]$, se representa las ecuaciones de análisis y síntesis por:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \varphi_k[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.30)$$

$$\alpha_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_k^*[n] x[n], \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad (1.31)$$

o en su lugar, también es posible usar representaciones matriciales, por ejemplo es común representar (1.30) por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\alpha \quad (1.32)$$

donde el vector $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^N$ contiene N muestras de la señal, la matriz de transformación $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{N \times K}$ contiene en cada una de sus columnas las muestras de cada elemento de la base y el vector $\alpha \in \mathcal{C}^K$ contiene los K coeficientes de la aproximación.

Para obtener la ecuación análoga a las ecuaciones de síntesis (1.31) se utiliza la ortogonalidad del error con respecto a los elementos de la base:

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{x} - \mathbf{A}\alpha \rangle = 0, \quad (1.33)$$

lo anterior implica:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \alpha, \quad (1.34)$$

la cual representa a las ecuaciones normales de mínimos cuadrados en el caso discreto, note que (1.34) es análoga a (1.21).

Además, debido a la independencia lineal de las columnas de \mathbf{A} es posible invertir la matriz gramiana $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, entonces se tiene que:

$$\alpha = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad (1.35)$$

donde la matriz pseudoinversa $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ representa la mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados, además sus filas están dadas por los elementos

de la base dual $\tilde{\varphi}$ debido a que se satisface (1.3), es decir $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{I}$, donde \mathbf{I} representa la matriz identidad de dimensiones adecuadas. Recuerde que los elementos de la base φ se encuentran en las columnas de \mathbf{A} .

La ecuación (1.35) se simplifica notoriamente para el caso de una base ortonormal, ya que en este caso no es necesario calcular la inversa de la matriz Gramiana, porque ésta es una matriz identidad (o una matriz diagonal con los factores de escala adecuados en el caso de una base ortogonal), por lo que la ecuación de síntesis para una base ortonormal está dada por:

$$\tilde{\alpha} = \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad (1.36)$$

mientras que para el caso ortogonal se da por:

$$\tilde{\alpha} = \mathbf{D} \mathbf{A}^T \mathbf{x}, \quad (1.37)$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal.

Un caso particular de (1.37), es la DFT, la cual se revisa enseguida.

1.2. Análisis de Fourier

De todas las posibles bases, nos interesan las que relacionen de alguna manera los dominios tiempo-frecuencia, es decir, que de alguna forma los coeficientes de la base reflejen alguna característica frecuencial de la señal original. A continuación se describen de manera breve las técnicas usadas para realizar el análisis frecuencial de una señal.

La relación exacta entre los dominios de la frecuencia y del tiempo se da por la transformada de Fourier, la cual se compone por las siguientes ecuaciones de análisis y síntesis

$$X(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.38)$$

$$x(t) = \int_{\omega=-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.39)$$

La transformada de Fourier es de gran utilidad cuando es posible expresar la señal de manera analítica, de otra manera carece de utilidad, ya que debido a su naturaleza continua no es una forma computacionalmente conveniente. Por tal motivo, en la práctica es común utilizar aproximaciones de la misma, las cuales no relacionan exactamente los dominios tiempo-frecuencia. Una de las aproximaciones

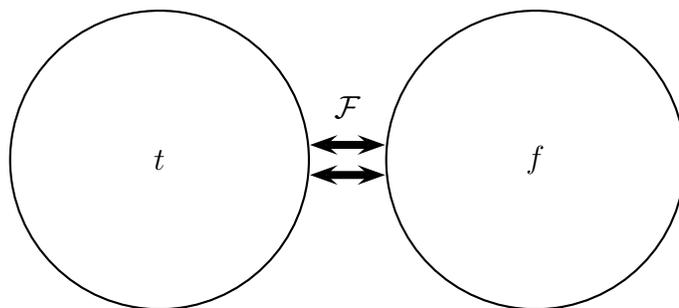


Figura 1.1: Relación entre los dominios del tiempo y de la frecuencia.

más utilizadas es la transformada discreta de Fourier (*Discrete Fourier Transform*, DFT) la cual se revisa a continuación.

1.2.1. La Transformada discreta de Fourier

La transformada discreta de Fourier o DFT representa la versión discretizada tanto en tiempo como en frecuencia de la transformada de Fourier. La DFT relaciona N muestras de la señal con N muestras de su espectro:

$$x[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{-nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1.40)$$

donde $x[k]$ representa las muestras del espectro $X(\omega)$, $x[n]$ representa a las muestras de la señal, y $W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ representa la N -ésima raíz de -1 y es conocido como el factor de giro. La ecuación de síntesis, la cual reconstruye la señal a partir de los coeficientes de su espectro está dada por:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k]W_N^{nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.41)$$

La principal ventaja de la DFT es su aplicación práctica, ya que para calcular la n -ésima muestra del espectro obtenido mediante la DFT sólo es necesario realizar N multiplicaciones entre las muestras de la señal y los factores de giro adecuados y $N-1$ sumas, la misma cantidad de multiplicaciones y sumas son necesarias para recuperar una muestra temporal de la señal a partir de las muestras de su espectro. Por lo tanto para calcular las N muestras de la señal o los N coeficientes del espectro se necesitan N^2 multiplicaciones complejas y $N(N-1)$ sumas complejas. Además

existen algoritmos que permiten disminuir el número de operaciones necesarias para realizar el cálculo de los coeficientes del espectro o de la señal cuando se calculan todos a la vez. Estos algoritmos hacen uso de las simetrías de la DFT y son conocidos como algoritmos de transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) y logran disminuir el número de multiplicaciones necesarias para realizar la transformación de N^2 a $\frac{N}{2} \log_2(N)$.

Finalmente es importante mencionar un punto, el cual es olvidado en ocasiones. Los coeficientes $x[k]$ obtenidos mediante la DFT son estimaciones y solamente representan exactamente a las muestras del espectro $X(\omega)$ cuando la secuencia $x[n]$ se encuentra dentro del subespacio generado, es decir es periódica de periodo N . En otro caso los coeficientes representan la mejor aproximación posible en el sentido de mínimos cuadrados.

1.2.2. La DFT como transformación lineal

La DFT también puede ser vista como una transformación lineal, las ecuaciones (1.40)-(1.41) pueden escribirse en formato matricial por:

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{X}_N \quad (1.42)$$

y

$$\mathbf{X}_N = (\mathbf{W}_N^* \mathbf{W}_N)^{-1} \mathbf{W}_N^* \mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{x}_N, \quad (1.43)$$

donde \mathbf{x}_N es un vector que contiene N muestras de la señal

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & x[2] & \dots & x[N-1] \end{bmatrix}^T, \quad (1.44)$$

\mathbf{X}_N es un vector que contiene N muestras del espectro

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} X[0] & X[1] & X[2] & \dots & X[N-1] \end{bmatrix}^T, \quad (1.45)$$

y \mathbf{W}_N es una matriz simétrica con respecto a su diagonal que contiene los factores de giro adecuadamente rotados

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \dots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (1.46)$$

la matriz \mathbf{W}_N es conocida como matriz de Fourier.

Note que (1.43) representa la mejor aproximación a los coeficientes de Fourier en el sentido de mínimos cuadrados. Es decir la DFT estima los coeficientes de la mejor señal periódica que se ajusta a la señal original en un sentido de mínimos cuadrados.

1.2.3. Respuesta en frecuencia de la DFT

La respuesta en frecuencia es útil para evaluar el desempeño de la DFT ante el contenido frecuencial de su entrada, para obtener la respuesta en frecuencia se analiza (1.42), de la cual se puede deducir que la DFT está formada por un conjunto de N filtros los cuales están dados por las hileras de \mathbf{W}_N , además dichas columnas se relacionan por modulaciones.

Para ilustrar lo anterior considere a una DFT de N puntos, la primera hilera de \mathbf{W}_N representa la respuesta impulsional del primer filtro (componente de CD⁴., y está dada por:

$$h_1[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, 1, \dots, N-1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (1.47)$$

cuya respuesta en frecuencia está dada por:

$$H_1(\omega) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega L}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j(\omega/2)(L-1)}. \quad (1.48)$$

Entonces, para la i -ésima columna de la DFT se tiene:

$$h_i[n] = h_1[n]W_N^{ni}, \quad (1.49)$$

mientras que a consecuencia de (1.49), en el dominio de la frecuencia la respuesta en frecuencia de $h_i[n]$ corresponde al desplazamiento de $H_1(\omega)$ a la i -ésima frecuencia armónica

$$H_i(\omega) = H_1(\omega - iW_N). \quad (1.50)$$

Las respuestas en frecuencia $H_i(\omega)$ para $i = 0, 1, \dots, (N-1)$ implícitas en la DFT son mostradas en la Fig. 1.2, note que existen infiltraciones en los estimados debido a que la respuesta en frecuencia del i -ésimo estimado solamente presenta ganancia unitaria alrededor de la i -ésima armónica y ganancias nulas en todas las demás, con lo cual se tiene que el estimado estará contaminado por filtraciones

⁴La componente de corriente directa (CD) de la señal $x(t)$ se define por $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$

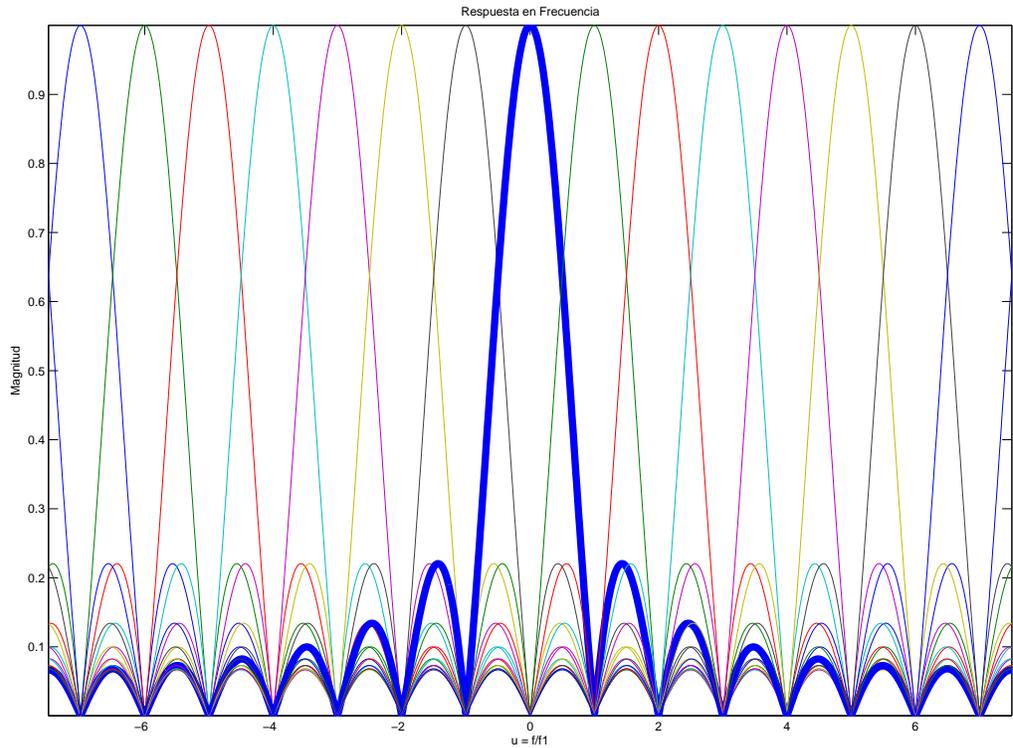


Figura 1.2: Respuesta en frecuencia del banco de filtros implícito en la DFT.

de componentes frecuenciales si la respuesta en frecuencia de la señal existe no solamente en las frecuencias armónicas, es decir si las condiciones de periodicidad no son cumplidas.

Con respecto al comportamiento de la DFT ante señales cuasi-periódicas (como la mostrada en la Fig. 1), se tiene que la infiltración de la j -ésima armónica en el estimado de la i -ésima armónica es en realidad la derivada de la primera. Esto se debe a la respuesta en frecuencia de la DFT, la cual presenta ganancias lineales alrededor de las armónicas que no son de interés, las cuales corresponden a diferenciadores de primer orden.

Capítulo 2

La transformada Taylor-Fourier

2.1. Introducción

La idea de este trabajo consiste en relajar las restricciones impuestas sobre las armónicas en el modelo de señal usado en la transformada de Fourier al representar el comportamiento de cada armónica dentro del intervalo de observación por una constante en amplitud y fase. En lugar de esto, cada armónica será modelada por una función temporal dada por un polinomio de Taylor de orden mayor a cero. El modelo expandido conduce a una mejora del análisis de Fourier al expandir la base de la FT. En esta forma, los coeficientes de la Transformada Taylor-Fourier incluirán, en adición al valor instantáneo de cada fluctuación armónica, sus primeras derivadas como en cualquier aproximación de Taylor. Entonces, el subespacio generado por la TFT será igual o mayor al generado por la base de la FT. En consecuencia, el error de aproximación de la TFT será siempre menor o igual al error de aproximación de la FT. Adicionalmente, los coeficientes de orden cero preservan su significado físico y una mejora con respecto a los clásicos coeficientes de Fourier, lo anterior se debe a que la TFT repele las infiltraciones de las derivadas de las fluctuaciones en sus coeficientes.

Una objeción, es el hecho de que los términos de Taylor $1, t, t^2, \dots, t^K$ no forman una base ortogonal, así que la base formada por dichos elementos es biortogonal. Esta objeción puede ser respondida al argumentar que la ortogonalidad no es una condición necesaria para la existencia de la aproximación en el sentido de mínimos cuadrados. La única condición necesaria es la independencia lineal de los vectores de la base [6]. Por otro lado, debido al hecho de manejar una serie de potencias, se

tiene que los elementos de la base se acercan a la dependencia lineal para un valor de K lo suficientemente grande, por lo cual no se puede garantizar que exista una solución para cualquier conjunto de parámetros [36].

En adición, si la solución existe, la respuesta en frecuencia del banco de filtros asociado al estimador es máximamente lisa alrededor de las frecuencias armónicas. La respuesta en frecuencia posee ganancias que corresponden a las ganancias de los diferenciadores ideales alrededor de la armónica de interés, y ganancias nulas en cada otra frecuencia armónica.

La contribución principal de este trabajo es el proveer una nueva transformación digital referida como transformada Taylor-Fourier. La cual proporciona un banco de filtros FIR mejorado para estimación armónica. Los nuevos filtros poseen ganancias lisas alrededor de la armónica de interés (lo cual implica una estimación sin distorsión en amplitud o fase de la misma), y mejor rechazo de la interferencia armónica (ganancia nula en cualquier otra armónica). Mediante esta transformación se obtienen nuevos coeficientes de Taylor en adición a las coeficientes de Fourier mejorados, los nuevos coeficientes corresponden a los estimados de las primeras derivadas de las armónicas dinámicas.

El resto del Capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la primera sección, el modelo de señal es descrito en sus versiones continua y discreta. Después, la respuesta en frecuencia del banco de filtros FIR asociado al estimador es caracterizada. Enseguida se ilustran algunas propiedades del estimador. Un ejemplo es presentado, el cual ilustra la mejora en los estimados con respecto a los estimados obtenidos vía FFT. Finalmente se presentan las conclusiones principales y limitaciones de la nueva técnica.

2.2. Modelo de señal

Sea $L_2(\mathcal{R})$ el espacio de Hilbert que contiene todas las funciones reales absolutamente integrables, y sea $x(t) \in L_2(\mathcal{R})$ una señal no necesariamente periódica, la cual está dada por:

$$x(t) = \sum_{h=0}^H a_h(t) \cos(2\pi h f_1 t + \varphi_h(t)) \quad (2.1)$$

o equivalentemente por:

$$x(t) = \sum_{h=-H}^H c_h(t) e^{j2\pi h f_1 t}, \quad (2.2)$$

donde f_1 representa la frecuencia fundamental, H el número máximo de armónicas incluidas en el modelo, $a_h(t)$ y $\varphi_h(t)$ las variaciones en amplitud y fase de la h -ésima armónica.

En una forma compacta $c_h(t) = a_h(t) e^{j\varphi_h(t)}$ puede ser definida como la envolvente compleja de cada armónica h . Nuestra hipótesis principal es que $c_h(t)$ es limitada en banda por ρ , con $\rho \ll f_1$. Note que si $\rho \rightarrow 0$ entonces $c_h(t) \rightarrow c_h$ con c_h representando un coeficiente complejo constante para toda h , y entonces (2.2) se convertirá en la clásica fórmula de síntesis de la serie de Fourier:

$$x_p(t) = \sum_{h=-H}^H c_h e^{j2\pi h f_1 t}, \quad (2.3)$$

con $x_p(t)$ siendo una señal periódica.

Las señales periódicas puras pueden ser representadas por (2.3) sin errores, con c_i para $i = -H, \dots, H$ representando a sus armónicas. Bajo estas condiciones el análisis de Fourier es apropiado. Pero cuando el sistema que genera la señal se encuentra bajo un transitorio, existen variaciones en amplitud y fase que ocasionan una pérdida de periodicidad en la señal. En este caso (2.3) deja de ser un modelo válido, y la estimación realizada será pobre.

Por otro lado, si las variaciones en amplitud y fase son lentas comparadas con la fundamental, el modelo expandido (2.1)-(2.2) es más apropiado, porque permite cambios lentos en la armónicas, dichos cambios dinámicos deben de ser lentos para que las armónicas puedan ser espectralmente definidas por un conjunto de señales paso banda con frecuencias centrales localizadas en múltiplos de la fundamental f_1 . Este enfoque abre las tradicionales líneas espectrales de las armónicas en estado estacionario a vecindades alrededor de cada frecuencia armónica.

2.2.1. Caso continuo

Nuestro problema consiste en encontrar buenas estimaciones de $c_h(t)$ usando las mediciones de $x(t)$ dentro de una ventana de observación $t \in [-\Delta, \Delta]$. Para alcanzar esta meta se propone el uso de una base, la cual genera un subespacio $\mathcal{S} \subset L_2(\mathcal{R})$, para construir la base se usan el siguiente conjunto de vectores

linealmente independientes:

$$\psi_{(k,h)}(t) = t^k e^{-j2\pi h f_1 t}, \quad \begin{array}{l} t \in [-\Delta, \Delta] \\ k = 0, 1, \dots, K \\ h = -H, \dots, H \end{array} \quad (2.4)$$

los cuales representan versiones moduladas de potencias enteras de t (i.e. una serie de McLaurin de orden K alrededor de cada armónica). Cualquier señal $\tilde{x}(t)$ perteneciente a \mathcal{S} puede ser expresada por una combinación lineal de los elementos de la base:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=0}^K \sum_{h=-H}^H \sigma_{(k,h)} t^k e^{-j2\pi h f_1 t}. \quad (2.5)$$

Se requiere encontrar la mejor aproximación $\tilde{x}(t)$ en \mathcal{S} a $x(t)$ en un sentido de mínimos cuadrados, dicha aproximación está dada por:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^K \sum_{h=-H}^H \hat{\sigma}_{(k,h)} t^k e^{-j2\pi h f_1 t}, \quad (2.6)$$

de (1.2) se tiene que los coeficientes óptimos están dados por:

$$\hat{\sigma}_{(k,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(k,h)}(t), x(t) \rangle, \quad (2.7)$$

donde $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ representa a los elementos de la base dual. La existencia de dichos elementos es garantizada por la independencia lineal de los elementos elegidos para construir la base. Los elementos de la base dual $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ pueden ser vistos como los únicos elementos en \mathcal{S} que garantizan satisfacer las restricciones de ortogonalidad.

$$\langle \psi_{(k,h)}(t), \tilde{\psi}_{(\ell,m)}(t) \rangle = \begin{cases} 1 & k = \ell, h = m \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \begin{array}{l} t \in [-\Delta, \Delta] \\ k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ h, m = -H, \dots, H. \end{array} \quad (2.8)$$

Note que el análisis de Fourier usa un subconjunto ortogonal (con $K=0$) de los elementos de la base, el cual representa correctamente solamente a señales periódicas. Entonces, el estimado de Fourier es la mejor aproximación periódica a $x(t)$ en el sentido de mínimos cuadrados. Visto de otra manera, Al incluir términos de Taylor no considerados en la base de Fourier, una mejor aproximación a $x(t)$ será alcanzada

$$\|x(t) - \hat{x}(t)\|_2 \leq \|x(t) - \hat{x}_F(t)\|_2, \quad (2.9)$$

con $\|\cdot\|_2$ representando la norma \mathcal{L}_2 . Note que la igualdad en (2.9) se cumple sólo para $x(t)$ periódica.

2.2.2. Caso discreto e implementación

Lo anterior es válido para el caso continuo. En el caso discreto los elementos de la base son la versión uniformemente muestreada de (2.4) con N muestras, es recomendable usar un número de muestras impar, ya que esto asegura una muestra en el centro del intervalo de observación, donde la aproximación de Taylor es realizada.

En el caso discreto la ecuación de síntesis puede ser vista como la versión muestreada de (2.6):

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^K \sum_{h=-H}^H \hat{\theta}_{(k,h)} T_s^k n^k e^{-j2\pi h f_1 n T_s}, \quad (2.10)$$

donde T_s es el periodo de muestreo.

Al igual que en la sección 1.1.5, la ecuación de síntesis puede ser representada también como una transformación lineal:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{B}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (2.11)$$

con $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathcal{C}^{(K+1)(2H+1)}$ representando un vector columna el cual contiene los coeficientes óptimos $\hat{\theta}_{(k,h)}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{C}^{N \times (K+1)(2H+1)}$ representando una matriz, la cual contiene en cada columna N muestras de cada elemento de la base discreta $\psi_{(k,h)}[n]$, y $\hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}^N$ siendo un vector columna con N muestras de la señal de entrada.

Por otro lado, al igual que en (2.7), la ecuación de análisis depende de la base dual [37, p. 47]:

$$\hat{\theta}_{(k,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(k,h)}[n], x[n] \rangle, \quad (2.12)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto punto discreto. Este conjunto de ecuaciones son dadas por la solución de las ecuaciones normales de la aproximación de mínimos cuadrados (Vea sección 1.1.3):

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{x}, \quad (2.13)$$

donde H denota hermitiana y $(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H = \mathbf{B}^\dagger$ es la matriz pseudoinversa.

Como se discutió en la sección 1.1.5, al comparar (2.12) y (2.13) se deduce que las hileras de la pseudoinversa \mathbf{B}^\dagger corresponden a los elementos de la base dual. Entonces el caso discreto puede ser implementado al calcular la pseudoinversa de \mathbf{B} , la cual esta formada por N muestras de cada vector de la base. Para garantizar la existencia de la pseudoinversa es necesario construir un sistema de ecuaciones

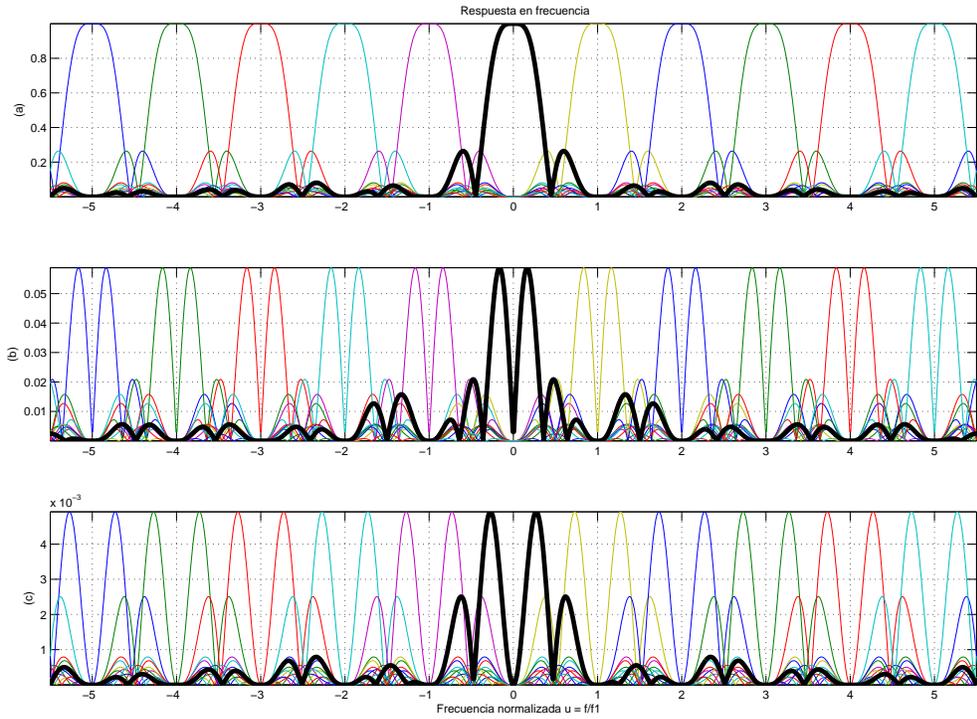


Figura 2.1: Respuesta en frecuencia del estimador TFT con $K = 2$, $H = 5$, y $N = 48$, en la cual la respuesta en frecuencia de los estimadores de orden cero se muestra en (a), la de los coeficientes de primer orden (b), y la de los coeficientes de segundo orden en (c).

sobredeterminado, para esto es necesario que la cantidad de muestras dentro de la ventana de observación cumpla con:

$$N \geq (2H + 1)(K + 1), \quad (2.14)$$

esta condición indica la longitud mínima del estimador, y debido a que el estimador está compuesto por un conjunto de filtros FIR, (2.14) indica el estimador de retardo mínimo. El retardo mínimo en muestras d_s está dado por:

$$d_s = \frac{(2H + 1)(K + 1)}{2}. \quad (2.15)$$

2.2.3. Interpretación de coeficientes

Un hecho importante de la transformación biortogonal presentada en la sección previa es el significado físico de sus coeficientes: El coeficiente $\hat{\sigma}_{(k,h)}$ representa la k -ésima derivada de la h -ésima armónica. Esto se debe a que (2.5) puede ser vista como una suma de series de McLaurin moduladas en cada frecuencia armónica.

En el caso continuo se tiene que:

$$\hat{\sigma}_{(k,h)} \simeq \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k c_h(t)}{dt^k} \right|_{t=0}, \quad (2.16)$$

y en el caso discreto¹:

$$\hat{\theta}_{(k,h)} \simeq \frac{T_s^k}{k!} \left. \frac{d^k c_h(t)}{dt^k} \right|_{t=0}. \quad (2.17)$$

Si la señal de entrada $x[n]$ se encuentra en el subespacio \mathcal{S} generado por el modelo de señal usado, entonces el error de aproximación será nulo, por lo cual (2.16) y (2.17) se convertirán en igualdades. Para el modelo de señal Taylor-Fourier, lo anterior se cumple cuando las armónicas presentan oscilaciones polinomiales de un orden menor o igual a K .

En la siguiente sección se muestra que la calidad de la aproximación (2.17) también puede ser cuantificada en términos del contenido frecuencial de cada armónica. Esto se debe a la respuesta frecuencia del estimador, que está dada por un banco de filtros FIR, los cuales presentan ganancias máximamente lisas (ver definición 2.1) alrededor de cada frecuencia armónica.

2.3. Bancos de filtros

El estimador propuesto está formado por un banco de $(K + 1)$ filtros FIR alrededor de cada frecuencia armónica. Las propiedades de los filtros dependen exclusivamente de los elementos de la base dual ya que sus respuestas impulsionales son versiones reflejadas de los mismos.

Nota 2.1 Sea $H_{(k,h)}(\omega)$ la respuesta en frecuencia del filtro que obtiene el coeficiente asociado a la k -ésima derivada de la h -ésima armónica, y sea $\tilde{\Psi}_{(k,h)}(\omega)$ el elemento de la base dual asociado al mismo coeficiente, entonces:

$$H_{(k,h)}(\omega) = \tilde{\Psi}_{(k,h)}(-\omega). \quad (2.18)$$

¹asumiendo un número de muestras N impar.

Prueba. La correlación implícita en (2.7) implica que las respuestas impulsionales de dichos filtros están dadas por la reflexión de los elementos de la base dual:

$$h_{(k,h)}(t) = \tilde{\psi}_{(k,h)}(-t), \quad (2.19)$$

donde $h_{(k,h)}(t)$ denota la respuesta impulsional del filtro asociado a la k -ésima derivada de la h -ésima armónica. En consecuencia, en el dominio de la frecuencia se cumple (2.18). \square

Los filtros resultantes tienen propiedades espectrales muy interesantes las cuales pueden apreciarse en la Fig. 2.1, la cual muestra la respuesta en frecuencia del banco de filtros para $K = 2$, $H = 5$ y $N = 48$ muestras.

