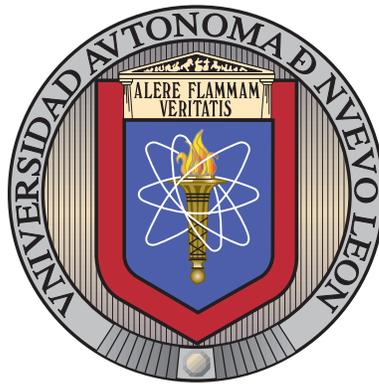


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA EL PROBLEMA
DE LOCALIZACIÓN CAPACITADO EN DOS ETAPAS

POR

EDITH LUCERO OZUNA ESPINOSA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA EL PROBLEMA
DE LOCALIZACIÓN CAPACITADO EN DOS ETAPAS

POR

EDITH LUCERO OZUNA ESPINOSA

EN OPCIÓN AL GRADO DE

DOCTOR EN INGENIERÍA

CON ESPECIALIDAD EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2011

Universidad Autónoma de Nuevo León
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica
División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Heurística lagrangiana para el problema de localización capacitado en dos etapas», realizada por el alumno Edith Lucero Ozuna Espinosa, con número de matrícula 1117587, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Doctor en Ingeniería con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dr. Igor Litvinchev

Asesor

Dra. Ada Margarita Álvarez Socarrás

Revisor

Dra. Socorro Rangel

Revisor

Dr. Miguel Mata Pérez

Revisor

Dr. Karim de Alba Romenus

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, noviembre 2011

*A mis padres y mi hermana, que han sido siempre la base, el apoyo y la fuerza para
cada momento de mi vida.*

ÍNDICE GENERAL

Agradecimientos	XI
Resumen	XIII
1. Introducción	1
1.1. Motivación	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Contribución	3
1.4. Metodología	4
1.5. Estructura de la tesis	5
2. Marco teórico	7
2.1. Problema de localización de instalaciones no capacitado	7
2.2. Problema de localización de instalaciones capacitado	9
2.3. Problema de localización de instalaciones capacitado en dos etapas . .	13
2.4. Aplicaciones	16
3. Relaxaciones lagrangianas	18

3.1. Relajación lagrangiana	18
3.1.1. Construcción de una relajación lagrangiana	27
3.2. Descomposición de subproblemas	32
4. Formulaciones al problema y relajaciones propuestas	35
4.1. Formulaciones	35
4.1.1. Primera formulación	36
4.1.2. Segunda formulación	37
4.2. Relajaciones propuestas	38
4.3. Subgradiente para el problema de localización capacitado en dos etapas	50
5. Método para recuperar soluciones factibles	56
5.1. Introducción	56
5.2. Algoritmo	57
5.3. Ejemplo ilustrativo	59
6. Experimentación y Resultados	64
6.1. Parámetros	64
6.2. Casos en la literatura	82
7. Conclusiones	86
7.1. Trabajo futuro	88
A. Resultados Computacionales	90

B. Formulaciones equivalentes

107

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Esquema del problema de una etapa	8
2.2. Esquema del problema de dos etapas	14
5.1. Ejemplo de tamaño pequeño $A(3, 5, 9)$	59
5.2. Solución lagrangiana del problema	60
5.3. Paso 0 del algoritmo	60
5.4. Pasos 1 y 2 para las plantas y pasos 4 y 5 para los almacenes	62
5.5. Paso 7 del algoritmo para recuperar factibilidad	62
6.1. Calidad promedio de las cotas lagrangianas para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 1.	69
6.2. Calidad promedio de las cotas factibles para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 1.	69
6.3. Calidad promedio de las cotas lagrangianas para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 2.	70
6.4. Calidad promedio de las cotas factibles para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 2.	70

ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Costos de transporte de i a j	50
4.2. Costos de transporte de j a k	51
4.3. Costos fijos para cada i	51
4.4. Costos fijos para cada j	52
6.1. Cotas duales para casos del tipo 1	67
6.2. Cotas factibles para casos del tipo 1	67
6.3. Cotas duales para casos del tipo 2	68
6.4. Cotas factibles para casos del tipo 2	68
6.5. Relajación RB3 para casos del tipo 1	72
6.6. Relajación RB4 para casos del tipo 1	73
6.7. Relajación RB3 para casos del tipo 2	74
6.8. Relajación RB4 para casos del tipo 2	75
6.9. Relajación RB3 para casos del tipo 1.	76
6.10. Relajación RB4 para casos del tipo 1	77
6.11. Relajación RB3 para casos del tipo 2	78

6.12. Relajación RB4 para casos del tipo 2	79
6.13. Análisis de proporción de los parámetros para casos del tipo 1	81
6.14. Análisis de proporción de los parámetros para casos del tipo 2	82
6.15. Comparación de resultados	85
A.1. Resultados para la relajación RA1 tipo 1	91
A.2. Resultados para la relajación RA2 tipo 1	92
A.3. Resultados para la relajación RA3 tipo 1	93
A.4. Resultados para la relajación RA4 tipo 1	94
A.5. Resultados para la relajación RA5 tipo 1	95
A.6. Resultados para la relajación RB1 tipo 1	96
A.7. Resultados para la relajación RB2 tipo 1	97
A.8. Resultados para la relajación RB5 tipo 1	98
A.9. Resultados para la relajación RA1 tipo 2	99
A.10. Resultados para la relajación RA2 tipo 2	100
A.11. Resultados para la relajación RA3 tipo 2	101
A.12. Resultados para la relajación RA4 tipo 2	102
A.13. Resultados para la relajación RA5 tipo 2	103
A.14. Resultados para la relajación RB1 tipo 2	104
A.15. Resultados para la relajación RB2 tipo 2	105
A.16. Resultados para la relajación RB5 tipo 2	106

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a Dios por darme todo lo que me ha dado, familia, amigos, experiencias, oportunidades, la vida que he podido vivir hasta el día de hoy.

A mi familia y amigos, que todos estos años han sido el apoyo y la fuerza que he necesitado, por su amor, su confianza, por ayudarme a avanzar en cada etapa de mi vida.

Al Dr. Igor Litvinchev por sus enseñanzas, por su tiempo, por apoyarme y creer en mi. A mi equipo de trabajo, la Dra. Jania Saucedo y el Dr. Miguel Mata, por su tiempo, comentarios y por toda la ayuda que me han dado a lo largo de este proyecto. A la Dra. Ada Álvarez por su tiempo, disposición y comentarios dedicados a mejorar este trabajo y durante todo el tiempo que llevo en PISIS, al Dr. Karim de Alba por sus comentarios, tiempo y ayuda. A la Dra. Socorro Rangel por su ayuda, por recibirme en la UNESP, por su apoyo y su dedicación, por siempre hacerme sentir bienvenida, y por el tiempo dedicado a este proyecto.

A Yaja, Omar, Vane, Mony y todos mis compañeros de doctorado y maestría, gracias por los buenos momentos, por disfrutar y sufrir conmigo todo este proceso, por la ayuda, por el tiempo, el apoyo y sobre todo la amistad.

A todo el cuerpo académico de PISIS que siempre están dispuestos a ayudarte y aconsejarte, en particular al Dr. Óscar Chacón, por todo su apoyo y su confianza.

A Michelli, Alyne, Herón, todos los chicos de São José do Rio Preto y a los demás que tuve la oportunidad de conocer durante mi estancia en Brasil. Gracias

por ayudarme siempre, por darme la bienvenida, por ser siempre un apoyo para mí, por su amistad, por sus enseñanzas y su paciencia con mi poco conocimiento del portugués, que *saudades* de todos.

Quiero agradecer también a CONACYT, FIME y a la UANL por el apoyo económico para poder realizar el posgrado.

No es posible mencionar aquí a toda la gente a la que me gustaría agradecer, pero gracias a todos los que han sido parte de este proceso y que me han ayudado a disfrutar de todo el viaje hasta aquí.

RESUMEN

Edith Lucero Ozuna Espinosa.

Candidato para el grado de Doctor en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CAPACITADO EN DOS ETAPAS

Número de páginas: 119.

OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO: El objetivo principal de este trabajo consiste en desarrollar e implementar un método heurístico basado en relajaciones lagrangianas al problema de localización capacitado en dos etapas.

La formulación de un problema es de gran importancia para su solución, por ello, en el presente trabajo se estudian dos formulaciones equivalentes del problema de localización capacitado en dos etapas y se busca aprovechar la estructura del mismo con el propósito de poder comparar numéricamente la calidad de varias relajaciones lagrangianas.

Además de encontrar buenas cotas duales otro de los objetivos del presente

trabajo es obtener cotas primales del problema de localización capacitado en dos etapas. En este trabajo, para obtener las cotas primales, se emplea un algoritmo que recupera factibilidad a partir de las soluciones lagrangianas en cada iteración basado en la parte continua de las soluciones y no en la parte binaria que es lo que se hace comúnmente.

Se utiliza el algoritmo del subgradiente para resolver el problema dual en todas las relajaciones. En cada iteración del subgradiente se recupera la solución factible a partir de la solución lagrangiana actual y ésta, a su vez, se utiliza para actualizar el tamaño del paso del algoritmo.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Se comparan numéricamente las diferentes relajaciones lagrangianas propuestas para el problema, las cotas lagrangianas obtenidas así como las cotas factibles encontradas a partir de éstas.

En muchos de los trabajos con enfoques lagrangianos frecuentemente se piensa, de manera implícita, que la relajación que nos da la mejor cota lagrangiana proporciona también la mejor solución factible. Sin embargo, mediante la experimentación encontramos que no siempre es así, pues: a) para una relajación fija la mejor cota (correspondiente a la solución de problema dual) no aporta siempre la mejor cota factible, y b) la relajación lagrangiana más atractiva en términos de calidad de la cota dual no necesariamente nos proporciona la mejor solución factible.

Una de las relajaciones lagrangianas propuestas en este trabajo resulta interesante para la investigación debido a que se descompone en subproblemas sencillos y en la que la solución factible encontrada a partir de esta cota resulta en una buena cota factible para el problema, generalmente dentro del 0.5% de suboptimalidad relativa. Además se observa que para casos de mayor tamaño, la calidad de la cota dual proporcionada por esta relajación lagrangiana mejora su calidad de manera significativa. Con el propósito de evaluar mejor la eficiencia de la metodología propuesta, se trabaja con diferentes conjuntos de instancias.

Los resultados de este trabajo han sido aceptados para su publicación en dos revistas internacionales:

- Litvinchev I., Mata M., Ozuna E. L. Lagrangian heuristic for the two-stage capacitated facility location problem, *Applied and Computational Mathematics*, 10(3), 2011. (Por aparecer).
- Litvinchev I., Ozuna E. L. Lagrangian bounds and a heuristic for the two-stage capacitated facility location problem, *International Journal of Energy Optimization and Engineering*, 1(1), 2012. (Por aparecer).

Se han publicado también en memorias de congresos:

- Litvinchev I., Mata M., Ozuna E. L. Cotas primales y duales para el problema de localización capacitado en dos etapas. Memorias del *XLII Simposium Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*. Bento Gonçalves, Rio Grande do Sul, Brasil. 2010.
- Litvinchev I., Mata M., Ozuna E. L. Comparación de múltiples cotas lagrangianas. Memorias del *III Taller Latino Iberoamericano de Investigación de Operaciones (TLAIO3)*. ISBN: 978-607-7760-20-7. Acapulco, México. 2009.
- Litvinchev I., Mata M., Ozuna E. L. Estudio de cotas lagrangianas para el problema de localización capacitado en dos etapas. Memorias del *VII Congreso Internacional sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico*. ISBN 978-607-95255-1-4. Cuernavaca, Morelos, México. 2009.

Además han sido presentados en congresos y foros internacionales como el XLIV Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, Congreso Internacional de Matemática Aplicada e Informática (ICAMI 2010), XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC 2010), XLII Simposium Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2010), XV Escuela Latinoamericana de

Verano de Investigación de Operaciones (ELAVIO 2010), ALIO-INFORMS Joint International Meeting 2010, III Taller Latino Iberoamericano de Investigación de Operaciones (TLAIO 2009), VII Congreso Internacional sobre Innovación y Desarrollo Tecnológico (CIINDET 2009) y en el ciclo de seminarios del Posgrado en Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la UANL.

Firma del asesor: _____

Dr. Igor Litvinchev

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Los problemas de localización de instalaciones han sido estudiados ampliamente en la literatura, ya que surgen en una gran variedad de situaciones reales (telecomunicaciones, escuelas, hospitales). Básicamente, un problema de localización se caracteriza por los siguientes elementos [Wildbore [2008]]:

- Un conjunto de localizaciones posibles para las instalaciones. Para cada una se tiene información sobre los costos/beneficios de abrir o construir la instalación en dicha localización.
- Un conjunto de clientes que deben ser asignados para su servicio a alguna de las instalaciones. Para los clientes, también se cuenta con información sobre la cantidad de demanda y los costos por ser atendidos desde alguna de las instalaciones.
- Una lista de requerimientos que deben ser cumplidos por las instalaciones abiertas y las asignaciones realizadas a los clientes.
- Una función de costo/beneficio.

El objetivo del problema de localización de instalaciones es encontrar cuáles instalaciones deben ser abiertas de manera que se optimice esa función de costo/beneficio.

Hay una gran variedad de problemas de localización de instalaciones. Si el conjunto de puntos de demanda y localización de las instalaciones es finito, se conoce

como problema de localización de instalaciones discreto. Si todos los datos son exactos, se refiere al modelo como determinístico, si los valores de algunos parámetros son dados por una distribución de probabilidad, el modelo se considera estocástico. Podemos clasificar también el modelo como capacitado o no capacitado, esto es, si las instalaciones cuentan con una capacidad limitada o no para satisfacer la demanda de los clientes.

En este trabajo de investigación nos concentraremos en el problema de localización de instalaciones capacitado en dos etapas (por sus siglas en inglés TSCFLP). En este problema, un único producto es producido en un conjunto de plantas con capacidades conocidas y enviado a un conjunto de almacenes también con capacidades conocidas, desde los cuales se enviará el producto hacia un conjunto de clientes para finalmente abastecer sus demandas. Usar una determinada planta o almacén incurre en un costo fijo, además del costo por transportar cada unidad de producto entre las plantas y los almacenes y entre los almacenes y los clientes.

El objetivo del problema de localización capacitado en dos etapas es determinar cuáles plantas y cuáles almacenes deben utilizarse y cuáles almacenes, así como la cantidad de producto que va de cada planta a cada almacén y de cada almacén a cada cliente.

1.1 MOTIVACIÓN

El manejo de la cadena de suministro implica no solo el movimiento de los bienes, sino también decisiones como dónde producir y dónde localizar plantas y centros de distribución así como cuánto producir en cada lugar.

Las decisiones de localización, además de necesarias, son tal vez las más importantes y difíciles de las para lograr una cadena de suministro eficiente. Éstas constituyen una cuestión estratégica para casi todas las compañías al diseñar su sistema de distribución, siendo la localización de instalaciones y la asignación de

clientes, los principales componentes de este diseño.

Muchas empresas deben ubicar plantas de fabricación y ensamblaje así como almacenes. La capacidad de fabricar y comercializar los productos depende, en parte, de la ubicación de las instalaciones.

En los trabajos estudiados de la literatura, se ha mostrado que los esquemas lagrangianos aportan buenas aproximaciones a la solución del problema. Comúnmente, se relajan las restricciones de satisfacción de la demanda o las restricciones de capacidad de las plantas.

El problema de localización en dos etapas permite aprovechar su estructura para construir esquemas lagrangianos y analizar distintas relajaciones lagrangianas, buscando utilizar una que aporte resultados de buena calidad y que al mismo tiempo sean fáciles de resolver.

1.2 OBJETIVOS

Se busca resolver el problema de localización capacitado en dos etapas mediante el uso de técnicas heurísticas lagrangianas. Se presentan formulaciones basadas en la de Wolsey [1999] para el problema de una sola etapa.

Sabemos que la estructura del problema es muy rica en el sentido de que nos permite definir varias relajaciones lagrangianas diferentes. De entre un conjunto de relajaciones lagrangianas propuestas, se busca identificar aquella que nos proporcione una cota lagrangiana de buena calidad en un tiempo considerable. Además, también se pretende encontrar soluciones factibles al problema.

1.3 CONTRIBUCIÓN

Se consideran dos formulaciones del problema de localización capacitado en dos etapas que nos permiten aprovechar su estructura para definir un conjunto de

relajaciones lagrangianas, de manera que los problemas resultantes son más sencillos de resolver. De forma particular, se trabaja con una relajación lagrangiana que no es usada comúnmente en la literatura, donde se dualizan las restricciones tanto de demanda como de capacidad de planta, pero que, de acuerdo a las formulaciones propuestas, puede descomponerse en subproblemas muy sencillos.

Se implementa un algoritmo para recuperar la factibilidad de las soluciones lagrangianas, en el que, a diferencia de lo estudiado en literatura, se emplea la parte continua de las soluciones lagrangianas y no la parte binaria de las mismas. Este algoritmo nos permite encontrar soluciones factibles de buena calidad, además, es un algoritmo simple y que puede aplicarse de manera general para cualquier relajación propuesta para el problema.

Por lo anterior, la principal contribución de este trabajo, consiste en identificar, de entre las posibles relajaciones, aquella que tiene una estructura que nos permite resolverla de manera muy sencilla y que, al implementar el algoritmo para recuperar factibilidad a partir de las soluciones lagrangianas, aporta cotas primales, así como cotas duales de muy buena calidad para problemas de tamaño grande.

1.4 METODOLOGÍA

Para cumplir con los objetivos se presentan dos formulaciones equivalentes del problema y se comparan numéricamente la calidad de las cotas lagrangianas obtenidas a partir de las relajaciones propuestas, así como la calidad de la cota primal obtenida a partir de estas soluciones lagrangianas mediante un algoritmo heurístico voraz.

El valor óptimo de la relajación lagrangiana se usa como cota dual y la solución lagrangiana se usa como punto de partida o referencia para producir una solución factible. Frecuentemente, una relajación lagrangiana es considerada como buena si produce una cota dual cercana al valor óptimo original, sin embargo, la calidad de

la cota factible obtenida en base a esa solución lagrangiana puede ser tomada en cuenta también al evaluar una relajación.

Resolviendo las relajaciones propuestas por medio del algoritmo del subgradiente, obtenemos cotas lagrangianas del problema y aplicamos un algoritmo simple que recupera factibilidad a partir de dichas soluciones lagrangianas.

Se detectan las relajaciones atractivas, en términos de la calidad de las cotas lagrangianas y las que resultan atractivas en términos de la calidad de las cotas factibles.

1.5 ESTRUCTURA DE LA TESIS

Este trabajo de investigación está organizado como sigue. El capítulo 2 presenta una revisión de la literatura del problema de localización de instalaciones no capacitado (por sus siglas en inglés UFLP) así como la versión capacitada (por sus siglas en inglés CFLP). Además se presenta el estado del arte del problema de localización de instalaciones capacitado de dos etapas (por sus siglas en inglés TSCFLP) y algunas referencias también para el caso no capacitado (por sus siglas en inglés TSUFLP).

La literatura sobre relajaciones lagrangianas, el problema dual lagrangiano y algunos métodos primales y duales para resolver el problema dual lagrangiano se presentan en el capítulo 3.

En el capítulo 4 se presentan algunas aplicaciones del problema así como dos formulaciones equivalentes al TSCFLP y cinco relajaciones lagrangianas para cada una de las formulaciones.

El capítulo 5 es dedicado a las soluciones factibles del TSCFLP obtenidas mediante el algoritmo de refactibilización propuesto. Se presenta el algoritmo y un ejemplo ilustrativo de un caso pequeño.

En el capítulo 6 se presenta la experimentación computacional. Se muestran los tamaños de casos utilizados a lo largo del trabajo de investigación y la forma en que se generan los parámetros. Se presentan también los algoritmos utilizados para resolver el problema dual lagrangiano.

El capítulo 7 incluye las conclusiones derivadas de este trabajo.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presenta la literatura sobre el problema de localización capacitado en dos etapas (TSCFLP). Se dedica una parte de este capítulo al problema capacitado de ubicación de instalaciones (CFLP). EL TSCFLP es una extensión del CFLP, por lo tanto se revisará la literatura en este contexto.

El problema de localización de instalaciones se puede clasificar en distintas categorías dependiendo de las restricciones que se consideran. En el problema de ubicación de instalaciones no capacitado no se consideran límites de capacidad para ninguna de las instalaciones; cada cliente recibe la demanda requerida desde algunas de las instalaciones.

2.1 PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE INSTALACIONES NO CAPACITADO

Sea dado un conjunto de posibles localizaciones para depósitos J y un conjunto de clientes K . Suponemos que existe un costo fijo f_j asociado con el uso del depósito j y un costo de transporte c_{jk} si la demanda del cliente k es satisfecha por el depósito j . El problema consiste en decidir qué depósitos deben ser abiertos y cuál de ellos debe satisfacer la demanda de cada cliente de manera que se minimicen los costos fijos y de transporte.