Note que las respuestas en frecuencia del estimador de corriente directa ($h = 0$), la cuales aparecen resaltadas, se acercan a las respuestas en frecuencia ideales dentro de un vecindario alrededor de $\omega = 0$, además poseen ganancias nulas y planas alrededor de todas las frecuencias armónicas. Esto indica una extracción perfecta de las derivadas del componente analizado, y rechazo perfecto de los demás componentes armónicos, cuando la densidad espectral de las armónicas está confinada en dichos vecindarios.

También note que cada estimador armónico es una versión modulada del estimador de corriente directa, entonces, si es que el espectro de la señal está confinado en vecindarios centrados alrededor de cada frecuencia armónica, cada estimador armónico será un excelente extractor de las primeras derivadas de su propia envolvente compleja, y rechazará el resto. Una explicación de estas propiedades puede ser encontrada en las secciones 2.5-2.7.

2.4. Convergencia

Una de las principales preguntas es si la serie (2.6) converge o no a $x(t)$ al tomar más términos en cuenta en la misma. A continuación se presentan diferentes tipos de convergencia.

2.4.1. Convergencia media cuadrática

La convergencia media cuadrática es una de las formas más débiles de convergencia e indica que $\hat{x}(t)$ se aproxima a $x(t)$ en un sentido de mínimos

cuadrados, es decir que la norma del error al cuadrado se disminuye al tomar más términos de la serie en cuenta.

Teorema 2.1 *Sea $x(t)$ una señal absolutamente integrable, y sean $\hat{x}_{\kappa_1}(t)$ y $\hat{x}_{\kappa_2}(t)$ sus aproximaciones FT de orden κ_1 y κ_2 respectivamente, entonces si $\kappa_1 > \kappa_2$ se tiene que:*

$$\|x(t) - \hat{x}_{\kappa_1}(t)\|_2^2 \leq \|x(t) - \hat{x}_{\kappa_2}(t)\|_2^2 \quad (2.20)$$

Prueba. Debido a que las señales $\hat{x}_{\kappa_i}(t)$ para $i = 1, 2$ representan las mejores aproximaciones en el sentido de mínimos cuadrados, la señal $x(t)$ se puede representar en ambos casos por la suma de dos señales ortogonales:

$$x(t) = x_{\perp\kappa_1}(t) + \hat{x}_{\kappa_1}(t) = x_{\perp\kappa_2}(t) + \hat{x}_{\kappa_2}(t), \quad (2.21)$$

las cuales representan la señal proyectada en el espacio generado por cada una de las bases $\hat{x}_{\kappa_i}(t)$ y los errores de aproximación $x_{\perp\kappa_i}(t)$, los cuales cumplen con $x_{\perp\kappa_i}(t) \perp \hat{x}_{\kappa_i}(t)$ para $i = 1, 2$. De (2.21) se deriva que:

$$x_{\perp\kappa_2}(t) = x_{\perp\kappa_1}(t) + \hat{x}_{\kappa_1}(t) - \hat{x}_{\kappa_2}(t). \quad (2.22)$$

En formato matricial, es posible representar cada una de las estimaciones $\hat{x}_{\kappa_i}(t)$ en (2.22) por una combinación lineal de los elementos de cada base $\mathbf{B}_{\kappa_i} \hat{\phi}_{\kappa_i}$,

$$x_{\perp\kappa_2}(t) = x_{\perp\kappa_1}(t) + \mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1} - \mathbf{B}_{\kappa_2} \phi_{\kappa_2}, \quad (2.23)$$

donde \mathbf{B}_{κ_i} contiene los elementos de cada base en sus columnas y ϕ_{κ_i} contiene los coeficientes de cada combinación lineal, note que $\kappa_1 > \kappa_2 \rightarrow \mathbf{B}_{\kappa_2} \subset \mathbf{B}_{\kappa_1}$ por lo cual se deriva que:

$$x_{\perp\kappa_2}(t) = x_{\perp\kappa_1}(t) + \mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2}, \quad (2.24)$$

donde $\phi_{\kappa_1, \kappa_2} = \phi_{\kappa_1} - [\phi_{\kappa_2}^T \mid \mathbf{0} \dots \mathbf{0}]^T$, y además se tiene que el error de proyección cumple con $x_{\perp\kappa_1}(t) \perp \mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2}$ debido a que éste se encuentra dentro del espacio nulo de la matriz \mathbf{B}_{κ_1} . Por lo tanto al aplicar la norma L_2 :

$$\|x_{\perp\kappa_2}(t)\|_2^2 = \|x_{\perp\kappa_1}(t)\|_2^2 + \|\mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2}\|_2^2 \quad (2.25)$$

y ya que $\|\mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2}\|_2^2 \geq 0$ se tiene que

$$\|x_{\perp\kappa_1}(t)\|_2^2 \leq \|x_{\perp\kappa_2}(t)\|_2^2 \quad (2.26)$$

$$\|x(t) - \hat{x}_{\kappa_1}(t)\|_2^2 \leq \|x(t) - \hat{x}_{\kappa_2}(t)\|_2^2 \quad (2.27)$$

□

Corolario 2.1 *Note que para garantizar la igualdad se necesita que $x(t) \in \text{span}\{B_{\kappa_2}\}$*

$$\|\mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2}\|_2^2 = 0 \implies \mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2} = 0, \quad (2.28)$$

lo cual, debido a la independencia lineal de las columnas de \mathbf{B}_{κ_1} implica

$$\mathbf{B}_{\kappa_1} \phi_{\kappa_1, \kappa_2} = 0 \implies \phi_{\kappa_1, \kappa_2} = 0 \implies x(t) = \mathbf{B}_{\kappa_2} \phi_{\kappa_2}. \quad (2.29)$$

2.4.2. Convergencia puntual en $t = 0$

La convergencia puntual en el origen indica que la aproximación tiende a la señal real en el origen, a diferencia de la convergencia media cuadrática la convergencia puntual en el origen es consecuencia del modelo de señal usado.

Teorema 2.2 *Sea $x(t)$ la señal de entrada, la cual está dada por (2.1) con $c_h(t)$ representando la envolvente de cada armónica por una función pasa bajas, sea $\hat{x}(t)$ la estimación de Taylor Fourier de K -ésimo orden, sea $t \in [-\Delta, \Delta]$ el intervalo del tiempo en el cual están definidas $x(t)$ y $\hat{x}(t)$, y sea $\delta > 0$ una constante arbitrariamente pequeña, entonces:*

$$|x(t) - \hat{x}(t)|_{t=0} \leq \delta, \quad \text{para un orden } K \text{ lo suficientemente grande.} \quad (2.30)$$

Prueba.

El error de aproximación $x(t) - \hat{x}(t)$ está dado por:

$$x(t) - \hat{x}(t) = \sum_{h=-H}^H \sum_{k=0}^K (c_h(t) - \hat{\sigma}_{(k,h)} t^k) e^{-j\omega_h t}, \quad (2.31)$$

por lo tanto, el error en el centro del intervalo depende únicamente de la estimación de los coeficientes de orden cero:

$$|x(t) - \hat{x}(t)|_{t=0} \leq \sum_{h=-H}^H |c_h(0) - \hat{\sigma}_{(0,h)}|, \quad (2.32)$$

entonces, para garantizar que el error se puede reducir al aumentar el orden de Taylor es necesario analizar cada elemento de la sumatoria en (2.32).

Se analiza el proceso de estimación de cada coeficiente de orden cero de la serie, cada coeficiente se puede descomponer en dos términos, el valor verdadero y el error debido a la infiltración de los componentes no tomados en cuenta en el modelo.

Usando (2.1) en (2.7) se tiene que el coeficiente de orden cero de la h -ésima armónica está dado por:

$$\hat{\sigma}_{(0,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(0,h)}(t), \sum_{h=-H}^H c_h(t) e^{j2\pi h f_1 t} \rangle, \quad (2.33)$$

donde $c_h(t)$ es continuamente diferenciable $\forall h$ debido a que $c_h(t)$ es una señal de energía finita acotada en frecuencia, por lo tanto es posible representar cada $c_h(t)$ por una serie de McLaurin de la forma:

$$c_h(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_h^{(r)}(0)}{r!} t^r = \sum_{r=0}^K \frac{c_h^{(r)}(0)}{r!} t^r + R_{K+1}(t), \quad (2.34)$$

donde

$$R_{K+1}(t) = \sum_{r=K+1}^{\infty} \frac{c_h^{(r)}(0)}{r!} t^r = \frac{c_h^{(K+1)}(\beta)}{(K+1)!} t^{K+1} \quad (2.35)$$

con β representando a un punto arbitrario dentro del intervalo de observación $t \in [-\Delta, \Delta]$.

Al usar (2.34) en (2.33) se tiene que el coeficiente $\hat{\sigma}_{(0,h)}$ se da por:

$$\hat{\sigma}_{(0,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(0,h)}(t), \sum_{h=-H}^H \left(\sum_{r=0}^K \frac{c_h^{(r)}(0)}{r!} t^r + R_{K+1}(t) \right) e^{j2\pi h f_1 t} \rangle, \quad (2.36)$$

y usando la propiedad de linealidad del producto punto:

$$\hat{\sigma}_{(0,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(0,h)}(t), \sum_{h=-H}^H \sum_{r=0}^K \frac{c_h^{(r)}(0)}{r!} t^r e^{j2\pi h f_1 t} \rangle + \langle \tilde{\psi}_{(0,h)}(t), R_{K+1}(t) e^{j2\pi h f_1 t} \rangle, \quad (2.37)$$

el primer elemento de la suma en (2.37) corresponde al valor real debido a la propiedad de ortonormalidad de los elementos de la base dual, mientras que el elemento restante corresponde a la infiltración del error.

$$\hat{\sigma}_{(0,h)} = c_h(0) + \sum_{h=-H}^H \langle \tilde{\psi}_{(0,h)}(t), R_{K+1}(t) e^{j2\pi h f_1 t} \rangle. \quad (2.38)$$

Para garantizar que el coeficiente estimado converge al valor real, se debe de garantizar que la infiltración del residuo de la serie converge a cero conforme aumenta K . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se tiene que:

$$\hat{\sigma}_{(k,h)} - c_h(0) \leq \sum_{h=-H}^H \left\| \tilde{\psi}_{(0,h)}(t) \right\|_2 \|R_{K+1}(t)\|_2, \quad (2.39)$$

donde la norma del residuo se da por:

$$\|R_{K+1}(t)\|_2 = \int_{t=-\Delta}^{\Delta} \frac{c_h^{(K+1)}(\beta)t^{K+1}}{(K+1)!} dt \leq \int_{t=-\Delta}^{\Delta} \frac{M_h \Delta^{K+1}}{(K+1)!} dt = \frac{2M_h \Delta^{K+2}}{(K+1)!}. \quad (2.40)$$

Note que debido a que cada $c_h(t)$ es paso banda se garantiza $c_h^{(K+1)}(t) \leq M_h \leq \infty \forall t \in [-\Delta, \Delta]$ y $\forall h$ [38, p. 133-136], por lo tanto el error en la estimación del coeficiente $\hat{\sigma}_{(0,h)}$ está acotado por:

$$\hat{\sigma}_{(0,h)} - c_h(0) \leq \sum_{h=-H}^H \frac{2M_h \Delta^{K+2}}{(K+1)!} \left\| \tilde{\psi}_{(0,h)}(t) \right\|_2 := \kappa_h \leq \infty, \quad (2.41)$$

lo cual significa que la infiltración en el estimado se reduce al aumentar el orden de la serie.

Finalmente, retomando (2.32) se tiene que:

$$\left| x(t) - \hat{x}(t) \right|_{t=0} \leq \sum_{h=-H}^H |c_h(0) - \hat{\sigma}_{(0,h)}| \leq \sum_{h=-H}^H |\kappa_h| \leq \delta < \infty, \quad (2.42)$$

por lo tanto para un K lo suficientemente grande, el error en el centro del intervalo es tan pequeño como se desee. \square

2.5. Errores máximamente nulos

Una propiedad muy interesante del estimador propuesto es la presencia de errores máximamente lisos, lo cual significa que el espectro del error $E(\omega)$ es nulo en vecindarios alrededor de cada frecuencia armónica. Esta propiedad es de particular interés para nuestra aplicación, ya que garantiza errores de reconstrucción pequeños ante la presencia de señales cuasi-periódicas como las descritas en la Fig. 1.2.

Definición 2.1 *Una función $f(x)$ es máximamente lisa alrededor del punto $x = p$, sí y sólo sí:*

$$\left. \frac{d^r f(x)}{dx^r} \right|_{x=p} = 0, \quad r = 1, \dots, \kappa. \quad (2.43)$$

Note que si se anulan las primeras derivadas de la señal en cierto punto, entonces ésta presentará una planicie alrededor del punto en cuestión, además si la función es máximamente lisa y cumple $f(x)|_{x=p} = 0$, se dice que es máximamente nula. Antes de analizar la planicie del error se comienza por mostrar una versión modulada del teorema de los momentos [15] la cual será necesitada después.

Definición 2.2 Sean

$$m_{k,\omega_h} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k e^{-j\omega_h t} dt \quad (2.44)$$

los momentos de la modulación de $f(t)$, $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$, y $F^{(k)}(\omega_h)$ la k -ésima derivada de $F(\omega)$ en ω_h , entonces:

$$F^{(k)}(\omega_h) = (-j)^k m_{k,\omega_h}. \quad (2.45)$$

Lema 2.1 Sea $E(\omega)$ el error espectral de la aproximación Taylor-Fourier.

$$E(\omega) = X(\omega) - \tilde{X}(\omega), \quad (2.46)$$

entonces, se mantiene que $E(\omega)$ es máximamente liso alrededor de $\omega_h = 2\pi f_1 h$ para $h = -H, \dots, H$.

Prueba. En el dominio de la frecuencia el error es dado por:

$$E(\omega) = X(\omega) - \tilde{X}(\omega). \quad (2.47)$$

Para un error máximamente liso alrededor de cada armónica se tiene que es necesario:

$$\left. \frac{d^k E(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \left. \frac{d^k X(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} - \left. \frac{d^k \tilde{X}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = 0, \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, K \\ h = -H, \dots, H \end{array} \quad (2.48)$$

y usando el teorema de momentos y modulación (ver definición 2.2):

$$\left. \frac{d^k E(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = (-j)^k (m_{k,\omega_h} - \tilde{m}_{k,\omega_h}) = 0, \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, K \\ h = -H, \dots, H \end{array} \quad (2.49)$$

note que, para lograr una diferencia máximamente nula en $E(\omega)$ alrededor de $\omega = \omega_h$ para $h = -H, \dots, H$, se necesita igualar los primeros K momentos modulados alrededor de cada frecuencia armónica ω_h . Usando (2.44) en (2.49) se tiene que para garantizar una diferencia máximamente nula se necesita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k x(t) e^{j\omega_h t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^k \tilde{x}(t) e^{j\omega_h t} dt, \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, K \\ h = -H, \dots, H. \end{array} \quad (2.50)$$

Reemplazando el modelo de señal (2.5) en (2.50) y acomodando términos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k x(t) e^{j\omega_h t} dt = \sum_{m=0}^n \sum_{l=-H}^H \hat{\sigma}_{(m,l)} \int_{-\infty}^{\infty} t^{k+m} e^{-j(\omega_l - \omega_h)t} dt, \quad \begin{array}{l} k = 0, 1, \dots, K \\ h = -H, \dots, H, \end{array} \quad (2.51)$$

se tiene que los coeficientes que producen errores máximamente nulos en cada frecuencia armónica deben de cumplir (2.51). Esta condición corresponde a las ecuaciones normales de la solución de mínimos cuadrados al usar el modelo de señal propuesto, la misma fue desarrollada en (1.21). \square

Corolario 2.2 *Sea $x(t)$ la señal de entrada la cual está dada por (2.2) con $c_h(t)$ representando la envolvente de la h -ésima armónica por una función limitada en banda por β_h , sea $\hat{x}(t)$ su estimado de K -ésimo orden, y sea $\delta > 0$ una constante real positiva, entonces:*

$$|x(t) - \hat{x}(t)| < \delta, \quad \forall t \text{ y para un } \beta_h \text{ lo suficientemente pequeños} \quad (2.52)$$

Prueba. Del lema 2.1 se tiene que el error tiene bandas de ganancias nulas alrededor de cada armónica. Por otro lado el contenido frecuencial de la señal está confinado a las frecuencias $\omega_h \pm \beta_h$ para $h = -H, \dots, H$, por lo tanto para un $\max(\beta_h)$ lo suficientemente pequeño se asegura que el contenido frecuencial de la señal se localice dentro de las ganancias máximamente nulas del error. \square

2.6. Existencia de la solución

Claramente los resultados de la sección 2.4 indican que al aumentar el número de elementos de la base se genera una mejor aproximación de la señal de entrada. Por otra parte, para garantizar la existencia de los elementos de la base dual y de una solución al problema de minimización implícito en la TFT es necesario que los elementos de la base que soportan a la misma sean linealmente independientes los unos a los otros.

En el caso particular de la TFT, se tiene que los elementos de la base se acercan a la dependencia lineal al aumentar el número de elementos usado como base en la TFT.

Por ejemplo considere el conjunto de funciones $f_i(t) = t^i$ definidas sobre el intervalo $t \in [-1, 1]$ para $i = 0, 1, \dots, K$. Entonces para un K lo suficientemente grande se tiene que

$$f_{K-2}(t) \simeq f_K(t) \simeq \begin{cases} -1 & \text{para } t = -1 \\ 1 & \text{para } t = 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.53)$$

si K es impar, mientras que si K es par se tiene

$$f_{K-2}(t) \simeq f_K(t) \simeq \begin{cases} 1 & \text{para } t = -1 \\ 1 & \text{para } t = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.54)$$

Note que las funciones $f_i(t)$ son linealmente dependientes para ambos casos y no es posible generar una base biortogonal a partir de las mismas. Lo anterior puede ser generalizado al caso de la TFT, la Fig. 2.2 muestra el número de condición de la matriz de Gram² implícita en la solución de mínimos cuadrados de la TFT. Para obtener la gráfica se varían en orden de la serie K y el número de armónicas H manteniendo longitudes temporales mínimas de acuerdo a (2.14). Note que al aumentar el orden K o el número de armónicas H el número de condición aumenta. Lo anterior indica que existen problemas numéricos para invertir la matriz de Gram para un K o H lo suficientemente grande.

2.7. Respuesta en frecuencia

Esta sección explica el porqué la respuesta en frecuencia del banco de filtros usado como estimador alcanza propiedades espectrales tan interesantes.

Como fue mostrado en la Fig. 2.1, la respuesta en frecuencia del h -ésimo filtro presenta las ganancias de un diferenciador ideal alrededor de la frecuencia armónica de interés, y ganancias nulas alrededor del resto de las armónicas. A continuación se muestra que esta particularidad de la respuesta en frecuencia es una consecuencia de la solución de mínimos cuadrados y los elementos elegidos para construir la base de la TFT.

Teorema 2.3 Sean $\psi_{(k,h)}(t)$ los elementos de la base presentados en (2.4), $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ los elementos de la base dual, y $h_{(k,h)}(t) = \tilde{\psi}_{(k,h)}(-t)$ las respuestas impulsionales de los filtros. Sean $\Psi_{(k,h)}(\omega)$, $\tilde{\Psi}_{(k,h)}(\omega)$ y $H_{(k,h)}(\omega)$ sus transformadas de Fourier respectivamente. Entonces:

$$\left| \frac{d^k H_{(\ell,m)}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & k = \ell, h = m \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.55)$$

²El número de condición de una matriz cuadrada indica el radio entre los valores singulares máximo y mínimo de la matriz. Un número de condición alto indica problemas numéricos al invertir la matriz relacionada a este número.

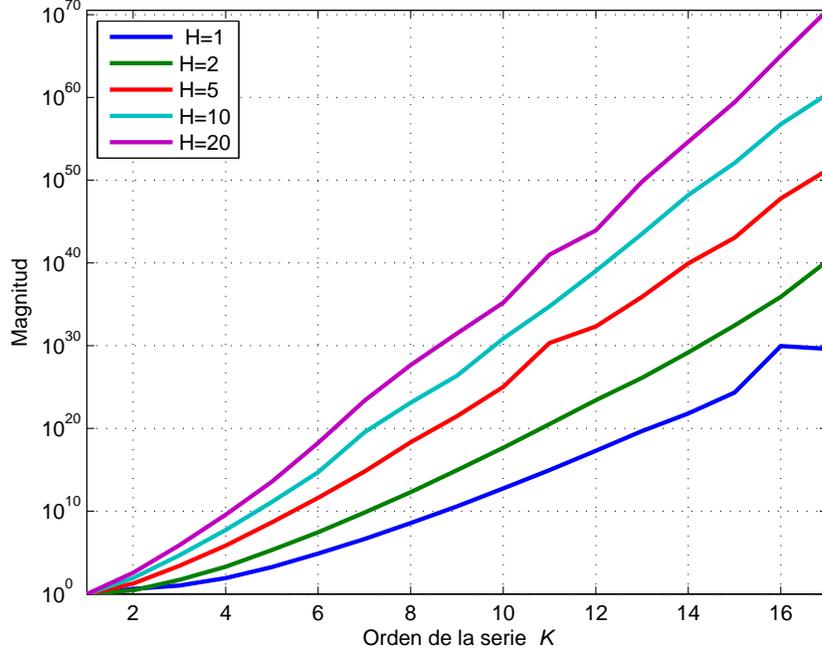


Figura 2.2: Aumento del número de condición al aumentar la cantidad de elementos de la base mediante el parámetro K o H .

Prueba. Para probar (2.55), es posible usar la definición de los elementos que forman la base de la TFT (2.4), en las condiciones de biortogonalidad implícitas en el problema de mínimos cuadrados (2.8):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{(\ell,m)}(t) t^k e^{j2\pi h f_1 t} dt = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h & k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ 0 & \text{en otro caso,} & h, m = -H, \dots, H. \end{cases} \quad (2.56)$$

A partir del teorema de modulación y del teorema de los momentos (ver definición 2.2), se tiene que es posible expresar (2.56) por:

$$\left| \frac{d^k \tilde{\Psi}_{(\ell,m)}(-\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h & k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ 0 & \text{en otro caso,} & h, m = -H, \dots, H, \end{cases} \quad (2.57)$$

y usando (2.18), se tiene que la respuesta en frecuencia del ℓ -ésimo filtro diferenciador de la m -ésima armónica debe de cumplir con:

$$\left| \frac{d^k H_{(\ell,m)}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h & k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ 0 & \text{en otro caso,} & h, m = -H, \dots, H. \end{cases} \quad (2.58)$$

□

En (2.58) se representa un conjunto de condiciones máximamente lisas [39]-[40], las cuales indican que la respuesta en frecuencia de los filtros asociados a cierta frecuencia armónica exhiben la ganancia de un diferenciador ideal alrededor de esta frecuencia en particular, y unas ganancias máximamente nulas alrededor del resto de las armónicas. Este comportamiento es mostrado en la Fig. 2.1.

2.8. Ceros de la respuesta en frecuencia

La condición (2.55) establece que la respuesta en frecuencia del k -ésimo diferenciador de la h -ésima armónica debe de tener k ceros en la frecuencia armónica analizada, con lo cual se genera la ganancia ideal en la h -ésima armónica. Además de tener $K + 1$ ceros en cada una de las otras armónicas, lo cual genera bandas de rechazo máximamente lisas alrededor de dichas armónicas [29]. De esta manera es posible expresar la respuesta en frecuencia del estimador de la manera siguiente:

$$|H_{(k,h)}(\omega)| = |(\omega - \omega_h)|^k \prod_{\ell \neq h} |(\omega - \omega_\ell)|^{K+1} |R(\omega)| \quad (2.59)$$

donde $R(\omega)$ es un polinomio libre el cual tiene $N - (h - 1)(K + 1) - k$ raíces.

Note que la condición (2.59) es también válida para la DFT, en este caso la respuesta en frecuencia del estimador de la h -ésima armónica está dada por una función seno cardenal, la cual cumple con:

$$|F_h(\omega)| = \prod_{\ell \neq h} |(\omega - \omega_\ell)| |R(\omega)| \quad (2.60)$$

La respuesta en frecuencia del estimador de DC usado en la DFT ($K = 0$, $H = 2$, $N = 15$ muestras) y de la TFT ($K = 2$, $H = 2$, $N = 15$ muestras) son comparadas en la Fig. 2.3. Note que la DFT posee solamente un cero en cada armónica debido a (2.59), mientras que la TFT posee tres ceros en cada armónica. Por esta razón los filtros usados por la TFT tienen bandas frecuenciales nulas alrededor de las frecuencias armónicas no analizadas y no sólo un punto como en el caso de la DFT. Los filtros usados en la TFT no pueden ser vistos como versiones trasladadas en frecuencia de los filtros usados en estimación fasorial dados en [13]-[14]. La inserción de nuevos elementos a la transformación produce las respuestas con bandas nulas en cada frecuencia armónica que no sea la de interés.

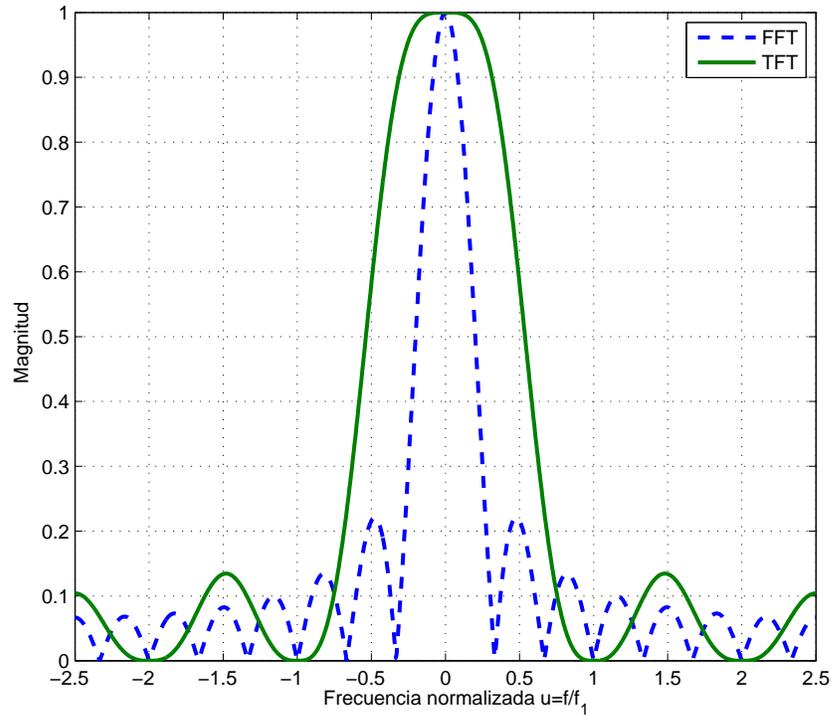


Figura 2.3: La respuesta en frecuencia del estimador de DC del algoritmo TFT posee tres ceros cada frecuencia armónica en lugar de sólo uno como en el caso del algoritmo FT. En este último caso, la presencia de un sólo cero corresponde a una ganancia de un derivador de primer orden alrededor de cada frecuencia armónica.

Note en la Fig. 2.3 que los lóbulos laterales aumentan con respecto a la DFT, pero la supresión armónica prevalecerá sobre la amplificación sub-armónica si es que el contenido frecuencial de la señal está confinado en vecindarios alrededor de las frecuencias armónicas. En adición es posible reducir la ganancia sub-armónica del estimador TFT usando ventanas para ponderar el criterio de mínimos cuadrados [39]-[40].

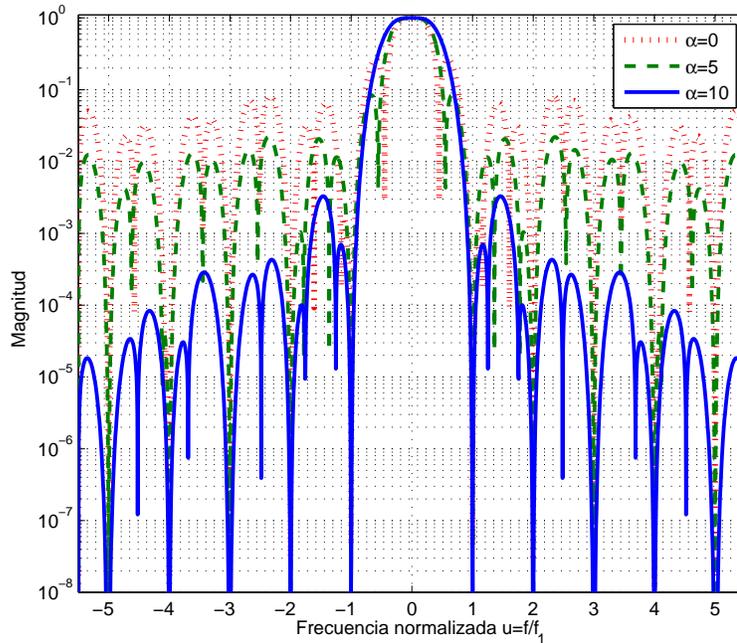


Figura 2.4: Reducción de lóbulos laterales en el estimador de DC con diferentes ventanas de Kaiser como factores de ponderación en la solución de mínimos cuadrados.