Para formular el problema se introducen las variables de decisión (Wolsey

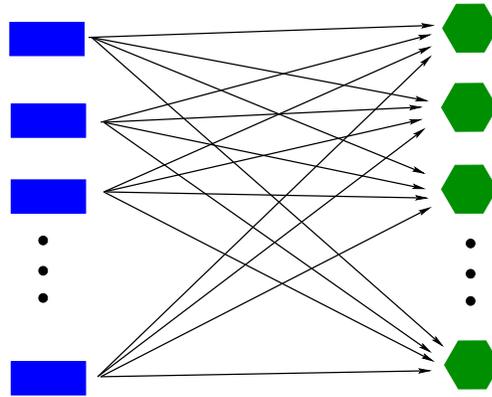


Figura 2.1: Esquema del problema de una etapa

[1999]):

- x_{jk} es la fracción de demanda del cliente k satisfecha por el depósito j .
- $y_j = 1$ si el depósito j se abre y $y_j = 0$ en otro caso.

Las restricciones del problema se definen de la siguiente manera:

Satisfacción de la demanda del cliente k :

$$\sum_j x_{jk} = 1, \quad k \in K$$

Para representar la relación entre las variables x_{jk} y las variables binarias y_j hacemos notar que

$$\sum_k x_{jk} \leq k$$

y obtenemos las restricciones siguientes:

$$\sum_k x_{jk} \leq ky_j, \quad j \in J$$

La función objetivo se define como sigue:

$$\sum_{(j,k)} c_{jk}x_{jk} + \sum_j f_j y_j$$

Un gran número de algoritmos de solución han sido propuestos para el problema de localización de instalaciones no capacitado (UFLP). Típicamente una heurística simple consta de construir una solución factible agregando o eliminando instalaciones de la solución hasta que ésta ya no puede ser mejorada.

Galvão [2004] presenta una revisión de algunas contribuciones al campo del problema de localización de instalaciones no capacitado. Éstas incluyen algoritmos desarrollados para el problema de la p -mediana, la formulación general para el problema de localización no capacitado, estudio de modelos de localización dinámica, problemas de cubrimiento y de localización jerárquica, entre otros. Las contribuciones abarcan desarrollos teóricos, algoritmos computacionales y aplicaciones prácticas.

Bumb [2002], estudia algoritmos de aproximación para problemas de localización de instalaciones. Hace una revisión de los resultados principales del UFLP y estudia la versión con tolerancia de fallo, donde cada cliente debe ser asignado a una o más instalaciones.

2.2 PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE INSTALACIONES CAPACITADO

Cuando se considera un límite de capacidad para cada una de las instalaciones el problema se denomina problema de localización de instalaciones capacitado.

Este problema puede ser dividido en otras categorías como por ejemplo, el problema de localización de instalaciones capacitado con restricciones de abastecimiento de una sola fuente, donde cada cliente debe recibir su demanda desde una única instalación abierta. Otra versión del problema permite que la demanda de cada cliente sea satisfecha en fracciones desde dos o más depósitos abiertos.

Los modelos mencionados anteriormente envuelven dos clases de decisiones, la primera decisión que se busca es elegir el conjunto de instalaciones o depósitos a ser

abiertos. La segunda decisión que se busca hacer es la asignación de cada cliente al conjunto de instalaciones abiertas para su uso.

El problema de localización de instalaciones tiene numerosas aplicaciones y ha sido ampliamente estudiado en la literatura. Klose y Drexl [2004] presentan una revisión de los modelos clásicos del problema de localización de instalaciones. En particular, se resumen algunos modelos de localización continua, localización en redes, modelos de programación entera mixta y aplicaciones.

En Sahin y Sural [2007] se revisan los modelos de localización de instalaciones jerárquicos. Primero se clasifican los problemas de acuerdo a las características de los sistemas estudiados y después se investigan las aplicaciones, modelos de programación entera mixta y métodos de solución presentados para el problema.

Snyder [2006] revisa la literatura existente sobre modelos de localización de instalaciones estocásticos. Intenta ilustrar la variedad de enfoques de optimización bajo incertidumbre que han aparecido en la literatura y sus aplicaciones al problema de localización de instalaciones.

Verter [2011] presenta una revisión de la literatura para el UFLP. Presenta principalmente un procedimiento dual para el problema desarrollado por Erlenkotter [1978] y una heurística desarrollada por Kuehn y Hamburger [1963] para la localización de centros de distribución. Además de una revisión más reciente sobre los trabajos existentes para el UFLP y el CFLP.

En el trabajo de Marín y Pelegrín [2008] se considera el problema de localización de plantas simple y el problema de la p -mediana generalizado. Se construyen dos algoritmos heurísticos, uno para cada problema, basados en una técnica de descomposición lagrangiana para problemas binarios.

Numerosos algoritmos heurísticos y exactos para el CFLP han sido propuestos en la literatura, muchos de los cuales basados en relajaciones lagrangianas, éstos, generalmente usan el método subgradiente para obtener soluciones aproximadas para el dual lagrangiano.

Varios enfoques exactos han sido propuestos para los problemas de localización. Por ejemplo, Avella y Boccia [2009] presentan una formulación basada en una familia de desigualdades tipo mochila que contienen variables binarias y continuas para el problema capacitado y desarrolla un algoritmo de ramificación y corte para los casos de gran escala.

Klose y Drexler [2005] estudian algunos esquemas para resolver el problema maestro de forma exacta, empleando diferentes estrategias para estabilizar el proceso de generación de columnas. Además, proponen una nueva cota inferior para el problema de localización capacitado basada en la partición del conjunto de plantas empleando generación de columnas.

El uso de desigualdades válidas en un esquema de ramificación y acotamiento para el problema de localización capacitado es presentado en Aardal [1998]. Osorio y Sánchez [2008] presentan un preproceso para fijar las variables binarias en el CFLP mediante vinculación y análisis de las restricciones subrogadas.

En Jia et al. [2007] se estudian los problemas generales de localización de instalaciones utilizados para hacer frente a situaciones comunes de emergencia, como incendios o necesidades de salud. Se analizan las características de las emergencias a gran escala y se propone un modelo general para el problema.

Para resolver el problema capacitado y no capacitado, también se ha trabajado con algunos algoritmos heurísticos.

Kuehn y Hamburger [1963] presentan un algoritmo heurístico para el problema de localización de almacenes. Este consiste de dos partes: el programa principal, que va ubicando las instalaciones una a la vez hasta que no puede ser añadida ninguna más a la red de distribución sin incrementar los costos totales, y la segunda parte, la rutina de cambio, que intenta modificar la solución encontrada por el programa principal evaluando los beneficios de quitar alguna instalación o cambiar una localización por otra.

Sun et al. [2007] presentan un estudio en el que se propone un procedimiento

heurístico de búsqueda tabú para el CFLP. La heurística utiliza memorias a corto y largo plazo para realizar el proceso de búsqueda central así como las funciones de diversificación e intensificación.

Caserta y Quiñonez [2009] estudian un algoritmo metaheurístico para el CFLP. El esquema propuesto consta de tres fases, la fase de construcción de la solución, la fase de búsqueda local dirigida a explorar el vecindario de soluciones élite de la fase previa, y la tercera que es la fase de aprendizaje. Un algoritmo para casos de gran escala del UFLP y CFLP es presentado en Barahona y Chudak [2005]. Ellos usan heurísticas que producen soluciones enteras factibles y utilizan relajaciones lagrangianas para obtener cotas inferiores al valor óptimo del problema.

Generalmente el CFLP puede dividirse en dos clases, el problema de una sola fuente (SSCFLP) y el multi-servicio (MSCFLP). En Chyu y Chang [2008] se muestran dos metaheurísticas basadas en búsqueda local para el problema de localización capacitado multi-servicio, donde la demanda de cada cliente puede ser satisfecha por una o más instalaciones.

Contreras y Díaz [2007] consideran el problema capacitado con restricciones de abastecimiento de una sola fuente. Porponen un algoritmo de búsqueda dispersa para obtener cotas superiores al valor óptimo del problema.

Liao y Diansheng [2008] desarrollan un método de localización-asignación basado en agrupamiento para el problema de localización de instalaciones capacitado, que resulta en una aproximación de la solución óptima del problema.

Filho y Galvão [1998] presentan relajaciones lagrangianas complementadas por una búsqueda tabú para un problema clásico de localización en el diseño de redes.

Se han propuesto, además, distintas aproximaciones basadas en relajaciones lagrangianas para el problema, tanto en su versión no capacitada como en la capacitada.

En Avella et al. [2009] se utiliza una heurística para casos de gran escala del

CFLP, basada en relajaciones lagrangianas, para seleccionar un subconjunto de variables *prometedoras* y un algoritmo de ramificación y corte para resolver el problema central.

Una heurística basada en relajaciones lagrangianas para resolver el CFLP con restricciones de cotas superiores sobre subconjuntos disjuntos de variables binarias es propuesta en Sridharan [1991]. Cornuejols et al. [1991] comparan diversos enfoques propuestos en la literatura para el CFLP. La comparación está basada en resultados teóricos y computacionales. El énfasis principal está en las relajaciones, se identifican las relaciones de dominio entre varias relajaciones encontradas en la literatura.

Ramos y Sáenz [2005] aplican la metodología de planos cortantes Fenchel al CFLP. Simultáneamente obtienen una solución primal heurística y las cotas inferior y superior obtenidas son comparadas a las encontradas relajando de forma lagrangiana las restricciones de demanda. Gortz y Klose [2009] presentan un método de ramificación y acotamiento basado en relajaciones lagrangianas y optimización subgradiente para resolver de manera óptima casos grandes del CFLP.

2.3 PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE INSTALACIONES CAPACITADO EN DOS ETAPAS

El problema que se considera en este trabajo de tesis es el *problema de localización de instalaciones capacitado en dos etapas (TSCFLP)*, donde la primera etapa se refiere a las fábricas o plantas de producción, en esta etapa la decisión a ser tomada es cuáles fábricas abrir de un conjunto de posibles localizaciones para éstas. La segunda etapa se refiere a los depósitos y la decisión que se busca tomar es cuáles depósitos abrir entre un conjunto de posibles localizaciones para los mismos. La siguiente decisión está relacionada a los clientes, se busca hacer las asignaciones de cada cliente a los depósitos abiertos y también asignar los depósitos a plantas abiertas y definir el flujo de producto a través de ellos para satisfacer las restricciones

de demanda de cada cliente.

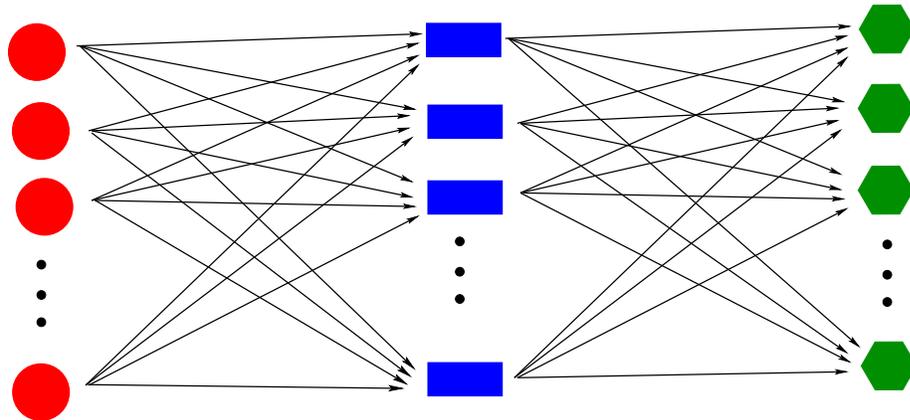


Figura 2.2: Esquema del problema de dos etapas

Gao y Robinson [1994] presentan un modelo general y un procedimiento de ramificación y acotamiento para encontrar soluciones óptimas al problema de localización de instalaciones no capacitado de una y dos etapas. En Klose [1999] se muestra una heurística lagrangiana basada en la relajación de las restricciones de capacidad. El subproblema que resulta es un UFLP y se puede resolver de forma eficiente mediante métodos de ramificación y acotamiento.

Liu y Zhu [2007] presentan una nueva clase de modelos de localización de mínimo riesgo y asignación en dos etapas basado en la teoría de credibilidad. Se diseña un algoritmo híbrido que integra esquemas de aproximación mediante redes neuronales y recocido simulado para resolver el problema de localización/asignación propuesto.

Motivado por una aplicación en el contexto de la cadena de suministro inversa para el término de vida útil de vehículos, un problema de localización multi-nivel con costos escalera y separación de productos es formulado por Wollenweber [2008]. Se propone un enfoque de solución heurístico de dos etapas, una de construcción y otra de mejora.

En Landete y Marín [2009] se considera un problema de localización de instalaciones no capacitado. La asimetría inherente del problema es tomada en cuenta

para realizar la formulación del mismo. Gendron y Semet [2009] consideran un problema de localización multi-nivel derivado de una aplicación en el servicio de entrega rápida. Presentan y comparan dos formulaciones al problema, un modelo basado en arcos y otro basado en los caminos. También comparan la llamada relajación binaria, que se obtiene relajando las restricciones de integralidad para las variables enteras generales pero no para las variables binarias.

Wang et al. [2009] proponen un problema de localización en dos etapas difuso con valor de riesgo, que resulta en un problema de programación binaria difusa de dos etapas. Se propone también un método basado en la discretización de las variables difusas para aproximar el valor de riesgo.

Aardal et al. [1996] estudian el *problema de localización de instalaciones no capacitado en dos etapas (TSUFLP)*, algunas propiedades estructurales, introducen la notación necesaria y una formulación de flujo multi-producto para el TSUFLP y caracterizan los puntos extremos de su relajación lineal.

Muchos esquemas de relajación lagrangiana han sido propuestos para el problema de localización de instalaciones en dos etapas. Para el caso no capacitado, en Chardaire et al. [1999] se considera un problema relevante para la industria de las telecomunicaciones. Desarrollan un método de relajaciones lagrangianas para encontrar cotas inferiores al problema.

Lu y Bostel [2005] estudian un problema de localización de dos etapas con tres tipos de instalaciones a ser localizadas en un sistema de logística inversa. Se propone un modelo de programación entera mixta. Se desarrolla un algoritmo basado en una heurística lagrangiana para probar el modelo.

Un problema de localización en dos etapas no capacitado es estudiado en Marín [2007]. Se presenta una formulación entera mixta y se analizan varias relajaciones lagrangianas propuestas para el modelo.

Para el caso capacitado, la relajación lagrangiana fue estudiada y probada numéricamente en Barros y Labbé [1994]. En Bloemhof-Ruwaard et al. [1996] se

estudia la formulación del modelo matemático para el problema de distribución y eliminación de residuos en dos etapas con restricciones de capacidad. Se trabaja con dos procedimientos para obtener cotas inferiores, el primero en base a la relajación lineal reforzada por desigualdades válidas y el segundo mediante la relajación lagrangiana de las restricciones de balance de flujo.

Mediante el uso de relajaciones lagrangianas, Marín y Pelegrín [1999] obtienen cotas inferiores y soluciones heurísticas para dos clases de formulaciones al TSCFLP en base a dos o tres índices para las variables de transporte de flujo. La calidad de las formulaciones es comparada mediante un estudio computacional.

En Tragantalerngsak et al. [2000] se propone un algoritmo de ramificación y acotamiento basado en relajaciones lagrangianas para el TSCFLP con restricciones de abastecimiento de una sola fuente. Una heurística lagrangiana es estudiada en Klose [2000] usando la relajación de las restricciones de capacidad para el TSCFLP con un número fijo de instalaciones en el primer nivel.

En Hinojosa et al. [2000] se estudia el problema de localización de plantas capacitado en dos etapas multi-periodo. Se formula como un problema de programación entera mixta y se propone la relajación lagrangiana para resolverlo, justo con un procedimiento heurístico para construir soluciones factibles del problema original a partir de las soluciones obtenidas en los problemas relajados.

En la tesis doctoral de Wildbore [2008], se trabaja con el TSCFLP donde los clientes pueden ser abastecidos por múltiples depósitos abiertos y éstos a su vez por múltiples plantas abiertas, ambos, con capacidades limitadas. Se añaden restricciones subrogadas para reforzar las cotas de las relajaciones del problema. Se muestra, además, un análisis teórico y computacional de las cotas lagrangianas para el TSCFLP.

2.4 APLICACIONES

Algunas aplicaciones del CFLP incluyen la localización y planificación de la distribución, la planificación de producción y diseño de redes de telecomunicaciones.

Además, agencias gubernamentales deben decidir sobre la localización de oficinas, escuelas, hospitales, estaciones de bomberos, etc. En cada caso, la calidad de los servicios depende de la localización de las instalaciones en relación con otras.

En Troncoso et al. [2002] se muestra una aplicación de un modelo de localización de instalaciones para la producción y logística forestal, que permite la elección estratégica del sitio y tamaños óptimos para la instalación forestal que se desee construir, además de la identificación de los niveles de producción y de los flujos de carga que se generarán en el horizonte de planificación considerado.

CAPÍTULO 3

RELAJACIONES LAGRANGIANAS

En este capítulo se presenta una revisión de la literatura existente relacionada con la relajación lagrangiana, sus propiedades y la función lagrangiana, así como algunos algoritmos para resolver el problema dual lagrangiano, cómo encontrar soluciones factibles, entre otros.

3.1 RELAJACIÓN LAGRANGIANA

Esta sección presenta la metodología lagrangiana proporcionada por algunos autores como Guignard [2003], Fisher [1985], Conejo et al. [2006], entre otros.

La literatura de la relajación lagrangiana y sus aplicaciones es muy extensa. Por lo tanto no citaremos todos los artículos que se refieren a relajación lagrangiana. Por lo que si se desea ver una visión más amplia acerca del gran campo sobre este tema el lector podrá ver: Beasley [1993], Everett [1963], Fisher [1981], Fisher [1985], Geoffrion [1974], Held y Karp [1970], Held y Karp [1971], Lemaréchal [2001], Shapiro [1974], Shapiro [1979].

Si P es un problema de optimización, se usa la siguiente notación:

- $FS(P)$: el conjunto de soluciones factibles del problema P
- $OS(P)$: el conjunto de soluciones óptimas del problema P
- $v(P)$: el valor óptimo del problema P

- s^k, λ^k, γ^k : el valor de s y λ, γ , usado en la iteración k
- x^k : el k -ésimo punto extremo de algún poliedro
- $x^{(k)}$: una solución encontrada en la iteración k
- $\text{conv}(X)$: envolvente convexo del conjunto X .

En Geoffrion [1974] se define formalmente la relajación de un problema de optimización como sigue:

DEFINICIÓN 3.1 *El problema $(RP_{\min}) : \min \{g(x) \mid x \in W\}$ es una **relajación** del problema $(P_{\min}) : \min \{f(x) \mid x \in V\}$, con la misma variable de decisión x , si y sólo si:*

- i) *el conjunto factible de (RP_{\min}) contiene a (P_{\min}) , esto es $W \supseteq V$ y*
- ii) *sobre el conjunto factible de (P_{\min}) , la función objetivo de (RP_{\min}) domina a (P_{\min}) , esto es, $\forall x \in V, g(x) \leq f(x)$.*

La relajación ampliamente usada para problemas de programación como $P : \min$ (ó \max) $\{f(x) \mid x \in V\}$ es la relajación continua (CR) (conocida comunmente como relajación lineal), i.e., el problema P con las restricciones de integralidad sobre x ignoradas.

El nacimiento del esquema lagrangiano como lo conocemos fue en 1970, cuando Held y Karp [1970] usaron un problema lagrangiano basado en árboles de mínima expansión para diseñar un algoritmo eficiente para el problema del agente viajero [Fisher, 1985]. Sin pérdida de generalidad suponemos que el problema P es de la forma:

$$(P) : \min fx \tag{3.1}$$

$$\text{s. a: } Ax \leq b \tag{3.2}$$

$$Cx \leq d \quad (3.3)$$

$$x \in X \quad (3.4)$$

donde X contiene restricciones de signo y de integralidad para x .

Se supone que las restricciones de la forma $Ax \leq b$ son *difíciles*, en el sentido de que el problema P sin éstas sería mucho más simple de resolver. Una cota inferior lagrangiana del problema puede ser encontrada introduciendo un vector de multiplicadores $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ para las restricciones difíciles. Esto se denota comúnmente como (LR_λ) y está dado como sigue:

DEFINICIÓN 3.2 La **relajación lagrangiana** de P relacionada a las restricciones difíciles $Ax \leq b$, con multiplicadores lagrangianos λ no negativos, es el problema:

$$(LR_\lambda) : \min fx + \lambda(Ax - b) \quad (3.5)$$

$$\text{s.a: } Cx \leq d \quad (3.6)$$

$$x \in X \quad (3.7)$$

Al vector λ se le conoce como vector de *multiplicadores de Lagrange*.

En (LR_λ) , la diferencia de las restricciones difíciles $Ax \leq b$ han sido agregadas a la función objetivo con pesos λ y las restricciones $Ax \leq b$ eliminadas. Decimos que las restricciones $Ax \leq b$, han sido *dualizadas*.

(LR_λ) es una relajación de P , entonces:

- i. $FS(LR_\lambda)$ contiene $FS(P)$,
- ii. para cualquier x de P , y cualquier $\lambda \geq 0$, $fx + \lambda(Ax - b)$ es menor o igual que fx (*mejor*, ya que estamos minimizando). Ahora podemos decir que $v(LR_\lambda) \leq v(P)$, $\forall \lambda \geq 0$, esto es, que el valor óptimo $v(LR_\lambda)$, el cuál depende de λ , es una cota inferior del valor óptimo de P .

Para ilustrar el concepto de relajación lagrangiana, Wildbore [2008] considera el problema de programación entera P como sigue:

$$\min \{fx \mid Ax = b, Cx \leq d, x \in X\} \quad (3.8)$$

Y podemos ver el siguiente teorema:

TEOREMA 3.3 $v(LR_\lambda) \leq v(P)$

DEMOSTRACIÓN: Para su demostración, Fisher [1981], supone que la solución óptima de (P) x^* es conocida, entonces:

$$v(LR_\lambda) \leq fx^* + \lambda(Ax^* - b) = v(P)$$

La desigualdad en esta relación sigue de la definición de $v(LR_\lambda)$ y la igualdad $v(P) = fx^*$ y $Ax^* - b = 0$. Si $Ax = b$ se reemplaza por $Ax \leq b$ en (P) , entonces se requiere $\lambda \geq 0$ y el argumento se puede escribir como:

$$v(LR_\lambda) \leq fx^* + \lambda(Ax^* - b) \leq v(P)$$

donde la segunda desigualdad sigue de $v(P) = fx^*$, $\lambda \geq 0$ y $Ax^* - b \leq 0$. De manera similar para $Ax \geq b$ se requiere $\lambda \leq 0$ para $v(LR_\lambda) \leq v(P)$. ■

DEFINICIÓN 3.4 *El problema de encontrar la mejor cota lagrangiana de $v(P)$ es hallar:*

$$(LR) : \max_{\lambda \geq 0} v(LR_\lambda) \quad (3.9)$$

Éste es llamado **dual lagrangiano** de P relacionado a las restricciones difíciles.

NOTA 3.5 *Supongamos que el problema en consideración tiene restricciones de igualdad en lugar de restricciones de desigualdad. Podemos referirnos a tal problema como (Q) a continuación:*

$$(Q) : \min_x f x \quad (3.10)$$

$$\text{s.a: } Ax = b \quad (3.11)$$

$$Cx \leq d \quad (3.12)$$

$$x \in X \quad (3.13)$$

Podemos dualizar las restricciones $Ax = b$ siendo remplazadas por un par de restricciones de desigualdad: $Ax \leq b$ y $-Ax \leq -b$. Entonces sea $\mu \geq 0$ y $\nu \geq 0$ los multiplicadores lagrangianos de dimensiones apropiadas. La relajación lagrangiana para $\mu \geq 0$ y $\nu \geq 0$ dados es:

$$(LR_{\mu,\nu}) : \min_x f x + \mu(Ax - b) + \nu(-Ax + b) \quad (3.14)$$

$$\text{s.a: } Cx \leq d \quad (3.15)$$

$$x \in X \quad (3.16)$$

el cual es equivalente a:

$$(LR_{\lambda}) : \min_x f x + \lambda(Ax - b) \quad (3.17)$$

$$\text{s.a: } Cx \leq d \quad (3.18)$$

$$x \in X \quad (3.19)$$

con $\lambda = \mu - \nu$. Nótese que en el caso de igualdad, λ no necesariamente debe de tener valores no negativos para que (LR_{λ}) sea una relajación de (Q) .

TEOREMA 3.6 *El dual lagrangiano LR es equivalente a la relajación primal*

$$(PR) : \min_x f x \quad (3.20)$$

$$\text{s.a: } Ax \leq b \quad (3.21)$$

$$x \in \text{conv} \{x \in X \mid Cx \leq d\} \quad (3.22)$$

en el sentido que $v(LR) = v(PR)$.

Este resultado está basado en la dualidad del problema lineal LP y las propiedades de las soluciones óptimas de programas lineales. Este resultado podría no ser verdadero si la matriz de restricciones es no racional, o mejor dicho para un poliedro no racional que no es igual al envolvente convexo de sus puntos extremos. Aunque en la práctica los números en las computadoras son almacenados como números racionales y por lo tanto todas las matrices son racionales, pero ocasionalmente esto modifica la verdadera estructura del poliedro asociado.

La siguiente definición es importante y los resultados son obtenidos de la interpretación geométrica.

DEFINICIÓN 3.7 *Decimos que el problema dual lagrangiano LR tiene la **propiedad de integralidad** si $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$.*

Si LR tiene la propiedad de integralidad (la cual de aquí en adelante será representada por IP), entonces los puntos extremos de $\{x \mid Cx \leq d\}$ están en X . Desafortunadamente la consecuencia es tal que un esquema LR no puede producir una cota mejor a la de LP , esto es lo que se indica en los siguientes corolarios. Sin embargo, algunas veces, esto se puede usar de todas formas porque la relajación LP no puede ser calculada fácilmente. Esto puede ocurrir para algunos ejemplos de algún problema que tenga un número exponencial de restricciones, las cuales pueden ser relajadas de cualquier forma para resolver fácilmente los subproblemas.

Cualquier cota de relajación lagrangiana siempre es mejor o igual que la mejor cota obtenida por LP , nunca peor.

COROLARIO 3.8 *Si el conjunto $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} = \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(LP) = v(PR) = v(LR) \leq v(P)$.*

En este caso, la cota de relajación lagrangiana es igual (no puede ser mejor que) a la cota de LP .

COROLARIO 3.9 *Si el conjunto $\text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\} \subset \{x \mid Cx \leq d\}$, entonces $v(LP) \leq v(PR) = v(LR) \leq v(P)$ y puede ocurrir que la cota de relajación lagrangiana sea estrictamente mejor que la cota LP .*

Lo que dicen estos dos corolarios es que a menos que LR no tenga la propiedad de integralidad, podría mejorar la cota obtenida por la relajación LP . Es importante saber esto si todos los vértices del poliedro racional $\{x \mid Cx \leq d\}$ están en X .

El propósito es obtener una relajación lagrangiana que sea más fácil de resolver que el problema original debido a alguna estructura especial en las restricciones no dualizadas que pueda ser explotada.

La selección de una relajación deseable es uno de los problemas más importantes a considerar cuando formamos un método de solución basado en relajaciones lagrangianas. Los factores a tomar en cuenta al evaluar una relajación son: su facilidad de solución y la calidad de las cotas generadas.

La posibilidad de generar subproblemas fáciles y más pequeños comparados con el problema original, depende de la estructura del mismo y del grado de separabilidad obtenido al relajar ciertas restricciones.

EJEMPLO 3.10 *El problema de asignación generalizada GAP consiste en asignar un conjunto de trabajos ($j \in J$) a uno de máquinas ($i \in I$) con el menor costo total de asignación posible (o posiblemente con el mayor valor de ganancia). El costo (o ganancia) de asignar j a i es c_{ij} , entonces el problema puede ser un problema de minimización o maximización, usando la notación «min (ó max)». Cada trabajo debe ser realizado por una máquina (de ahí las restricciones (3.25), conocidas como restricciones de múltiple elección). Cada máquina i está disponible por b_i unidades de tiempo y si se asigna el trabajo j a la máquina i se utilizan a_{ij} unidades de tiempo (de*

ahí las restricciones (3.24) que se conocen como restricciones de mochila). Entonces el modelo es:

$$\min (\text{ó } \max) \sum_{(i,j)} c_{ij}x_{ij} \quad (3.23)$$

$$\text{s.a: } \sum_j a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad i \in I \quad (3.24)$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad j \in J \quad (3.25)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J \quad (3.26)$$

- Si dualizamos la restricción tipo 3.25 con multiplicadores sin signo λ_j , el problema de relajación lagrangiana se descompone en subproblemas para cada máquina i :

$$\min (\text{ó } \max) \sum_{(i,j)} c_{ij}x_{ij} + \sum_j \lambda_j(1 - \sum_i x_{ij}) \quad (3.27)$$

$$\text{s.a: } \sum_j a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad i \in I \quad (3.28)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad i \in I, j \in J \quad (3.29)$$

podemos escribir este problema como:

$$\min (\text{ó } \max) \left\{ \sum_{(i,j)} (c_{ij} - \lambda_j)x_{ij} + \sum_j \lambda_j \mid \sum_j a_{ij}x_{ij} \leq b_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j \right\} \quad (3.30)$$

que se puede representar también de la siguiente forma:

$$\sum_j \lambda_j + \sum_i \min (\text{ó } \max) \left\{ \sum_j (c_{ij} - \lambda_j)x_{ij} \mid \sum_j a_{ij}x_{ij} \leq b_i, x_{ij} \in \{0, 1\}, j \in J \right\} \quad (3.31)$$

Así que el i -ésimo subproblema lagrangiano es un problema de la mochila (Wolsey [1999]) para la i -ésima máquina. Este problema no suele tener la propiedad de integralidad por lo que la relajación LP de un problema de mochila binario no siempre tiene una solución entera óptima. Entonces este esquema LR puede (y usualmente lo hace) dar una mejor cota que la cota de LP y en particular esto fue usado en Fisher et al. [1986] y en Guignard y Rosenwein [1990].

- Si dualizamos la restricción tipo 3.24, el problema de relajación lagrangiana se descompone en subproblemas por trabajos j (con λ no positivos o no negativos, dependiendo si el problema es de \min ó \max):

$$\min (\text{ó } \max) \sum_{(i,j)} c_{ij}x_{ij} + \sum_i \lambda_i(b_i - \sum_j a_{ij}x_{ij}) \quad (3.32)$$

$$\text{s.a: } \sum_i x_{ij} = 1, j \in J \quad (3.33)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J \quad (3.34)$$

Es decir,

$$\min_x (\text{ó } \max_x) \left\{ \sum_{(i,j)} (c_{ij} - \lambda_i a_{ij})x_{ij} + \sum_i \lambda_i b_i \right\} \quad (3.35)$$

$$\text{s. a: } \sum_i x_{ij} = 1, j \in J, i \in I \quad (3.36)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad (3.37)$$

De manera equivalente:

$$\sum_i \lambda_i b_i + \sum_j \left\{ \min_x (\text{ó } \max_x) \sum_i (c_{ij} - \lambda_i a_{ij})x_{ij} \mid \sum_i x_{ij} = 1, i \in I, x_{ij} \in \{0, 1\} \right\} \quad (3.38)$$

El j -ésimo subproblema lagrangiano es un problema de elección múltiple para el j -ésimo trabajo. La relajación LP para cada problema siempre encuentra una solución entera óptima (escoge la mejor asignación para cada j), así que los subproblemas

lagrangianos tienen la Propiedad de Integralidad y la cota de LR es igual a la cota de LP. Se espera que la cota de LP no pueda ser mejorada. Primero, el dual lagrangiano puede ser más fácil de resolver que el dual LP para problemas de tamaño grande. Después, agregando la cota de LP, 3.27 encuentra soluciones lagrangianas, las cuales son factibles para múltiples restricciones elegidas pero pueden violar una o más restricciones del tipo 3.24. La solución lagrangiana obtenida puede ser usada como puntos para empezar en una heurística lagrangiana. Esta relajación es definida en Ross y Soland [1975].

3.1.1 CONSTRUCCIÓN DE UNA RELAJACIÓN LAGRANGIANA

Existen varias formas en las cuales un problema puede relajarse de forma lagrangiana. Aquí se enlistan pocas, presentadas en Guignard [2003], sobre todo para señalar que a menudo, alguna reformulación a priori de la relajación puede ayudar, y que para algunos modelos complejos, la intuición e interpretación de las interacciones entre restricciones puede sugerir esquemas de relajación eficientes.

1. SE PUEDE AISLAR UN SUBPROBLEMA INTERESANTE Y DUALIZAR OTRAS RESTRICCIONES.

Esta es la aproximación comúnmente más usada. Tiene la ventaja de que los subproblemas lagrangianos *interesantes* (en el sentido de que usualmente tienen una estructura especial que puede ser explotada) pueden ser resueltos por algoritmos existentes especializados para resolverlos de forma eficiente.

2. SI HAY DOS (O MÁS) SUBPROBLEMAS INTERESANTES CON VARIABLES EN COMÚN, PRIMERO PODEMOS PARTIR ESTAS VARIABLES, DESPUÉS DUALIZAR LAS RESTRICCIONES COPIADAS.

Este proceso es llamado *descomposición lagrangiana (LD)* [Soenen, 1977], *partición de variables* [Näsberg et al., 1985] o *estratificación de variables*, [Glover y

Klingman, 1988]. [Ribero y Minoux, 1986] y [Shepardson y Martsen, 1980] son de los primeros que introdujeron esta aproximación. Primero se debe reformular el problema usando partición de variables, en otras palabras, debemos renombrar las variables en parte de las restricciones como si fueran variables independientes. El problema $P : \min_x \{fx \mid Ax \leq b, Cx \leq d, x \in X\}$ es claramente equivalente al problema $(P') : \min_{x,y} \{fx \mid Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in Y, x = y\}$, en el sentido que tiene valores óptimos iguales (pero ellos tienen diferentes espacios para las variables).

Además si x^* es la solución óptima de P , entonces la solución $(x, y) \equiv (x^*, x^*)$ es un óptimo para (P') y si (x^*, y^*) es una solución óptima de (P') , entonces $x^* = y^*$ y x^* es un óptimo para P . Dualizando la copia de las restricciones $x = y$ en (P') con multiplicadores λ , separa al problema en uno para x y otro para y :

$$(LD_\lambda) : \min_{x,y} \{fx + \lambda(y - x) \mid Ax \leq b, Cy \leq d, x \in X, y \in X\} \quad (3.39)$$

$$\min_x \{(f - \lambda)x \mid Ax \leq b, x \in X\} + \min_y \{\lambda y \mid Cy \leq d, y \in X\} \quad (3.40)$$

Este proceso crea un caso de estructura de escalera y por lo tanto el modelo puede ser decompuesto. Nótese que λ no requiere ser no negativo. Recordemos también que cuando dualicemos una restricción de igualdad, automáticamente una solución factible lagrangiana es óptima para el problema de programación entero original. Las restricciones copiadas son restricciones de igualdad, si ambos subproblemas lagrangianos tienen la misma solución óptima, la solución también es óptima para el problema IP .

En Guignard y Kim [1987] se muestra que la cota LD puede dominar estrictamente las cotas LR obtenidas de la dualización de un conjunto de restricciones:

TEOREMA 3.11 *Si se cumple que*

$$v(LD) = \max_\lambda \{ \min_x \{(f - \lambda)x \mid Ax \leq b, x \in X\} \} + \min_y \{\lambda y \mid Cy \leq d, y \in X\} \quad (3.41)$$

entonces

$$v(LD) = \min \{fx \mid x \in \text{conv}\{x \in X \mid Ax \leq b\} \cap \text{conv}\{x \in X \mid Cx \leq d\}\} \quad (3.42)$$

COROLARIO 3.12 *Si uno de los subproblemas tiene la propiedad de integralidad, entonces $v(LD)$ es igual al mejor de las dos cotas LR correspondientes a dualizar $Ax \leq b$ o $Cx \leq d$.*

Si ambos subproblemas tienen la propiedad de integralidad, entonces $v(LD) = v(LP)$.

Si uno aplica LD al problema ejemplo 3.23 haciendo una partición de restricciones en dos subconjuntos no intersecados, es decir en las restricciones tipo 3.24 y 3.25, entonces se obtiene la misma cota que cuando dualizamos las restricciones de múltiple elección.

Entonces puede parecer poco interesante partir las variables, debido a que esto requiere un número de multiplicadores igual al número de máquinas por el número de trabajos, comparando sólo el número de trabajos con la relajación lagrangiana fuerte del problema. Aunque es posible pensar que las soluciones lagrangianas pueden explotar las dos soluciones lagrangianas obtenidas, y puede valer la pena el trabajo extra de resolver la descomposición dual lagrangiana, Jörnsten y Näsberg [1986].

Ocasionalmente la partición de las variables puede corresponder a la partición física de una variable de decisión del problema.

3. PODEMOS DUALIZAR RESTRICCIONES DE ACOPLAMIENTO.

Algunas veces, después de alguna reformulación, los problemas pueden contener estructuras independientes ligadas por varias restricciones: $\min_{(x,y)} \{fx + gy \mid Ax \leq b, Cx \leq d, Ex + Fy \leq h, x \in X, y \in Y\}$. Dualizando las restricciones de enlace $Ex + Fy \leq h$ se divide el problema en uno sobre x y otro sobre y . Algunas veces el problema original sólo contiene x y varias reformulaciones introducen una nueva variable y , mientras la relación entre x y y es capturada por una nueva restricción $Ex + Fy \leq h$.

4. ALGUNAS VECES ES MEJOR DUALIZAR UN CONJUNTO DE COPIAS INDIVIDUALES DE VARIABLES.

En lugar de crear una copia y de la variable x e introducir y en el modelo P para reescribir la restricción $Cx \leq d$ como $Cy \leq d$, dando el modelo equivalente $(P') : \min_{(x,y)} \{fx \mid Ax \leq b, x \in X, Cy \leq d, y \in X, x = y\}$, también se puede crear el problema (P'') equivalente al problema P introduciendo una nueva variable y y forzando la restricción $Dy = Cx$. Esta restricción en general es más débil que la restricción $x = y$. El modelo (P'') es $\min_{(x,y)} \{fx \mid Ax \leq b, x \in X, Dy \leq d, y \in X, Dx = Cy\}$. Aquí el LR introducido dualiza la restricción de copia agregada $Dx = Cy$.

Nuevamente aquí la restricción copiada es una restricción de igualdad, por lo tanto si el problema lagrangiano tiene soluciones óptimas x y y que satisfacen la copia de la restricción agregada, esto es, si $Dx = Cy$, entonces la solución x es óptima para el problema IP .

Hay dos ideas principales para resolver el problema dual, en el primer caso, el problema dual se transforma en el problema de programación lineal con un gran número de restricciones y para su solución se utiliza la técnica de relajación de restricciones (Benders). La segunda idea, es tratar el problema dual como un problema de optimización de la función LR_λ . Debido a que la función LR_λ es no diferenciable, se utilizan técnicas de optimización no diferenciable, por ejemplo el método del subgradiente.

Uno de los enfoques para resolver problemas de gran escala son las técnicas de descomposición o separación, éstas se caracterizan por la descomposición del sistema original en subsistemas, cada uno con problemas independientes más pequeños.

El método de descomposición de Benders, también conocido como descomposición primal o por recursos, descompone el problema original en un problema maestro y un subproblema. El maestro representa la primera etapa más las condiciones necesarias llamadas *cortes*, derivadas de la segunda etapa. El subproblema representa la

segunda etapa para decisiones conocidas de la primera etapa. El método de Benders es un algoritmo iterativo que va alternando entre la solución del problema maestro y el subproblema.

Este método es comúnmente utilizado cuando las variables de la primera etapa complican la solución del problema, es decir, éste resulta mucho más sencillo cuando dichas variables se fijan temporalmente.

El método del subgradiente es un algoritmo simple para minimizar una función convexa no diferenciable. Es muy similar al método del gradiente para funciones diferenciables, pero con algunas particularidades:

- El método subgradiente se aplica directamente a funciones no diferenciables.
- El tamaño de paso no se elige mediante la línea de búsqueda como en el método gradiente convencional. En la mayoría de los casos, el tamaño de paso está fijo de antemano.
- A diferencia del método gradiente ordinario, el subgradiente no es un método descendiente; el valor de la función objetivo puede (y con frecuencia lo hace) incrementar.

El método del subgradiente fue propuesto en Held y Karp [1971] y posteriormente fue validado en Held et al. [1974]. Éste es un método iterativo en el cual en la iteración k da un vector multiplicador actual λ^k y la longitud del paso es tomado con el subgradiente $z(\lambda^k)$, entonces, si es necesario, el punto resultante es proyectado en un ortogonal no negativo.

Para presentar el método se hacen algunas definiciones.

DEFINICIÓN 3.13 *Un subgradiente de una función convexa $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es un vector $\gamma(\lambda) \in \mathbb{R}$ tal que $f(v) \geq f(\lambda) + \gamma(\lambda)^T(v - \lambda)$ para todo $v \in \mathbb{R}$*

PROPOSICIÓN 3.14 *El vector $Ax - b$ es un subgradiente de $v(LR(\lambda))$ en el planteamiento de $LR(\lambda)$.*

DEFINICIÓN 3.15 *Al conjunto de subgradientes de una función cóncava f en un punto λ es llamado subdiferencial de f en λ y se denota como $\partial f(\lambda)$*

Para el caso de minimizar, tenemos el siguiente algoritmo. Se requiere un punto inicial λ^0 , un parámetro $\epsilon \geq 0$, un contador de iteraciones k , un tamaño de paso s^k , una variable *cont* que va contando cuántas iteraciones pasan en el algoritmo sin que se actualice la solución guardada como la mejor.

El punto inicial para λ^0 suele elegirse de varias formas distintas, una manera usual para elegirlo es simplemente inicializar $\lambda^0 = 0$. Otra propuesta es resolver la relajación lineal del problema original y dar a λ^0 los valores marginales asociados a las restricciones que se dualizan en la relajación lagrangiana.