2.9. Control de lóbulos laterales

En adición a la reducción en la filtración armónica alcanzada con la TFT, la infiltración de componentes sub-armónicas puede ser también reducida por el uso de ventanas como factores de peso en el error de mínimos cuadrados ponderados (Weighted Least Squares, WLS) [14]. Esta técnica reduce el nivel de lóbulos laterales en la banda de rechazo de los filtros debido a que la respuesta en frecuencia del estimador está formada por una combinación lineal del espectro de la ventana usada y sus derivadas [39]-[40]. Entonces una ventana con bajo nivel de lóbulos laterales producirá un estimador con bajos lóbulos laterales en la banda de rechazo. Es importante recalcar que el estimador hereda todas las propiedades espectrales de la ventana y no sólo el nivel de lóbulos laterales, lo cual implica el bien conocido compromiso entre banda de transición y lóbulos laterales presente en las técnicas de ventaneo.

La Fig. 2.4 muestra un ejemplo de diseño, en el cual la ventana de Kaiser es usada, con un parámetro de diseño $\alpha = 0, 5, 10$. Note que el uso de la ventana

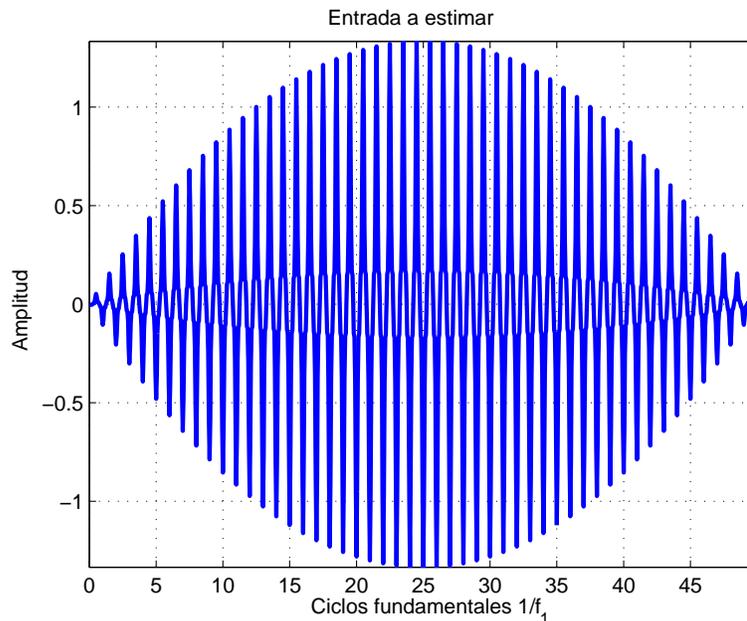


Figura 2.5: Señal de entrada $s(t)$.

preserva las ganancias máximamente lisas alrededor de las frecuencias armónicas y reduce la amplitud de los lóbulos laterales. Note también que la reducción en los lóbulos laterales implica un aumento en el ancho de banda del lóbulo principal.

2.10. Ejemplo teórico

El propósito de este ejemplo es mostrar los errores de estimación en las armónicas de una señal conocida. Sea

$$s(t) = a(t) \left(\sum_{h=0}^{\infty} c_h \cos(2\pi h f_1 t) \right) \quad (2.61)$$

la señal de entrada al estimador, con $f_1 = 50$ Hz, y coeficientes de Fourier ($c_1 = 1$, $c_3 = .4$, and $c_5 = .2$), donde $a(t)$ representa la oscilación en amplitud dada por el siguiente polinomio de segundo orden:

$$a(t) = \frac{at^2 + bt + c}{d}, \quad (2.62)$$

con coeficientes $a = 1$, $b = -1000$, $c = 1$ y $d = 2,5 \times 10^5$. La señal digital correspondiente es obtenida al muestrear (2.61) con 20 muestras por ciclo $1/f_1$ y es mostrada en la Fig. 2.5.

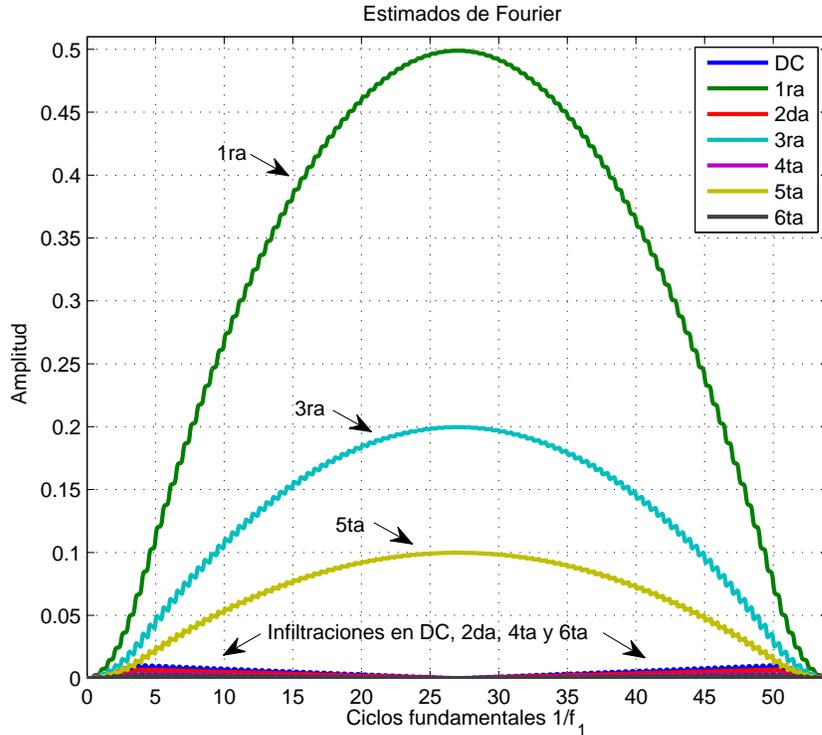


Figura 2.6: Coeficientes estimados mediante FFT.

Las armónicas son estimadas con estimadores basados en la FFT ($K = 0$) y TFT ($K = 3$), ambos de 4 ciclos de longitud. Los resultados de la estimación de los coeficientes de Fourier son mostrados en la Fig. 2.6 y la Fig. 2.7, respectivamente. Note que la FFT produce estimados más distorsionados de los coeficientes de Fourier, lo cual se debe a la infiltración de los componentes de primer y segundo orden de la evolución $a(t)$. Los estimados más suaves son alcanzados en el centro, donde la evolución parabólica de $a(t)$ alcanza las condiciones de estado estable impuestas en el modelo de Fourier. En adición la FFT produce fantasmas en las armónicas pares, dichas infiltraciones están dadas por funciones lineales y son debidas a la respuesta en frecuencia en forma de seno cardinal de los filtros usados en la FFT, la cual posee ganancias lineales en todas las armónicas con excepción de la de interés, lo que corresponde a diferenciadores de primer orden de las armónicas adyacentes. Entonces cada filtración en el estimado de la FFT no sólo está corrompida por los propios componentes de la armónica de interés, sino que también es corrompida por la primera derivada de todas las demás armónicas. Es un hecho que más que filtros, la FFT está compuesta por una colección de derivadores de las armónicas vecinas.

Los estimados de orden cero ($k = 0$) de la TFT son mostrados en la Fig. 2.7, estos son más limpios que los de la FFT. Lo anterior se cumple no sólo para los estimados de orden cero, también se cumple para los estimados de los coeficientes de Taylor. En la Fig. 2.8 se muestra que las derivadas estimadas se dan por polinomios de primer orden como era de esperarse.

Se reconstruye la señal estimada usando las ecuaciones de síntesis con ambos estimados. Como es de esperarse, el error de aproximación de la TFT es menor que el de la FFT. Esto es debido a que la TFT usa una expansión de la base de Fourier, la cual es mucho más adecuada para cambios dinámicos de las armónicas dentro del intervalo de observación. Además, se obtienen estos resultados debido a que en este caso la señal de entrada se encuentra dentro del subespacio generado por la TFT. Distintos ejemplos con señales reales son mostrados en el Capítulo 4.

Para evaluar el desempeño global de ambos estimadores se usa el error de mínimos cuadrados normalizado (Normalized Root Mean Square Error, NRMSE) como función de costo, el cual está definido por:

$$\text{NRMSE} = \sqrt{\frac{\sum_n |\hat{s}(n) - s(n)|^2}{\sum_n |s(n)|^2}}, \quad n \in \mathcal{P}, \quad (2.63)$$

donde \mathcal{P} es el conjunto de todos los estimados realizados con la memoria del filtro (*buffer*) llena. La tabla 4.1 muestra el NRMSE de los estimados de los coeficientes de Fourier obtenidos con ambos estimadores. Los errores de estimación en los coeficientes de Fourier son ilustrados para ambos casos en la Fig. 2.9.

A partir de esta evidencia es posible concluir que la TFT conlleva a una mejor estimación en comparación a la realizada con la FFT. Lo cual se debe a una mejor separación del contenido armónico de la señal de entrada, lo anterior es una consecuencia del modelo de señal utilizado, ya que la TFT repele las componentes que son infiltradas a la FFT gracias a su respuesta en frecuencia plana alrededor de las frecuencias armónicas. Por supuesto, bajo condiciones estacionarias, ambos estimadores producen los mismos resultados.

Tabla 2.1: NRMSE para los coeficientes de Fourier y Taylor Fourier.

Dynamic harmonic	FT	TFT
$c_1^{(0)}(t)$	$2,68 \times 10^{-5}$	$2,81 \times 10^{-12}$
$c_3^{(0)}(t)$	$1,03 \times 10^{-4}$	$6,71 \times 10^{-12}$
$c_5^{(0)}(t)$	$1,78 \times 10^{-4}$	$3,59 \times 10^{-17}$

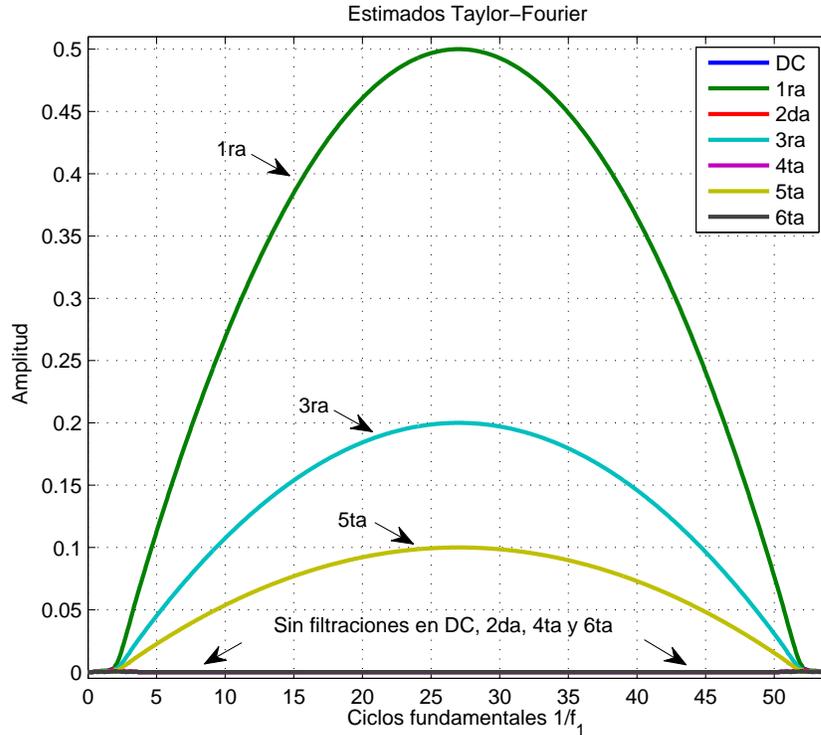


Figura 2.7: Coeficientes de orden cero estimados mediante TFFT.

2.11. Discusión

La mayoría de los libros de texto hacen una presentación engañosa de la DFT al no presentarla como una aproximación, ya que no es común presentar a los coeficientes de la DFT como estimados con la notación característica \hat{c} . Entonces se induce a creer que los coeficientes son exactos, o a olvidar la condición de periodicidad necesaria para su exactitud. Pero el hecho es que el modelo de señal empleado en la DFT no permite fluctuaciones en la señal, y sus estimados son infiltrados por las derivadas de esas fluctuaciones.

El estimador TFFT propuesto reduce la interferencia armónica y nos provee estimaciones que pueden ser usadas en monitoreo, detección de transitorios, compresión de señal o aplicaciones de control automático.

Los documentos citados proceden de campos como vibraciones mecánicas, o sistemas eléctricos, pero existen muchas aplicaciones en potencia para la TFFT: El conjunto entero de las señales *cuasi-periódicas*, señales de este tipo se pueden encontrar en procesamiento de voz, sismología, análisis de fluctuaciones o en sistemas

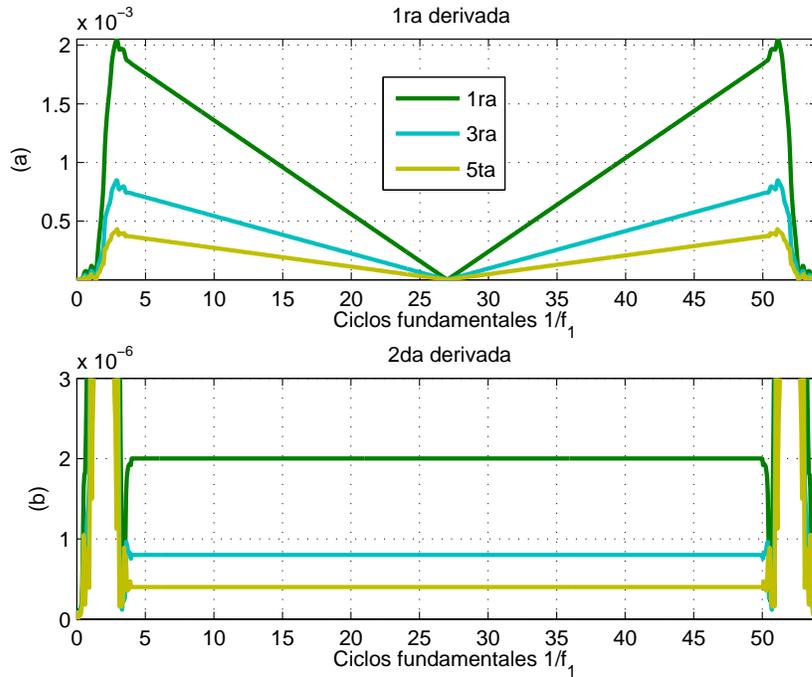


Figura 2.8: Coeficientes de primer y segundo orden estimados mediante TFT.

de transmisiones digitales, en los que cada canal se comporta como una armónica independiente.

A pesar de que el subespacio generado por la TFT permite desviaciones en frecuencia de la señal, igualmente sufre de errores cuando las variaciones en la frecuencia fundamental son lo suficientemente grandes. De todas formas, debido a que el estimado de frecuencia se encuentra disponible, los filtros pueden ser re-centrados a la frecuencia fundamental estimada (vea apéndice C). En adición existen un importante número de limitaciones que deben de ser tomadas en cuenta: la solución se vuelve mal condicionada cuando K aumenta, la elección de una ventana para ponderar el criterio de error puede incrementar la sensibilidad al ruido a través del lóbulo principal, y los componentes sub-armónicos, si se encuentran presentes, se pueden infiltrar en la estimación.

Finalmente, esta nueva herramienta digital tiene una estructura útil para implementar la misma de manera eficiente, ya que posee mucha simetría y periodicidad, así que muchos algoritmos (incluyendo a la FFT) pueden ser usados

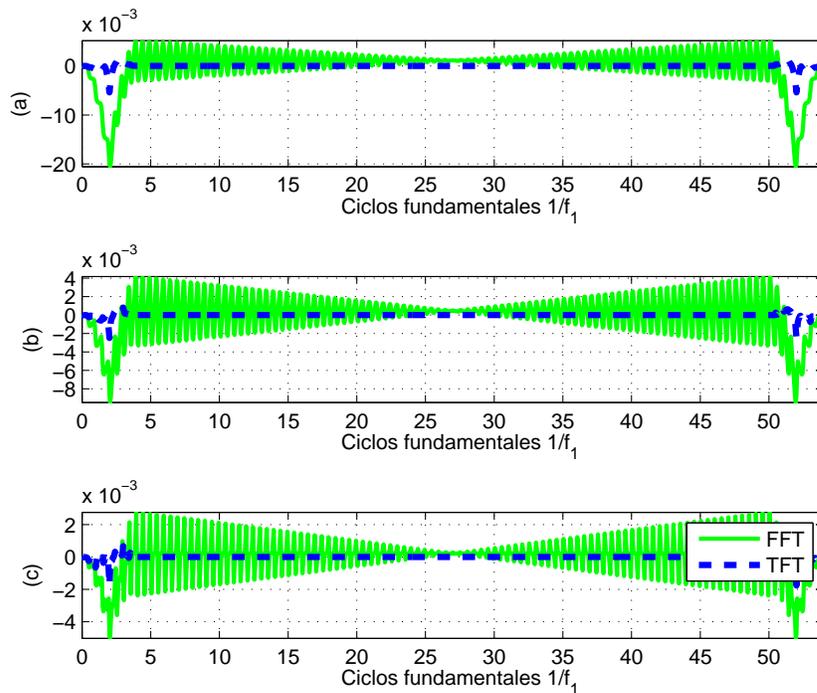


Figura 2.9: Errores en los estimados de orden cero para FT y TFT: (a) error en c_1 , (b) error en c_3 , y (c) error en c_5 .

para acelerar el cómputo de la misma.

2.12. Conclusiones

El estimador de armónicas dinámicas denominado TFT fue presentado como una extensión de la FFT. Dicho estimador puede ser visto como un banco de filtros de fase lineal, el cual se encuentra formado por un conjunto de filtros máximamente lisos. El estimador propuesto produce menor distorsión y menor interferencia armónica que los estimadores basados en FT. Cada filtro posee una ganancia idéntica a la del diferenciador ideal correspondiente dentro de un vecindario alrededor de la frecuencia armónica de interés, y ganancias máximamente nulas alrededor de las armónicas restantes.

Los coeficientes de la TFT representan buenas estimaciones de la envolvente compleja de la armónica y sus derivadas cuando las armónicas están descritas por señales pasa-banda, es decir cuando cada armónica posee un contenido espectral confinado en vecindarios alrededor de su frecuencia armónica correspondiente, donde

las ganancias máximamente lisas del estimador se encuentran. Esta información es muy útil para monitoreo, compresión de datos y aplicaciones de control.

El desempeño del estimador es evaluado a través de un ejemplo, el cual muestra una reducción en el error NRMSE en la estimación de sus coeficientes por un factor de 10^{-7} con respecto a la FT. Esta mejora es obtenida debido a que la señal pertenece al subespacio generado por la TFT, de hecho el error presente en la DFT es un error de cómputo debido a la truncación generada por el software. Ejemplos con señales reales (fuera de ambos subespacios) son mostrados en el Capítulo 4.

En general, se puede decir que la reconstrucción mediante la TFT es más adecuada que la reconstrucción usada por Fourier para este tipo de señales. Note que la FT nunca tendrá un error de reconstrucción menor a la TFT, simplemente porque el subespacio generado por la FT es contenido en el subespacio de la TFT.

Capítulo 3

Reducción del costo computacional

3.1. Introducción

Esta sección se enfoca en reducir el costo computacional necesario para usar el estimador Taylor-Fourier, cuya metodología es presentada en las secciones precedentes.

Para usar el estimador se requieren dos etapas, la primera de diseño, en la cual se obtiene el estimador al resolver las ecuaciones normales de mínimos cuadrados (*Least Squares*, LS) para el modelo de señal propuesto, y la segunda de implementación, en la cual se realiza el proceso de filtrado entre los filtros FIR de fase lineal resultantes y la señal de entrada.

Es importante recalcar que la etapa de diseño presenta la mayor carga computacional ya que es necesario obtener la matriz pseudoinversa \mathbf{B}^\dagger . Esta etapa sólo se tiene que calcular una vez, mientras que la etapa de implementación se realiza una vez para cada instante estimado.

En resumen: la etapa de diseño es la encargada de mezclar todas las restricciones del modelo de señal para obtener el banco de filtros FIR de fase lineal, mientras que la implementación es la encargada de implementar el(los) filtro(s) FIR de fase lineal asociados con el(los) estimado(s) de interés.

Debido a que el tema de implementación de filtros FIR es un tema bien conocido [15], [35], los métodos presentados en este Capítulo se enfocan en reducir la carga computacional necesaria para realizar la etapa de diseño, es decir reducir en número de operaciones necesarias para obtener una o más filas de \mathbf{B}^\dagger . A continuación se

¹La cual contiene las respuestas impulsionales del estimador en sus hileras (Vea sección 2.3).

presentan diferentes métodos, los cuales hacen uso de diferentes técnicas para agilizar el proceso de obtención del estimador. Dichas técnicas son: la respuesta en frecuencia, el uso de simetrías en el modelo de señal, las condiciones máximamente lisas de los filtros y la FFT.

3.2. Diseño del estimador

Claramente la etapa que requiere un mayor esfuerzo computacional es la etapa de diseño, ya que es necesario obtener la pseudoinversa de una matriz de grandes dimensiones. Y es que, aunque este proceso se realiza una única vez y fuera de línea, agilizarlo es benéfico para disminuir la carga computacional.

En el Capítulo anterior la matriz pseudoinversa fue usada para obtener el estimador, el mismo está formado por el banco de filtros que aporta la mejor solución en el sentido de LS al problema propuesto. Pero debido a que la pseudoinversa calcula todo el banco de filtros a la vez, su uso no es conveniente si solamente se tiene interés en estimar ciertos coeficientes, es decir cuando solamente se tiene interés en calcular ciertas respuestas impulsionales, mas no todas.

Recuerde que en el caso discreto el estimador óptimo en el sentido de mínimos cuadrados está dado por:

$$\hat{\theta}_{(k,h)} = \langle \tilde{\psi}_{(k,h)}(n), x(n) \rangle, \quad (3.1)$$

donde $\tilde{\psi}_{(k,h)}(n)$ representa a los elementos de la base dual. En el caso discreto dicha solución corresponde a los renglones de la matriz pseudoinversa $\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$, con \mathbf{B} representando en sus columnas la versión discreta de los elementos de la base $\psi_{(k,h)}(n)$.

Entonces, para obtener la solución en el caso discreto es necesario calcular la matriz \mathbf{B}^\dagger . De especial interés es el caso de longitud mínima. Recuerde que la longitud del filtro está dada por (2.14), la cual es repetida aquí para facilitar la lectura:

$$N \geq (K + 1)\bar{H}, \quad (3.2)$$

donde $\bar{H} = 2H + 1$. Cuando la igualdad en (3.2) se cumple la longitud de los filtros es minimizada, lo que implica una carga computacional y a un retraso mínimo. Aunque es posible elaborar bancos de longitud N par, el hecho de que la longitud N sea impar es importante, ya que se de esta manera se asegura la relación que existe entre los coeficientes estimados y las derivadas de las armónicas dinámicas evaluadas en el

centro del intervalo de observación [41]. Llamaremos N_i a la longitud impar mínima, la cual se define como el menor número impar que cumple con (3.2).

Al obtener \mathbf{B}^\dagger se obtienen todas las respuestas impulsionales a la vez, lo cual no es necesario cuando sólo se requiere estimar algunas armónicas de la señal, pero no todas. En lo que sigue se calculan solamente los elementos de interés al implementar estimadores con una longitud impar mínima N_i , con lo cual la carga computacional necesaria para encontrar los coeficientes estimados es minimizada, además los filtros resultantes tendrán retrasos mínimos o casi mínimos.

Propiedades de simetría del estimador:

El estimador está conformado por un conjunto de $K + 1$ filtros alrededor de cada armónica. El hecho de que dichos filtros sean de naturaleza FIR de fase lineal indica que sus respuestas impulsionales tienen propiedades de simetría, las cuales pueden aprovecharse para agilizar los cálculos de los mismos, dichas propiedades se revisan a continuación.

Lema 3.1 *Los diferenciadores de orden par, poseen respuestas impulsionales con parte real simétrica y parte imaginaria antisimétrica, es decir: el r -ésimo coeficiente de dichas respuestas impulsionales cumple:*

$$c_{-r} = c_r^*, \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.3)$$

donde $*$ indica complejo conjugado. Mientras que los diferenciadores asociados a órdenes impares poseen respuestas impulsionales con parte real antisimétrica y parte imaginaria simétrica.

$$c_{-r} = -c_r^*, \quad r = 0, 1, \dots \quad (3.4)$$

Prueba. Las filas de \mathbf{B}^\dagger poseen simetría debido a la simetría de las columnas de \mathbf{B} (elementos usados como modelo de señal). Entonces los filtros asociados a cada diferenciador son de naturaleza FIR de fase lineal, por lo tanto poseen respuestas impulsionales con simetría par o impar.

El hecho de que las respuestas impulsionales asociadas a diferenciadores de orden par sean pares (3.3) y las asociadas a ordenes impares sean impares (3.4) se puede deducir de (2.8), la cual es repetida a continuación para facilitar la lectura:

$$\langle \psi_{(k,h)}(t), \tilde{\psi}_{(\ell,m)}(t) \rangle = \begin{cases} 1 & k = \ell, h = m & k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ 0 & \text{en otro caso,} & h, m = -H, \dots, H. \end{cases} \quad (3.5)$$

Suponiendo una potencia k par, es decir: $k = 2\lambda$ donde $\lambda \in \mathcal{Z}$, entonces $\psi_{(k,h)}(t) = t^{2\lambda} e^{j\omega_h t}$ presenta simetría par en su parte real e impar en su parte imaginaria, es decir:

$$\psi_{(k,h)}(t) = \psi_{(k,h)}^*(-t), \quad \text{para } k \text{ par.} \quad (3.6)$$

Con respecto a las propiedades de simetría del elemento dual $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$, para saber si la simetría presente en $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ es par o impar es posible usar (3.5), note que para garantizar la igualdad:

$$\langle \psi_{(k,h)}(t), \tilde{\psi}_{(k,h)}(t) \rangle = 1 \quad (3.7)$$

se requiere que $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t)$ tenga parte real par y parte imaginaria impar. Lo anterior también procede para el caso de k impar. \square

Nota 3.1 Debido a la antisimetría de los filtros con respecto a $\omega = 0$ los coeficientes de las respuestas impulsionales $c_n \in \mathcal{C}$, solamente en los casos particulares del filtro pasa bajas y pasa altas los cuales si tienen simetría con respecto a $\omega = 0$ se tiene que $c_n \in \mathcal{R}$.

Prueba. Para el caso pasa banda se tiene que $\psi_{(k,h)}(t) \in \mathcal{C}$, entonces para cumplir (3.5) se necesita que $\tilde{\psi}_{(k,h)}(t) \in \mathcal{C}$. Un argumento semejante puede ser usado para el caso pasa bajas y pasa altas en el cual $\psi_{(k,h)}(t) \in \mathcal{R}$. \square

Las propiedades presentadas pueden ser de utilidad en el diseño de algoritmos eficientes que permitan disminuir el costo computacional, por ejemplo no es necesario calcular todos los elementos de la respuesta impulsional del filtro, debido a las propiedades de simetría sólo es necesario calcular la mitad de la respuesta impulsional, para después encontrar la mitad restante por simetría.

Además debido a que los filtros del banco están relacionados por modulaciones de un mismo filtro, es posible usar como prototipo el filtro de CD (caso más sencillo debido a que sus coeficientes pertenecen a los reales), para después encontrar los coeficientes de cualquier filtro del banco mediante modulación del filtro de CD.