Una forma muy popular para determinar el tamaño de paso s^k del algoritmo que ha mostrado resultados eficientes es:

$$s^k = \frac{\epsilon_k (v(P) - v(LR_{\lambda^k}))}{\|\gamma^k\|}$$

donde ϵ_k es un escalar positivo entre 0 y 2. Es común tomarlo inicialmente como 2 y actualizarlo a la mitad cada vez que $v(LR_{\lambda^k})$ no mejore después de un cierto número de iteraciones, como se puede ver en el paso 3 del algoritmo. El número $v(P)$ es, en teoría, el valor óptimo de (P) , el cual es desconocido, por lo que suele emplearse una cota conocida, usualmente una solución factible del problema original.

Prácticamente la convergencia del método de subgradiente es impredecible. Para algunos problemas, la convergencia es rápida y altamente confiable, mientras otros problemas tienden a producir multiplicadores en secuencia, o el valor lagrangiano, o ambos, de forma equivocada. En un caso *bueno*, usualmente se podría observar un patrón no monótono en el valor lagrangiano para las primera iteraciones, seguido por un mejoramiento rigurosamente monótono y convergencia asintótica para un valor optimista del valor objetivo óptimo de la cota lagrangiana. En un caso *malo*, el patrón no monótono continúa o empeora y el valor lagrangiano siempre se está deteriorando. Algunos autores han estudiado este problema y han propuesto algunos remedios.

Algoritmo 1 Subgradiente

- 1: **Paso 0.** *Inicialización.* Sea $k \leftarrow 0, \lambda^k \in \mathbb{R}_+^m$ y $\epsilon \geq 0$.
 - 2: **Paso 1.** *Subgradiente* Resolver el problema (LR_λ) y sea x^* la solución.
 - 3: Sea $\gamma^k \leftarrow Ax^k - b$ y actualizamos el tamaño de paso
 - 4: **Paso 2.** *Actualización* Sea $\lambda^{k+1} \leftarrow \max \{0, \lambda^k + s^k \gamma^k\}$
 - 5: **si** $v(LR_\lambda)$ mejora el valor de la cota **entonces**
 - 6: Actualizamos el mejor valor encontrado.
 - 7: **si no**
 - 8: $cont \leftarrow cont + 1$
 - 9: **fin si**
 - 10: **Paso 3.** *Revisar*
 - 11: **si** $cont$ es mayor a un cierto número permitido **entonces**
 - 12: $\epsilon \leftarrow \frac{\epsilon}{2}$ y $cont \leftarrow 0$
 - 13: **fin si**
 - 14: **Paso 4.** *Criterio de parada*
 - 15: **si** ϵ es menor a un cierto valor de tolerancia predeterminado o k excede el número de iteraciones permitido **entonces**
 - 16: PARAR
 - 17: **si no**
 - 18: Regresar al paso 1.
 - 19: **fin si**
-

3.2 DESCOMPOSICIÓN DE SUBPROBLEMAS

En algunos casos, el subproblema lagrangiano se descompone en problemas pequeños, esto significa que la región factible es realmente el producto cartesiano de varias regiones pequeñas. Una ventaja clara es la reducción en la complejidad computacional para los subproblemas lagrangianos: generalmente es más fácil resolver 50 problemas con 100 variables binarias cada uno, que, un problema con 5,000 (esto es, 50×100) variables binarias.

También significa que en generación de columnas, las columnas (esto es, los vectores que son soluciones factibles de las restricciones guardadas) se descomponen en pequeñas subcolumnas y cada subcolumna es una combinación convexa de vértices de una pequeña región. Por asignación de conjuntos de pesos diferentes a estas combinaciones convexas, sigue «mezclar y relacionar» las soluciones, en otras palabras, se trata de combinar una subcolumna para el primer subproblema que fue generado en la iteración 10, con una subcolumna para el segundo subproblema generado en la iteración 7, etc., para formar una columna de tamaño completo. Si no se tiene la descomposición del problema antes del tiempo, podríamos esperar un largo tiempo para generar completamente la columna.

Por dualidad, esto significa que en un ambiente de *plano cortante*, también pueden ser generados «subcortes» para cada subproblema, lo que equivale a reemplazar η por $z + \lambda b$ en

$$\max_{\lambda \geq 0, \eta} \eta \tag{3.43}$$

$$\text{s.a: } \eta \leq f x^{(h)} + \lambda (A x^{(h)} - b) \quad h = 1, \dots, k \tag{3.44}$$

$$\max_{\lambda \geq 0, z} \{z + \lambda b\} \tag{3.45}$$

$$\text{s. a: } z \leq (f + \lambda A) x^{(h)} \quad h = 1, \dots, k \tag{3.46}$$

y entonces z por una suma de escalares z_l , con $z_l \leq (f^l + \lambda A_l) x_l^{(h)}$, donde l es el índice del subproblema lagrangiano, f^l , A_l y $x_l^{(h)}$ son la l -ésima porción de la submatriz y

vectores correspondientes y $x_l^{(h)}$ es una solución lagrangiana del l -ésimo subproblema encontrado en la iteración h , produciendo el problema maestro desagregado

$$\max_{\lambda \geq 0, z_l} \sum_l z_l + \lambda b \quad (3.47)$$

$$\text{s. a: } z_l \leq (f + \lambda A)^l x_l^{(h)} \quad h = 1, \dots, k \quad (3.48)$$

CAPÍTULO 4

FORMULACIONES AL PROBLEMA Y RELAJACIONES PROPUESTAS

4.1 FORMULACIONES

Es conocido que la formulación de un problema es de gran importancia para su resolución. En el presente trabajo se estudian dos formulaciones al problema y se busca comparar varias relajaciones lagrangianas para cada formulación. Además de obtener, en base a estas soluciones lagrangianas, una solución factible del problema.

Para formular el problema se describen los siguientes parámetros:

- I conjunto de plantas potenciales.
- J conjunto de almacenes potenciales.
- K conjunto de clientes.
- b_i capacidad de la planta i .
- p_j capacidad del almacén j .
- q_k demanda del cliente k .
- c_{ij} costo por transportar una unidad de producto desde la planta i hasta el almacén j .

- d_{jk} costo por transportar una unidad de producto desde el almacén j hasta el cliente k .
- f_i costo fijo por emplear la planta i .
- g_j costo fijo por emplear el almacén j .

Definimos también las siguientes variables de decisión:

- $y_i \in \{0, 1\}$, donde $y_i = 1$ si y sólo si la planta i es empleada y 0 en otro caso.
- $z_j \in \{0, 1\}$, donde $z_j = 1$ si y sólo si el almacén j es empleado y 0 en otro caso.
- $x_{ij} \geq 0$, cantidad de producto enviado desde la planta i hasta el almacén j .
- $s_{jk} \geq 0$, cantidad de producto enviado desde el almacén j hasta el cliente i .

Se proponen dos formulaciones equivalentes del problema de localización capacitado en dos etapas.

4.1.1 PRIMERA FORMULACIÓN

El problema puede ser formulado mediante el siguiente modelo de programación lineal entero mixto (**formulación A**).

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} \quad (4.1)$$

$$\text{s. a: } \sum_j x_{ij} \leq b_i \quad i \in I, \quad (4.2)$$

$$\sum_i x_{ij} \leq p_j \quad j \in J, \quad (4.3)$$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K, \quad (4.4)$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J, \quad (4.5)$$

$$x_{ij} \leq m_{ij}y_i \quad i \in I, j \in J, \quad (4.6)$$

$$s_{jk} \leq l_{jk}z_j \quad j \in J, k \in K, \quad (4.7)$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}. \quad (4.8)$$

Las restricciones (4.2) y (4.3) aseguran que no sean excedidas las capacidades de las plantas y los almacenes respectivamente. La restricción (4.4) asegura que las demandas de los clientes sean satisfechas. La restricción (4.5) impide que los almacenes envíen producto no recibido mientras que (4.6) y (4.7) impiden que una planta o un almacén envíen producto si no han sido elegidos. Las restricciones (4.8) son conocidas como restricciones lógicas, en ellas \mathbb{R}^+ representa el conjunto de números reales no negativos.

Las cantidades m_{ij} y l_{jk} en las restricciones (4.6) y (4.7) son cotas superiores conocidas a las variables x_{ij} y s_{jk} , por ejemplo:

$$m_{ij} = \min \{b_i, p_j\}; \quad l_{jk} = \min \{p_j, q_k\}$$

Esta formulación tiene $i + j$ variables binarias, $i * j + j * k$ variables continuas y $i + 2 * j + k + i * j + j * k$ restricciones.

4.1.2 SEGUNDA FORMULACIÓN

En el siguiente modelo se combinan las restricciones (4.2) con (4.6) y (4.3) con (4.7) resultando un modelo más compacto (**formulación B**).

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} \quad (4.9)$$

$$\text{s. a: } \sum_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad i \in I, \quad (4.10)$$

$$\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j \quad j \in J, \quad (4.11)$$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K, \quad (4.12)$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J, \quad (4.13)$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}. \quad (4.14)$$

Esta formulación tiene $i + j$ variables binarias, $i * j + j * k$ variables continuas y $i + 2 * j + k$ restricciones.

Las formulaciones A y B son equivalentes en el sentido de que ambas resultan en la misma solución óptima (la demostración puede verse en el apéndice B). Sin embargo, tienen diferente estructura poliédrica del conjunto de soluciones factibles y por lo tanto, podemos esperar que relajar las mismas restricciones resulte en valores diferentes para las cotas duales correspondientes.

4.2 RELAJACIONES PROPUESTAS

Las cotas lagrangianas han sido ampliamente utilizadas como base de muchas técnicas numéricas, por ejemplo en los esquemas de ramificación y acotamiento para problemas enteros y combinatorios. La mayoría de los enfoques de relajaciones lagrangianas para el problema de localización capacitado en dos etapas están basados en dualizar las restricciones de demanda o las restricciones de capacidad de planta (Klose, 1999).

En esta sección presentamos 5 relajaciones lagrangianas para cada formulación propuesta del problema de localización capacitado en dos etapas. Estas 10 relajaciones poseen ciertas propiedades de descomposición de manera que resolver el problema lagrangiano es en esencia mas *fácil* que resolver el original.

Con el fin de aprovechar la estructura del problema y las formulaciones consideradas para el mismo, se proponen cinco relajaciones para la formulación A y cinco más para la B buscando aislar subproblemas interesantes o eliminar restricciones de acoplamiento como se mencionó en el capítulo 3 para construir relajaciones lagrangianas. Estas relajaciones tienen la finalidad de facilitar la solución obteniendo un problema resultante más sencillo de resolver que el problema original y conservando la calidad de la soluciones con respecto al valor óptimo del problema tanto como sea

posible. Las relajaciones se describen a continuación:

Relajación RA1: Relajamos las restricciones (4.5), que no permiten que un almacén j envíe producto que no recibió.

$$\begin{aligned}
 w = \min & \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} \\
 & + \sum_j u_j \left(\sum_k s_{jk} - \sum_i x_{ij} \right) \\
 \text{s. a:} & \sum_j x_{ij} \leq b_i && i \in I, \\
 & \sum_i x_{ij} \leq p_j && j \in J, \\
 & \sum_j s_{jk} \geq q_k && k \in K, \\
 & x_{ij} \leq m_{ij} y_i && i \in I, j \in J, \\
 & s_{jk} \leq l_{jk} z_j && j \in J, k \in K, \\
 & x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

El problema lagrangiano se descompone en un subproblema para la primera etapa en (x, y) con i variables binarias, $i * j$ variables continuas y $i + j + i * j$ restricciones:

$$\begin{aligned}
 w_1 = \min & \sum_i f_i y_i + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j)} u_j x_{ij} \\
 \text{s. a:} & \sum_j x_{ij} \leq b_i && i \in I, \\
 & \sum_i x_{ij} \leq p_j && j \in J, \\
 & x_{ij} \leq m_{ij} y_i && i \in I, j \in J, \\
 & x_{ij} \in \mathbb{R}^+, y_i \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

y en $|K|$ subproblemas para la segunda etapa en (s, z) con j variables binarias

, $j * k$ variables continuas y $j + 1$ restricciones:

$$\begin{aligned}
 w_2^k &= \min \sum_j g_j z_j + \sum_j d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j s_{jk} \\
 \text{s. a: } &\sum_j s_{jk} \geq q_k \\
 &s_{jk} \leq l_{jk} z_j \quad j \in J \\
 &s_{jk} \in \mathbb{R}^+, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

Donde la cota $w^{RA1} = w_1 + \sum_k w_2^k$.

Relajación RA2: Relajamos las restricciones (4.6), que no permiten que una planta i envíe producto si no ha sido elegida para ser empleada

$$\begin{aligned}
 w &= \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} \\
 &\quad + \sum_{(i,j)} u_{ij} (x_{ij} - m_{ij} y_i) \\
 \text{s. a: } &\sum_j x_{ij} \leq b_i \quad i \in I, \\
 &\sum_i x_{ij} \leq p_j \quad j \in J, \\
 &\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K, \\
 &\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J, \\
 &s_{jk} \leq l_{jk} z_j \quad j \in J, k \in K, \\
 &x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

El problema lagrangiano se descompone en $|I|$ subproblemas con solo una variable binaria y_i :

$$\begin{aligned}
 w_1^i &= \min \left\{ f_i y_i - \sum_j u_{i,j} m_{ij} y_i \right\} \\
 \text{s. a: } &y_i \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

Lo cual se puede resolver de manera analítica.

Y un subproblema para (x, s, z) con j variables binarias, $i * j + j * k$ variables continuas y con $i + 2 * j + k + j * k$ restricciones:

$$\begin{aligned}
 w_2 = \min \quad & \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_{(i,j)} u_{i,j} x_{ij} \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_j x_{ij} \leq b_i && i \in I, \\
 & \sum_i x_{ij} \leq p_j && j \in J, \\
 & \sum_j s_{jk} \geq q_k && k \in K, \\
 & \sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} && j \in J, \\
 & s_{jk} \leq l_{jk} z_j && j \in J, k \in K, \\
 & x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

Donde la cota $w^{RA2} = \sum_i w_1^i + w_2$.

Relajación RA3: Relajamos las restricciones (4.7), que no permiten que un almacén j envíe producto si no ha sido elegido para ser utilizado

$$\begin{aligned}
 w = \min \quad & \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} \\
 & + \sum_{(j,k)} u_{jk} (s_{jk} - l_{jk} z_j) \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_j x_{ij} \leq b_i && i \in I, \\
 & \sum_i x_{ij} \leq p_j && j \in J, \\
 & \sum_j s_{jk} \geq q_k && k \in K, \\
 & \sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} && j \in J, \\
 & x_{ij} \leq m_{ij} y_i && i \in I, j \in J, \\
 & x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

El problema lagrangiano se descompone en $|J|$ subproblemas con solo una variable binaria z_j

$$w_1^j = \min \left\{ g_j z_j + \sum_k u_{jk} l_{jk} z_j \right\}$$

s. a: $z_j \in \{0, 1\}$.

Lo cual se puede resolver de manera analítica.

Y un subproblema para (x, s, y) con i variables binarias, $i * j + j * k$ variables continuas y con $i + 2 * j + k + i * j$ restricciones:

$$w_2 = \min \sum_i f_i y_i + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_{(j,k)} u_{jk} s_{jk}$$

s. a: $\sum_j x_{ij} \leq b_i \quad i \in I,$

$$\sum_i x_{ij} \leq p_j \quad j \in J,$$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K,$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J,$$

$$x_{ij} \leq m_{ij} y_i \quad i \in I, j \in J,$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i \in \{0, 1\}.$$

Donde la cota $w^{RA3} = \sum_j w_1^j + w_2$.

Relajación RA4: Relajamos las restricciones (4.2) y (4.4), que son las restricciones de capacidad de las plantas y la de demandas satisfechas de los clientes

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk}$$

$$+ \sum_i u_i \sum_j x_{ij} - \sum_k v_k \sum_j s_{jk}$$

s. a: $\sum_i x_{ij} \leq p_j \quad j \in J,$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J,$$

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &\leq m_{ij}y_i && i \in I, j \in J, \\
 s_{jk} &\leq l_{jk}z_j && j \in J, k \in K, \\
 x_{ij}, s_{jk} &\in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

El problema lagrangiano se descompone en $|J|$ subproblemas independientes con $i+1$ variables binarias, $i*j+j*k$ variables continuas y con $i+j+k$ restricciones:

$$\begin{aligned}
 w^j = \min & \sum_i f_i y_i + g_j z_j + \sum_i c_{ij} x_{ij} + \sum_k d_{jk} s_{jk} + \sum_i u_i x_{ij} - \sum_k v_k s_{jk} \\
 \text{s. a:} & \sum_i x_{ij} \leq p_j \\
 & \sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \\
 & x_{ij} \leq m_{ij} y_i && i \in I \\
 & s_{jk} \leq l_{jk} z_j && k \in K \\
 & x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

donde la cota $w^{RA4} = \sum_j w^j$.

Relajación RA5: Relajamos las restricciones (4.3) y (4.5), que son las restricciones de capacidad de las plantas y la que no permite que una almacén j envíe producto que no recibió

$$\begin{aligned}
 w = \min & \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j \sum_i x_{ij} \\
 & + \sum_j v_j \left(\sum_k s_{jk} - \sum_i x_{ij} \right) \\
 \text{s. a:} & \sum_j x_{ij} \leq b_i && i \in I, \\
 & \sum_j s_{jk} \geq q_k && k \in K, \\
 & x_{ij} \leq m_{ij} y_i && i \in I, j \in J, \\
 & s_{jk} \leq l_{jk} z_j && j \in J, k \in K, \\
 & x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

De manera similar a RA1 obtenemos 2 subproblemas.

$$\begin{aligned}
 w_1 = \min \quad & \sum_i f_i y_i + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_j u_j \sum_i x_{ij} - \sum_{(i,j)} v_j x_{ij} \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_j x_{ij} \leq b_i \quad i \in I \\
 & x_{ij} \leq m_{ij} y_i \quad j \in J \\
 & x_{ij} \in \mathbb{R}^+, y_i \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

Además el subproblema correspondiente a las plantas se descompone en $|I|$ subproblemas con una sola variable binaria y_i , $i * j$ variables continuas y con $j + 1$ restricciones.

El subproblema correspondiente a la segunda etapa.

$$\begin{aligned}
 w_2 = \min \quad & \sum_j g_j z_j + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_{(j,k)} v_j s_{jk} \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K \\
 & s_{jk} \leq l_{jk} z_j \quad j \in J, k \in K \\
 & s_{jk} \in \mathbb{R}^+, z_j \in \{0, 1\}.
 \end{aligned}$$

Que se descompone en $|K|$ subproblemas con j variables binarias, $j * k$ variables continuas y con $j * k + 1$ restricciones.

Donde la cota $w^{RA4} = w_1 + w_2$.

Las relajaciones lagrangianas para la formulación B definida por (4.9)–(4.14) son las siguientes:

Relajación RB1, relajamos las restricciones (4.13)

$$\begin{aligned}
 w = \min \quad & \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j \left(\sum_k s_{jk} - \sum_i x_{ij} \right) \\
 \text{s. a:} \quad & \sum_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad i \in I,
 \end{aligned}$$

$$\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j \quad j \in J,$$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K,$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.$$

El problema lagrangiano se descompone en un subproblema en (x, y, z) con $i + j$ variables binarias, $i * j$ variables continuas y con $i + j$ restricciones:

$$w_1 = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j)} u_j x_{ij}$$

s. a: $\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j \quad j \in J$

$$\sum_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad i \in I$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.$$

Y en $|K|$ subproblemas independientes en s con j variables continuas y sólo una restricción.

$$w_2^k = \min \sum_j d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j s_{jk}$$

s. a: $\sum_j s_{jk} \geq q_k$

$$s_{jk} \in \mathbb{R}^+$$

Donde la cota $w^{RB1} = w_1 + \sum_k w_2^k$.

Relajación RB2: Relajamos las restricciones (4.10)

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_i u_i \left(\sum_j x_{ij} - b_i y_i \right)$$

s. a: $\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j \quad j \in J,$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K,$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J,$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.$$

El problema lagrangiano se descompone en $|I|$ subproblemas independientes con una sola variable binaria y_i :

$$w_1^i = \min \{f_i y_i - u_i b_i y_i\}$$

s. a: $y_i \in \{0, 1\}$.

Que puede resolverse de manera analítica.

Y un subproblema en (x, s, z) con j variables binarias, $i * j + j * k$ variables continuas y con $2 * j + k$ restricciones:

$$w_2 = \min \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_{(i,j)} u_i x_{ij}$$

s. a: $\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j \quad j \in J$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, z_j \in \{0, 1\}.$$

Donde la cota $w^{RB2} = \sum_i w_1^i + w_2$.

Relajación RB3: Relajando las restricciones (4.11)

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j \left(\sum_i x_{ij} - p_j z_j \right)$$

s. a: $\sum_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad i \in I,$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K,$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J,$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.$$

El problema lagrangiano se descompone en $|J|$ subproblemas con una sola variable binaria z_j :

$$w_1^j = \min \{g_j z_j - u_j p_j z_j\}$$

$$\text{s.a: } z_j \in \{0, 1\}.$$

Que puede resolverse de manera analítica.