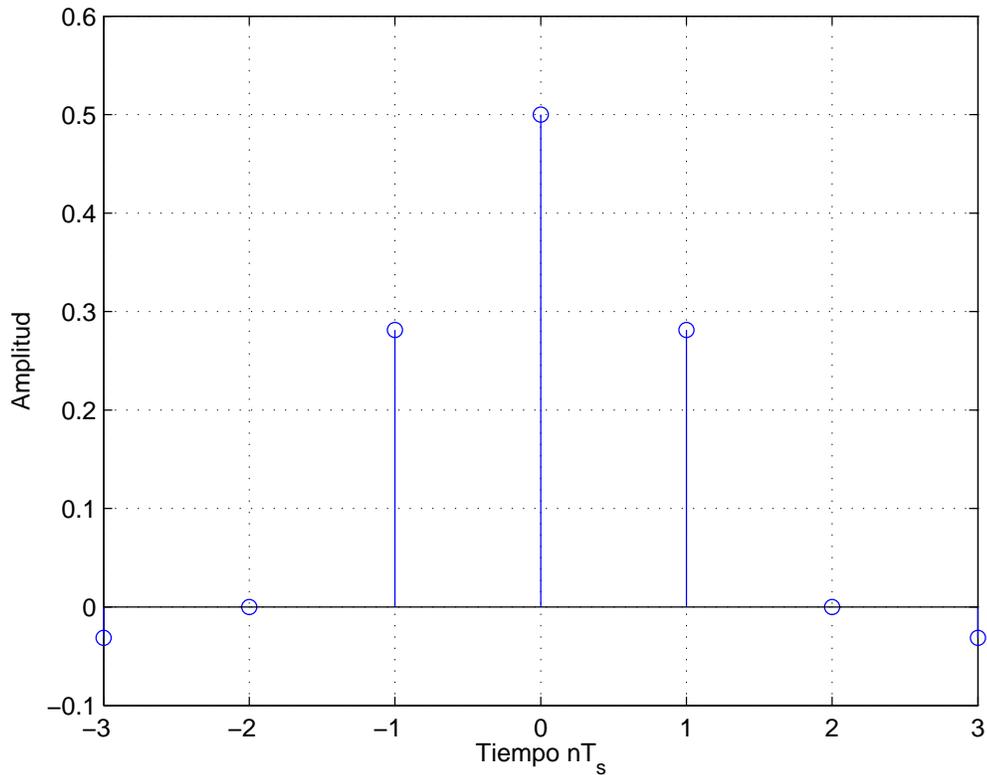


Figura 3.1: Respuestas impulsionales del filtro pasa bajas.

3.2.1. Obtención del estimador a partir del dominio de la frecuencia

Es posible obtener las respuestas impulsiones de los filtros (elementos de la base dual) utilizando un enfoque distinto, en el cual sólo se calcula la respuesta impulsional de interés. Lo anterior implica una menor carga computacional, ya que no es necesario calcular toda la pseudoinversa \mathbf{B}^\dagger cuando sólo se requiere una hilera de la misma.

A continuación se presentan dos metodologías, ambas basadas en la mismas ideas:

- Las respuestas impulsionales están relacionadas por modulaciones de una respuesta impulsional prototipo (respuesta impulsional de CD)
- Las respuestas impulsionales poseen simetría/antisimetría en el dominio temporal.

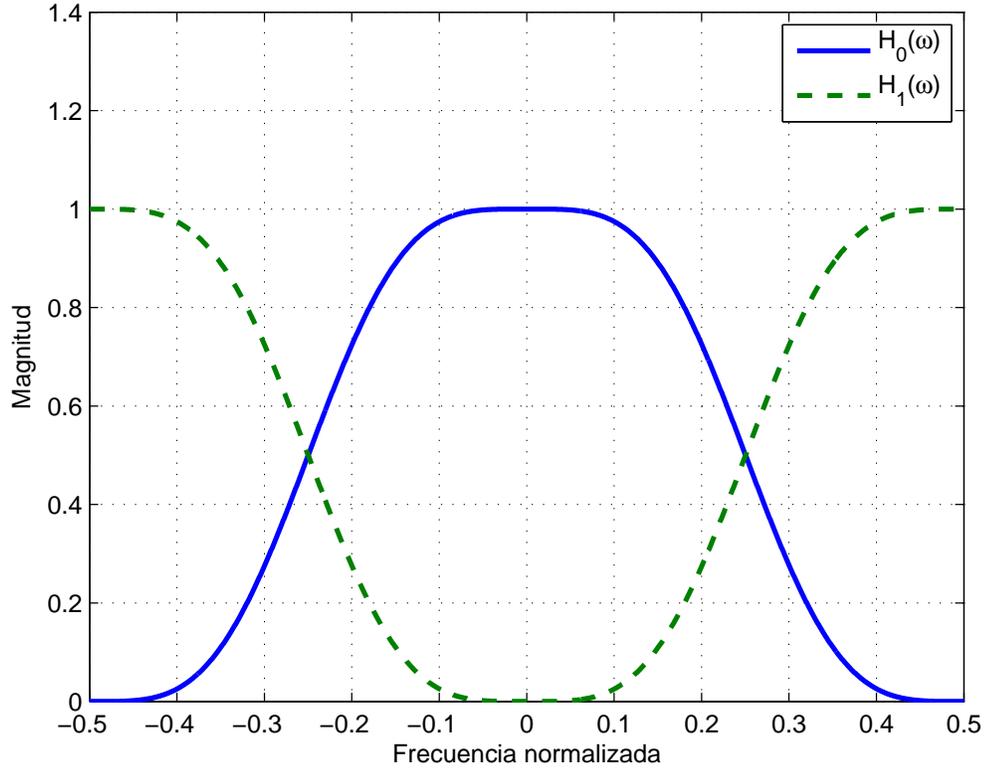


Figura 3.2: Respuestas en frecuencia del banco de filtros de dos canales.

- La respuesta en frecuencia del filtro asociado al elemento de la base dual $\tilde{\psi}_{(\ell,m)}(t)$ cumple la condición (2.59), la cual es repetida aquí para facilitar la lectura:

$$\left| \frac{d^k H_{(\ell,m)}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h & k, \ell = 0, 1, \dots, K \\ 0 & \text{en otro caso,} & h, m = -H, \dots, H. \end{cases} \quad (3.8)$$

Las restricciones anteriores pueden ser usadas para encontrar las respuestas impulsionales requeridas.

A continuación se ilustra el método de diseño a través de una serie de ejemplos, en lo que se plantea cómo encontrar diferenciadores de orden cero. Dichos diferenciadores presentan una magnitud unitaria máximamente lisa en ciertos vecindarios alrededor de la armónica de interés y magnitudes nulas máximamente lisas alrededor de las armónicas restantes. En lo que sigue se diseñarán estimadores de orden cero, por tal motivo el subíndice ℓ , el cual indica el orden del diferenciador en (3.8), se omite para facilitar la lectura. Se recalca que, sin pérdida de generalidad,

los métodos presentados pueden ser usados para encontrar diferenciadores de orden arbitrario.

Banco de filtros discretos de dos canales

El caso más sencillo de un banco de filtros es el de dos canales, en el cual se usan un filtro pasa bajas y un filtro pasa altas para separar los componentes de baja y alta frecuencia de una señal de entrada, normalmente el filtro pasa altas es una versión modulada del pasa bajas. Los bancos de filtros discretos de dos canales son una de las bases centrales del procesamiento de señales, específicamente hablando, del análisis multi-resolución, el cual a su vez es una de las bases de las onduletas (*Wavelet Transform*, WT). La respuesta en frecuencia del banco de filtros de dos canales es mostrada en la Fig. 3.2.

Note que, debido a que la respuesta en frecuencia del filtro pasa altas $H_1(\omega)$ es una versión modulada a alta frecuencia de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas $H_0(\omega)$, sólo es necesario diseñar uno de los dos filtros, normalmente el pasa bajas.

Para realizar ambos filtros se utilizan como parámetros un orden $K = 2$ y la longitud impar mínima $N_i = 7$, el objetivo del diseño es encontrar las dos respuestas impulsionales de los filtros $h_0(n)$ y $h_1(n)$, las cuales caracterizan a ambos filtros y son de la forma:

$$h_i(n) = \{c_{(i,-3)}, c_{(i,-2)}, c_{(i,-1)}, c_{(i,0)}, c_{(i,1)}, c_{(i,2)}, c_{(i,3)}\}, \quad \text{para: } i = 0, 1. \quad (3.9)$$

Se procede a diseñar el filtro pasa bajas $H_0(\omega)$, de acuerdo a (3.8) $H_0(\omega)$ debe de cumplir:

$$\left| \frac{d^k H_0(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & k = 0, \omega_h = 0, & k = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{en otro caso,} & \omega_h = 0, \pi. \end{cases} \quad (3.10)$$

Usando el teorema de diferenciación de la transformada de Fourier [15], se tiene que las condiciones impuestas en (3.10) se convierten en el dominio temporal en:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-3}^3 c_{(0,n)} &= 1, & \sum_{n=-3}^3 n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-3}^3 n^2 c_{(0,n)} &= 0, \\ \sum_{n=-3}^3 (-1)^n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-3}^3 (-1)^n n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-3}^3 (-1)^n n^2 c_{(0,n)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

debido a que el diferenciador es pasa bajas de orden par, entonces es simétrico $c_{(0,-n)} = c_{(0,n)}$ (ver Lema 3.1), con coeficientes reales. Utilizando la propiedad de simetría (3.3) se tiene que las condiciones de la columna central de (3.11) son automáticamente satisfechas, y que las restantes se reescriben por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 18 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 8 & -18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{(0,0)} \\ c_{(0,1)} \\ c_{(0,2)} \\ c_{(0,3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

al resolver el conjunto de ecuaciones (3.12) se encuentran los coeficientes del filtro pasa bajas: $c_{(0,0)} = 0.5$, $c_{(0,1)} = 0.2813$, $c_{(0,2)} = 0$ y $c_{(0,3)} = -0.0313$. Una vez obtenidos los coeficientes del filtro pasa bajas se procede a obtener los coeficientes de la versión de alta frecuencia mediante una simple modulación:

$$c_{(1,n)} = (-1)^n c_{(0,n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (3.13)$$

La Fig. 3.1 representa la respuestas impulsional del filtro pasa bajas, mientras que la Fig. 3.2 muestra las respuestas en frecuencia de ambos filtros. Note que las respuestas en frecuencia obedecen a las especificaciones de diseño (3.10) implícitas en la solución de LS.

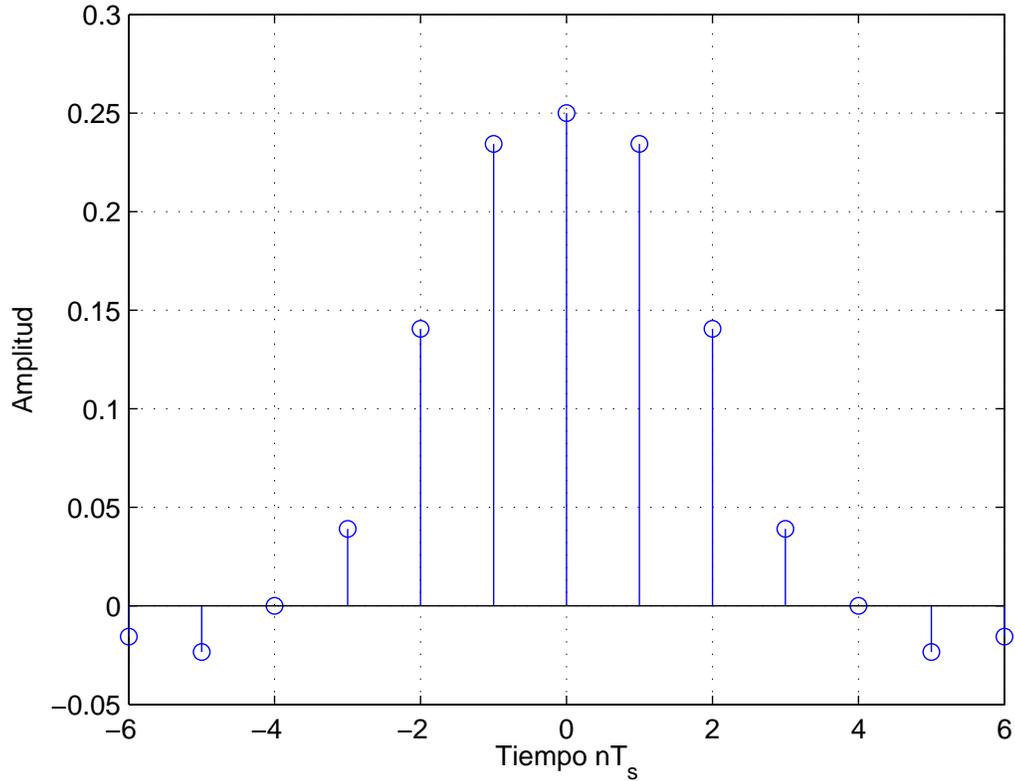


Figura 3.3: Respuestas impulsional del filtro pasa bajas.

Banco de filtros de cuatro canales

Siguiendo la misma metodología, es posible construir bancos de filtros más complejos, como el banco de filtros de cuatro canales, cuya respuesta en frecuencia es mostrada en la Fig. 3.4.

De nuevo se eligen un orden $K = 2$ y una longitud impar mínima $N_i = 13$. La respuesta impulsional de los filtros está dada por:

$$h_i(n) = \{c_{(i,-6)}, c_{(i,-5)}, c_{(i,-4)}, c_{(i,-3)}, c_{(i,-2)}, c_{(i,-1)}, c_{(i,0)}, c_{(i,1)}, c_{(i,2)}, c_{(i,3)}, c_{(i,4)}, c_{(i,5)}, c_{(i,6)}\},$$

para: $i = 0, 1, 2, 3$. (3.14)

Al igual que en el ejemplo anterior sólo es necesario obtener uno de los filtros del banco, para después obtener los restantes por modulación. Por simplicidad se elige el filtro pasa bajas $H_0(\omega)$. Primero se obtienen las especificaciones de diseño

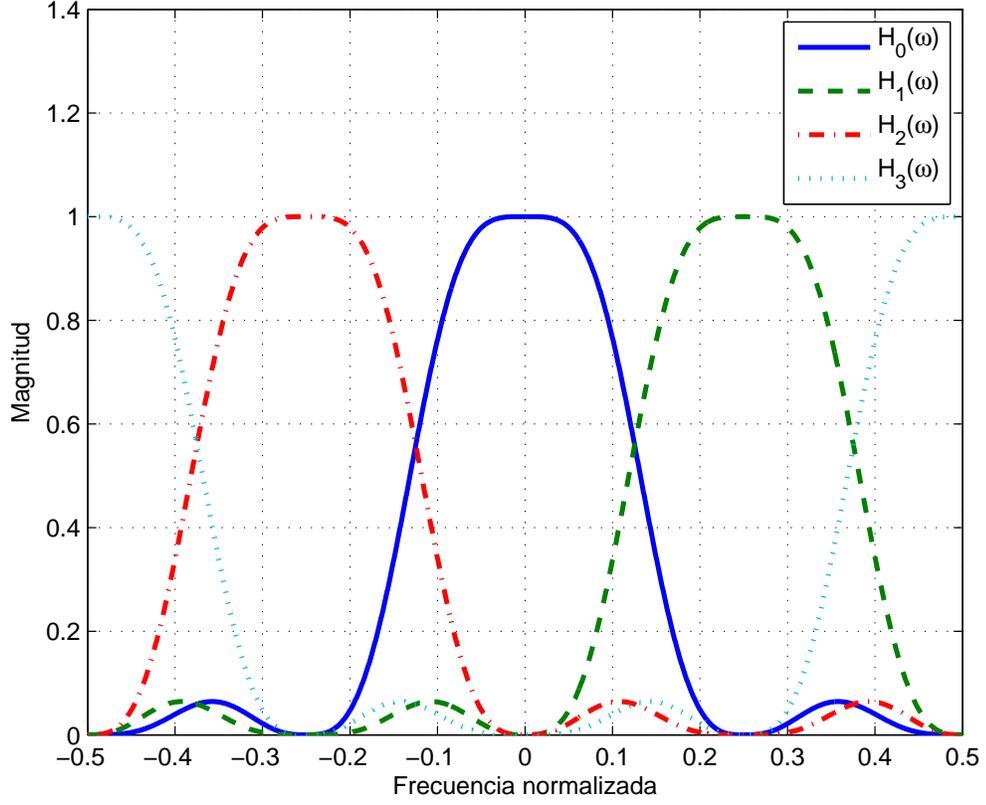


Figura 3.4: Respuestas en frecuencia del banco de filtros de 4 canales.

sobre $H_0(\omega)$:

$$\left| \frac{d^k H_0(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & k = 0, \omega_h = 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \\ \omega_h = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi, \end{matrix} \quad (3.15)$$

las cuales se interpretan en el dominio temporal por:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-6}^6 c_{(0,n)} &= 1, & \sum_{n=-6}^6 n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 n^2 c_{(0,n)} &= 0, \\ \sum_{n=-6}^6 (-1)^n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 (-1)^n n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 (-1)^n n^2 c_{(0,n)} &= 0, \\ \sum_{n=-6}^6 (j)^n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 (j)^n n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 (j)^n n^2 c_{(0,n)} &= 0, \\ \sum_{n=-6}^6 (-j)^n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 (-j)^n n c_{(0,n)} &= 0, & \sum_{n=-6}^6 (-j)^n n^2 c_{(0,n)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Nuevamente, al suponer un filtro simétrico ciertas restricciones se satisfacen

automáticamente, mientras que las restantes se reescriben por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 8 & 18 & 32 & 50 & 72 \\ 0 & -2 & 8 & -18 & 32 & -50 & 72 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 32 & 0 & -72 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 0 & -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{(0,0)} \\ c_{(0,1)} \\ c_{(0,2)} \\ c_{(0,3)} \\ c_{(0,4)} \\ c_{(0,5)} \\ c_{(0,6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Las cuales al resolverse, indican los parámetros del filtro pasa bajas:

$$\begin{aligned} c_{(0,0)} = 0.25, \quad c_{(0,1)} = 0.2344, \quad c_{(0,2)} = 0.1406, \quad c_{(0,3)} = 0.0391, \quad c_{(0,4)} = 0, \\ c_{(0,5)} = -0.0234, \quad c_{(0,6)} = -0.0156. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La respuesta impulsional del filtro pasa bajas se muestra en la Fig. 3.3, las respuestas impulsionales de los filtros restantes se pueden obtener usando modulaciones del filtro pasa bajas, al igual que en (3.13). Las respuestas en frecuencia del banco de filtros se muestran en la Fig. 3.4.

Finalmente, note que el conjunto de ecuaciones presentes en la solución del banco de filtros de dos canales (3.12) parece estar embebido en la el conjunto de ecuaciones usado en la solución del banco de filtros de cuatro canales (3.17), lo cual nos lleva al siguiente caso generalizado.

Banco de filtros de N canales

Considere un orden K , una longitud impar mínima N_i y un número de canales dado H , los cuales cumplen (3.2). Al igual que en los casos anteriores, por simplicidad se busca el filtro FIR pasa bajas que cumpla con (3.8), para después obtener los filtros restantes del banco por modulación.

En el caso general, se tiene que la respuesta en frecuencia de un filtro FIR simétrico pasa bajas se da por:

$$H_0(\omega) = \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} c_{(0,k)} e^{-j\omega k} = c_{(0,0)} + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2c_{(0,k)} \cos \omega k, \quad (3.19)$$

dicha respuesta en frecuencia tiene derivadas dadas por:

$$H_0'(\omega) = -j \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} k c_{(0,k)} e^{-j\omega k} = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2k c_{(0,k)} \sin \omega k, \quad (3.20)$$

$$H_0''(\omega) = \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} k^2 c_{(0,k)} e^{-j\omega k} = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2k^2 c_{(0,k)} \cos \omega k, \quad (3.21)$$

$$H_0^{(3)}(\omega) = -j \sum_{k=\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} k^3 c_{(0,k)} e^{-j\omega k} = \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} 2k^3 c_{(0,k)} \sin \omega k. \quad (3.22)$$

Entonces, para satisfacer (3.8) se requiere solucionar el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{(0,0)} \\ c_{(0,1)} \\ c_{(0,2)} \\ \vdots \\ c_{(0,\frac{N-1}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

donde las matrices $\mathbf{B}_i \in \mathcal{R}^{(K+1) \times N}$, $i = 0, 1, \dots, h$ se definen por:

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cos \omega & 2 \cos 2\omega & \dots & 2 \cos \frac{N-1}{2} \omega \\ 0 & -2 \sin \omega & -4 \sin 2\omega & \dots & -2 \frac{N-1}{2} \sin \frac{N-1}{2} \omega \\ 0 & 2 \cos \omega & 8 \cos 2\omega & \dots & 2 \left(\frac{N-1}{2}\right)^2 \cos \frac{N-1}{2} \omega \\ 0 & -2 \sin \omega & -16 \sin 2\omega & \dots & -2 \left(\frac{N-1}{2}\right)^3 \sin \frac{N-1}{2} \omega \end{pmatrix}_{\omega=\omega_i}, \quad (3.24)$$

La solución de mínimos cuadrados para el modelo de señal propuesto da solución al conjunto de ecuaciones mostradas en 3.23.

3.2.2. Obtención del estimador a partir del polinomio libre

Una desventaja de la metodología anterior es que, de acuerdo a (3.23), la complejidad numérica incrementa conforme aumentan el orden K , el número de armónicas H o el número de muestras N .

Un punto de vista alternativo para encontrar las respuestas impulsionales de los filtros consiste en generar las ganancias nulas máximamente lisas en cada frecuencia armónica no analizada mediante la asignación de K ceros en dichas frecuencias [29],

por lo cual la respuesta en frecuencia de los filtros se da por:

$$|H_{(k,h)}(\omega)| = |(\omega - \omega_h)|^k \prod_{\ell \neq h} |(\omega - \omega_\ell)|^{K+1} |R(\omega)|. \quad (3.25)$$

Note que (3.25) se descompone en el producto de dos polinomios, uno conocido y el otro desconocido. El polinomio desconocido $R(\omega)$ es un polinomio de orden K , el cual se debe de elegir tal que se cumplan todas las restricciones máximamente lisas de la respuesta en frecuencia:

$$\left| \frac{d^k H_{(\ell,m)}(\omega)}{d\omega^k} \right|_{\omega=\omega_h} = \begin{cases} 1 & \ell = k, m = h, \quad k, \ell = 0, 1, \dots, K, \\ 0 & \text{en otro caso,} \quad h, m = -H, \dots, H, \end{cases} \quad (3.26)$$

además, debido a que el polinomio conocido en $H_{(\ell,m)}(\omega)$ incluye $K + 1$ ceros en cada frecuencia armónica no analizada, las condición (3.26) se cumple automáticamente para dichas frecuencias. Entonces el diseño sólo toma en cuenta a la armónica de interés.

El problema consiste en encontrar el polinomio desconocido $R(\omega)$, el cual garantice (3.26), con la ventaja de que una parte de $H_{(\ell,m)}(\omega)$ es conocida. En este caso, la complejidad numérica no aumenta conforme aumenta el número de armónicas.

A continuación se replantean los ejemplos anteriores para ilustrar la metodología.

Banco de filtros de dos canales

El ejemplo de la sección 3.2.1 en el cual se desarrolla un banco de filtros de dos canales se replantea, se diseñan los diferenciadores de orden cero, específicamente el pasa bajas $H_0(\omega)$. Se usan los mismos parámetros: $K = 2$ y $N = 7$.

De acuerdo a (3.25) la transformada z del estimador es de la forma:

$$H_0(z) = z^{-3}(z + 1)^3 R_0(z), \quad (3.27)$$

donde $R_0(z)$ es el polinomio libre dado por:

$$R_0(z) = a + bz + bz^2 + az^3. \quad (3.28)$$

Usando (3.27) y (3.28), se tiene que $H_0(z)$ se da por:

$$H_0(z) = az^{-3} + (3a + b)z^{-2} + (3a + 4b)z^{-1} + (2a + 6b) + (3a + 4b)z^1 + (3a + b)z^2 + az^3, \quad (3.29)$$

cuyos coeficientes se eligen para satisfacer las restricciones sobre $H_0(z)$ en $z = 1$:

$$H_0(z)|_{z=1} = 1, \quad H'_0(z)|_{z=1} = 0, \quad H''_0(z)|_{z=1} = 0, \quad (3.30)$$

note que, en comparación con (3.11) no se toman en cuenta las condiciones de alta frecuencia ($z = -1$), lo cual se debe a que estas condiciones se cumplen automáticamente al considerar el término $(z + 1)^3$ en $H_0(z)$. Además, debido a la naturaleza simétrica del filtro la condición sobre la derivada (columna central de (3.30)) es satisfecha automáticamente, las condiciones restantes se reescriben en el dominio temporal por:

$$H_0(z)|_{z=1} = 1 \rightarrow \sum_{n=-3}^3 c_{(0,n)} = 1, \quad (3.31a)$$

$$H''_0(z)|_{z=1} = 0 \rightarrow \sum_{n=-3}^3 n^2 c_{(0,n)} = 0. \quad (3.31b)$$

Por lo cual, al usar (3.29) y (3.31) se tiene que los coeficientes de $R_0(z)$ deben de cumplir:

$$\begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 60 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene $a = -0.003125$ y $b = 0.09375$, con lo cual los coeficientes de la respuesta impulsional del filtro pasa bajas quedan definidos por:

$$\begin{aligned} c_{(0,0)} &= 2a + 6b = .5, \\ c_{(0,1)} &= 3a + 4b = .28125, \\ c_{(0,2)} &= 3a + b = 0, \\ c_{(0,3)} &= a = -0.03125, \end{aligned} \quad (3.33)$$

este resultado coincide con el del ejemplo mostrado en la sección 3.2.1, las respuestas impulsionales y respuestas en frecuencias son mostradas en las Figs. 3.1 y 3.2 respectivamente.

Además, el método es más exacto debido a que se requiere menos operaciones matemáticas para encontrar el resultado, por lo cual el error debido al truncamiento disminuye.

Banco de filtros de cuatro canales

Nuevamente se eligen los parámetros de diseño del ejemplo mostrado en la sección 3.2.1. Se diseña el filtro pasa bajas del banco. Usando tres ceros en cada

frecuencia armónica no analizada se garantiza anular las primeras tres derivadas de la respuesta en frecuencia en dichas frecuencias. Por lo cual la función de transferencia del filtro pasa bajas se da por:

$$H_0(z) = z^{-6}(z+1)^3(z+j)^3(z-j)^3R_0(z), \quad (3.34)$$

donde el polinomio libre está dado por:

$$R_0(z) = a + bz + bz^2 + az^3. \quad (3.35)$$

Entonces, la función de transferencia del filtro se reescribe por:

$$\begin{aligned} H_0(z) = & az^{-6} + (3a+b)z^{-5} + (6a+4b)z^{-4} + (11a+9b)z^{-3} + (15a+16b)z^{-2} + (18a+22b)z^{-1} + \\ & +(20a+24b) + (18a+22b)z^1 + (15a+16b)z^2 + (11a+9b)z^3 + \\ & +(6a+4b)z^4 + (3a+b)z^5 + az^6, \end{aligned} \quad (3.36)$$

y los coeficientes de $R_0(z)$ se deben de elegir para satisfacer:

$$H_0(z)|_{z=1} = 1, \quad H'_0(z)|_{z=1} = 0, \quad H''_0(z)|_{z=1} = 0. \quad (3.37)$$

Nuevamente, debido a la simetría de $H_0(z)$ la condición sobre su primera derivada se satisface automáticamente, al evaluar las condiciones restantes, se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 128 & 128 \\ 768 & 512 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

en donde se encuentran que los coeficientes de $R(z)$ son: $a = -0.0156$ y $b = 0.0234$, con lo cual los coeficientes de $H_0(z)$ quedan definidos por:

$$\begin{aligned} c_{(0,0)} &= 20a + 24b = 0.25, \\ c_{(0,1)} &= 18a + 22b = 0.2344, \\ c_{(0,2)} &= 15a + 16b = 0.1406, \\ c_{(0,3)} &= 11a + 9b = 0.0391, \\ c_{(0,4)} &= 6a + 4b = 0, \\ c_{(0,5)} &= 3a + b = -0.0234, \\ c_{(0,6)} &= a = -0.0156. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Con lo cual, nuevamente, se encuentra el resultado del ejemplo mostrado en la sección 3.2.1.

3.2.3. Comparación

La tabla 3.1 muestra la complejidad numérica para los casos presentados. La complejidad numérica se mide de acuerdo al número de ecuaciones que tienen que resolverse para llegar a la solución.

Canales	Orden	Longitud	Pseudoinversa	Resp. en frecuencia	Polinomio libre
2	2	7	6 ec. x 7 in.	4 ec. x 4 in.	2 ec. x 2 in.
4	2	13	12 ec. x 13 in.	7 ec. x 7 in.	2 ec. x 2 in.
8	2	25	24 ec. x 25 in.	13 ec. x 13 in.	2 ec. x 2 in.
16	2	49	48 ec. x 49 in.	25 ec. x 25 in.	2 ec. x 2 in.
32	2	97	96 ec. x 97 in.	48 ec. x 48 in.	2 ec. x 2 in.
64	2	193	192 ec. x 193 in.	96 ec. x 96 in.	2 ec. x 2 in.