Y un subproblema en (x, s, y) con i variables binarias, $i * j + j * k$ variables continuas y con $i + j + k$ restricciones:

$$w_2 = \min \sum_i f_i y_i + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_{(i,j)} u_j x_{ij}$$

$$\text{s. a: } \sum_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad i \in I$$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k \quad k \in K$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i \in \{0, 1\}.$$

Donde la cota $w^{RB3} = \sum_j w_1^j + w_2$.

Relajación RB4: Se relajan las restricciones (4.12) y (4.10)

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} - \sum_k u_k \sum_j s_{jk}$$

$$+ \sum_i v_i \left(\sum_j x_{ij} - b_i y_i \right)$$

$$\text{s. a: } \sum_i x_{ij} \leq p_j z_j \quad j \in J,$$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk} \quad j \in J,$$

$$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}.$$

El problema lagrangiano se descompone en $|I|$ subproblemas con solo una variable binaria y_i :

$$w_1^i = \min \{f_i y_i - v_i b_i y_i\}$$

s. a: $y_i \in \{0, 1\}$.

Lo cual se puede resolver de manera analítica.

$|J|$ subproblemas independientes en (x, s, z) con solo una variable binaria z_j , $i * j + j * k$ variables continuas y 2 restricciones:

$$w_2^j = \min \left\{ g_j z_j + \sum_i c_{ij} x_{ij} + \sum_k d_{jk} s_{jk} - \sum_k u_k s_{jk} + \sum_i v_i x_{ij} \right\}$$

s. a: $\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j$

$$\sum_i x_{ij} \geq \sum_k s_{jk}$$

$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, z_j \in \{0, 1\}$.

Donde la cota $w^{RB4} = \sum_i w_1^i + \sum_j w_2^j$.

Relajación RB5: Relajamos las restricciones (4.13) y (4.11)

$$w = \min \sum_i f_i y_i + \sum_j g_j z_j + \sum_{(i,j)} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(j,k)} d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j \left(\sum_k s_{jk} - \sum_i x_{ij} \right)$$

$$+ \sum_j v_j \left(\sum_i x_{ij} - p_j z_j \right)$$

s. a: $\sum_j x_{ij} \leq b_i y_i$ $i \in I,$

$$\sum_j s_{jk} \geq q_k$$

$k \in K,$

$x_{ij}, s_{jk} \in \mathbb{R}^+, y_i, z_j \in \{0, 1\}$.

El problema lagrangiano se descompone en $|J|$ subproblemas con solo una variable binaria z_j :

$$w_1^j = \min \{g_j z_j - v_j p_j z_j\}$$

$$\text{s. a: } z_j \in \{0, 1\}.$$

Lo cual se puede resolver de manera analítica.

$|K|$ subproblemas en s con j variables continuas y k restricciones:

$$\begin{aligned} w_2^k &= \min \sum_j d_{jk} s_{jk} + \sum_j u_j s_{jk} \\ \text{s. a: } \sum_j s_{jk} &\geq q_k \\ s_{jk} &\in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Y también $|I|$ subproblemas para (x, y) con 1 variable binaria, j variables continuas y con sólo una restricción:

$$\begin{aligned} w_3^i &= \min \left\{ f_i y_i + \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_j u_j x_{ij} + \sum_j v_j x_{ij} \right\} \\ \text{s. a: } \sum_j x_{ij} &\leq b_i y_i \\ x_{ij} &\in \mathbb{R}^+, y_i \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Donde la cota $w^{RB5} = \sum_j w_1^j +$.

EL problema de encontrar la mejor cota, es decir, encontrar los multiplicadores que maximicen la cota lagrangiana, se llama el *problema dual lagrangiano*. Para resolver el dual lagrangiano se puede aplicar un esquema de generación de restricciones (método de Benders) transformando el problema dual en problemas de programación lineal de gran escala. La ventaja principal de utilizar el método de Benders es que proporciona estimaciones tanto inferiores como superiores de la cota lagrangiana en cada iteración, por lo que produce cotas duales cercanas al óptimo. Sin embargo, el costo computacional de este esquema es típicamente alto. Otro esquema popular para resolver el problema dual es el algoritmo subgradiente. En contraste con el método de Benders, el algoritmo de subgradiente no proporciona el valor de la cota con la precisión mencionada, solo podemos esperar valores aproximados de la cota.

Para detalles de los mismos se puede consultar en Lasdon [2002], Wolsey [1999] y Conejo et al. [2006] para el método de Benders, y para el algoritmo de subgradiente se puede consultar detalladamente en Martin [1999] y Guignard [2003].

Durante este trabajo de investigación se utilizó el método del subgradiente para obtener las cotas lagrangianas de las 10 relajaciones propuestas.

4.3 SUBGRADIENTE PARA EL PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN CAPACITADO EN DOS ETAPAS

En esta sección se muestra el desempeño del algoritmo subgradiente al resolver un caso pequeño del TSCFLP. Se toma como ejemplo ilustrativo un caso con 3 posibles localizaciones para plantas, 5 para almacenes y 9 clientes.

Se tienen los siguientes parámetros de entrada, en la tabla (4.1) se presentan los costos de transporte desde cada planta i a cada almacén j ; la tabla (4.2) muestra los costos de transporte de cada almacén j a cada cliente k ; los costos fijos asociados a cada planta i abierta se presentan en la tabla (4.3) y los costos fijos asociados a cada almacén j abierto se presentan en la tabla (4.4).

c_{ij}	1	2	3	4	5
1	18	11	15	11	17
2	17	13	10	14	16
3	17	18	12	18	12

Tabla 4.1: Costos de transporte de i a j

Se muestran algunas iteraciones iniciales del algoritmo de subgradiente al resolver la relajación RB2.

■ Iteración 1.

Paso 0. Inicializamos los multiplicadores como los valores duales de la relajación lineal asociados a las restricciones dualizadas en la relajación que inten-

d_{jk}	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	11	20	11	19	17	18	20	12	12
2	12	12	20	11	10	20	18	19	11
3	10	12	11	11	19	14	18	12	16
4	13	15	17	18	17	18	12	20	18
5	17	15	16	10	17	20	17	20	10

Tabla 4.2: Costos de transporte de j a k

Planta	1	2	3
Costo	481	506	567

Tabla 4.3: Costos fijos para cada i

tamos resolver. Sea $it = 0$ el contador del número de iteraciones en las que no mejora la solución, $\epsilon = 2$, el tamaño de paso en el algoritmo se denota como *paso*. Inicializamos el valor de la mejor aproximación como $mejor = -\infty$.

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = 1133.141$$

$$Paso = 2.136$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1133.141$$

$$u_1 = 38.12, u_2 = 0, u_3 = 0$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*.

* Cómo recuperar factibilidad de las soluciones lagrangianas encontradas en cada iteración se mostrará en el capítulo siguiente.

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 2 > 0.0001$$

Almacén	1	2	3	4	5
Costo	230	185	236	213	260

Tabla 4.4: Costos fijos para cada j

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

■ **Iteración 2.**

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = -1338.458$$

$$it = 1$$

$$Paso = 0.866$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1131.141$$

$$u_1 = 38.12, u_2 = 0, u_3 = 0$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 2 > 0.0001$$

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

■ **Iteración 3.**

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = 173.123$$

$$it = 2$$

$$Paso = 1.184$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1131.141$$

$$u_1 = 0, u_2 = 24.867, u_3 = 27.235$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*.

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 2 > 0.0001$$

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

■ **Iteración 4.**

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = -88.499$$

$$it = 3$$

$$Paso = 0.558$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1131.141$$

$$u_1 = 16.573, u_2 = 0, u_3 = 0$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*.

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 2 > 0.0001$$

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

■ Iteración 5.

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = 838.785$$

$$it = 4$$

$$Paso = 0.789$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1131.141$$

$$u_1 = 16.573, u_2 = 0, u_3 = 18.152$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*.

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 2 > 0.0001$$

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

■ Iteración 6.

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = 875.536$$

$$it = 5$$

$$\epsilon = 1$$

$$it = 0$$

$$Paso = 0.16$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1131.141$$

$$u_1 = 7.029, u_2 = 7.628, u_3 = 0$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*.

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 1 > 0.0001$$

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

■ **Iteración 7.**

Paso 1. Resolviendo el subproblema encontramos:

$$w = 1935.594$$

$$it = 0$$

$$Paso = 0.241$$

Paso 2. Actualizamos el valor de los nuevos multiplicadores y el del mejor valor encontrado hasta el momento:

$$mejor = \max \{mejor, w\} = 1935.594$$

$$u_1 = 7.029, u_2 = 12.681, u_3 = 14.9$$

Recuperamos la factibilidad de la solución*.

Paso 3. Criterio de parada.

$$\epsilon = 1 > 0.0001$$

Por lo tanto, regresamos al paso 1 con los nuevos multiplicadores encontrados.

Las iteraciones en este ejemplo continúan hasta que $\epsilon \leq 0.0001$ en la iteración 104. El valor final de la función objetivo de esta relajación es $w = 1986.854$ y su solución factible encontrada es de 2158.

MÉTODO PARA RECUPERAR SOLUCIONES FACTIBLES

5.1 INTRODUCCIÓN

Las heurísticas lagrangianas son las heurísticas principales aplicadas a problemas de localización. Las soluciones obtenidas por medio de una relajación lagrangiana generalmente son infactibles y a partir de éstas se recupera una solución factible del problema original.

La información contenida en la relajación lagrangiana (LR_λ) en cada iteración del algoritmo subgradiente puede utilizarse para construir una solución factible del problema a través de la aplicación de alguna heurística. Es decir, a lo largo del procedimiento, generamos una secuencia de multiplicadores lagrangianos que definen cotas inferiores del problema y a su vez, se genera una secuencia (no necesariamente monótona) de valores objetivos de las soluciones factibles. Al final del algoritmo, se obtiene la mejor solución factible encontrada para el problema original.

Además de las cotas lagrangianas, uno de los objetivos es encontrar soluciones factibles al problema de buena calidad. En la literatura podemos observar distintos esquemas utilizados para recuperar factibilidad.

Para el CFLP en Klose [1999] se construye una solución factible a partir de los subproblemas lagrangianos aplicando un procedimiento simple de reasignación.

Para encontrar soluciones factibles a un problema de localización de dos etapas en Chardaire et al. [1999] se diseña un algoritmo de recocido simulado para mejorar las cotas superiores obtenidas a partir de las relajaciones lagrangianas propuestas.

Bloemhof-Ruwaard et al. [1996] trabaja con dos esquemas para obtener soluciones factibles. En el primero se fijan las variables binarias de la solución al problema lineal y se resuelve el problema de flujo de costo mínimo resultante. En el segundo esquema, se trabaja con una heurística secuencial de localización de instalaciones capacitado.

Marín y Pelegrín [1999] obtienen soluciones factibles al problema capacitado fijando las variables binarias en la solución obtenida del problema relajado, se resuelve el problema con estas variables ya fijas para encontrar el flujo óptimo de productos.

Barahona y Chudak [2005] utilizan una heurística que combina el algoritmo de volumen y redondeo aleatorio para encontrar soluciones factibles para los problemas UFLP y CFLP.

Ramos y Sáenz [2005] obtienen cotas primales mediante heurísticas simples como variantes de la heurística voraz o heurísticas de intercambio.

Para obtener soluciones factibles a partir de las soluciones lagrangianas del problema de localización capacitado en dos etapas, en este trabajo de investigación se presenta un algoritmo simple para recuperar factibilidad. Este enfoque puede aplicarse a cualquier solución no factible.

5.2 ALGORITMO

Contrario a lo que se hace comúnmente, este algoritmo se basa en la parte continua de la solución lagrangiana y no en la parte entera de la solución.

Sean $\bar{x}_{ij}, \bar{s}_{jk}$ de la relajación lagrangiana para cada iteración. Sea I_0 el conjunto de las plantas que no han sido abiertas, I_1 el conjunto de plantas abiertas, J_0 el

conjunto de los almacenes que no han sido abiertos, y J_1 el conjunto de almacenes abiertos.

- Paso 0. Hacer $y_i = \frac{\sum_j \bar{x}_{ij}}{b_i}$ y $z_j = \frac{\sum_k \bar{s}_{jk}}{p_j}$
Sean $y_i = 0, I_1 = \emptyset, I_0 = I; z_j = 0, J_1 = \emptyset, J_0 = J$

Al principio del algoritmo, consideramos que todas las plantas y los almacenes están cerrados.

- Paso 1. Sean $i^* = \operatorname{argmax}\{y_i \mid i \in I_0\}$
- Paso 2. Hacer $y_{i^*} = 1, I_1 = I_1 \cup \{i^*\}, I_0 = I_0 - \{i^*\}$
- Paso 3. Si $\sum_{i \in I_1} b_i \geq \sum_k q_k$, ir al paso 4, si no volver al paso 1.
- Paso 4. Sean $j^* = \operatorname{argmax}\{z_j \mid j \in J_0\}$
- Paso 5. Hacer $z_{j^*} = 1, J_1 = J_1 \cup \{j^*\}, J_0 = J_0 - \{j^*\}$
- Paso 6. Si $\sum_{j \in J_1} p_j \geq \sum_k q_k$, ir al paso 7, si no volver al paso 4.
- Paso 7. Resolver linealmente con los valores fijos y_{i^*}, z_{j^*}

En este algoritmo, calculamos para cada planta y para cada almacén un indicador que podemos llamar de *saturación* que representa el uso relativo de cada instalación de acuerdo con su capacidad (paso 0). Este índice se obtiene al dividir el flujo de productos resultante en la solución lagrangiana entre la capacidad disponible de cada planta.

El siguiente paso (paso 1), consiste en abrir la planta del primer nivel con el índice de saturación más alto. Si la capacidad es suficiente para satisfacer la demanda total, el resto de las plantas permanecen cerradas, de otro modo se abre también la planta con el siguiente indicador mas alto y se suman las capacidades de las plantas abiertas; se continúa abriendo mas plantas hasta poder satisfacer la demanda total (pasos 2 y 3).

Los depósitos son abiertos de manera similar (pasos 4,5 y 6). Fijamos los valores de las variables binarias obtenidas mediante este procedimiento, los flujos de producto a través de las dos etapas se determina resolviendo el problema lineal resultante.

5.3 EJEMPLO ILUSTRATIVO

En esta sección se presenta un ejemplo ilustrativo del algoritmo de refactibilización para un caso de tamaño $(3, 5, 9)$ con los parámetros dados en el ejemplo ilustrativo del capítulo anterior.

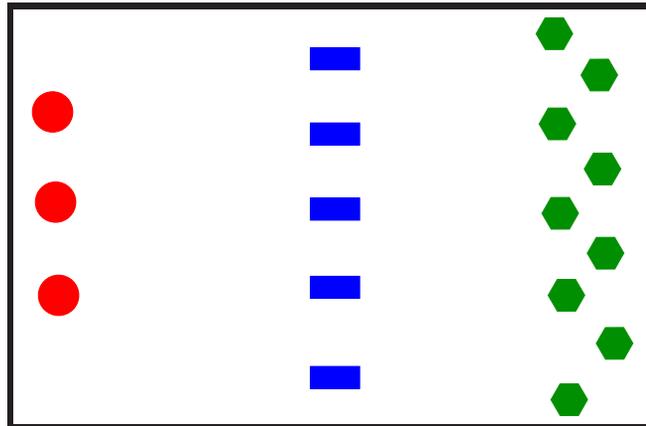


Figura 5.1: Ejemplo de tamaño pequeño $A(3, 5, 9)$

Supongamos que vamos a probar la efectividad del algoritmo para la relajación $RB2$, donde se relajaron las restricciones que indican que una planta no puede enviar producto si no ha sido elegida para ser abierta.

Sean $\bar{x}_{ij}, \bar{s}_{jk}$ de la solución lagrangiana para la primera iteración del subgradiente.

En la figura (5.2) podemos observar la representación de la solución lagrangiana obtenida en la primera iteración del algoritmo subgradiente para este caso en particular.

La configuración que nos da la solución lagrangiana encontrada indica que no se abre ninguna de las posibles plantas, sin embargo se está enviando producto desde la segunda y la tercera planta.

Ahora, iniciamos con el algoritmo para recuperar factibilidad a partir de esta solución obtenida.

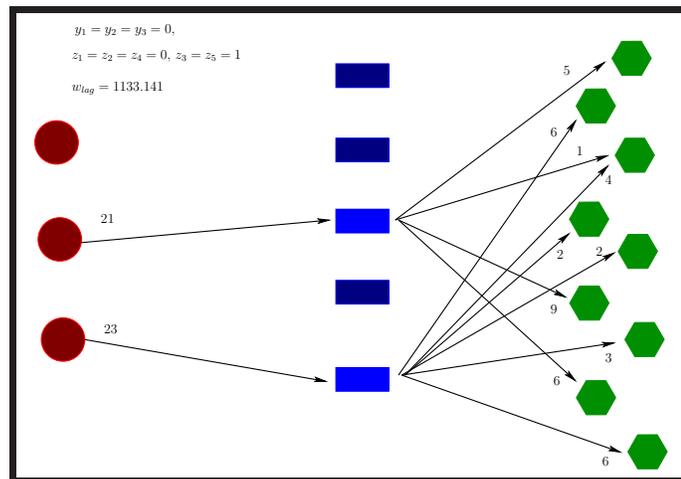


Figura 5.2: Solución lagrangiana del problema

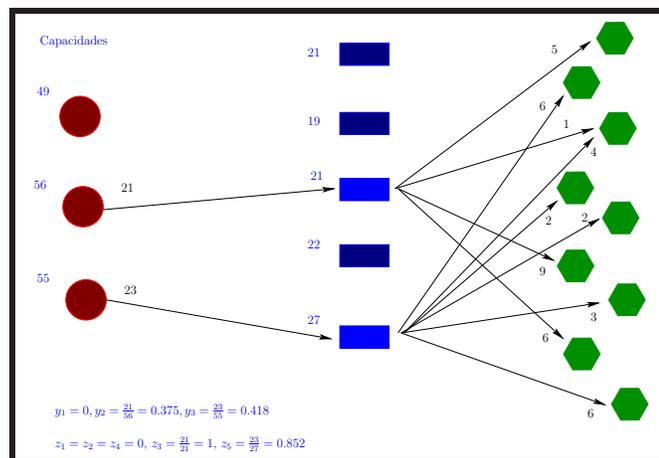


Figura 5.3: Paso 0 del algoritmo

Primero se calcula el índice de saturación para plantas y almacenes (paso 0) como lo podemos ver en la figura (5.3).

En la figura (5.4) observamos el siguiente paso del algoritmo, que es abrir la planta que tenga el índice de saturación más alto y revisar si es necesario utilizar

otra planta (pasos 1 y 2).

En este caso abrir la planta 3 es suficiente para satisfacer la demanda total, entonces pasamos al segundo nivel y hacemos lo mismo para los almacenes.

Fijamos las variables binarias resultantes de este procedimiento y resolvemos el problema para las variables continuas. La figura (5.5) muestra el resultado obtenido mediante este procedimiento.

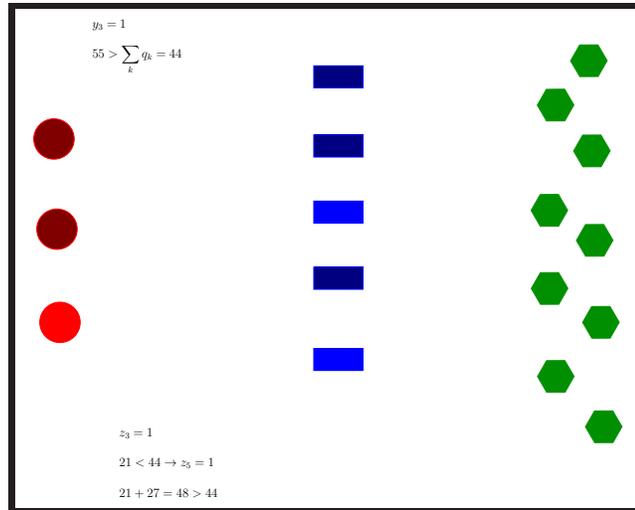


Figura 5.4: Pasos 1 y 2 para las plantas y pasos 4 y 5 para los almacenes

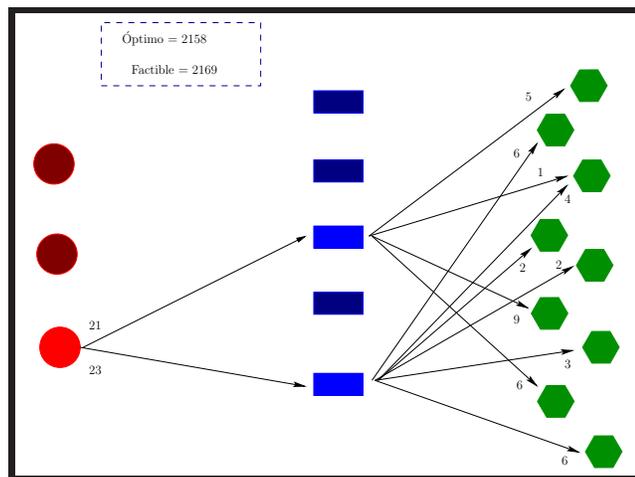


Figura 5.5: Paso 7 del algoritmo para recuperar factibilidad

Con el fin de mejorar el funcionamiento del algoritmo para recuperar factibilidad de las soluciones lagrangianas, se realizaron algunas modificaciones del mismo para intentar mejorar la calidad de las soluciones factibles obtenidas.

Los cambios realizados en el algoritmo se concentraron en el cálculo del índice de saturación. Intentamos tomar en cuenta los costos fijos tanto de plantas como de

almacenes al momento de calcular este índice, la forma en que se hace originalmente es la siguiente:

$$y_i = \frac{\sum_j \bar{x}_{ij}}{b_i}; \quad z_j = \frac{\sum_k \bar{s}_{jk}}{p_j}$$

Y se propusieron 3 cambios básicos para calcularlos.

- 1.- Dividir el índice original entre los costos fijos de plantas ó almacenes, según sea el caso:

$$y_i = \frac{\sum_j \bar{x}_{ij}}{b_i * f_i}; \quad z_j = \frac{\sum_k \bar{s}_{jk}}{p_j * g_j}$$

- 2.- Multiplicar el índice original entre los costos fijos de plantas ó almacenes, según sea el caso:

$$y_i = \frac{\sum_j \bar{x}_{ij} * f_i}{b_i}; \quad z_j = \frac{\sum_k \bar{s}_{jk} * g_j}{p_j}$$

- 3.- Dividir el índice original entre la demanda total:

$$y_i = \frac{\sum_j \bar{x}_{ij}}{b_i * \sum_k q_k}; \quad z_j = \frac{\sum_k \bar{s}_{jk}}{p_j * \sum_k q_k}$$

Los resultados obtenidos al incluir estas variantes del algoritmo para recuperar factibilidad solo presentaban cambios con respecto a los resultados originales hasta después del cuarto decimal de la solución factible encontrada. Por lo tanto, se decidió continuar con el algoritmo original en la heurística lagrangiana propuesta.

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS

Se realizó un estudio numérico para las cotas lagrangianas del problema de localización capacitado en dos etapas.

Primero se generaron 4 conjuntos de casos de diversos tamaños. Todos los tamaños son descritos como *número de plantas, número de almacenes y cantidad de clientes* de acuerdo con los valores (I, J, K) de la siguiente manera:

- A (3,5,7)
- B (5,7,30)
- C (7,10,50)
- D (10,10,100)

6.1 PARÁMETROS

En todos los casos los parámetros fueron calculados de la siguiente manera:

$$c_{ij}, d_{jk} \in U[10, 20], \quad q_k \in U[1, 10],$$
$$b_i \in \left[10 \frac{J+K}{I} \right] + U[0, 10], \quad p_j \in \left[10 \frac{K}{J} \right] + U[0, 10].$$

Se propusieron dos formas distintas de generar los costos fijos del problema:

- Casos donde los costos fijos de plantas y almacenes son proporcionales al número de clientes que se espera sean atendidos desde las mismas (**tipo 1**). Los costos fijos se calculan como sigue:

$$f_i \in \left[100 \frac{J + K}{I} \right] + U[0, 100], \quad g_j \in \left[100 \frac{K}{J} \right] + U[0, 100]$$

- Casos donde los costos fijos de plantas y almacenes son independientes del número de clientes que se espera que atiendan (**tipo 2**). Los costos fijos se calculan como sigue:

$$f_i, g_j \in U[100, 200]$$

Se calcularon las cotas duales correspondientes a todas las relajaciones lagrangianas por el método del subgradiente. En cada iteración de los métodos se obtuvo la solución factible por medio del algoritmo presentado anteriormente asociada a cada solución lagrangiana dada.

La mejor cota factible (sobre todas las iteraciones) fue almacenada. En el método del subgradiente, este valor de la mejor solución factible fue utilizado en el momento de actualizar el tamaño de paso del algoritmo; si después de 4 iteraciones del algoritmo subgradiente la cota dual no era mejorada, se dividía a la mitad el parámetro ϵ usado para calcular el tamaño de paso en el algoritmo. El criterio de parada del algoritmo se definió cuando $\epsilon \leq 0.0001$ o para un número máximo de iteraciones (300).

El proceso se implementó en GAMS/CPLEX 11.2 usando una terminal Sun Fire V440, conectada a 4 procesadores Ultra SPARC III con 1602 Hhz, 1 MB de CACHE, y 8 GB de memoria.

Para todas lo casos se calcularon:

- z_{IP} : el valor óptimo del problema original.
- z_L : el valor de la cota lagrangiana obtenida.
- z_{MF} : el valor de la mejor solución factible encontrada.

- z_{UF} - el valor de la última solución factible encontrada.
- z_{PF} - el valor de la primera solución factible encontrada.

La calidad relativa de las cota lagrangianas y la mejor solución factible fue calculada de la siguiente forma respectivamente:

$$\epsilon_L = \frac{z_{IP} - z_L}{z_{IP}} * 100 \%$$

$$\epsilon_{MF} = \frac{z_{MF} - z_{IP}}{z_{MF}} * 100 \%$$

La calidad de las demás cotas lagrangianas o factibles se calculan de forma similar.

Se realizó un estudio preliminar de 4 tamaños (A,B,C, y D) de todas las relajaciones propuestas y se compararon los resultados obtenidos en cuanto a la calidad de las soluciones lagrangianas y factibles con respecto al valor óptimo del problema original.

En la tabla (6.1) podemos observar los resultados obtenidos para el conjunto de casos del tipo 1. La primera columna corresponde al tamaño de los casos.

Los datos siguientes corresponden a las cotas lagrangianas, las primeras 3 columnas corresponden (en %) a cuántas veces aparece la cota dual correspondiente entre las mejores 3 cotas duales encontradas y las siguientes 3 columnas corresponden (en %) a cuántas veces aparece la cota dual correspondiente como la mejor encontrada. Los indicadores se presentan solo para las cotas de las relajaciones lagrangianas RB1, RB2 y RB3, debido a que son éstas las que aparecen con más frecuencia entre las mejores.

La tabla (6.2) muestra resultados similares para la mejor cota factible encontrada a lo largo del algoritmo para resolver el problema dual. La primera columna se refiere al tamaño de los casos. El siguiente grupo de 3 columnas representa (en %) cuántas veces la cota factible encontrada a partir de la relajación correspondiente

	Relajaciones lagrangianas					
	Entre las 3 mejores			Mejor cota		
Tamaño	RB1	RB2	RB3	RB1	RB2	RB3
A	70 %	80 %	40 %	10 %	0 %	20 %
B	70 %	80 %	70 %	10 %	20 %	60 %
C	90 %	80 %	50 %	20 %	40 %	30 %
D	70 %	80 %	10 %	40 %	10 %	0 %

Tabla 6.1: Cotas duales para casos del tipo 1

aparece entre las 3 mejores. El último grupo de columnas muestran (en %) cuántas veces la cota factible correspondiente aparece como la mejor encontrada, para algunos casos, varias relajaciones lagrangianas pueden aportar la misma cota factible, por lo tanto, varias relajaciones pueden aparecer como la mejor cota factible encontrada (por lo que los promedios suman mas del 100 %). Los indicadores presentados en estas columnas fueron solo para las soluciones factibles derivadas de las relajaciones lagrangianas RA1, RA2 y RB4, debido a que son éstas las que aparecen con más frecuencia entre las mejores.

	Soluciones factibles					
	Entre las 3 mejores			Mejor cota		
Tamaño	RA2	RA3	RB4	RA2	RA3	RB4
A	70 %	90 %	90 %	70 %	90 %	80 %
B	20 %	90 %	80 %	10 %	80 %	50 %
C	20 %	80 %	90 %	10 %	60 %	40 %
D	20 %	90 %	90 %	20 %	40 %	50 %

Tabla 6.2: Cotas factibles para casos del tipo 1

Las tablas (6.3) y (6.4) presentan resultados similares para los casos del tipo 2.

Ya que una de las consideraciones más importantes cuando se utiliza un esquema de relajaciones lagrangianas es la elección de una relajación deseable, es preferible

	Relajaciones lagrangianas					
	Entre las 3 mejores			Mejor cota		
Tamaño	RB1	RB2	RB3	RB1	RB2	RB3
A	80 %	90 %	100 %	0 %	10 %	90 %
B	100 %	100 %	100 %	10 %	10 %	80 %
C	100 %	100 %	100 %	20 %	20 %	60 %
D	100 %	100 %	100 %	40 %	20 %	40 %

Tabla 6.3: Cotas duales para casos del tipo 2

	Soluciones factibles					
	Entre las 3 mejores			Mejor cota		
Tamaño	RA2	RA3	RB4	RA2	RA3	RB4
A	90 %	90 %	60 %	90 %	90 %	60 %
B	90 %	50 %	50 %	60 %	40 %	20 %
C	80 %	70 %	70 %	40 %	30 %	40 %
D	90 %	40 %	90 %	70 %	10 %	40 %

Tabla 6.4: Cotas factibles para casos del tipo 2

contar con algún conocimiento previo acerca del comportamiento o la eficacia de las relajaciones lagrangianas del problema.

Como se puede observar en las tablas (6.1)–(6.4), la relajación lagrangiana RB3 proporciona frecuentemente la mejor cota lagrangiana. Considerando la calidad de las cotas factibles podemos resaltar la relajación RB4 que aparece frecuentemente entre las mejores y es más fácil de calcular que la relajación RA3 que en promedio nos da la mejor cota factible un mayor número de veces, sin embargo la calidad entre estas dos cotas (RA3 y RB4) es similar, por lo que nos interesa concentrarnos en esta relajación lagrangiana.

En la figura (6.1) podemos observar los resultados promedio de las cotas lagrangianas obtenidas para todas las relajaciones de los casos de tipo 1.

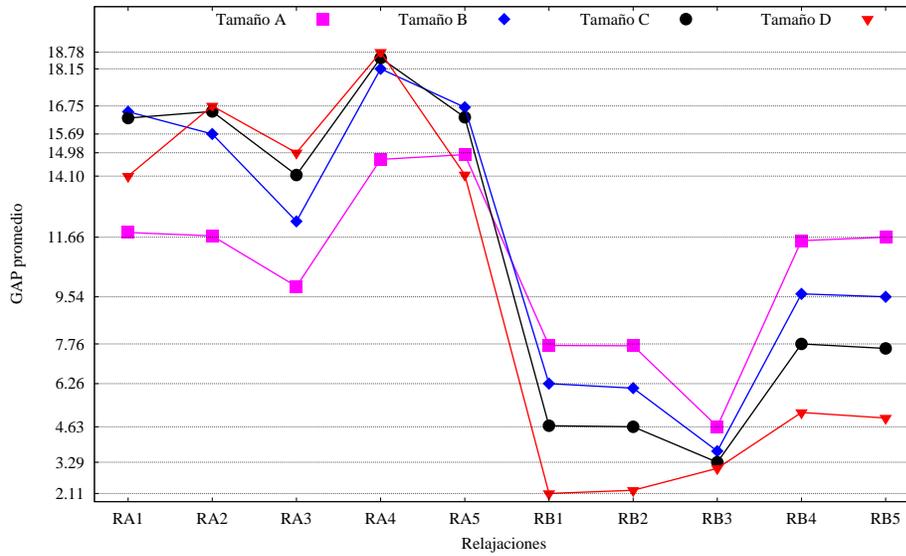


Figura 6.1: Calidad promedio de las cotas lagrangianas para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 1.

La figura (6.2) muestra resultados iguales para los promedios de calidad de las cotas factibles encontrada para los casos de tipo 1 para todas las relajaciones consideradas. Se muestran los mismos resultados para los casos de tipo 2 en las

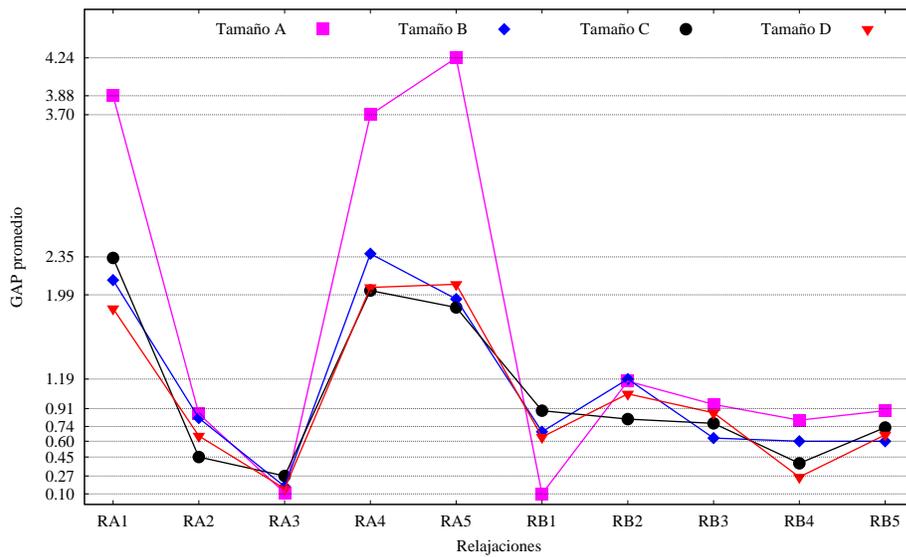


Figura 6.2: Calidad promedio de las cotas factibles para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 1.

siguientes figuras, (6.3) para las soluciones lagrangianas y (6.4) muestra los resultados para las soluciones factibles de los casos de tipo 2.

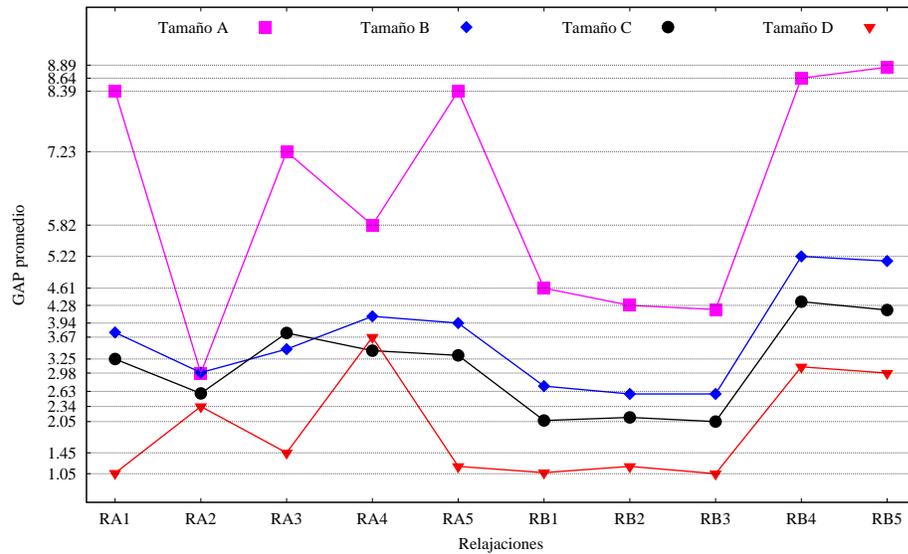


Figura 6.3: Calidad promedio de las cotas lagrangianas para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 2.

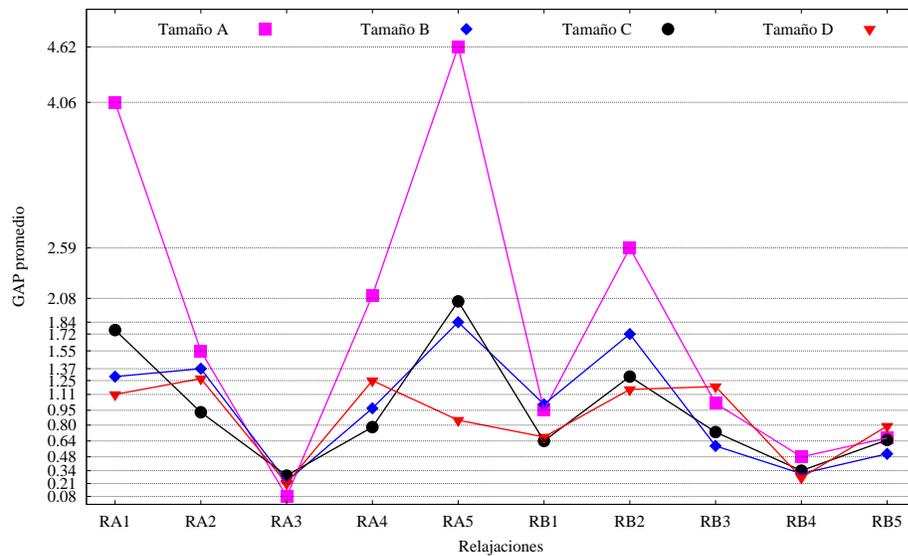


Figura 6.4: Calidad promedio de las cotas factibles para todas las relajaciones consideradas. Casos de tipo 2.

De las figuras (6.1)–(6.4) podemos observar que en promedio, para los cuatro

tamaños estudiados, la relajación RB3 nos aporta mejores resultados en cuanto a la calidad de las cotas lagrangianas encontradas. Así mismo podemos observar que, en promedio, la relajación RA3 es la que aporta los mejores resultados con respecto a la calidad de las cotas factibles para los cuatro tamaños estudiados, sin embargo, observamos que la relajación RB4, que se puede resolver de manera mucho más sencilla, obtiene cotas factibles de muy buena calidad, incluso mejores que la mayoría de las relajaciones para los tamaños grandes.

A continuación se presentan algunos resultados para las relajaciones RB3 (que en promedio nos da la mejor cota lagrangiana) y RB4 (que obtiene una de las mejores cotas factibles y es más fácil de resolver).

En la tabla (6.5) se muestran los resultados de cinco casos de cada tamaño propuesto. Las primeras dos columnas nos muestran la calidad relativa para la cota dual correspondiente y para la mejor solución factible obtenida por el algoritmo del subgradiente, el paréntesis en la columna de la mejor cota factible indica el número de iteración donde ésta fue encontrada. La siguiente columna muestra la calidad de la cota factible encontrada en la última iteración del algoritmo, el número entre paréntesis indica el total de iteraciones realizadas. La última columna nos indica la calidad de la cota factible encontrada en la primera iteración del algoritmo subgradiente.

La tabla (6.6) muestra indicadores idénticos para la relajación lagrangiana RB4 con los casos del tipo 1.

Las tablas (6.7) y (6.8) presentan indicadores idénticos para las relajaciones RB3 y RB4 con los casos del tipo 2. Las tablas de resultados completos para los dos conjuntos de casos generadas en los 4 tamaños se pueden encontrar en los apéndices al final de este trabajo.

Después de analizar los resultados obtenidos anteriormente, se trabajó con estas dos relajaciones lagrangianas (RB3 y RB4) y se crearon casos de los siguientes tamaños (I, J, K) :

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	7.46	0 (12)	1.05 (128)	2.75
A2	1.41	0.00 (3)	0.00 (102)	10.58
A3	3.86	0.00 (2)	0.43 (144)	4.44
A4	2.43	0.00 (23)	7.89 (128)	14.57
A5	4.37	0.00 (1)	0.00 (145)	0.00
B1	3.77	0.00 (48)	0.74 (169)	1.09
B2	2.36	0.00 (1)	0.00 (161)	0.00
B3	5.35	0.00 (27)	1.16 (182)	0.49
B4	3.38	0.00 (3)	3.48 (129)	4.05
B5	5.66	0.00 (9)	0.00 (103)	0.48
C1	4.17	0.00 (11)	0.55 (164)	0.29
C2	4.51	0.00 (15)	0.69 (170)	0.63
C3	1.09	0.00 (51)	0.02 (172)	0.38
C4	3.73	0.00 (14)	0.26 (167)	0.95
C5	2.49	0.00 (1)	0.00 (166)	0.00
D1	1.33	0.00 (35)	0.30 (163)	0.65
D2	1.23	0.00 (38)	0.19 (159)	1.16
D3	2.42	0.00 (24)	0.00 (176)	0.59
D4	3.82	0.04 (33)	0.21 (181)	1.28
D5	3.34	0.00 (1)	0.09 (152)	0.00

Tabla 6.5: Relajación RB3 para casos del tipo 1

- E (10,16,30)
- F (30,30,30)
- G (30,60,120)
- H (30,30,100)
- I (50,50,200)

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	13.64	0.51 (9)	4.72 (214)	10.31
A2	4.79	0.00 (28)	0.00 (166)	14.48
A3	5.69	0.43 (4)	15.11 (249)	18.41
A4	6.23	0.00 (38)	7.89 (194)	20.18
A5	19.49	0.00 (1)	0.00 (219)	2.61
B1	13.18	0.00 (137)	0.79 (212)	2.09
B2	9.09	0.00 (58)	1.66 (265)	1.44
B3	8.29	1.57 (23)	9.02 (300)	8.63
B4	5.49	0.00 (61)	6.01 (243)	6.01
B5	9.32	0.11 (21)	6.66 (260)	14.79
C1	6.68	0.00 (62)	8.28 (223)	9.95
C2	10.83	0.25 (181)	1.96 (295)	5.06
C3	6.80	0.56 (76)	2.82 (264)	4.64
C4	8.55	0.00 (27)	4.80 (237)	5.28
C5	6.47	0.00 (183)	1.22 (289)	4.34
D1	6.31	0.20 (47)	1.39 (300)	6.79
D2	6.08	0.40 (62)	1.73 (300)	4.48
D3	8.47	0.00 (238)	6.69 (300)	5.64
D4	7.29	1.91 (67)	8.18 (300)	8.45
D5	5.56	0.19 (18)	1.51 (300)	2.19

Tabla 6.6: Relajación RB4 para casos del tipo 1

Se generaron dos conjuntos de casos, de la misma forma que se ha mencionado anteriormente. A continuación se presentan las tablas con algunos resultados para estos casos. Los indicadores mostrados son similares a los de las tablas anteriores.