Tabla 3.1: Complejidad numérica para los diferentes métodos de diseño, donde ec. representa al número de ecuaciones y in. al número de incógnitas de cada ecuación.

Mientras que el método de la respuesta en frecuencia reduce el número de ecuaciones en un factor de dos, el método del polinomio libre reduce el número de ecuaciones e incógnitas a un valor similar al orden de Taylor usado. Es posible usar ambos métodos para el caso de longitud impar mínima $N = N_i$ debido a que en este caso existe una única solución FIR para el problema de mínimos cuadrados.

Note que, los métodos presentados requieren menos cálculos para llegar a la solución. Entonces los coeficientes estimados mediante dichos métodos presentan menos errores debido al truncamiento ya que se requieren menos cálculos para obtenerlos. A pesar de esto, los métodos presentados en este Capítulo sufren la desventaja de calcular una sola respuesta impulsional, y no todas a la vez como en el caso de la pseudoinversa.

3.2.4. Relación entre los bancos de filtros

Las respuestas impulsionales de los filtros pasa bajas presentadas anteriormente se relacionan por un submuestreo por dos y un escalamiento por un factor de dos, es decir, la respuesta impulsional del filtro de dos canales (3.33) es la respuesta impulsional del filtro de cuatro canales (3.39) escalada y muestreada por 2: $h_0^A(n) = 2h_0^2(2n)$. Esta relación también aplica en el caso general.

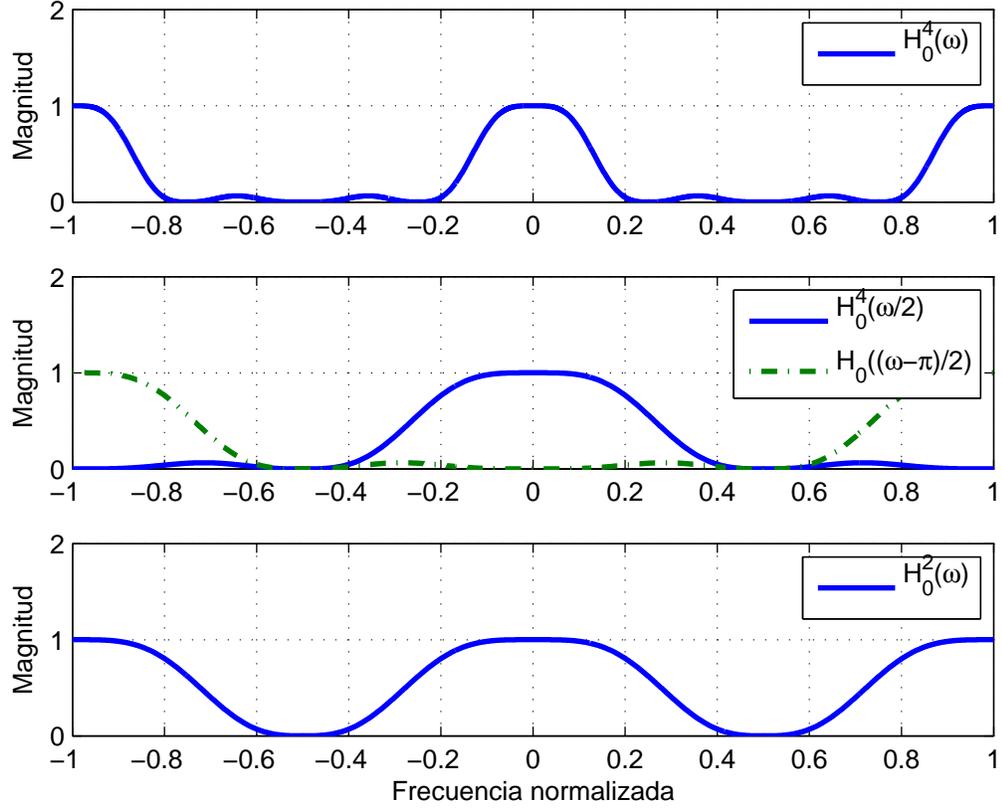


Figura 3.5: Relación entre las respuestas en frecuencia de los filtros pasa bajas, para el caso de 2 y 4 canales.

Teorema 3.1 Sean $h_0^{2^k}$ y $h_0^{2^{(k-1)}}$ las respuestas impulsionales de los filtros pasabajas pertenecientes a los bancos de 2^k y $2^{(k-1)}$ canales respectivamente, entonces:

$$h_0^{2^{(k-1)}}(n) = 2h_0^{2^k}(2n), \quad \text{para toda } k. \quad (3.40)$$

Lo anterior implica que al submuestrear $h_0^{2^k}$ por 2 se garantiza mantener la mitad de los centros de planicie, específicamente localizados en $\omega_i = i\frac{2\pi}{2^k}$ donde $i = 0, 2, 4, \dots$

Prueba. Dicha relación se debe a que en el dominio de la frecuencia, (3.40) se representa por:

$$H_0^{2^{(k-1)}}(\omega) = \left(H_0^{2^k}\left(\frac{\omega}{2}\right) + H_0^{2^k}\left(\frac{\omega - 2\pi}{2}\right) \right), \quad (3.41)$$

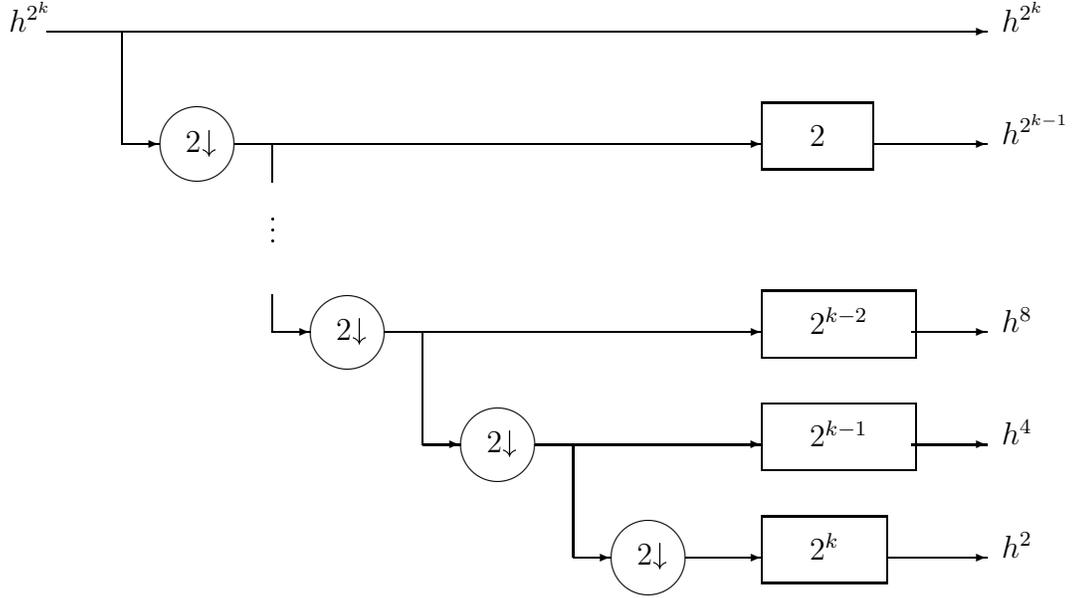


Figura 3.6: Relación entre las respuestas impulsionales paso bajas de los diferentes bancos de filtros.

recuerde que $H_0^{2^k}(\omega)$ es igual a la unidad en $\omega = 0$, y cero en las frecuencias armónicas analizadas $\omega_i = i\frac{2\pi}{2^k}$ donde $i = 1, 2, \dots, 2^k - 1$, además sus derivadas cumplen con:

$$\left. \frac{dH_0^{2^k}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_i} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, 2^k - 1. \quad (3.42)$$

Entonces, $H_0^{2^k}(\frac{\omega}{2})$ cumple con:

$$H_0^{2^k} \left(\frac{\omega}{2} \right) \Big|_{\omega=\omega_i} = \begin{cases} 1 & i = 0, \\ 0 & i = 2, 4, \dots, 2(2^k - 1), \end{cases} \quad (3.43)$$

con derivadas dadas por:

$$\left. \frac{dH_0^{2^k}(\frac{\omega}{2})}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_i} = 0, \quad \text{para } i = 0, 2, 4, \dots, 2(2^k - 1). \quad (3.44)$$

Mientras que $H_0^{2^k}(\frac{\omega-2\pi}{2})$ y sus derivadas se dan por las versiones trasladadas a π de (3.43) y (3.44). Entonces usando (3.41)-(3.44) se tiene que $H_0^{2^{k-1}}(\omega)$ cumple

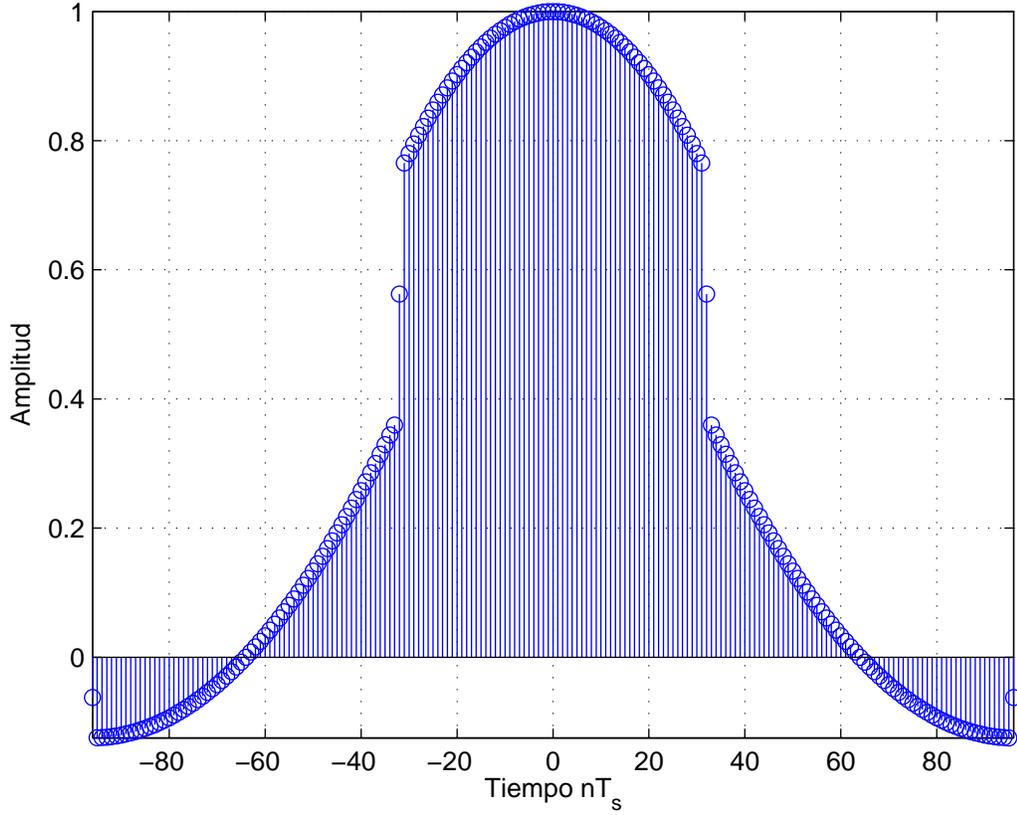


Figura 3.7: Respuesta impulsional escalada $64h^{64}$ del filtro pasa bajas, para el caso de 64 canales.

con:

$$H_0^{2^{(k-1)}}(\omega) \Big|_{\omega=2\omega_i} = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} - 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

con derivadas dadas por:

$$\frac{dH_0^{2^{(k-1)}}(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=2\omega_i} = 0, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, 2^{k-1} - 1 \quad (3.46)$$

note que, $H_0^{2^{(k-1)}}(\omega)$ es periódica de periodo 2π a pesar de que $H_0^{2^k}(\frac{\omega}{2})$ y $H_0^{2^k}(\frac{\omega-2\pi}{2})$ son periódicas de periodo 4π , además debido a que se conservó la mitad de los centros de planicie, $H_0^{2^{(k-1)}}(\omega)$ cumple los requisitos para convertirse en el filtro pasa bajas del banco de filtros de 2^{k-1} canales. \square

Una interpretación gráfica es mostrada en la Fig. 3.5 considerando filtros de 2 y 4 canales. Mientras que la Fig. 3.6 relaciona los resultados obtenidos hasta ahora.

El planteamiento descrito por el teorema 3.1 y mostrado en la Fig. 3.6 indica que los filtros provienen de la misma señal continua, la cual es muestreada a diferentes tasas. Una aproximación a dicha señal es mostrada para el caso de 64 canales en la Fig. 3.7.

3.2.5. Cálculo eficiente de la TFT basado en la FFT

Este método se basa en el propuesto en [42]. Ambos usan las propiedades de simetría involucradas en las ecuaciones de análisis y síntesis de la TFT, las cuales son usadas para agilizar el cómputo del estimador usando FFT. El método puede usarse siempre y cuando se tenga un número de muestras N igual a un múltiplo entero del número de armónicas H , es decir $N = qH$ donde $q \in \mathcal{Z}$.

Primero se analiza la ecuación de análisis, la cual está dada por la transformación lineal $\mathbf{x} = \mathbf{B}\phi$, donde la matriz \mathbf{B} se puede representar por:

$$\mathbf{B} = \Upsilon\Omega = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^2 & \mathbf{T}_1^3 & \dots & \mathbf{T}_1^K \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_2 & \mathbf{T}_2^2 & \mathbf{T}_2^3 & \dots & \mathbf{T}_2^K \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_3 & \mathbf{T}_3^2 & \mathbf{T}_3^3 & \dots & \mathbf{T}_3^K \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{I} & \mathbf{T}_q & \mathbf{T}_q^2 & \mathbf{T}_q^3 & \dots & \mathbf{T}_q^K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_H & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_H & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_H & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{W}_H & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{W}_H \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

donde $\mathbf{W}_H \in \mathcal{C}^{H \times H}$ representa la matriz de Fourier, y $\mathbf{T}_i \in \mathcal{R}^{H \times H}$, $i = 1, 2, \dots, q$ es una matriz diagonal cuyos elementos están dados por el i -ésimo segmento de longitud H de la secuencia $-L/2, \dots, L/2 - 1$ para longitudes pares y $-L/2, \dots, L/2$ para longitudes impares. Note que Ω representa la contribución de la base de Fourier al modelo de señal y Υ la contribución de Taylor en el mismo. En realidad, la mayor ventaja de este planteamiento es la separación de los modelos.

Cálculo de la ecuación de síntesis usando FFT

Del Capítulo 2 se tiene que la ecuación de síntesis para el caso discreto está dada por (2.13), la cual es repetida aquí para facilitar la lectura:

$$\phi = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{x}. \quad (3.48)$$

Para agilizar el cálculo de \mathbf{B}^\dagger , se puede recurrir a (3.47), usando ésta en (3.48)

se tiene que:

$$\phi = ((\Upsilon\Omega)^H(\Upsilon\Omega))^{-1}(\Upsilon\Omega)^H\mathbf{x}, \quad (3.49)$$

aplicando transpuesta hermitiana:

$$\phi = (\Omega^H\Upsilon^H\Upsilon\Omega)^{-1}\Omega^H\Upsilon^H\mathbf{x}, \quad (3.50)$$

y debido a que Ω es invertible se tiene

$$\phi = \Omega^{-1}(\Upsilon^H\Upsilon)^{-1}\Upsilon^H\mathbf{x}, \quad (3.51)$$

$$\phi = \frac{1}{H}\Omega^H(\Upsilon^H\Upsilon)^{-1}\Upsilon^H\mathbf{x}. \quad (3.52)$$

Hasta este punto, vale la pena detenerse y pensar cual es la mejora con respecto a (3.53), note que en (3.52) es necesario calcular la pseudoinversa Υ^\dagger la cual es de las mismas dimensiones que la pseudoinversa original \mathbf{B}^\dagger , además después este cálculo es necesario multiplicar el resultado por Ω^H la cual contiene en su diagonal $K + 1$ matrices de Fourier.

A pesar de que (3.52) parece no presentar ventaja, la ventaja radica en que los coeficientes de Υ^\dagger pertenecen a los reales, mientras que los coeficientes de \mathbf{B}^\dagger pertenecen a los complejos. Esto es una gran ventaja ya que una multiplicación compleja implica cuatro multiplicaciones reales y tres sumas reales, entonces el número de operaciones necesarias para calcular Υ^\dagger es menor al de \mathbf{B}^\dagger . El ahorro computacional se debe a que las operaciones con números complejos se han substituido por operaciones con números reales.

Además Υ está formada por un conjunto de matrices diagonales, esto puede ser aprovechado ya que esta característica será heredada a su pseudoinversa.

$$\Upsilon^\dagger = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{1,2} & \Sigma_{1,3} & \Sigma_{1,4} & \cdots & \Sigma_{1,q} \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} & \Sigma_{2,3} & \Sigma_{2,4} & \cdots & \Sigma_{2,q} \\ \Sigma_{3,1} & \Sigma_{3,2} & \Sigma_{3,3} & \Sigma_{3,4} & \cdots & \Sigma_{3,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{K+1,1} & \Sigma_{K+1,2} & \Sigma_{K+1,3} & \Sigma_{K+1,4} & \cdots & \Sigma_{K+1,q} \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

donde $\Sigma_{r,c} \in \mathcal{R}^{H \times H}$ es una matriz diagonal.

Finalmente, con respecto a la multiplicación por Ω^H , ésta se puede ver como operaciones de FFT sobre las matrices $\Sigma_{r,c}$.

3.3. Implementación del estimador

La etapa de implementación presenta un menor reto ya que, a diferencia de la etapa de diseño, no es necesario tomar en cuenta todo el modelo de señal a fin de obtener alguna solución. La etapa encargada de mezclar todas las restricciones impuestas en el modelo de señal es la etapa de diseño, al finalizar la misma se obtienen las respuestas impulsionales $h_d(n)$ asociadas con el(los) estimador(es) a implementar.

Cada respuesta impulsional corresponde a un filtro FIR de simetría par para órdenes pares o impar para impares. La ventaja con respecto a otros métodos [25] es que dichas respuestas impulsionales son independientes la una de la otra, por lo cual, sólo es necesario tomar en cuenta las respuestas impulsionales asociadas a los estimados de interés para obtener los mismos. Más aún, el cómputo se lleva a cabo mediante la aplicación de los filtros FIR en paralelo, tal y como se muestra en la Fig. 3.8.

Lo anterior presenta una gran ventaja cuando sólo se analizan algunos componentes armónicos de la señal en específico, por ejemplo se puede realizar estimación fasorial usando el modelo de señal completo en la etapa de diseño, y usando únicamente el modelo del fasor en la etapa de implementación, es decir un sólo filtro FIR. Con lo cual se obtendrán estimados fasoriales libres de infiltración armónica.

Además es posible agilizar la implementación de los filtros FIR mediante el uso indirecto de la FFT, entre algunos métodos comúnmente usados para realizar el filtrado de secuencias de larga duración usando filtros FIR se tiene al método de solapamiento y suma y al método de solapamiento y almacenamiento [35]. Los métodos consisten en separar la señal de entrada en bloques, y aplicar algoritmos FFT a cada bloque, multiplicar el resultado por la respuesta en frecuencia del filtro y finalmente aplicar IFFT (Transformada rápida de Fourier inversa, *Inverse Fast Fourier Transform*) a cada bloque resultante. Considerando el rellenar con ceros a la derecha tal que las longitudes de los bloques y del estimador cumplan con $N = 2^n$ donde $n \in \mathbb{Z}$, entonces el uso de la FFT permite reducir las multiplicaciones necesarias para procesar cada bloque de N^2 a $\frac{N}{2} \log_2 N^2$. Note que la carga computacional es minimizada, especialmente para N de gran tamaño.

En general, se puede decir que la etapa de implementación es otra ventaja del

²Para obtener el resultado se necesita una FFT de N puntos, una multiplicación de N puntos y una IFFT de N puntos.

algoritmo, debido a la sencillez de la misma, ya que es posible estimar los parámetros con cierta robustez mediante un conjunto de filtros FIR adecuadamente diseñado. Además para implementar el estimador no es necesario conocer modelos matemáticos como en otros casos (Filtro de Kalman, Observador de Luenberger, etc). En general la exactitud de los estimados dependerá del contenido frecuencial de la señal de entrada.

3.4. Conclusiones

Fue posible diseñar algoritmos que reducen la carga computacional necesaria para construir el estimador. Los algoritmos se basan en las propiedades de simetría del estimador así como en las propiedades frecuenciales del mismo.

Los métodos usan un enfoque polinomial, en el cual el conjunto de restricciones máximamente lisas de la respuesta en frecuencia se transcriben en el dominio temporal a restricciones sobre los coeficientes de la respuesta impulsional del filtro asociado.

Con respecto a la etapa de implementación el estimador propuesto consiste en un banco de filtros FIR. Por lo tanto la etapa los problemas implícitos en su aplicación son mínimos, ya que el tema de implementación de filtros FIR es bien conocido. Además, debido a que la acción de filtrado se realiza en paralelo es posible implementar los filtros asociados a los estimados de interés.

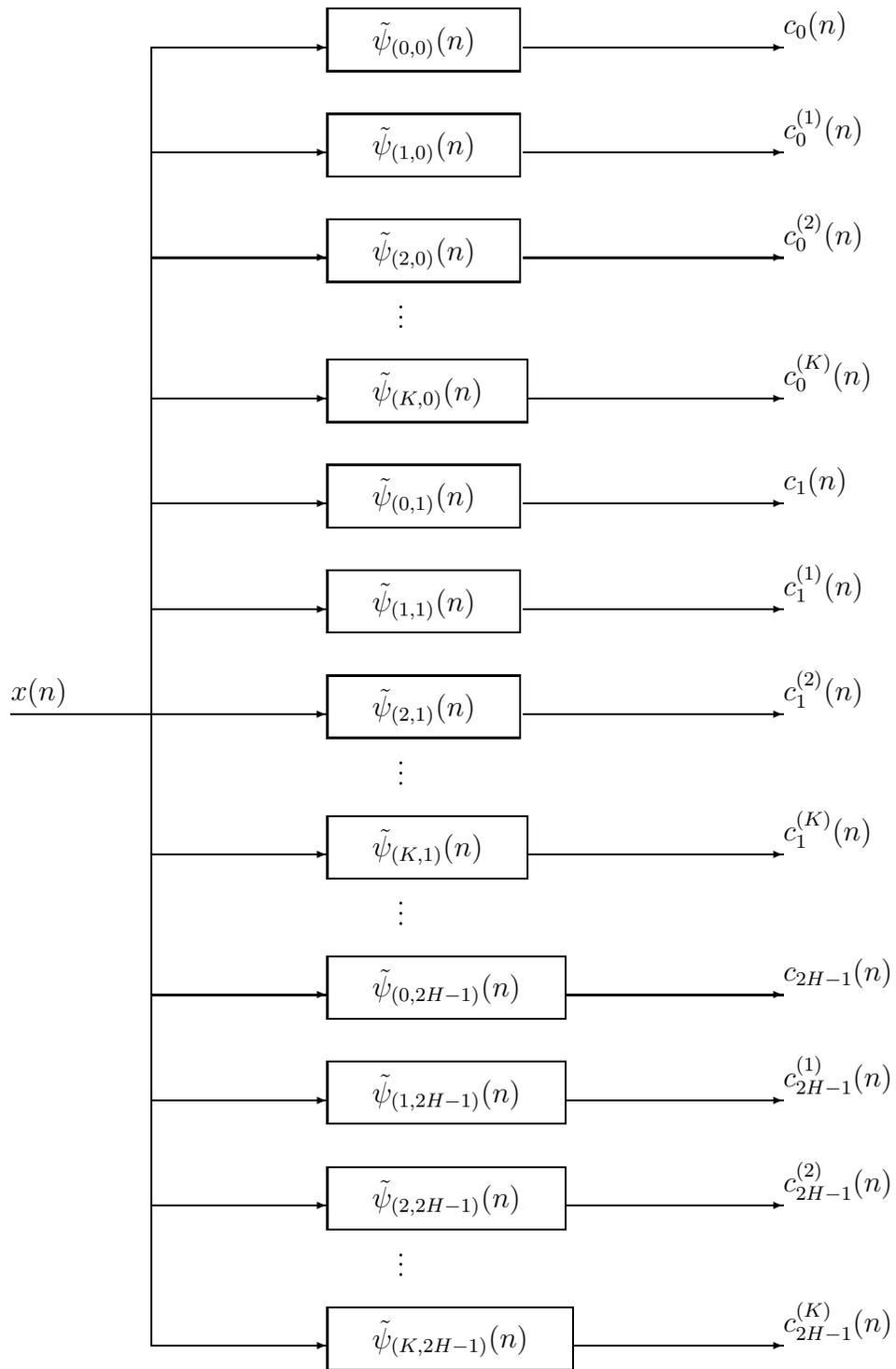


Figura 3.8: Implementación del estimador TFFT.

Capítulo 4

Ejemplos de aplicaciones con señales reales

En este Capítulo se muestran distintos ejemplos de aplicación, los cuales se realizaron con señales reales en distintas áreas. El propósito del mismo es mostrar los errores de estimación en la TFT para después compararlos con los errores de estimación presentes en la FFT.

A diferencia del ejemplo presentado previamente en el Capítulo 2, las señales no se encuentran dentro del subespacio generado por la transformación por lo que existirán errores de aproximación. Los mismos se evalúan usando el criterio de error NRMSE (*Normalized Root-Mean-Square Error*).

Se presentan casos en los cuales los coeficientes se calculan fuera de línea y en línea. En el caso del cómputo fuera de línea, el análisis se hace usando MATLAB, mientras que para el caso de análisis en línea se hace uso de hardware FPGA (*Field Programmable Gate Array*) y del software Labview para generar la interfase.

4.1. Sistemas de potencia

En este primer ejemplo de aplicación, se enfoca la atención en la estimación de armónicas en sistemas eléctricos de potencia bajo oscilaciones.

La contaminación armónica en las redes eléctricas se ha convertido en un problema serio debido al incremento de las cargas no lineales como aparatos electrónicos, lo cual produce muchos efectos negativos en la red eléctrica. En adición a lo anterior, con el incremento en número y nivel de los intercambios de energía

mediante las redes WANS (Wide Area Networks) las oscilaciones han proliferado. Debido a la presencia de sistemas no lineales en las WANS; es obvio que las condiciones de oscilación han afectado a las armónicas presentes en la red. Y debido a que las oscilaciones anuncian el probable colapso de la red, las armónicas en los sistemas de potencia deben de ser monitorizadas lo más exactamente posible.

Muchos algoritmos han sido propuestos en la literatura para estimar las armónicas de un sistema de potencia, el más ampliamente usado en la práctica es la FFT [43]. Algunos algoritmos desarrollados recientemente usan aproximaciones recursivas para estimar las armónicas, por ejemplo [32] y [44]. En [32] una técnica de filtrado adaptable es presentada para extraer los componentes armónicos al usar una retroalimentación de la frecuencia estimada para adaptar los parámetros de los filtros. Pero este método presenta la desventaja de no usar respuestas en frecuencia planas alrededor de las frecuencias armónicas, lo cual lo hace inapropiado para estimar armónicas dinámicas, además existen retrasos entre las etapas y no es válido para aplicaciones en tiempo real.

4.1.1. Resultados experimentales en sistemas eléctricos de potencia

El desempeño de la transformada Taylor-Fourier ante oscilaciones de potencia es comparado en el de la transformada de Fourier, para realizar la comparación se usa como entrada en ambos estimadores una señal tomada de mediciones reales de un sistema de potencia europeo ($f_1 = 50$ Hz). La señal es muestreada a una frecuencia de 20 muestras por ciclo y es mostrada en la Fig. 4.1, note que esta señal presenta una fuerte oscilación en amplitud.

Con el fin de hacer una comparación justa, ambos estimadores usan una ventana de observación rectangular con longitud impar mínima dada por (2.14), la cual es igual a cuatro ciclos ya que para el caso de la TFT se elige un orden $K = 3$.

Los resultados de la estimación armónica para el caso de la FT y TFT son mostrados en la Fig. 4.2, mientras que la Fig. 4.3 muestra los estimados de las derivadas de las armónicas calculados por la TFT. Note que la transformada Taylor Fourier posee un mayor número de coeficientes (los mostrados en Fig. 4.3), los mismos están relacionados con las derivadas de cada envolvente compleja. Al comparar los estimados de las armónicas para los dos casos en la Fig. 4.2, es aparente que los estimados obtenidos mediante FT son más ruidosos que los estimados obtenidos

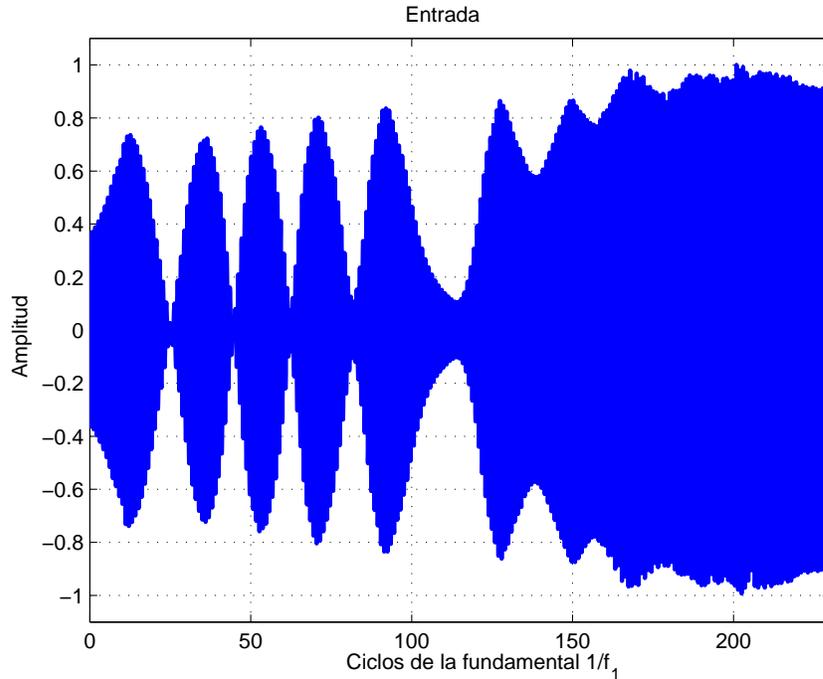


Figura 4.1: Señal de entrada al estimador.

mediante TFT. Esto se debe a la infiltración de las derivadas de las armónicas. Es decir, en el caso de la FT, la primer armónica se infiltra todo el tiempo en las armónicas adyacentes (vea Fig. 4.2 (c)), lo cual produce una estimación errónea de la componente de DC así como de la 2da y 3ra armónica. Note que esta infiltración de la primera armónica en sus armónicas adyacentes no está relacionada con su magnitud, sino con su razón de cambio.

En contraparte los estimados obtenidos con TFT (Fig. 4.2 (d)) no presentan oscilaciones de este tipo debido a que los cambios en velocidad y aceleración de las armónicas son filtrados hacia sus respectivos coeficientes.

La Fig. 4.3 (a)-(c) ilustra las magnitudes de los nuevos coeficientes de Taylor. Estos coeficientes contienen información acerca de las derivadas instantáneas (en el centro de la ventana de observación) en amplitud y fase de cada armónica. Las derivadas de amplitud son útiles para indicar la razón de cambio de cada componente armónica, y pueden ser utilizadas para detectar estado estable o cambios rápidos como los transitorios. Por otra parte, las derivadas de la fase de cada armónica se relacionan con desviaciones en la frecuencia. Es decir, si se conoce la primera y segunda derivada de la fase, es posible conocer la frecuencia del sistema (primera

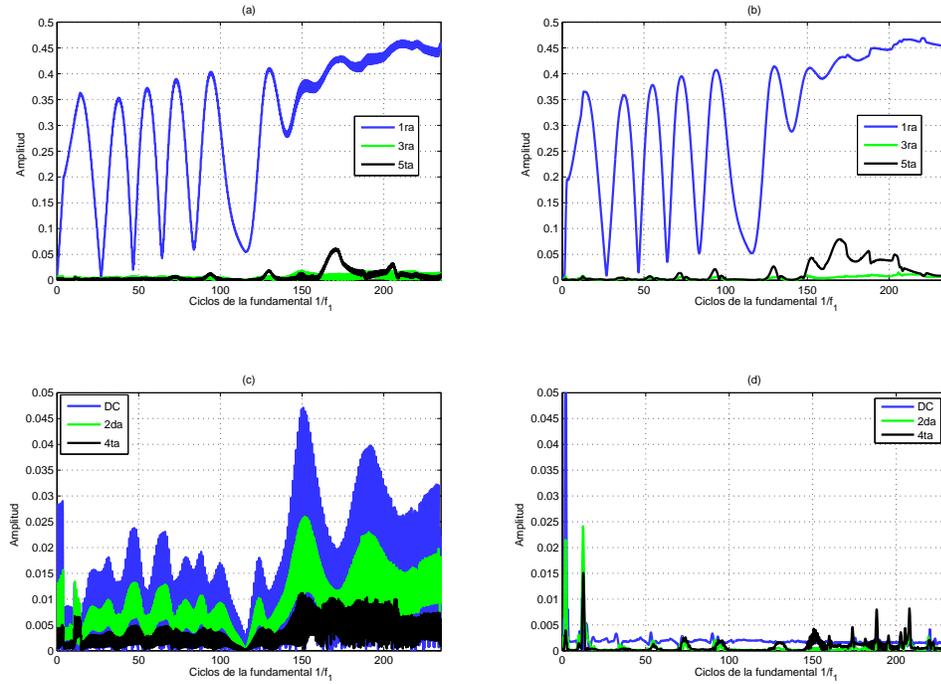


Figura 4.2: Magnitud de los estimados de orden cero (armónicos) obtenidos mediante FT y TFT, (a) Estimados impares obtenidos mediante FT, (b) Estimados impares obtenidos mediante TFT, (c) Estimados pares obtenidos mediante FT, y (d) Estimados pares obtenidos mediante TFT.

derivada de la fase) y su razón de cambio (segunda derivada de la fase). Lo anterior es extremadamente importante para asegurar la estabilidad del sistema de potencia, y el flujo de potencia entre WANS adyacentes. De [45] se tiene que:

$$\Delta f_h = \frac{2\text{Im}\{\sigma_{(1,h)}e^{-j\angle\sigma_{(1,h)}}\}}{2|\sigma_{(0,h)}|} \quad (4.1)$$

donde Δf_h representa la desviación en frecuencia de cada componente armónico.

La Fig. 4.4 ilustra las fluctuaciones en fase y frecuencia para nuestro caso en particular. Note que los picos se deben a cambios abruptos en la fase a amplitud baja. Los estimados frecuenciales obtenidos no son tan ruidosos como los obtenidos mediante ecuaciones en diferencias, además no requieren una etapa extra de post-filtrado [14].

En lo que concierne al error de aproximación, se calcula el NRMSE (2.63) para ambos casos, con lo que se obtiene:

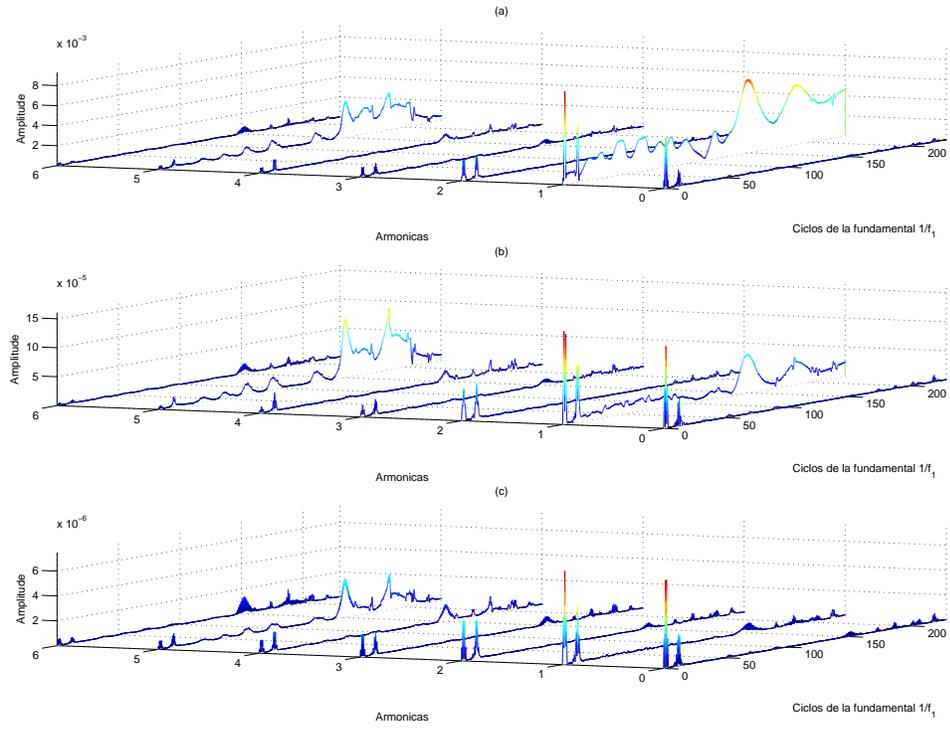


Figura 4.3: Magnitud de los estimados TFT, para una longitud de 4 ciclos con $K = 3$, para coeficientes de Taylor de (a) 1er orden, (b) 2ndo orden, y (c) 3er orden.

$$\text{NRMSE}_{\text{FT}} = 1,62 \times 10^{-2}, \quad (4.2)$$

$$\text{NRMSE}_{\text{TFT}} = 7,07 \times 10^{-3}. \quad (4.3)$$

En comparación con la FT, la TFT reduce el NRMSE a la mitad. Entonces una mejor aproximación en el sentido de mínimos cuadrados es obtenida con la TFT.

Finalmente, con el fin de obtener una mayor reducción en el error de aproximación, se usa la solución de mínimos cuadrados con una ventana como factor de ponderación en combinación con el método propuesto. El uso de una ventana

Tabla 4.1: Función de costo $\text{NRMSE}_{\text{TFT}}$, para diferentes ordenes de Taylor K y ventanas de Kaiser α .

	$\alpha = 0$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$	$\alpha = 12$
$K = 0$	$1,62 \times 10^{-2}$	$7,66 \times 10^{-3}$	$4,04 \times 10^{-3}$	$2,02 \times 10^{-3}$
$K = 1$	$1,62 \times 10^{-2}$	$7,66 \times 10^{-3}$	$4,04 \times 10^{-3}$	$2,02 \times 10^{-3}$
$K = 2$	$7,07 \times 10^{-3}$	$2,91 \times 10^{-3}$	$3,62 \times 10^{-5}$	$2,38 \times 10^{-8}$
$K = 3$	$7,07 \times 10^{-3}$	$2,91 \times 10^{-3}$	$3,62 \times 10^{-5}$	$2,38 \times 10^{-8}$

reduce la sensibilidad a frecuencias inter-armónicas ya que reduce los lóbulos laterales de la respuesta en frecuencia del estimador, lo cual implica errores más pequeños en ambas FFT y TFT.

En la Tabla 4.1 es mostrada la reducción en el error de aproximación al usar una ventana de Kaiser con diferentes valores en su parámetro libre α . Note que por separado, ni un cambio en el orden, ni un cambio en la ventana producen un cambio significativo, pero combinados alcanzan reducciones del orden de 10^{-5} con respecto a la FT. Esto es debido a las excelentes propiedades frecuenciales del estimador. Finalmente note que un incremento de un orden par a un orden impar no produce ningún cambio en la función de costo, lo anterior es cierto sólo si la ventana de observación es desplazada muestra por muestra y solamente es tomada en cuenta la muestra central en la reconstrucción, ya que todas las potencias no nulas son cero en el centro del intervalo.

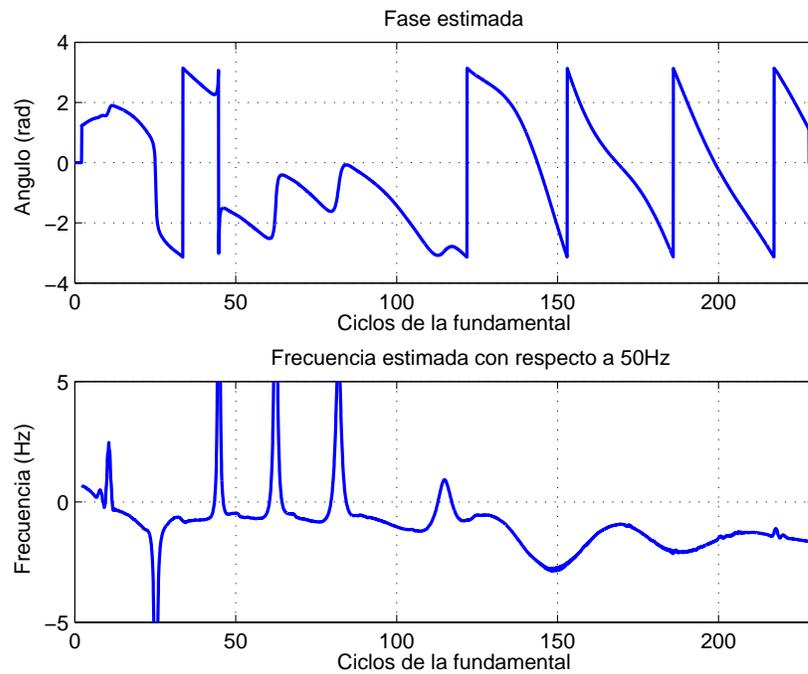


Figura 4.4: Fluctuaciones en fase y frecuencia.

4.2. Señales biomédicas

Dentro del área médica existen también muchas señales que exhiben el comportamiento descrito en la Fig. 1, es decir son señales que usualmente se analizan como señales periódicas, pero que en realidad no lo son debido a pequeñas variaciones de un ciclo a otro de la señal. Por lo tanto son señales *cuasi-periódicas* ya que tienen su contenido espectral concentrado en vecindarios alrededor de las frecuencias armónicas. Algunos ejemplos de este tipo de señales son las pertenecientes al sistema circulatorio, tales como señales de presión arterial o señales de electrocardiograma.

Al igual que en el caso de sistemas de potencia, la herramienta más común para realizar el análisis armónico de señales biomédicas es la FFT, por lo que existe la posibilidad de generar errores de estimación cuando la señal no se encuentra en estado estable. Por otro lado, el panorama es favorable para la implementación del algoritmo Taylor-Fourier si es que las fluctuaciones en fase y magnitud de la señal son lentas en comparación con la frecuencia fundamental.

A continuación se muestra un ejemplo en el cual se analiza una onda de presión arterial. Ésta fue tomada mediante ultrasonido en el hospital universitario de la UANL.

La forma de onda varía entre su máximo y mínimo de acuerdo a los latidos del corazón, cuando el corazón late éste se encuentra en el período de sístole, en este período el latido del corazón ocasiona que la presión de los vasos sanguíneos se eleve provocando que la onda alcance sus valores máximos, por otro lado la onda alcanza sus valores mínimos cuando el corazón se encuentra relajado en el período de diástole.

4.2.1. Análisis y síntesis de una señal de presión arterial

El ejemplo consiste en comparar el desempeño de la FT y la TFT para analizar y después reconstruir señales biomédicas de presión arterial. El propósito del mismo es mostrar que la TFT captura más información que la FT en sus coeficientes, por lo cual la reconstrucción mediante TFT deberá de ser más acertada que la realizada por la FT.

La señal a tratar es una señal de presión arterial muestreada a 30 muestras por segundo y es mostrada en la Fig. 4.5. Para probar ambas transformaciones se estiman todas las armónicas presentes en la señal con estimadores de una longitud

igual a 4 ciclos. Con la finalidad de tener un estimador de longitud mínima para el caso TFT se elige un orden de Taylor $K = 3$.

La señal es descompuesta y luego reconstruida, las señales reconstruidas son mostradas en la Fig. 4.6, note que la reconstrucción más adecuada es la elaborada mediante la TFT. Este resultado indica que la TFT captura una mayor cantidad de información que la FT.

4.3. Aplicación en tiempo real mediante FPGA

Esta parte del documento describe como implementar el estimador en tiempo real usando hardware FPGA (Field Programmable Gate Array) y el software LabView. Para alcanzar esta meta solamente es necesario implementar el(los) filtro(s) de interés dentro del chip FPGA. La tecnología FPGA se elige debido a sus propiedades de paralelismo.

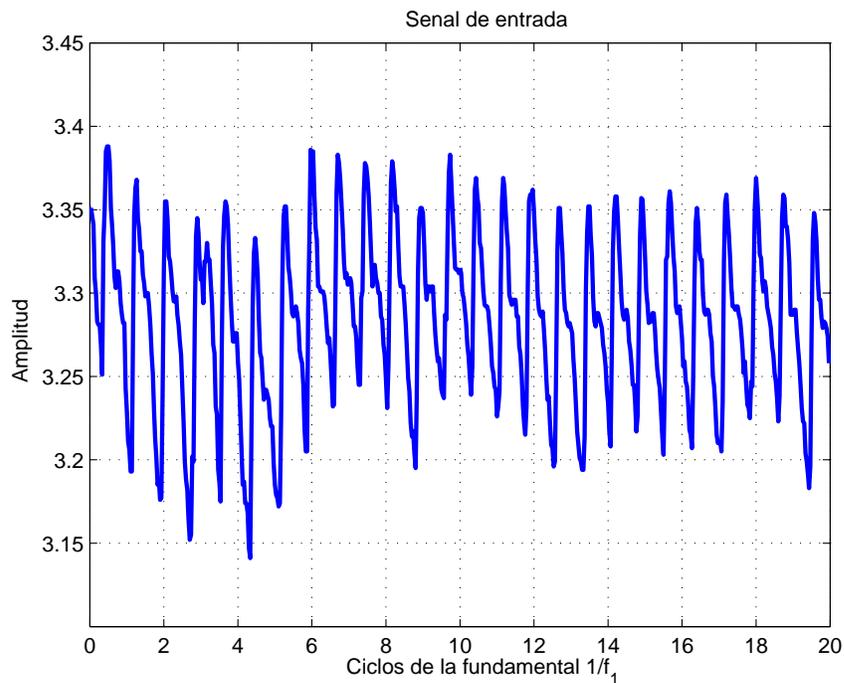


Figura 4.5: Señal de entrada al estimador.

4.3.1. Descripción del hardware

Para implementar el estimador se hizo uso de la plataforma CompactRIO (cRIO), el cRIO es un controlador automático programable de national instruments. En nuestro caso el sistema usado es configurado como sigue:

- NI cRIO 9024 Controlador en tiempo real: 800 Mhz, 512 MB DRAM y 4 GB de memoria.
- NI cRIO 9118 Chasis reconfigurable de 8 slots, con un núcleo FPGA Xilinx Virtex-5.
- NI cRIO 9201 Módulo analógico C Series, con 8 canales de entrada a ± 10 V, 12 bits de resolución y 500 kS/s.

Además de lo anterior, también se realizaron análisis a baja frecuencia con una tarjeta de adquisición de datos USB-6009, la cual tiene 8 entradas analógicas (14-bits), 2 salidas análogas (12-bits) y un tiempo de muestreo máximo (en todos los canales) de 1 kHz.

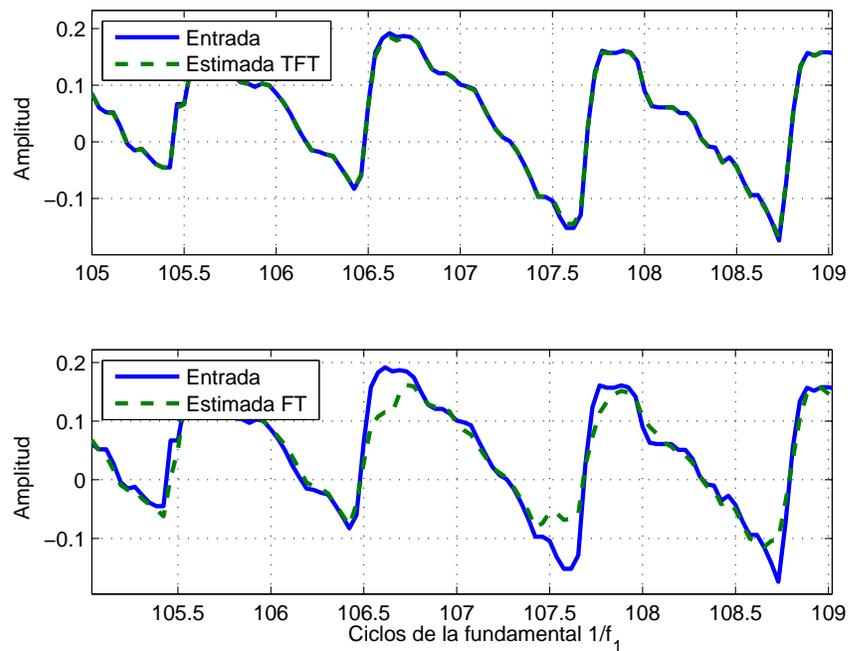


Figura 4.6: Señales reconstruidas con TFT y FFT.

4.3.2. Etapas de diseño

La implementación se realiza en diversas etapas, desde el diseño de los filtros hasta su implementación en hardware, las etapas de diseño se muestran en la siguiente lista.

Diseño del banco de filtros En esta etapa se calcula la pseudoinversa a partir de los datos de diseño, finalmente los coeficientes obtenidos (renglones de \mathbf{B}^\dagger) son almacenados en memoria.

Simulación Le permite al usuario verificar el comportamiento del banco de filtros obtenido usando diferentes tipos de entradas..

Cuantificación a punto fijo Cuantifica los coeficientes de formato de doble precisión a punto fijo.

Implementación en FPGA Implementa los filtros en el hardware a partir de los coeficientes de punto fijo.

A continuación se describe brevemente cada una de estas etapas.

4.3.3. Diseño del banco de filtros

El propósito de esta etapa es tomar los parámetros de diseño y generar el banco de filtros usado en la estimación armónica. El diseño es realizado usando MATLAB para generar la matriz pseudoinversa. El link de MATLAB con Labview se realiza usando el nodo math-script, el cual corre código-m directamente en Labview (vea la Fig. 4.7).

Existe un problema debido a que los elementos de la matriz pseudoinversa son complejos, pero el hardware usado solamente acepta filtros con coeficientes reales. Para solucionar el problema anterior se usan dos filtros reales (uno para la parte real y otro para la imaginaria) por cada filtro complejo. Es posible realizar lo anterior debido a que la señal es real. Existen solamente dos excepciones: el caso de corriente directa $\omega = 0$ y el de alta frecuencia $\omega = \pi$, en ambos casos sólo es necesario usar un filtro real debido a que las respuestas impulsionales pertenecen a los reales.

Las partes reales e imaginarias de \mathbf{B}^\dagger se almacenan en dos archivos separados, esto se muestra en la esquina superior derecha de la Fig. 4.7. El panel de diseño es mostrado en la Fig. 4.8, mediante esta interfase se introducen los parámetros de

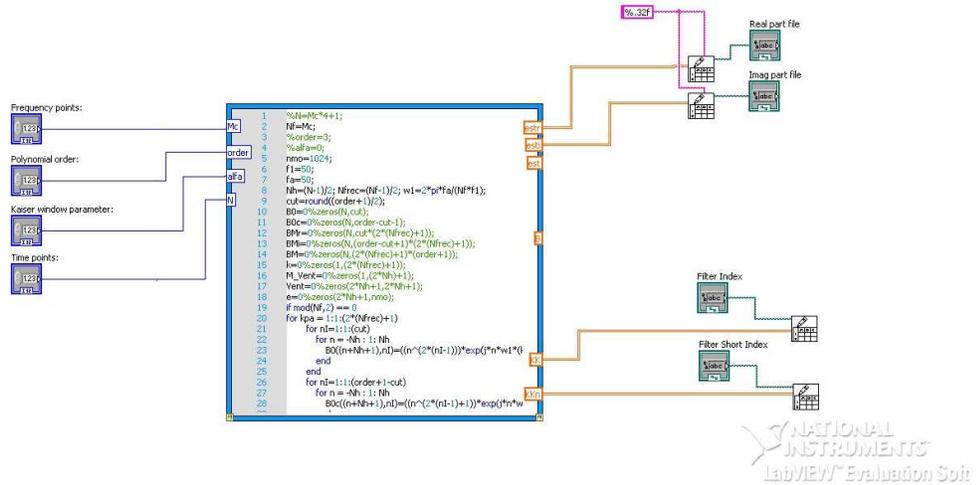


Figura 4.7: Uso del nodo math-script para interactuar con código m.

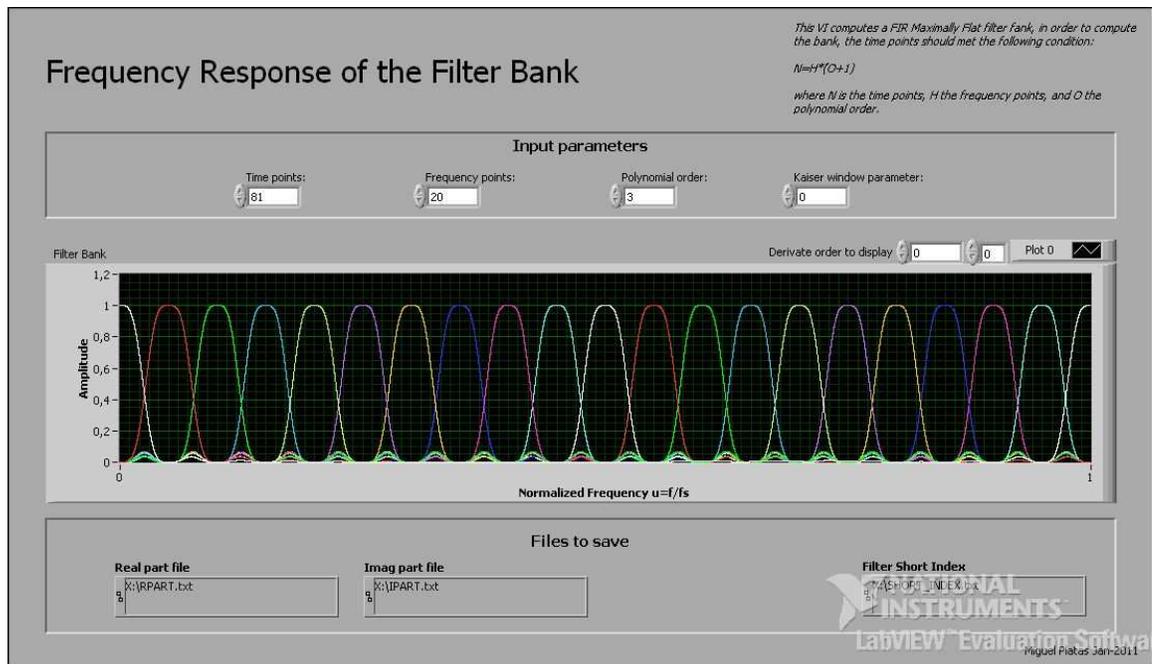


Figura 4.8: Panel frontal de la etapa de diseño. Éste muestra las respuestas en frecuencia del banco de filtros formado.

diseño y se indican las rutas de los archivos en los que se almacenan los coeficientes de los filtros diseñados. Además el panel muestra las respuestas en frecuencia del banco de filtros diseñado.

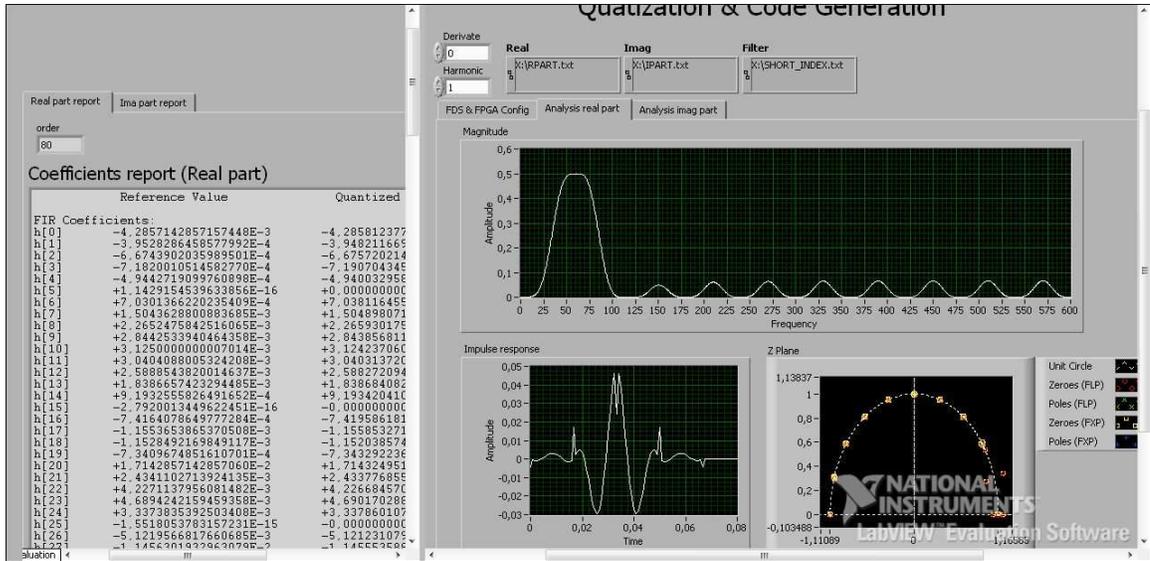


Figura 4.9: Panel frontal de la etapa de cuantificación.