Las tablas (6.9) y (6.10) muestran los indicadores para los nuevos tamaños de datos con las relajaciones RB3 y RB4 respectivamente para los casos del tipo 1.

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	7.49	0.00 (9)	3.14 (138)	2.36
A2	1.13	0.00 (8)	0.00 (107)	9.57
A3	3.50	0.00 (2)	2.77 (163)	5.76
A4	3.19	0.00 (10)	6.25 (130)	9.27
A5	4.23	0.00 (1)	0.00 (178)	0.00
B1	2.58	0.00 (37)	0.44 (164)	1.83
B2	1.72	0.00 (1)	0.00 (157)	0.00
B3	2.41	0.00 (8)	0.00 (156)	2.66
B4	3.27	0.00 (25)	0.00 (147)	0.96
B5	2.83	0.00 (3)	0.18 (113)	0.76
C1	2.21	0.00 (46)	0.00 (209)	0.56
C2	2.55	0.00 (11)	0.84 (154)	1.05
C3	1.19	0.00 (35)	0.03 (165)	0.64
C4	2.49	0.00 (17)	0.00 (164)	0.43
C5	1.27	0.00 (10)	0.00 (155)	2.54
D1	1.38	0.00 (10)	0.53 (183)	1.18
D2	0.86	0.00 (27)	0.58 (170)	2.06
D3	1.87	0.00 (9)	0.00 (164)	1.05
D4	1.81	0.00 (18)	0.91 (159)	0.91
D5	1.36	0.00 (1)	0.18 (172)	0.00

Tabla 6.7: Relajación RB3 para casos del tipo 2

Así mismo, las tablas (6.11) y (6.12) muestran los indicadores para los nuevos tamaños de datos con las relajaciones RB3 y RB4 respectivamente para los casos del tipo 2.

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	12.3	1.81 (3)	5.07 (188)	12.51
A2	2.31	0.00 (11)	0.00 (179)	14.95
A3	7.74	0.57 (2)	4.21 (171)	4.21
A4	6.39	0.00 (11)	0.00 (170)	11.63
A5	11.03	0.00 (5)	3.79 (172)	3.79
B1	6.04	0.00 (85)	0.99 (263)	3.47
B2	4.03	0.00 (11)	0.00 (235)	2.35
B3	5.93	1.26 (54)	4.73 (244)	2.66
B4	4.97	0.00 (28)	4.91 (231)	4.18
B5	4.15	0.18 (13)	0.18 (242)	8.37
C1	4.89	0.00 (111)	1.78 (212)	3.39
C2	4.43	0.35 (46)	2.81 (278)	8.22
C3	2.88	0.03 (81)	2.28 (248)	7.59
C4	4.59	0.00 (182)	6.57 (238)	8.49
C5	3.03	0.00 (29)	2.43 (283)	6.91
D1	2.89	0.00 (69)	4.26 (300)	5.30
D2	2.43	0.00 (19)	3.14 (300)	7.44
D3	3.75	0.00 (136)	5.55 (300)	9.71
D4	3.70	0.49 (30)	2.16 (286)	4.19
D5	2.07	0.00 (43)	1.75 (300)	3.79

Tabla 6.8: Relajación RB4 para casos del tipo 2

Se realizó también un análisis sobre el funcionamiento de la metodología propuesta a lo largo de este trabajo para casos donde algunos parámetros se relaciones de manera específica. En particular se estudiaron casos donde se propone una proporción dada entre la suma de las capacidades de los almacenes y la demanda total de los clientes.

Al igual que lo mencionado a lo largo del capítulo se tomaron los costos fijos

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
E1	1.08	0.02 (24)	0.94 (201)	4.20
E2	2.49	0.00 (32)	0.64 (181)	6.29
E3	1.28	0.00 (18)	0.49 (175)	7.27
E4	1.35	0.49 (34)	1.89 (200)	3.49
E5	2.62	0.59 (30)	0.56 (/181)	2.61
F1	0.69	0.00 (20)	0.59 (174)	11.67
F2	0.38	0.00 (36)	1.15 (171)	12.63
F3	0.99	0.21 (35)	0.29 (191)	11.59
F4	0.56	0.59 (39)	1.61 (161)	17.41
F5	0.9	0.08 (20)	0.41 (183)	9.92
G1	0.32	0.46 (83)	0.62 (205)	5.56
G2	0.33	0.16 (79)	0.42 (208)	6.43
G3	0.46	0.35 (58)	0.36 (204)	7.20
G4	0.26	0.13 (53)	0.28 (203)	7.08
G5	0.28	0.00 (57)	0.07 (229)	6.52
H1	0.72	0.22 (113)	0.85 (239)	3.55
H2	0.59	0.09 (71)	1.86 (239)	6.26
H3	0.55	0.07 (28)	0.39 (248)	3.98
H4	0.72	0.18 (75)	0.35 (239)	3.53
H5	0.41	0.15 (54)	0.15 (204)	4.35
I1	0.25	0.28 (67)	0.50 (187)	2.81
I2	0.3	0.14 (71)	0.63 (243)	3.39
I3	0.31	0.65 (82)	0.93 (238)	3.62
I4	0.15	0.10 (99)	0.64 (240)	4.19
I5	0.29	0.09 (47)	0.12 (211)	3.29

Tabla 6.9: Relajación RB3 para casos del tipo 1.

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
E1	4.04	2.54 (44)	9.06 (227)	13.75
E2	9.56	0.79 (71)	0.79 (205)	4.93
E3	3.71	5.76 (51)	6.83 (293)	14.73
E4	6.25	0.00 (108)	1.69 (233)	7.35
E5	7.40	0.32 (56)	8.03 (277)	8.79
F1	3.15	0.67 (133)	1.31 (257)	13.41
F2	2.94	0.00 (60)	1.14 (261)	15.65
F3	2.28	0.95 (56)	2.93 (250)	14.24
F4	2.9	0.93 (51)	2.06 (261)	13.58
F5	2.96	0.64 (32)	5.42 (277)	20.07
G1	3.33	0.61 (194)	1.12 (300)	6.94
G2	1.98	0.82 (128)	1.56 (300)	8.22
G3	1.27	0.46 (120)	2.60 (300)	8.29
G4	0.87	0.16 (260)	1.11 (300)	7.15
G5	1.51	0.70 (87)	1.87 (300)	9.14
H1	1.64	1.16 (206)	2.52 (300)	8.33
H2	2.23	0.58 (214)	2.88 (300)	8.28
H3	1.54	0.23 (240)	2.25 (300)	7.26
H4	1.47	0.58 (127)	3.49 (300)	5.37
H5	1.14	0.43 (78)	2.64 (300)	8.81
I1	1.09	0.79 (211)	1.09 (300)	6.61
I2	1.95	0.81 (207)	2.27 (300)	5.62
I3	1.59	1.41 (221)	1.81 (300)	5.28
I4	1.29	1.01 (168)	2.89 (300)	6.59
I5	1.48	0.94 (146)	1.78 (300)	5.67

Tabla 6.10: Relajación RB4 para casos del tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
E1	1.73	0.00 (37)	1.55 (185)	4.43
E2	2.01	0.16 (47)	0.53 (208)	4.34
E3	1.36	0.30 (31)	1.21 (165)	6.03
E4	1.67	0.24 (53)	0.72 (157)	3.23
E5	2.28	0.68 (22)	1.62 (179)	6.81
F1	0.77	0.62 (34)	0.67 (177)	14.05
F2	0.43	0.17 (33)	1.17 (187)	13.79
F3	1.11	0.23 (65)	0.38 (181)	12.78
F4	0.62	0.28 (26)	1.78 (184)	15.02
F5	1.01	0.09 (21)	0.09 (189)	10.49
G1	0.28	0.15 (55)	0.28 (203)	7.71
G2	0.54	0.43 (59)	0.99 (185)	7.19
G3	0.53	0.53 (83)	0.71 (172)	8.97
G4	0.46	0.04 (27)	0.49 (186)	8.42
G5	0.23	0.11 (55)	0.53 (190)	7.9
H1	0.54	0.24 (34)	0.89 (334)	2.95
H2	1.07	0.08 (40)	1.47 (135)	5.44
H3	0.53	0.05 (30)	2.09 (117)	2.37
H4	0.51	0.27 (34)	0.44 (175)	4.35
H5	0.74	0.29 (53)	1.05 (181)	3.49
I1	0.43	0.14 (50)	0.14 (201)	3.57
I2	0.48	0.06 (78)	0.34 (219)	3.26
I3	0.56	0.19 (71)	0.21 (201)	3.5
I4	0.32	0.09 (177)	0.28 (250)	3.06
I5	0.29	0.04 (125)	0.30 (185)	3.11

Tabla 6.11: Relajación RB3 para casos del tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
E1	4.56	0.00 (59)	0.10 (225)	11.65
E2	5.03	0.53 (92)	0.75 (217)	7.79
E3	3.94	1.37 (49)	5.67 (231)	12.86
E4	3.47	0.52 (134)	2.05 (256)	9.14
E5	4.25	0.46 (191)	6.07 (256)	9.10
F1	2.21	0.75 (109)	1.44 (300)	13.92
F2	1.89	0.00 (53)	0.89 (235)	13.67
F3	1.88	0.037 (58)	1.17 (198)	15.48
F4	1.61	1.55 (264)	3.67 (300)	19.74
F5	1.91	0.55 (60)	1.66 (266)	13.71
G1	1.10	0.37 (240)	1.91 (300)	8.11
G2	0.99	1.18 (88)	1.58 (300)	7.63
G3	1.13	0.21 (249)	1.24 (300)	8.69
G4	0.94	0.56 (100)	1.81 (300)	7.42
G5	0.67	0.23 (194)	0.87 (300)	9.92
H1	1.04	0.46 (284)	2.02 (300)	10.28
H2	1.29	0.47 (168)	1.04 (300)	5.84
H3	1.49	0.38 (191)	1.57 (300)	8.18
H4	1.39	0.77 (284)	2.57 (300)	7.16
H5	1.73	0.73 (147)	3.93 (300)	8.83
I1	0.96	0.52 (199)	1.27 (300)	5.98
I2	0.93	0.81 (130)	2.52 (300)	6.44
I3	0.78	1.09 (196)	1.49 (300)	7.01
I4	0.73	0.92 (202)	1.57 (300)	5.94
I5	0.64	1.04 (94)	1.90 (300)	6.44

Tabla 6.12: Relajación RB4 para casos del tipo 2

tanto de plantas como de almacenes de dos formas diferentes:

- Casos donde los costos fijos de plantas y almacenes son proporcionales al número de clientes que se espera sean atendidos desde las mismas (**tipo 1**). Los costos fijos se calculan como sigue:

$$f_i \in \left[100 \frac{J+K}{I} \right] + U[0, 100], \quad g_j \in \left[100 \frac{K}{J} \right] + U[0, 100]$$

- Casos donde los costos fijos de plantas y almacenes son independientes del número de clientes que se espera que atiendan (**tipo 2**). Los costos fijos se calculan como sigue:

$$f_i, g_j \in U[100, 200]$$

Además, para este análisis se fijó la proporción entre la suma de las capacidades de las plantas y la demanda total de los clientes de 3 maneras como sigue:

$$prop = \frac{\sum_j p_j}{\sum_k q_k} \in [1.5, 1.7]$$

$$prop = \frac{\sum_j p_j}{\sum_k q_k} \in [2, 2.2]$$

$$prop = \frac{\sum_j p_j}{\sum_k q_k} \in [3, 3.2]$$

Se realizó la experimentación para 5 casos de cada tamaño. Los resultados se muestran en las tablas que aparecen a continuación. La primera columna indica el tamaño del caso, las siguientes dos columnas se relacionan a los resultados de los casos con dicha proporción en el intervalo $[1.5, 1.7]$, la primera de ellas muestra la proximidad relativa de la cota lagrangiana encontrada con respecto al valor óptimo del problema original, la segunda muestra la proximidad relativa de la solución factible con respecto al valor óptimo del problema. Las siguientes dos columnas muestran los mismos indicadores para los casos donde la proporción está en el intervalo $[2, 2.2]$ y las últimas dos muestran los mismos indicadores para la proporción en el intervalo $[3, 3.2]$.

Tamaño	$prop \in [1.5, 1.7]$		$prop \in [2, 2.2]$		$prop \in [3, 3.2]$	
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)
A	12.64	0.15	13.52	0	15.59	0
B	8.71	0.16	7.01	1.16	17.81	0.13
C	6.11	0.14	5.99	0.61	12.50	0.91
D	5.51	0.14	5.88	0.16	9.47	0.13
E	3.79	1.19	5.50	0.50	7.60	0.56
F	1.28	0.65	1.52	1.07	3.23	1.49
G	1.04	0.83	1.89	0.94	2.76	1.13
H	1.27	0.36	1.84	0.94	3.22	1.45
I	1.05	1.66	1.39	1.27	2.70	1.88

Tabla 6.13: Análisis de proporción de los parámetros para casos del tipo 1

Los resultados de las tablas (6.13) y (6.14) nos permiten ver que la metodología propuesta en este trabajo de investigación se comporta bien incluso para las variaciones de estos parámetros, ya que, a pesar de que los casos con la proporción capacidad de almacenes/demanda total más grande son más pesados para el algoritmo, las soluciones obtenidas no varían mucho en cuanto a calidad, sobre todo para los tamaños grandes. Las soluciones factibles son de buena calidad para las tres proporciones propuestas de cada caso e incluso, para los casos grandes, la cercanía entre las soluciones lagrangianas y factibles es de buena calidad.

Tamaño	$prop \in [1.5, 1.7]$		$prop \in [2, 2.2]$		$prop \in [3, 3.2]$	
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)
A	6.64	0.28	10.20	0.84	10.06	0
B	4.25	0.07	5.21	0.21	8.81	0.24
C	3.12	0.15	3.62	0.08	6.28	0.85
D	1.92	0.04	2.73	0.10	4.53	0.07
E	2.85	0.60	3.12	0.65	4.42	0.52
F	1.20	0.43	1.26	0.82	2.49	0.59
G	0.77	0.75	0.96	0.62	1.31	0.67
H	0.93	0.69	1.51	0.54	1.84	1.12
I	0.85	0.61	0.98	0.79	1.56	1.28

Tabla 6.14: Análisis de proporción de los parámetros para casos del tipo 2

6.2 CASOS EN LA LITERATURA

Para verificar el funcionamiento de la metodología propuesta en este trabajo de investigación, tomamos los casos estudiados en Wildbore [2008] y comparamos algunos de los resultados contra los resultados obtenidos por nuestra metodología para la relajación *RB4*.

En el trabajo de Wildbore [2008] se utiliza una formulación basada en la fracción de demanda de cada cliente cumplida por cada almacén.

Se revisan las relajaciones posibles al dualizar uno o varios conjuntos de restricciones para el problema de localización capacitado en dos etapas. Las relajaciones lagrangianas propuestas son probadas con conjuntos de datos generados de manera similar a investigadores anteriores como Cornuejols et al. [1991], Sridharan [1991] y algunos parámetros similares a Klose [1999]. Los datos generados se basan en los conjuntos de datos publicados que han sido utilizados, con o sin modificaciones, por varios de los investigadores en problemas de localización de instalaciones o de

naturaleza similar al problema de localización capacitado en dos etapas como sigue:

$$\begin{aligned}
 c_{ij} &= 0.01 * \sum_k q_k * distancia_{ij} \\
 d_{jk} &= 7.5 * distancia_{jk} \\
 b_i &\in U[20, 730] \\
 \sum_i b_i &\geq 1.25 * \sum_j p_j \\
 p_j &\in U[10, 160] \\
 f_i &\in U[0, 90] + U[100, 110] * \sqrt{b_i} \\
 g_j &\in U[0, 90] + U[100, 110] * \sqrt{p_j}
 \end{aligned}$$

Las posiciones de las plantas, almacenes y clientes son seleccionadas aleatoriamente del cuadrado 100×100 .

Para recuperar factibilidad de las soluciones lagrangianas, se fijan los valores de las variables binarias de la solución lagrangiana y se resuelve el problema original con las variables 0 – 1 fijas. El algoritmo va actualizando y guardando la mejor solución encontrada durante el procedimiento.

Se probaron 3 problemas de cada uno de los siguientes tamaños de casos:

- 3x5x10
- 5x10x25
- 10x33x50
- 15x40x60
- 20x50x75
- 30x60x120
- 40x80x200

- 20x50x250

Del conjunto total de relajaciones estudiadas en el trabajo de Wildbore [2008] se seleccionan algunas debido obtienen la mejor calidad entre las cotas inferiores y superiores encontradas,

Se compararon los promedios obtenidos de la calidad de las cotas superiores e inferiores. Comparamos los resultados obtenidos en Wildbore [2008] en las siguientes relajaciones lagrangianas:

- gap_{w1} : representa el gap entre las cotas inferior y superior para la relajación en la que se dualizan solo las restricciones de demanda ($w1$).
- gap_{w2} : representa el gap entre las cotas inferior y superior para la relajación en la que se dualizan solo las restricciones de capacidad de planta ($w2$).
- gap_{w3} : representa el gap entre las cotas inferior y superior para la relajación similar a $RB4$ para nuestra formulación, ya que se dualizan las restricciones de demanda, de capacidad de planta y las restricciones que indican que una plantas olo puede enviar producto que si ha sido seleccionada para ser abierta ($w3$).
- gap_{RB4} : representa el gap entre las cotas inferior y superior para la relajación $RB4$ en nuestra formulación.

La siguiente tabla muestra la comparación entre las relajaciones mencionadas anteriormente, se muestra, en porcentaje, el gap relativo entre la cota superior e inferior del problema:

En el trabajo de Wildbore [2008] se concluye que la relajación $w3$ utiliza un poco más de tiempo para su solución pero vale la pena debido a la mejora en la calidad respecto a otras relajaciones similares propuestas e incluso la calidad es mejor que algunas en las que se relasjan solo 2 conjuntos de restricciones.

Tamaño	$(gap_{w1} \%)$	$(gap_{w2} \%)$	$(gap_{w3} \%)$	$(gap_{RB4} \%)$
3x5x10	2.02	4.81	6.65	25.59
5x10x25	5.66	14.79	28.92	9.61
10x33x50	9.01	28.16	40.94	30.11
15x40x60	12.05	45.02	59.42	36.67
20x50x75	15.24	63.02	82.93	45.68
30x60x120	20.05	No encontrada	109.10	24.12
40x80x200	No encontrada	No encontrada	126.93	30.15
20x50x250	No encontrada	No encontrada	144.89	5.29

Tabla 6.15: Comparación de resultados

Podemos ver que la heurística lagrangiana implementada por Wildbore [2008] no obtiene cotas superiores e inferiores para instancias de tamaños mayores a $30x60x120$ para la mayoría de las relajaciones estudiadas. Sin embargo, la metodología propuesta para la relajación lagrangiana $RB4$ obtiene resultados para todos los casos y la calidad es mejor en la mayoría de los casos comparados contra la relajación $w3$ e incluso que algunos casos para las relajaciones donde se dualiza únicamente un conjunto de restricciones en Wildbore [2008].

Entre el trabajo futuro propuesto está el de probar con otro tipo de casos generados por diversos autores para ver el comportamiento de nuestra metodología.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

Consideramos dos formulaciones equivalentes para el problema de localización capacitado en dos etapas. Ambas formulaciones resultan en la misma solución óptima pero la segunda formulación tiene un menor número de restricciones y tienen diferente estructura poliédrica de la región factible. Para cada formulación se propusieron 5 relajaciones lagrangianas que intentaban descomponer el problema en subproblemas más pequeños.

Se desarrolló un algoritmo para recuperar soluciones en base a la parte continua de las soluciones lagrangianas encontradas para cada relajación, lo cual es diferente a lo usual, donde solamente se fijan los valores de las variables binarias resultantes de las solución lagrangiana. El algoritmo propuesto en este trabajo, nos permite aplicarlo a cualquier relajación propuesta para el problema y encontrar siempre soluciones factibles, cosa que no sucede para todas las relajaciones con el método usual.

Se calcula la calidad de las cotas lagrangianas para cada relajación propuesta y se muestran las 3 relajaciones lagrangianas que, en promedio, obtienen las mejores cotas; de la misma manera se calcula la calidad de las soluciones factibles encontradas a partir de la solución de cada una de las relajaciones lagrangianas, se comparan y se seleccionan las que, en promedio, obtienen los mejores resultados.