4.3.4. Simulación

Después de generar los filtros, es posible realizar pruebas al estimador, el panel de pruebas se muestra en la Fig. 4.12, mediante este panel se permite:

- Usar datos simulados o reales (de la tarjeta USB-6009).
- Análisis a baja frecuencia (La frecuencia máxima de muestreo depende de los recursos de la PC usada).
- Visualizar el contenido armónico en gráficas.
- Calcular el índice de distorsión armónica total (Total Harmonic Distortion, THD).

4.3.5. Cuantificación a filtros de punto fijo

Esta etapa cuantifica los coeficientes de formato doble precisión DBL a formato punto fijo FXP, además de realizar la cuantificación permite visualizar las características del filtro FXP resultante (respuesta en frecuencia, respuesta al impulso y ubicación de los ceros en el plano z) y realiza un reporte en el cual se muestran los posibles errores ocurridos en el proceso de cuantificación.

La etapa de cuantificación es mostrada en la Fig. 4.9 para el caso de diseño del filtro correspondiente a la primera armónica a una frecuencia fundamental de 60 Hz.

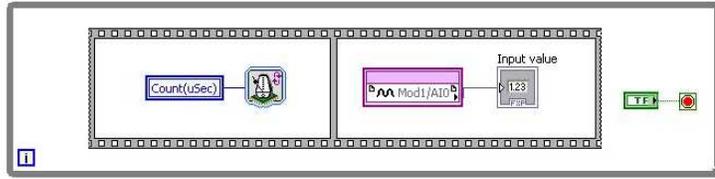


Figura 4.10: Diagrama de bloques en FPGA, a) Muestreo de entrada.

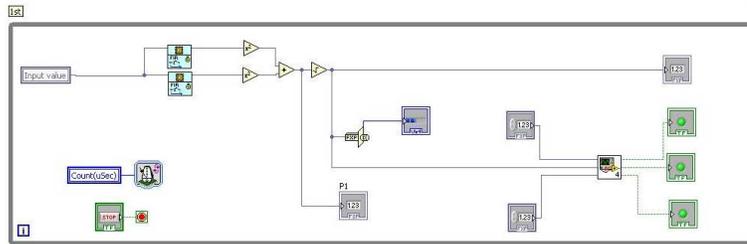


Figura 4.11: Diagrama de bloques en FPGA, b) Estimado de la primera armónica.

4.3.6. Implementación en FPGA

A continuación se muestra el código usado para implementar cada filtro en el chip FPGA del sistema cRIO. La estructura básica es desplegada en las Figs. 4.10-4.11, la primera de ellas se refiere al proceso de muestreo, la función de la misma es tomar una muestra de la señal en un tiempo específico. Por otro lado, el diagrama mostrado en la Fig. 4.11 es usado para implementar cada filtro, note que el estimador está construido por la acción de dos filtros en paralelo. El filtro complejo se separó en dos filtros reales para obtener la parte real e imaginaria de la estimación para después tomar la magnitud de la estimación a partir de las mismas. Finalmente se cuenta con una etapa cuya función es activar alarmas cuando el valor de la estimación no se encuentra dentro de cierto rango.

En nuestro caso el reloj interno del chip FPGA es de 40 Mhz, y se eligió un rendimiento de 83 ciclos por muestra, entonces la frecuencia máxima es de 481.92 kHz, la cual es suficiente para nuestra aplicación.

4.3.7. Resultados experimentales

Los experimentos mostrados en esta sección se pueden clasificar en dos casos generales:

1. Cuando la frecuencia fundamental elegida para diseñar a los estimadores armónicos f_d es idéntica a la frecuencia de la señal periódica a estimar f_i , es decir:

$$f_i = f_d.$$

2. Cuando la frecuencia de diseño es diferente a la frecuencia de la señal periódica:

$$f_i \neq f_d.$$

Claramente, los resultados de la FFT sólo serán validos para el primer caso $f_i = f_d$. en contraparte los resultados de la TFT serán validos para ciertos vecindarios alrededor de f_d , es decir para $f_i \approx f_d$.

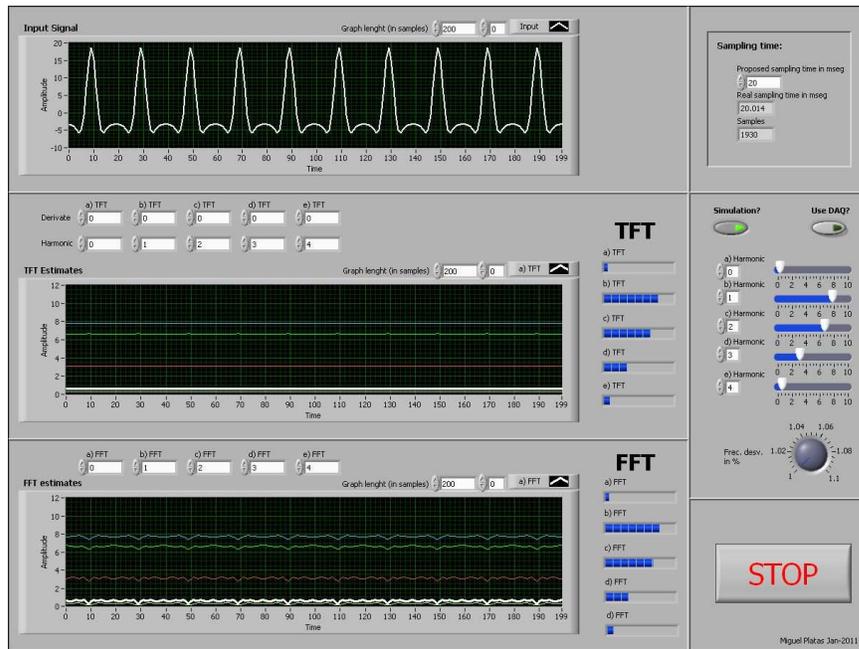


Figura 4.12: Prueba en estado estacionario, usando una señal periódica como entrada.

Las Figs 4.12-4.13 muestran los resultados de las pruebas realizadas para el caso en el cual $f_i = f_d$ mientras que las Figs 4.14-4.15 muestran los resultados para el caso en el cual $f_i \approx f_d$. En el panel usado para presentar todos los casos se muestra a la señal de entrada en la parte superior, los estimados de la TFT en la parte media y los de la FFT en la inferior. A continuación se revisa brevemente cada uno de estos resultados.

La Fig. 4.12 muestra los resultados obtenidos al estimar una señal periódica de frecuencia fundamental $f_i = f_d$ como entrada. En teoría para este caso ambas

aproximaciones deben de producir estimados libres de error. En la Fig 4.12 se observa que ambas aproximaciones son buenas, aunque los estimados más limpios son los obtenidos mediante TFFT.

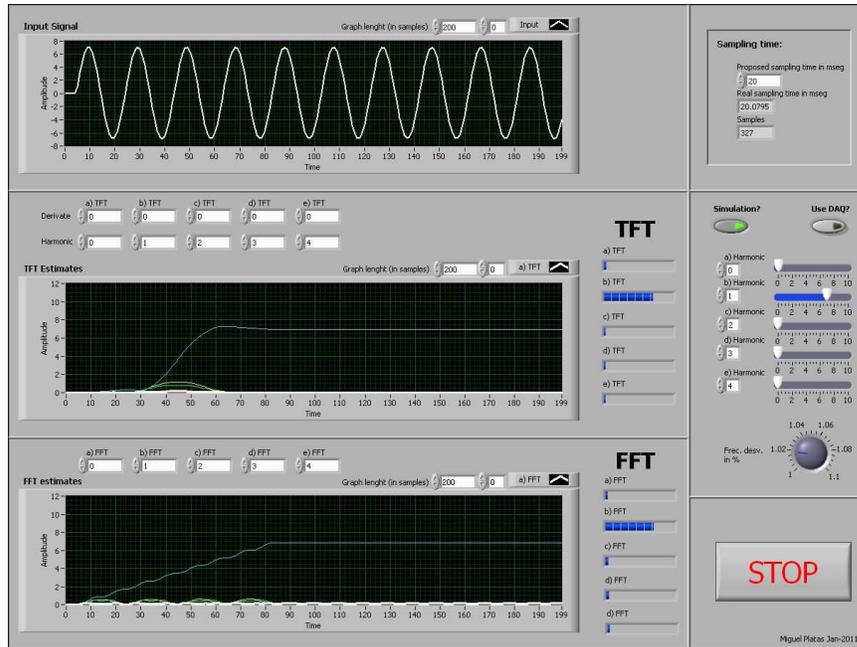


Figura 4.13: Escalón en amplitud en la primera armónica.

La Fig. 4.13 presenta la respuesta a un cambio abrupto en la amplitud de la primer armónica. Note que el transitorio de la TFT es más rápido que el de la FFT a pesar de que ambos estimadores presentan un retardo inherente al proceso de filtrado de dos ciclos¹. Lo anterior se debe a que en el caso de la TFT la respuesta impulsional de los filtros se encuentra más concentrada alrededor del centro de la ventana de observación temporal. Con respecto al régimen permanente se tiene que ambas aproximaciones son buenas debido a que la señal es periódica de frecuencia fundamental $f_i = f_d$.

Los coeficientes estimados para un escalón de 10% en frecuencia ($f_i = 1.1f_d$) son mostrados en la Fig. 4.14. Note que en este caso los estimados de la TFT aun representan correctamente el contenido frecuencial de la señal analizada. Por otra parte los generados por la FFT presentan severos errores. Estos presentan magnitudes menores a las verdaderas debido a la curvatura de la banda de paso de los filtros implícitos en la FFT.

¹La longitud del estimador usado es de cuatro ciclos en ambos casos.

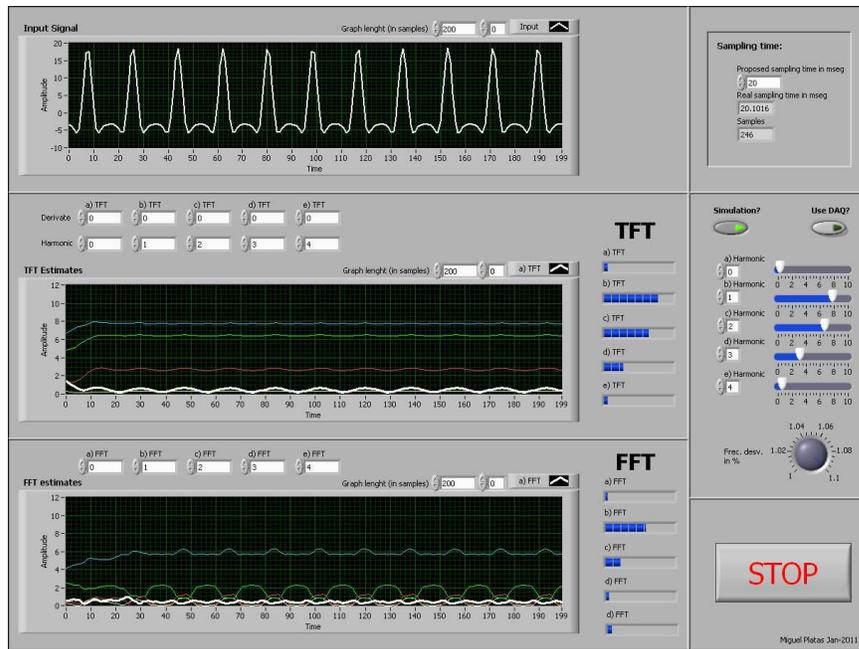


Figura 4.14: Estimados para un offset de 10% en frecuencia, el error generado es menor en la TFT.

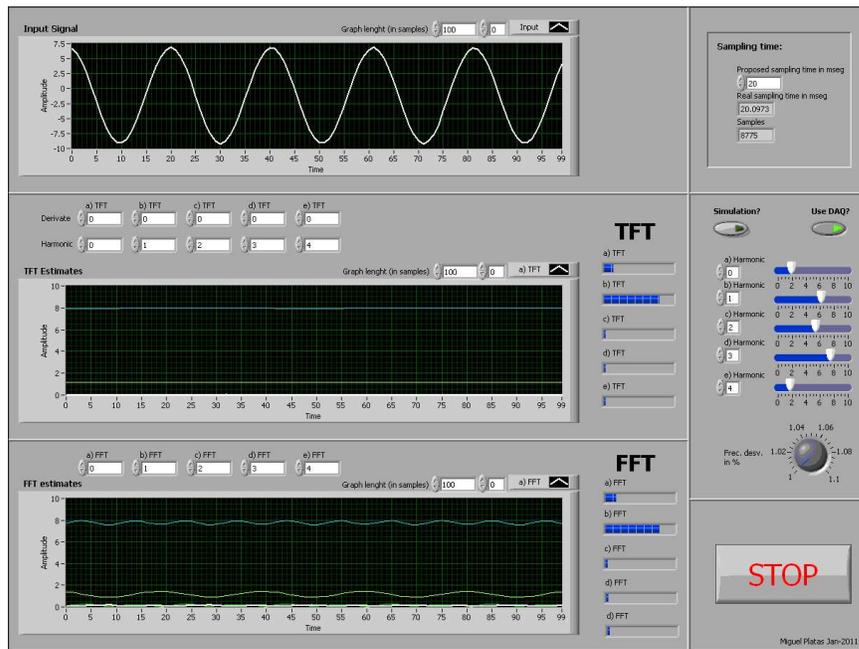


Figura 4.15: Estimados para un procesamiento en tiempo real usando la USB-6009.

La Fig. 4.15 muestra la estimación de una señal de frecuencia fundamental de aproximadamente 5 Hertz² adquirida con la tarjeta USB-6009. La señal adquirida

²Se elige esta frecuencia fundamental debido a limitaciones en el período de muestreo al trabajar con la tarjeta de adquisición de datos.

está compuesta por la primera armónica y la componente de CD. al igual que en los casos anteriores, la TFT produce estimados más limpios. Los errores de la FFT se deben a que la frecuencia de la señal no es idéntica a la frecuencia fundamental para la cual se realizaron ambos algoritmos, es decir $f_i \approx f_d = 5$ Hz.

Finalmente se probó el algoritmo en el chip FPGA. Se realizaron pruebas con las frecuencias fundamentales 50 Hz, 60 Hz, 100 Hz y 1 KHz produciendo resultados satisfactorios en todos los casos. La Fig. 4.16 muestra la interfase usada para comunicarse con el estimador elaborado sobre el chip FPGA.

Los resultados anteriores comprueban el correcto funcionamiento del algoritmo. Como era de esperarse, el algoritmo permite la estimación armónica ante desviaciones en frecuencia acotadas. En adición a lo anterior presenta una mejora en la detección del transitorios en comparación con la FFT. Se mostró que en todos los casos los estimados más limpios son los obtenidos con TFT.

4.4. Conclusiones

Fue posible implementar el estimador TFT en análisis en línea (considerando el retraso constante inherente al filtrado) y fuera de línea. En todos los casos presentados se mejoró la aproximación al añadir los nuevos elementos a la base. El desempeño del estimador fue comparado con el de la FFT mediante simulaciones y aplicaciones en tiempo real. Para medir el desempeño del estimador se uso el criterio NRMSE.

Se mostró que el estimador propuesto posee propiedades muy interesantes como lo son la separación de componentes armónicos, el seguimiento de las variaciones de los mismos y la capacidad de trabajar ante variaciones en frecuencia, por supuesto siempre que estas sean acotadas.

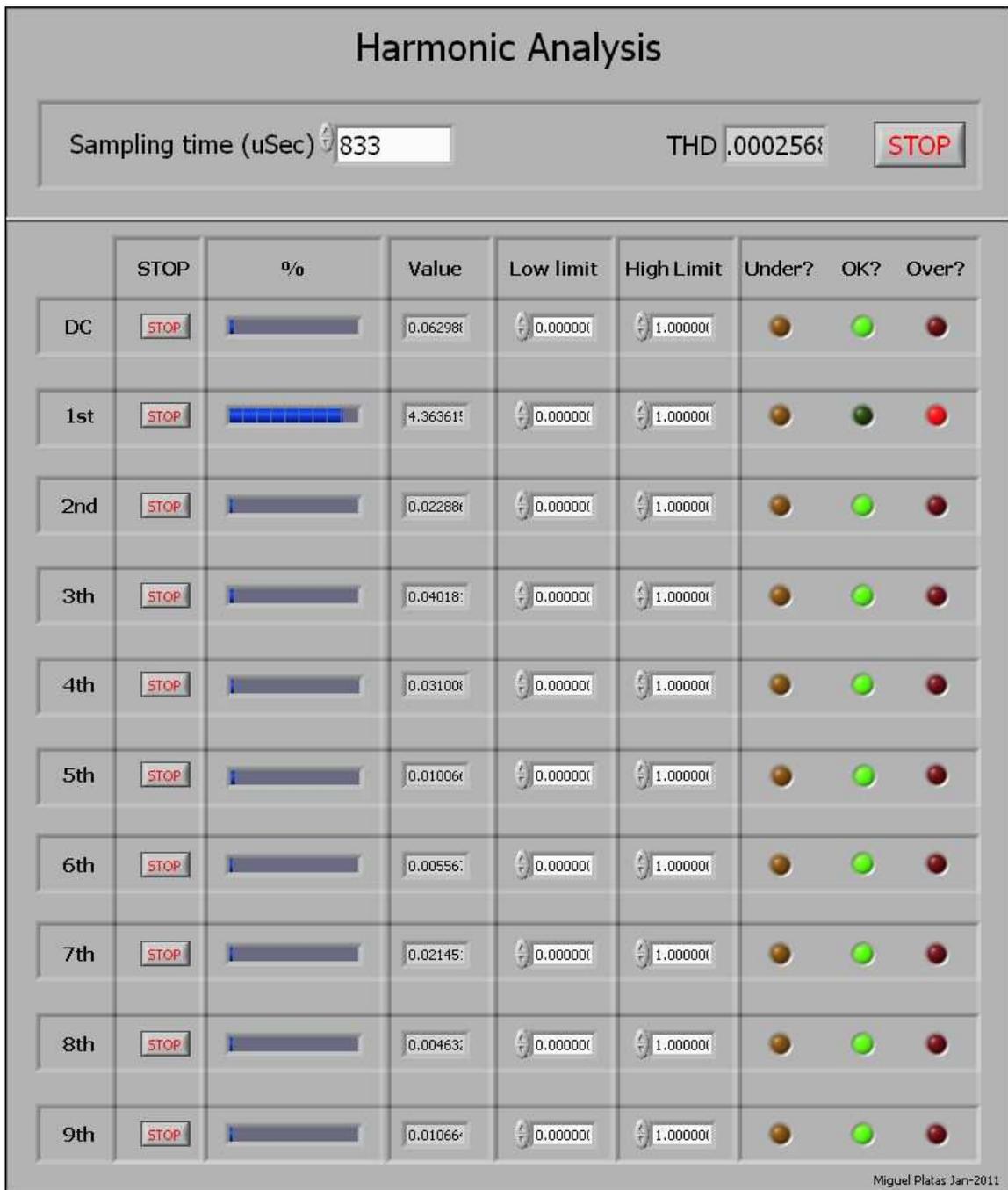


Figura 4.16: Interface de usuario para el chip FPGA, mostrando estimación de una señal sinusoidal de 60 Hz.

Capítulo 5

Conclusiones y recomendaciones

Este trabajo presentó al estimador armónico denominado transformada Taylor-Fourier. El mismo fue presentado como una extensión al análisis de Fourier al expandir el comportamiento de cada armónica por una señal suave en lugar de un coeficiente constante. El uso de este modelo relajado permitió una mejor estimación (con respecto a la FFT) del contenido armónico de una señal ante oscilaciones limitadas en banda. Lo anterior se justifica al demostrar que los nuevos coeficientes se acercan más al valor real de las componentes armónicas en comparación a los coeficientes de Fourier. Estos resultados se comprobaron teórica y prácticamente mediante una serie de ejemplos.

Se le da especial importancia al caso discreto, ya que este algoritmo es necesario en la etapa de implementación. Fue demostrado que en este caso el estimador puede ser visto como un banco de filtros FIR máximamente lisos. Estos filtros poseen ganancias de diferenciadores ideales alrededor de las frecuencias armónicas. Por lo tanto los estimados estarán libres de error cuando el contenido frecuencial de la señal de entrada se encuentre alrededor de éstas.

Ciertamente la TFT presenta una carga computacional mayor a la DFT debido al aumento en los coeficientes a estimar. Para minimizar este problema se diseñaron varios métodos para reducir la carga computacional del algoritmo. Entre estos destaca el uso del algoritmo FFT para diseñar e implementar la TFT.

Finalmente el algoritmo TFT se implementó en Hardware, específicamente en una tarjeta FPGA, obteniendo resultados satisfactorios. Entre estos resultados resalta la respuesta ante transitorios y la capacidad de estimar correctamente la evolución de cada componente armónico ante oscilaciones.

Es importante recalcar que el algoritmo TFT presenta algunas características

indeseables, en parte estas características se deben a la herencia de la DFT. Entre las mismas se encuentran: La presencia de un retardo en la estimación, la generación de errores ante oscilaciones de un ancho de banda considerable, y la posible infiltración de componentes inter-armónicas. A pesar de lo anterior, el algoritmo TFT es siempre más adecuado que la DFT, sobretodo si la señal a analizar es cuasi-periódica.

5.1. Objetivos alcanzados

- Se logró construir una expansión a la DFT mediante una serie de potencias modulando cada frecuencia armónica.
- Debido a la naturaleza de expansión, se garantiza disminuir la norma del error con respecto al error de Fourier.
- Fue posible disminuir la carga computacional necesaria para construir al estimador.
- Se implementó el estimador en tiempo real en hardware FPGA. Obteniendo mejores resultados que el análisis armónico convencional en base a FFT.

5.2. Limitaciones

- La magnitud del error depende del contenido frecuencial de la entrada.
- Es posible generar errores cuando el espectro de la señal de entrada no se encuentra dentro de las ganancias máximamente lisas del estimador.
- Los estimados no son instantáneos, ya que presentan un retardo debido a la naturaleza FIR del banco de filtros usado.
- Ante cambios frecuenciales, los errores se magnifican en las armónicas de alto orden.

5.3. Publicaciones

- Miguel Angel Platas-Garza and José Antonio de la O Serna, Dynamic harmonic analysis through Taylor Fourier transform. *IEEE Trans. on instrumentation and measurement*. vol. 60, n0. 3, pp. 804-813, march 2011.

- Miguel Angel Platas-Garza and José Antonio de la O Serna, Dynamic phasor and frequency estimases through maximally flat differentiators. *IEEE Trans. on instrumentation and measurement*. vol 59, no. 7, pp. 1803-1811, july 2010
- José Antonio de la O Serna and Miguel Angel Platas-Garza, Maximally flat differentiators through Taylor decomposition. *Digital Signal Processing*. vol. 21, no. 2, pp. 183-194, march 2011.

5.4. Trabajos futuros

- Buscar posibles aplicaciones en distintas áreas.
- Vincular la metodología propuesta con el enfoque de análisis multi-resolución.
- Usar filtrado adaptativo, en el cual se ajusten automáticamente los parámetros ante desviaciones en frecuencia.

Apéndice A

Uso de la matriz de Vandermonde en el cálculo de la ecuación de análisis en el caso determinado

Un caso muy especial es el del caso determinado en el cual se considera una sola armónica en el modelo de señal¹. Al igual que en el caso general, en este caso la relación que existe entre los coeficientes de la aproximación y las muestras de la señal se expresa por $\mathbf{x} = \mathbf{B}\phi$, la diferencia es que \mathbf{B} está dada por la siguiente matriz cuadrada:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -N_h & N_h^2 & \dots & (-N_h)^N \\ 1 & -N_h + 1 & (-N_h + 1)^2 & \dots & (-N_h + 1)^N \\ 1 & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N_h - 1 & (N_h - 1)^2 & \dots & (N_h - 1)^N \\ 1 & N_h & N_h^2 & \dots & N_h^N \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

note que los elementos de \mathbf{B} cumplen con la siguiente relación:

$$b_{r,i} = \left((r-1) - \frac{N_h}{2} \right)^{i-1}, \quad \text{para: } r, i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{A.2})$$

¹Se elige el caso de estimación de corriente directa $\omega = 0$, si perdida de generalidad este estimador se puede trasladar a cualquier otra frecuencia armónica $\omega = \omega_i$ $i = -H, \dots, -1, 0, 1, \dots, H$ mediante la adecuada modulación.

La matriz \mathbf{B} se puede definir solamente por los elementos de su segunda columna \mathbf{b} , ya que los elementos de la i -ésima columna se pueden definir al elevar a la potencia $i - 1$ cada elemento de la segunda columna, es decir:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^0 & \mathbf{b}^1 & \mathbf{b}^2 & \dots & \mathbf{b}^n \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

donde la notación \mathbf{b}^i indica elevar a la potencia i cada uno de los elementos del vector \mathbf{b} (segunda columna de \mathbf{B}).

Debido a su peculiar estructura \mathbf{B} es una matriz de Vandermonde, lo cual se puede aprovechar para obtener su inversa \mathbf{B}^{-1} , la cual define la ecuación de análisis $\phi = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}$. A continuación se muestra la obtención de \mathbf{B}^{-1} .

A.1. Obtención de \mathbf{B}^{-1}

Esta sección presenta un pequeño resumen de [46], en donde se muestra como calcular eficientemente la inversa de una matriz de Vandermonde. Debido a que \mathbf{B} es Vandermonde, es posible factorizarla en el producto de dos matrices triangulares:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{U} \quad (\text{A.4})$$

donde $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ representa una matriz triangular inferior y $\mathbf{U} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ una matriz triangular superior. Ambas matrices son no singulares debido a que ambas son cuadradas, triangulares y con elementos no nulos en su diagonal. Entonces, es claro que la inversa de \mathbf{B} está dada por:

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

La ventaja de utilizar esta factorización consiste en la facilidad que existe para calcular las inversas \mathbf{U}^{-1} y \mathbf{L}^{-1} , ya que los elementos de dichas matrices pueden obtenerse mediante simples fórmulas recursivas sin necesidad de algún cálculo complejo. A continuación se muestran las formulas recursivas usadas en la obtención de dichos elementos. Estas formulas son tomadas de [46].

Los elementos de \mathbf{U}^{-1} están dados por:

$$u_{r,c} = \begin{cases} 1 & r = c, \\ 0 & r > c, \\ u_{r-1,c-1} - u_{r,c-1}b_{c-1} & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

mientras que los elementos de \mathbf{L}^{-1} están dados por:

$$l_{r,c} = \begin{cases} 0 & r < c, \\ 1 & r = c = 1, \\ \prod_{k=1, k \neq j}^r \frac{1}{b_c - b_k} & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

por lo tanto las matrices \mathbf{U}^{-1} y \mathbf{L}^{-1} se dan por:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & b_1 b_2 & -b_1 b_2 b_3 & \dots \\ 0 & 1 & -(b_1 + b_2) & b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_3 b_1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -(b_1 + b_2 + b_3) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{b_1 - b_2} & \frac{1}{b_2 - b_1} & 0 & \dots \\ \frac{1}{(b_1 - b_2)(b_1 - b_3)} & \frac{1}{(b_2 - b_1)(b_2 - b_3)} & \frac{1}{(b_3 - b_1)(b_3 - b_2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Entonces, para calcular \mathbf{B}^{-1} solo es necesario calcular los elementos de \mathbf{L}^{-1} y \mathbf{U}^{-1} , para después realizar la multiplicación de las matrices triangulares resultantes.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de esta técnica, al igual que en los ejemplos anteriores se diseñan estimadores de corriente directa ($\omega = 0$) para facilitar los cálculos numéricos.

A.1.1. Ejemplo de aplicación - Polinomio de segundo orden

Considere el caso de un estimador de CD, la evolución de la CD se representa con un polinomio de Taylor de segundo orden, de acuerdo a (2.14) se elige un número de muestras $N = 3$, por lo cual la matriz \mathbf{B} queda definida por:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Las formulas recursivas dadas en (A.6) y (A.7) son usadas para calcular las matrices de la factorización (A.5), las cuales están dadas por:

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

por lo cual, para calcular la inversa de \mathbf{B} sólo es necesario realizar la multiplicación $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}$:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & -1 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

A.1.2. Ejemplo de aplicación - Polinomio de cuarto orden

En este segundo ejemplo, también se considera el caso de un estimador de CD, en el cual se elige un polinomio de cuarto orden para representar la evolución de la señal, entonces se tienen los siguientes parámetros:

$$H = 1, \quad K = 4, \quad N = 5. \quad (\text{A.13})$$

La matriz \mathbf{B} que relaciona los coeficientes de la expansión con las muestras de la señal de entrada se da por:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Al igual que en (A.10)-(A.12), el procedimiento para encontrar la inversa de \mathbf{B} consiste en representar a \mathbf{B} como el producto de dos matrices triangulares, para después calcular las inversas de las matrices triangulares \mathbf{U} y \mathbf{L} mediante formulas recursivas.

$$\mathbf{U}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Observe que la matriz \mathbf{L}^{-1} calculada en el ejemplo anterior está contenida en la matriz mostrada en \mathbf{L}^{-1} (A.15), lo cual no se cumple para \mathbf{U} . Finalmente, se obtiene

\mathbf{B}^{-1} al multiplicar \mathbf{U}^{-1} y \mathbf{L}^{-1} .

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{288} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 288 & 0 & 0 \\ 24 & -192 & 0 & 192 & -24 \\ -12 & 192 & -360 & 192 & -12 \\ -24 & 48 & 0 & -48 & 24 \\ 12 & -48 & 72 & -48 & 12 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

La i -ésima fila de \mathbf{B}^{-1} representa la respuesta impulsional del i -ésimo estimador asociado a la estimación de la de la i -ésima derivada temporal. Note que, las sumas de los elementos de cada hilera de la matriz \mathbf{B}^{-1} corresponde a 1 para la primera columna y 0 para las restantes, esto corresponde a condiciones máximamente lisas, las condiciones máximamente lisas restantes se cumplen debido a que:

$$\sum_{k=-2}^2 v_{r,c}(c)^{k-1} = \begin{cases} 1 & r = k, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad r, c = 1, \dots, N, \quad (\text{A.17})$$

donde $v_{r,c}$ representa al elemento de la r -ésima fila y c -ésima columna de \mathbf{B}^{-1} .

Observe que los estimadores de orden par están dados por respuestas impulsionales pares, mientras que los de orden impar están dados por respuestas impulsionales impares. Lo cual se cumple también en el caso general (ver lema 3.1).

Por último, se tiene que este método encaja con la filosofía de calcular solamente la respuesta impulsional de interés, no es necesario realizar completamente el cálculo de \mathbf{B}^{-1} para obtener alguna de sus filas.

Nota A.1 Sea B una matriz de Vandermonde dada por (A.1), sean $\mathbf{u}_c \in \mathcal{R}^N$ $c = 1, \dots, N$ las columnas de la matriz \mathbf{U}^{-1} y sean $\mathbf{l}_r \in \mathcal{R}^N$ $r = 1, \dots, N$ las filas de la matriz \mathbf{L}^{-1} . Entonces, para calcular la i -ésima fila de \mathbf{B}^{-1} , la cual representa la respuesta impulsional asociada al i -ésimo diferenciador, sólo es necesario calcular la i -ésima fila de \mathbf{U}^{-1} y las primeras N_p columnas de \mathbf{L}^{-1} para el caso de longitud par $N = 2N_p$, o las primeras $N_i + 1$ columnas de \mathbf{L}^{-1} en el caso impar $N = 2N_i + 1$.

Es decir, para el caso de longitud par se tiene que:

$$\begin{pmatrix} c_{i,-N_p} & c_{i,-N_p+1} & c_{i,2} & c_{i,1} & c_{i,0} \end{pmatrix} = \mathbf{u}_i \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 & \mathbf{l}_2 & \dots & \mathbf{l}_{N_p} & \mathbf{l}_{N_p+1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

donde, en ambos casos $c_{i,j}$ representa al j -ésimo coeficiente del i -ésimo estimador, además si el diferenciador es de orden impar no se necesita calcular $c_{i,0}$ debido a que es nulo por tratarse de una respuesta impulsional con simetría impar.

Prueba.

Directamente del lema 3.1, debido a las propiedades de simetría del estimador.

□

Apéndice B

Reducción de lóbulos laterales mediante la solución de mínimos cuadrados ponderados

Como se comentó en el Capítulo 2, el modelo de señal usado solamente asegura una baja infiltración de los componentes frecuenciales alrededor de las frecuencias armónicas. Por lo tanto el estimador es sensible a componentes frecuenciales interarmónicos (fuera de las vecindades de las armónicas).

Para reducir la sensibilidad del estimador con respecto a los componentes interarmónicos es posible utilizar el procedimiento descrito en [14], esta propuesta consiste en utilizar el criterio de mínimos cuadrados ponderados (*weighted least squares*, WLS) en lugar del criterio LS. La técnica reduce la filtración de componentes interarmónicos debido a que disminuye el nivel de los lóbulos laterales de los filtros FIR asociados al estimador. La modificación de la respuesta en frecuencia se debe a que la respuesta en frecuencia del estimador está formada por una combinación lineal del espectro de la ventana usada como factor de ponderación en el criterio de WLS y sus derivadas. Por lo tanto la elección de una ventana con bajos lóbulos laterales implicará una respuesta en frecuencia con bajos lóbulos laterales.

A continuación se muestra la expansión de los resultados de [14] para estimación fasorial a la estimación de un conjunto de armónicas.

B.1. Efecto de la ventana en la respuesta en frecuencia

La solución de LS minimiza el criterio de error:

$$J = (\mathbf{x} - \mathbf{B}\varphi)^H(\mathbf{x} - \mathbf{B}\varphi), \quad (\text{B.1})$$

por otro lado si se elige un factor de ponderación para dar más peso a los errores del centro del intervalo de observación se obtendrá una mejoran los estimados de bajo orden de la serie, ya que estos son dominantes en el centro del intervalo. Para ponderar los errores en el intervalo es posible usar el siguiente criterio

$$J = (\mathbf{x} - \mathbf{B}\varphi)^H \mathbf{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{B}\varphi) \quad (\text{B.2})$$

donde \mathbf{Q} es una matriz diagonal, la cual contiene las muestras de la ventana elegida en su diagonal. La solución óptima para este caso es tal que cumple $\frac{\partial J}{\partial \varphi} = 0$ y $\frac{\partial^2 J}{\partial \varphi^2} > 0$, y está dada por:

$$\hat{\varphi} = (\mathbf{B}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{Q}^H \mathbf{x}. \quad (\text{B.3})$$

Los coeficientes estimados usando (B.3) son tal que se cumple el siguiente conjunto de ecuaciones normales:

$$\int \varphi_i^*(t) q(t) x(t) dt = \sum_j \alpha_j \int \varphi_i(t) q^2(t) \varphi_j^*(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots \quad (\text{B.4})$$

Reemplazando el modelo de señal usado, se tiene:

$$\gamma_{(r,R)} = \sum_c \sum_C \alpha_{(c,C)} g_{(r,R),(c,C)}, \quad \begin{array}{l} r, c = 0, 1, \dots, K \\ R, C = -H, \dots, H \end{array} \quad (\text{B.5})$$

con $g_{(r,R),(c,C)}$ y $\gamma_{(r,R)}$ dadas por:

$$g_{(r,R),(c,C)} = \int_{-\Delta}^{\Delta} t^{r+c} q^2(t) e^{-j2\pi f(C-R)t} dt \quad \begin{array}{l} r, c = 0, 1, \dots, \kappa \\ R, C = -H, \dots, H \end{array} \quad (\text{B.6})$$

y

$$\gamma_{(r,R)} = \int_{-\Delta}^{\Delta} t^r x(t) q(t) e^{j2\pi f R t} dt \quad \begin{array}{l} r = 0, 1, \dots, \kappa \\ R = -H, \dots, H. \end{array} \quad (\text{B.7})$$

Para controlar los componentes inter-armónicos se usan las muestras de una ventana en \mathbf{Q} debido a que la respuesta en frecuencia es formada por combinaciones lineales del espectro de la ventana y sus derivadas. A continuación se prueba este hecho.

Teorema B.1 *Asumiendo una función ventana real y simétrica $q(t)$ como factor de peso en la solución WLS, entonces las respuestas en frecuencia del estimador TFT están formadas por combinaciones lineales del espectro de la ventana usada y sus derivadas y son dadas por:*

$$(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \Gamma_{\kappa, H}(\omega) \quad (\text{B.8})$$

donde $(\mathbf{B}^H \mathbf{B})$ es la matriz de ponderación con elementos dados por (B.6), y $\Gamma_{\kappa, H}(\omega)$ representa el efecto de la ventana, y tiene elementos dados por:

$$\Gamma_{(r,R)} = (-j)^r Q^{(r)}(\omega - \omega_R) \quad \begin{array}{l} r = 0, 1, \dots, \kappa \\ R = -H, \dots, H \end{array} \quad (\text{B.9})$$

Prueba. Introduciendo señales exponenciales al estimador, i.e. $x(t) = e^{j\omega t}$ en (B.7), se tiene que:

$$\gamma_{(r,R)} = \int_{-\Delta}^{\Delta} t^r q(t) e^{j(\omega - \omega_R)t} dt \quad \begin{array}{l} r = 0, 1, \dots, \kappa \\ R = -H, \dots, H \end{array} \quad (\text{B.10})$$

note que (B.10) es la transformada de Fourier de $t^r q(t)$ modulada a ω_R , entonces se tiene que:

$$\Gamma_{(r,R)}(\omega) = j^r \bar{Q}^{(r)}(-\omega + \omega_R) \quad \begin{array}{l} r = 0, 1, \dots, \kappa \\ R = -H, \dots, H \end{array} \quad (\text{B.11})$$

donde $\bar{Q}(\omega)$ indica el complejo conjugado de $Q(\omega)$. Usando las propiedades de simetría de $Q(\omega)$ y sus derivadas:

$$\bar{Q}^{(r)}(\omega) = Q^{(r)}(-\omega) \quad \text{for } r \text{ even,} \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{Q}^{(r)}(\omega) = -Q^{(r)}(-\omega) \quad \text{for } r \text{ odd,} \quad (\text{B.13})$$

se tiene que la respuesta en frecuencia de cada elemento γ es dada por:

$$\Gamma_{(r,R)} = (-j)^r Q^{(r)}(\omega - \omega_R) \quad \begin{array}{l} r = 0, 1, \dots, \kappa \\ R = -H, \dots, H \end{array} \quad (\text{B.14})$$

y debido a que $(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1}$ es el factor de peso, entonces la respuesta en frecuencia del estimador está dada por (B.8). \square

Apéndice C

Cambios frecuenciales

C.0.1. Limitaciones del método

El método presentado en [45] para la estimación de la frecuencia fundamental puede extenderse a la estimación de cualquier frecuencia armónica, mediante este método es posible encontrar la desviación en frecuencia de cada componente

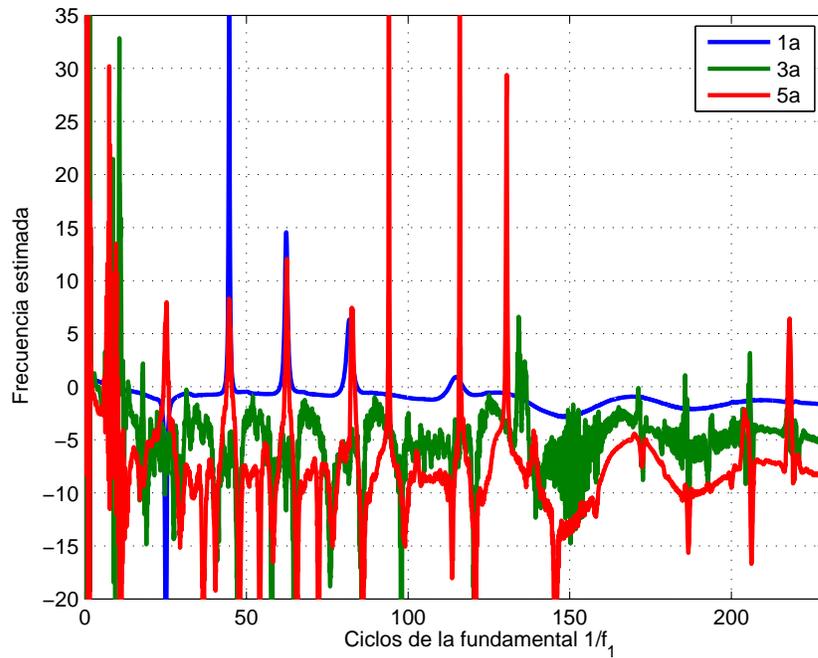


Figura C.1: Fluctuaciones en frecuencia de la 1^{era}, 2^{da} y 3^{era} armónica.

armónico, la cual está dada por:

$$\Delta f_h = \frac{2\text{Im}\{\sigma_{(1,h)}e^{-j\angle\sigma_{(1,h)}}\}}{2|\sigma_{(0,h)}|} \quad (\text{C.1})$$

La Fig. C.1 muestra las frecuencias estimadas de las primeras armónicas del ejemplo mostrado en la sección 4.1, note que las armónicas de orden superior son más ruidosas. Esto se debe a que el banco de filtros usado como estimador se diseñó alrededor de las frecuencias armónicas constantes $f_i = if_1$ para $i = -H, \dots, H$ suponiendo el periodo $\frac{1}{f_1}$ constante. Por lo tanto, si la señal se somete a un cambio en frecuencia de Δf Hz, entonces la primera armónica se localizará ahora en $f_1 + \Delta f$ Hz, la segunda en $f_2 + 2\Delta f$ Hz y la h -ésima en $f_h + h\Delta f$ Hz. Ya que el desplazamiento frecuencial del espectro de la armónica aumentará al aumentar el número de armónica a estimar se tiene que para armónicas grandes el espectro tiende a salir de la banda de paso del filtro.

Para solucionar el problema anterior es posible diseñar la banda de paso de los filtros β tal que $\beta > H\Delta f$, donde H es el número máximo de armónicas incluido en el modelo y Δf es la máxima desviación permitida en la fundamental.

En adición es posible mejorar la estimación ante cambios en frecuencia mediante la adaptación del modelo de señal con respecto a la frecuencia. Es decir, ya que los estimados frecuenciales se encuentran disponibles es posible recalcular los filtros para esta nueva frecuencia.

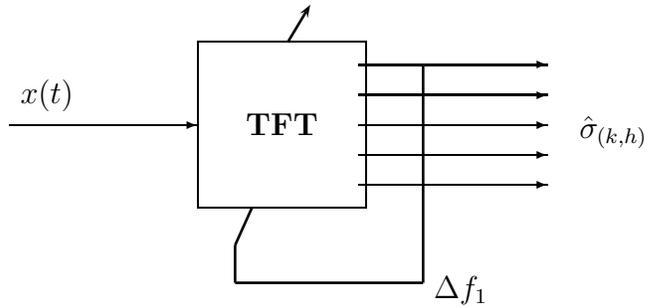


Figura C.2: Diagrama a bloques del estimador con retroalimentación de frecuencia.

A continuación se muestra un ejemplo, en el que se muestra la estimación de una rampa en frecuencia para un banco de filtros con frecuencia fija en 50 Hz y después para el caso de un banco de filtros con frecuencia adaptable.

El banco de filtros usado para realizar la estimación de frecuencia de manera adaptable mostrada en la Fig. C.2 no es más que un conjunto de n bancos de filtros con frecuencia fija con frecuencias fundamentales en f_a, f_b, f_c, \dots , si la frecuencia fundamental estimada se encuentra más cerca de f_a se usará el banco a , si la frecuencia estimada se acerca a f_b se usará el banco b y así sucesivamente.

Para disminuir el error en la estimación se puede disminuir la separación entre las frecuencias elegidas para diseñar los bancos.

En las Figs. C.4-C.5 se muestra otro ejemplo en el cual se estima una señal cuya frecuencia es dada por una señal sinusoidal. La Fig. C.4 muestra la estimación con un sólo banco de filtros, note que la estimación de la frecuencia de la armónica de alto orden es más ruidosa debido a que las oscilaciones en frecuencia son mayores. En contraparte, la Fig. C.5 muestra la estimación obtenida al usar conjunto de tres bancos de filtros, cada banco tiene una frecuencia fundamental de $f_a = 40$ Hz, $f_b = 50$ Hz y $f_c = 60$ Hz. Para elegir el banco a utilizar se usa la retroalimentación de la frecuencia estimada.

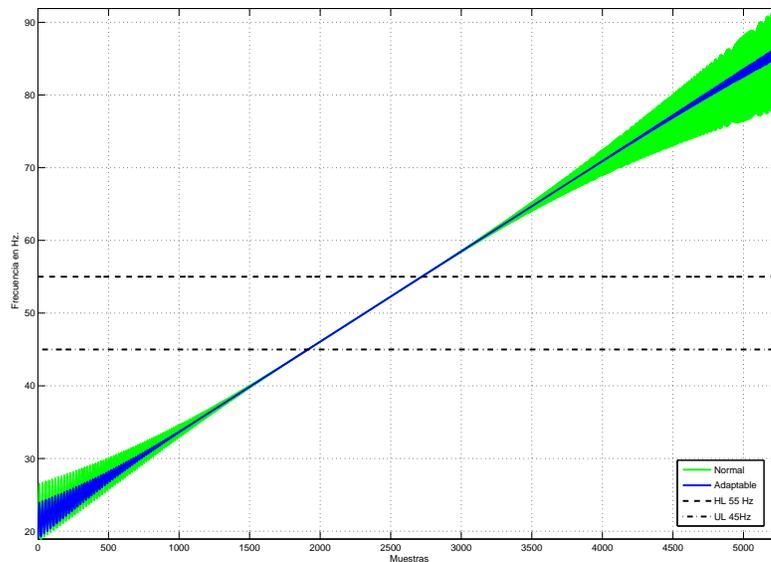


Figura C.3: Frecuencia estimada de manera fija y adaptativa.

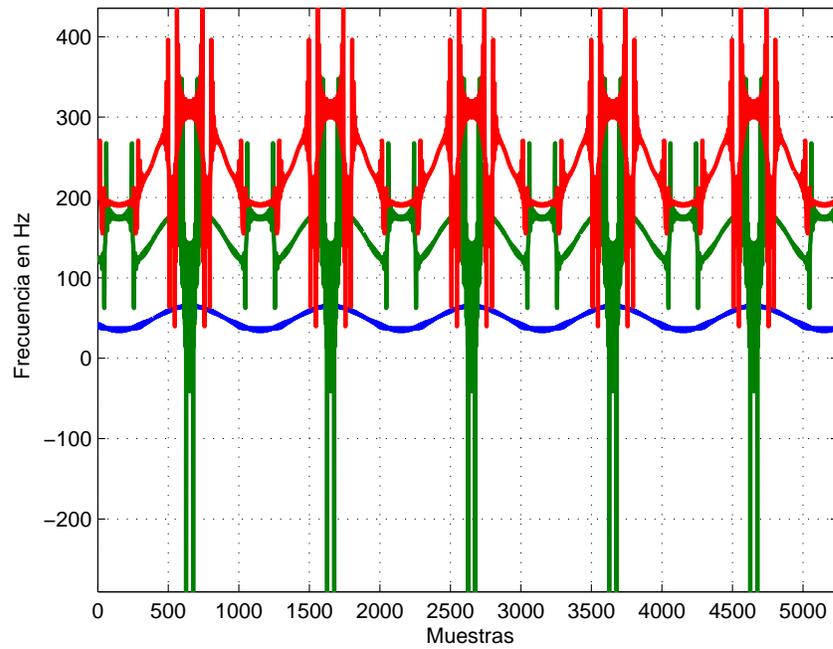


Figura C.4: Frecuencia estimada con un banco de frecuencia fija en 50 Hz.

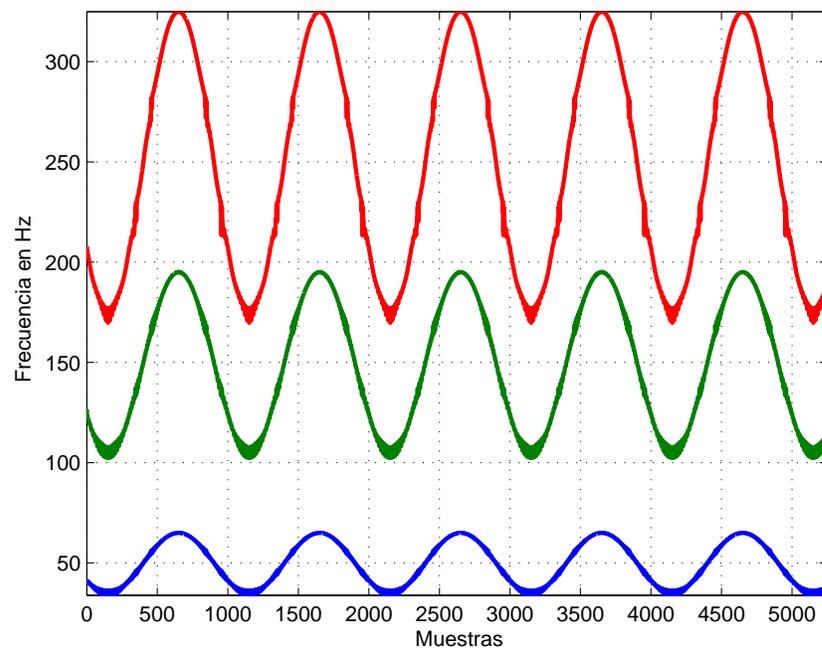


Figura C.5: Frecuencia estimada al conmutar entre bancos de frecuencia fija en $f_a = 40$ Hz, $f_b = 50$ Hz, y $f_c = 60$ Hz.

Bibliografía

- [1] J. B. J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*. Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [2] A. Haar, “Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme,” *Mathematische Annalen*, vol. 69, no. 69, pp. 331–371, 1910.
- [3] A. Oppenheim, R. Schafer, and J. Buck, *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall, 1999.
- [4] E. Brigham, *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice Hall, 1988.
- [5] E. W. Weisstein, “Generalized fourier series.” *MathWorld - A Wolfram Web Resource*. <http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedFourierSeries.html>.
- [6] M. Vetterli and J. Kovacevic, *Wavelets and subband coding*. Prentice-Hall PTR, 1995.
- [7] G. Strang and T. Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [8] S. Kasaei, M. Deriche, and B. Boashash, “A novel fingerprint image compression technique using wavelets packets and pyramid lattice vector quantization,” *Image Processing, IEEE Transactions on*, vol. 11, no. 12, pp. 1365 – 1378, Dec. 2002.
- [9] M. Sondka, *Image processing, analysis, and machine vision*. International Thomson, 1999.
- [10] V. D. A. Corino, L. T. Mainardi, M. Stridh, and L. Sormo, “Improved time frequency analysis of atrial fibrillation signals using spectral modeling,”

- Biomedical Engineering, IEEE transactions on*, vol. 55, no. 12, pp. 2723–2730, december 2008.
- [11] F. Zhang and Y. Yan, “Selective harmonic elimination pwm control scheme on a three-phase four-leg voltage source inverter,” *Power Electronics, IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 7, pp. 1682 – 1689, july 2009.
- [12] A. Kamitani, T. Takayama, and S. Ikuno, “Axisymmetric simulation of inductive measurement method for critical current density in bulk hts: Relation between third harmonic voltage and coil current,” *Applied Superconductivity, IEEE Transactions on*, vol. 19, no. 3, 2009.
- [13] J. A. de la O, “Dynamic phasor estimates for power system oscillations,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 5, pp. 1648–1657, october 2007.
- [14] M. Platas-Garza and J. de la O Serna, “Dynamic phasor and frequency estimates through maximally flat differentiators,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 59, no. 7, pp. 1803 –1811, july 2010.
- [15] A. Papoulis, *Signal Analysis*. New York: McGraw Hill, 1977, p 62.
- [16] J. G. Proakis, *Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications*. Prentice Hall, 2000.
- [17] C. Liguori, A. Paolillo, and A. Pignotti, “Estimation of signal parameters in the frequency domain in the presence of harmonic interference: A comparative analysis,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 55, no. 2, pp. 562–569, april 2006.
- [18] I. Santamaria-Caballero, C. J. Pantaléon-Prieto, J. Ibñez-Días, and E. Gómez-Cosío, “Improved procedures for estimating amplitudes and phases of harmonics with application to vibration analysis,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 47, no. 1, pp. 209–214, february 1998.
- [19] J. de la O, H. Altuve, and I. Diaz, “A new digital filter for phasor computation. i. theory [power system protection],” *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. 13, no. 3, pp. 1026 –1031, aug 1998.

- [20] F. Zhang, Z. Geng, and W. Yuan, "The algorithm of interpolating windowed fft for harmonic analysis of electric power system," *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 16, no. 2, pp. 160 –164, apr 2001.
- [21] S. Samadi, A. Nishihara, and H. Iwakura, "Universal maximally flat lowpass fir systems," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 48, no. 7, pp. 1956 –1964, jul 2000.
- [22] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 2002.
- [23] J.-Z. Yang, C.-S. Yu, and C.-W. Liu, "A new method for power system signal harmonic analysis," *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 20, no. 2, pp. 1235–1239, april 2005.
- [24] V. Terzija, D. Cai, V. Stanojevi? and, and G. Strbac, "Frequency and power components estimation from instantaneous power signal," *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. PP, no. 99, pp. 1 –10, 2011.
- [25] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. Series D, pp. 35–45, 1960.
- [26] K. Yu, N. Watson, and J. Arrillaga, "An adaptive kalman filter for dynamic harmonic state estimation and harmonic injection tracking," *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 20, no. 2, pp. 1577 – 1584, april 2005.
- [27] J. A. de la O Serna and J. Rodriguez-Maldonado, "Instantaneous oscillating phasor estimates with taylor^k-kalman filters," *Power Systems, IEEE Transactions on*, vol. PP, no. 99, p. 1, 2011.
- [28] D. Newland, "Harmonic wavelet transform," *Proc. R. Soc. Lond.*, no. 443, pp. 203 –225, 1993.
- [29] I. Daubechies, "Ten lectures on wavelets," in *SIAM*, 1992.
- [30] G. Strang, "The search for a good basis," *Numerical Analysis, D. Griffiths, D. Higham, and A. Watson, eds., Addison Wesley Longman*, 1997.
- [31] W. Morsi and M. El-Hawary, "Wavelet packet transform-based power quality indices for balanced and unbalanced three-phase systems under stationary or

- nonstationary operating conditions,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 24, no. 4, pp. 2300–2310, oct. 2009.
- [32] J. J. Tomic, M. D. Kusljevic, and V. V. Vukicic, “A new power system digital harmonic analyzer,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 22, pp. 772–780, 2007.
- [33] M. Bettayeb and U. Qidwai, “A hybrid least squares-ga-based algorithm for harmonic estimation,” *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 18, no. 2, pp. 377–382, april 2003.
- [34] S. Mishra, “A hybrid least square-fuzzy bacterial foraging strategy for harmonic estimation,” *Evolutionary computation, IEEE transactions on*, vol. 9, no. 1, pp. 61–73, february 2005.
- [35] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 4th ed. New York: McGraw Hill, 2000.
- [36] A. Stephen and X. He, “Least squares fitting data by polinomials,” *IEEE Instrumentation and measurement magazine*, vol. 47, no. 9, 2001.
- [37] M. Vetterli, J. Kovacevic, and V. K. Goyal, *The World of Fourier and Wavelets: Theory, Algorithms and Applications*. Downloadable from <http://www.fourierandwavelets.org>, 2009.
- [38] M. Platas, *Diseño de filtros digitales lisos mediante ajuste de polinomios de Taylor*. UANL: Tesis de maestría, 2008.
- [39] M. P. Garza and J. de la O Serna, “Dynamic phasor estimates through maximally flat differentiators,” in *Power and Energy Society General Meeting - Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE*, 2008, pp. 1–8.
- [40] J. A. de la O Serna and M. A. Platas-Garza, “Maximally flat differentiators through wls taylor decomposition,” *Digital Signal Processing*, vol. 21, no. 2, pp. 183–194, march 2011. [Online]. Available: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200410001491>
- [41] M. Platas-Garza and J. de la O Serna, “Dynamic harmonic analysis through taylor-fourier transform,” *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 60, no. 3, pp. 804–813, march 2011.

- [42] J. de la O Serna, "Calculating taylor-fourier transform with fft," *Reporte interno, Doctorado en ingeniería eléctrica, FIME-UANL*, mayo 2010.
- [43] S. Horowitz, , and A. G. Phadke, *Power system relaying*. New york: Wiley, 1992.
- [44] J.-Z. Yang and C.-S. Yu, "A new method for power system signal harmonic analysis," *Power Delivery, IEEE Transactions on*, vol. 20, no. 2, pp. 1235–1239, april 2005.
- [45] A. Torres and J. de la O, "Shank's method for dynamic phasor estimation," *Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 1, pp. 813–819, april 2008.
- [46] R. Turner, "Inverse of the vandermonde matrix with applications," *NASA thecnical note D-3547*, Aug. 1966.