Podemos observar que relajar la restricción de conservación de flujo en la segunda formulación resulta en la cota lagrangiana mas próxima al valor óptimo del

problema original (*RB3*). Relajar en la primera formulación las restricciones que no permiten que un almacén envíe producto si no ha sido elegido para ser utilizado (*RA3*) resultó ser la que, en promedio, nos arroja el mejor resultado en términos de la solución factible.

Sin embargo, un resultado sorprendente se refiere al caso donde relajamos las restricciones de satisfacción de la demanda y las de capacidad de las plantas para la segunda formulación del problema (*RB4*). Ésta relajación proporciona una cota dual pobre para los primeros casos generados (de tamaños A, B, C y D), por lo que comúnmente se ignoraría, pero la solución factible encontrada a partir de esta solución lagrangiana es de muy buena calidad, generalmente está a un 0.5% de suboptimalidad relativa para estos casos. Mientras que para los tamaños mayores (E, F, G, H, I), la calidad de la cota obtenida por esta relajación mejora considerablemente.

Relajar las restricciones de satisfacción de la demanda y las restricciones de capacidad de las plantas resulta en un problema lagrangiano que se descompone en subproblemas que pueden ser analizados por inspección o a un costo computacional muy bajo, sin tener que resolver problemas enteros, por lo que esta relajación parece prometedora para el objetivo de la heurística lagrangiana.

Al resolver el problema dual lagrangiano con el algoritmo subgradiente comparamos dos esquemas para generar las soluciones factibles al problema en base a las soluciones lagrangianas. Uno de ellos es obtener la solución factible en la última iteración del algoritmo, es decir, resolver el problema y al final, ya con la solución obtenida, recuperar la factibilidad de la solución. El otro esquema se refiere a ir recuperando factibilidad en cada iteración del subgradiente e ir almacenando la mejor solución factible encontrada a lo largo del procedimiento.

Los resultados muestran que la mejor solución factible encontrada (entre todas las iteraciones del algoritmo) no se encuentra generalmente en la última iteración del mismo. Esto es, simplemente resolver el dual lagrangiano y después recuperar

factibilidad a partir de dicha solución no es suficiente para obtener una cota factible más cercana al óptimo. La población de soluciones factibles generadas durante el procedimiento para resolver el problema dual lagrangiano genera soluciones factibles de buena calidad, generalmente en un número no muy grande de iteraciones.

Además se experimentó con diferentes conjuntos de casos donde se tomó la proporción entre la suma de las capacidades de las plantas y las demandas totales entre un intervalo dado, se compararon los resultados para 6 conjuntos de casos distintos donde se variaba la forma de generar los costos fijos (tipo 1 y tipo 2) y se usaron 3 intervalos diferentes para generar la proporción mencionada anteriormente. Se puede observar, de la tabla de resultados, que las cotas obtenidas, tanto primales como duales para el problema, no varían mucho en cuanto a la calidad, y que, para casos grandes, dichas cotas se encuentran muy cercanas entre ellas.

Se trabajó, también, con algunos casos con parámetros y tamaños generados de la misma manera que en el trabajo de Wildbore [2008]. Los resultados obtenidos de esta experimentación nos permitieron ver, que a pesar de que este tipo de casos son pesados tanto para la metodología presentada por Wildbore [2008] como para la nuestra, nuestro algoritmo siempre encuentra soluciones factibles al problema, la calidad de las mismas es mejor con relación a la cota estudiada por Wildbore [2008] que es similar a la obtenida por nuestra relajación *RB4*, y que incluso es mejor para casos donde Wildbore [2008] dualiza únicamente un conjunto de restricciones.

7.1 TRABAJO FUTURO

A continuación se describen algunos aspectos que se derivan de este trabajo como futuras líneas de investigación:

- Cambios más significativos en el método heurístico utilizado para recuperar factibilidad de las soluciones lagrangianas.
- El algoritmo para recuperar factibilidad de las soluciones lagrangianas se puede

aplicar a cualquier solución lagrangiana encontrada, una idea para trabajo futuro es buscar emplear la misma metodología pero adaptada específicamente a la estructura de la relajación que nos interesa (*RB4* en este caso).

- Estudiar el impacto y la relación entre otros parámetros de los casos además de los ya revisados.
- Aplicar la metodología propuesta en este trabajo de investigación al problema de localización de instalaciones de una sola etapa.
- Implementar la metodología de cotas lagrangianas modificadas presentada en Litvinchev et al. [2008] y Saucedo-Martínez [2009] al problema de localización de instalaciones capacitado en dos etapas.

APÉNDICE A

RESULTADOS COMPUTACIONALES

En esta sección se muestran los resultados para las ocho relajaciones lagrangianas que no fueron presentadas en el capítulo de experimentación y resultados.

Se presentan primero los resultados para los casos del tipo 1. Las primeras dos columnas ($\epsilon_L(\%)$ y $\epsilon_{MF}(\%)$) nos muestran la calidad relativa para la cota dual correspondiente y para la mejor solución factible obtenida (en la última iteración del algoritmo), el paréntesis en la columna de la mejor cota factible indica el número de iteración donde ésta fue encontrada. La siguiente columna ($\epsilon_{UF}(\%)$) muestra la calidad de la cota factible encontrada en la última iteración del algoritmo, el número entre paréntesis indica el total de iteraciones realizadas. La última columna ($\epsilon_{PF}(\%)$) nos indica la calidad de la cota factible encontrada en la primera iteración del algoritmo subgradiente.

Las siguientes ocho tablas, muestran los mismos resultados mencionados anteriormente pero para las instancias del tipo 2.

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	16.23	2.75 (2)	7.42 (136)	3.32
A2	8.01	0.00 (3)	0.00 (122)	19.75
A3	16.62	0.00 (5)	0.43 (236)	16.37
A4	9.19	7.89 (11)	12.41 (183)	20.18
A5	23.84	0.00 (8)	2.61 (104)	2.61
B1	20.14	1.33 (22)	3.22 (159)	2.52
B2	16.17	1.44 (8)	1.62 (160)	2.32
B3	14.95	0.49 (17)	10.52 (144)	4.75
B4	10.83	4.46 (3)	4.46 (128)	12.01
B5	14.02	3.16 (29)	4.19 (157)	15.03
C1	15.03	0.29 (4)	1.17 (150)	8.75
C2	17.8	0.41 (10)	4.69 (165)	2.79
C3	16.03	1.81 (9)	3.64 (183)	4.64
C4	14.05	3.39 (14)	3.66 (188)	7.53
C5	14.17	4.04 (3)	9.01 (164)	8.48
D1	13.44	1.46 (86)	2.41 (171)	6.79
D2	13.57	1.81 (43)	2.61 (182)	3.89
D3	14.99	1.23 (120)	2.44 (177)	5.49
D4	12.46	1.44 (62)	1.44 (205)	8.18
D5	14.63	1.92 (46)	3.58 (191)	3.87

Tabla A.1: Resultados para la relajación RA1 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	9.09	0.00 (9)	7.42 (155)	2.35
A2	5.57	0.00 (1)	5.59 (171)	0.00
A3	9.92	0.00 (2)	15.11 (148)	13.46
A4	4.16	0.00 (3)	0.00 (164)	2.84
A5	19.78	0.00 (1)	0.00 (152)	0.00
B1	19.73	0.24 (1)	1.18 (165)	0.24
B2	18.21	0.00 (1)	1.96 (207)	0.00
B3	13.69	0.00 (6)	9.02 (192)	7.56
B4	12.03	0.00 (48)	4.33 (175)	3.49
B5	7.21	0.11 (1)	3.29 (193)	0.11
C1	12.66	5.97 (1)	7.20 (190)	5.97
C2	16.42	0.41 (136)	2.49 (215)	0.49
C3	15.41	0.17 (2)	2.50 (2.16)	1.07
C4	14.71	0.23 (56)	1.83 (245)	1.28
C5	14.65	1.13 (10)	1.39 (191)	1.37
D1	17.74	0.26 (18)	2.34 (253)	0.41
D2	18.03	0.00 (1)	2.06 (242)	0.00
D3	17.98	0.48 (48)	2.96 (262)	0.54
D4	14.37	1.70 (3)	8.91 (267)	5.04
D5	15.87	0.20 (43)	1.82 (242)	0.31

Tabla A.2: Resultados para la relajación RA2 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	13.16	1.05 (8)	1.05 (178)	4.05
A2	5.38	0.00 (1)	0.00 (256)	0.00
A3	10.64	0.43 (1)	2.79 (152)	0.43
A4	8.4	0.00 (22)	7.89 (186)	7.89
A5	10.56	0.00 (1)	0.00 (186)	0.00
B1	12.65	0.00 (8)	0.00 (234)	1.12
B2	12.93	0.00 (1)	0.00 (173)	0.00
B3	13.39	0.00 (13)	0.49 (205)	1.43
B4	9.96	0.00 (2)	4.05 (224)	3.48
B5	13.97	0.00 (23)	0.48 (296)	0.48
C1	15.95	0.00 (6)	0.33 (249)	0.29
C2	14.62	0.00 (7)	0.44 (217)	0.07
C3	13.58	0.00 (20)	0.02 (215)	0.94
C4	13.05	0.00 (4)	0.85 (220)	1.40
C5	13.32	0.00 (2)	0.00 (216)	1.96
D1	11.99	0.00 (21)	0.45 (223)	0.67
D2	11.79	0.00 (13)	0.71 (199)	0.95
D3	12.28	0.00 (19)	0.05 (230)	0.95
D4	13.43	0.04 (84)	0.93 (261)	0.21
D5	15.34	0.00 (3)	0.00 (234)	0.09

Tabla A.3: Resultados para la relajación RA3 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	13.62	2.75 (9)	2.75 (143)	4.72
A2	7.01	5.59 (3)	5.59 (300)	20.38
A3	13.16	0.43 (8)	18.41 (100)	18.41
A4	0.06	0.00 (5)	7.89 (167)	20.18
A5	15.77	2.02 (23)	2.02 (105)	2.61
B1	22.81	1.48 (5)	3.48 (122)	2.14
B2	20.21	1.62 (13)	3.10 (129)	2.32
B3	18.28	4.42 (8)	5.33 (143)	5.33
B4	14.27	5.13 (79)	5.13 (133)	12.01
B5	11.73	3.69 (5)	3.69 (123)	15.03
C1	16.13	1.65 (13)	7.17 (243)	8.28
C2	20.29	1.31 (21)	4.49 (124)	3.46
C3	16.35	1.58 (8)	1.59 (180)	4.68
C4	18.65	3.08 (81)	7.53 (132)	7.53
C5	16.92	2.79 (5)	2.79 (167)	8.48
D1	19.39	1.01 (25)	2.16 (172)	6.71
D2	19.97	2.32 (8)	2.32 (268)	3.88
D3	20.66	1.31 (7)	2.92 (151)	6.69
D4	18.42	6.82 (11)	10.36 (193)	8.18
D5	19.55	2.18 (8)	2.18 (174)	4.90

Tabla A.4: Resultados para la relajación RA4 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	16.23	2.75 (2)	4.72 (133)	4.72
A2	8.11	0.00 (3)	14.48 (146)	19.75
A3	10.62	0.00 (25)	0.43 (181)	16.37
A4	9.19	7.89 (2)	10.17 (138)	20.18
A5	24.23	0.0 (5)	2.61 (141)	4.77
B1	20.19	1.44 (10)	3.22 (142)	2.52
B2	16.19	1.44 (5)	1.62 (149)	2.32
B3	14.96	0.49 (36)	11.05 (172)	4.75
B4	10.82	4.46 (19)	4.46 (125)	12.01
B5	14.08	3.16 (19)	3.16 (197)	15.03
C1	15.04	0.29 (37)	1.17 (149)	8.75
C2	17.88	0.41 (9)	4.69 (137)	2.79
C3	16.03	1.81 (46)	5.04 (145)	4.64
C4	14.11	3.39 (43)	3.39 (176)	7.53
C5	14.39	2.27 (45)	4.56 (182)	8.48
D1	13.51	1.46 (52)	2.42 (173)	6.79
D2	13.56	1.77 (54)	3.20 (225)	3.89
D3	14.97	1.23 (103)	2.76 (179)	5.49
D4	12.48	1.44 (27)	1.44 (243)	8.18
D5	14.78	1.81 (82)	3.12 (202)	3.87

Tabla A.5: Resultados para la relajación RA5 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	8.16	1.05 (14)	2.35 (135)	5.97
A2	3.26	0.00 (31)	12.37 (89)	12.37
A3	3.38	0.00 (5)	21.01 (138)	18.44
A4	2.23	0.00 (9)	10.31 (128)	10.31
A5	17.24	0.00 (4)	2.61 (130)	2.61
B1	11.43	0.61 (27)	0.87 (124)	0.79
B2	6.79	0.02 (17)	0.71 (135)	1.79
B3	6.68	0.74 (16)	1.69 (132)	2.12
B4	3.02	0.99 (15)	8.88 (147)	12.45
B5	4.92	0.11 (28)	9.75 (102)	10.42
C1	4.58	5.98 (36)	7.83 (118)	7.83
C2	8.25	0.41 (9)	2.73 (116)	0.69
C3	4.91	0.31 (8)	1.57 (151)	1.31
C4	5.22	0.00 (28)	2.69 (116)	2.92
C5	4.26	0.00 (28)	2.91 (118)	4.20
D1	3.15	0.81 (16)	2.98 (113)	1.98
D2	3.56	1.81 (24)	3.89 (129)	3.26
D3	5.61	0.44 (96)	0.47 (131)	2.38
D4	3.05	5.32 (1)	6.98 (130)	5.32
D5	2.77	0.00 (105)	1.92 (153)	2.44

Tabla A.6: Resultados para la relajación RB1 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	7.93	0.00 (11)	0.51 (104)	0.51
A2	3.13	0.00 (1)	0.00 (84)	0.00
A3	1.70	0.00 (2)	13.46 (136)	16.37
A4	4.32	0.00 (1)	2.84 (115)	0.00
A5	14.72	0.00 (1)	0.00 (150)	0.00
B1	8.69	0.00 (19)	0.59 (121)	0.33
B2	6.02	0.00 (7)	0.00 (135)	0.69
B3	2.49	0.00 (14)	7.19 (141)	7.87
B4	2.63	0.00 (9)	3.49 (126)	3.49
B5	0.35	0.11 (5)	0.11 (160)	10.34
C1	1.27	1.65 (11)	5.57 (144)	6.72
C2	4.10	0.00 (21)	0.57 (169)	0.61
C3	4.33	0.17 (48)	1.33 (150)	0.96
C4	3.13	0.39 (18)	1.28 (142)	1.28
C5	2.46	0.00 (5)	0.88 (166)	0.77
D1	2.84	0.00 (18)	0.00 (131)	0.55
D2	3.07	0.00 (22)	0.00 (124)	2.65
D3	4.08	0.00 (44)	0.00 (149)	0.63
D4	0.51	0.00 (18)	0.20 (135)	5.77
D5	0.78	0.00 (37)	0.19 (179)	0.66

Tabla A.7: Resultados para la relajación RB2 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	13.56	1.05 (26)	2.35 (158)	4.72
A2	4.55	0.00 (16)	0.00 (155)	19.75
A3	5.28	0.00 (29)	18.41 (180)	18.41
A4	6.39	0.00 (18)	10.31 (202)	20.18
A5	19.13	0.00 (18)	2.61 (189)	3.57
B1	12.61	0.00 (27)	0.59 (178)	3.07
B2	8.58	0.00 (49)	1.97 (160)	3.98
B3	7.81	0.00 (26)	8.67 (166)	4.75
B4	4.97	0.19 (33)	10.86 (177)	11.62
B5	6.28	0.00 (43)	0.58 (163)	17.19
C1	5.39	1.29 (76)	5.96 (209)	9.06
C2	8.83	0.69 (75)	3.06 (227)	3.41
C3	5.64	0.02 (116)	0.55 (234)	1.16
C4	6.65	0.00 (39)	0.23 (187)	5.74
C5	5.24	0.00 (64)	1.05 (209)	7.29
D1	4.36	0.28 (80)	1.76 (202)	7.78
D2	4.70	0.00 (93)	2.26 (212)	3.75
D3	6.58	0.00 (52)	1.44 (211)	4.11
D4	4.43	0.00 (206)	0.55 (224)	6.89
D5	4.2	0.19 (65)	1.36 (218)	2.74

Tabla A.8: Resultados para la relajación RB5 tipo 1

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	9.33	2.36 (3)	2.36 (110)	8.70
A2	2.28	0.00 (2)	14.95 (76)	22.79
A3	8.39	0.00 (7)	6.30 (119)	9.64
A4	6.71	6.25 (3)	9.27 (115)	21.99
A5	12.36	0.00 (10)	3.79 (135)	6.05
B1	4.39	0.55 (12)	4.01 (118)	5.31
B2	3.25	0.00 (15)	3.77 (175)	2.64
B3	3.39	1.82 (26)	6.03 (128)	4.73
B4	1.86	0.00 (19)	7.86 (125)	5.34
B5	3.31	1.18 (34)	6.48 (140)	4.91
C1	3.84	2.57 (16)	3.39 (160)	4.83
C2	3.17	0.46 (38)	2.35 (151)	3.84
C3	2.67	0.03 (48)	6.13 (142)	5.99
C4	1.83	1.31 (28)	3.02 (138)	5.99
C5	2.29	3.52 (26)	8.87 (109)	5.09
D1	0.30	0.00 (34)	8.29 (122)	3.19
D2	2.29	0.00 (21)	3.08 (135)	4.28
D3	0.84	0.28 (26)	5.95 (124)	1.60
D4	0.89	0.42 (12)	0.79 (122)	0.95
D5	0.79	0.34 (63)	1.91 (140)	0.94

Tabla A.9: Resultados para la relajación RA1 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	0.39	0.00 (7)	1.81 (273)	1.81
A2	0.35	0.00 (1)	0.00 (177)	0.00
A3	5.44	0.00 (2)	1.43 (161)	1.43
A4	0.55	0.00 (2)	0.00 (300)	3.63
A5	6.17	0.00 (1)	0.00 (141)	0.00
B1	4.18	0.55 (20)	0.88 (183)	1.39
B2	2.22	1.22 (1)	3.26 (182)	1.12
B3	3.06	0.00 (24)	2.61 (150)	0.69
B4	2.17	0.00 (4)	0.00 (150)	7.25
B5	0.98	0.18 (1)	3.51 (99)	0.18
C1	2.32	0.00 (17)	0.00 (285)	0.73
C2	2.44	0.68 (13)	1.26 (111)	0.84
C3	1.73	0.29 (2)	1.99 (213)	1.79
C4	1.8	0.00 (21)	0.00 (183)	2.12
C5	1.69	0.00 (19)	0.00 (300)	1.92
D1	1.61	0.00 (25)	1.28 (124)	0.75
D2	0.99	0.00 (1)	2.53 (127)	0.00
D3	2.26	0.08 (8)	1.74 (104)	1.24
D4	2.34	0.00 (17)	0.42 (133)	1.47
D5	1.67	0.18 (19)	0.18 (300)	0.44

Tabla A.10: Resultados para la relajación RA2 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	9.45	0.00 (8)	4.14 (188)	4.14
A2	1.69	0.00 (1)	0.00 (165)	0.00
A3	6.43	0.57 (1)	0.57 (187)	0.57
A4	6.53	6.25 (1)	6.25 (168)	6.25
A5	7.83	0.00 (1)	0.00 (165)	0.00
B1	3.44	0.00(11)	0.40 (200)	1.83
B2	3.02	0.00 (1)	0.00 (199)	0.00
B3	2.90	0.00 (5)	1.13 (230)	2.55
B4	2.18	0.00 (1)	0.96 (241)	0.00
B5	3.38	0.18 (4)	0.18 (214)	0.76
C1	4.19	0.00(13)	1.02 (261)	0.28
C2	3.78	0.00(61)	1.05 (228)	0.51
C3	3.09	0.00 (8)	0.03 (258)	1.57
C4	2.51	0.00 (1)	1.24 (231)	0.00
C5	2.80	0.00 (3)	0.00 (226)	2.54
D1	0.57	0.00 (8)	0.00 (267)	1.15
D2	0.31	0.00(10)	0.00 (300)	2.06
D3	0.46	0.00 (9)	0.68 (300)	1.05
D4	0.82	0.06 (34)	0.37 (300)	0.91
D5	1.51	0.00 (4)	0.45 (213)	0.18

Tabla A.11: Resultados para la relajación RA3 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	5.90	1.81 (22)	2.36 (300)	5.07
A2	0.79	0.00 (2)	0.00 (300)	22.79
A3	7.26	0.57 (9)	6.30 (290)	9.68
A4	2.95	6.25 (3)	6.25 (167)	21.99
A5	8.93	3.79 (1)	6.05 (158)	3.79
B1	5.61	0.71 (28)	3.55 (153)	2.48
B2	2.99	3.03 (3)	4.83 (118)	4.83
B3	5.01	3.41 (1)	9.86 (175)	3.41
B4	3.66	0.96 (9)	6.01 (118)	5.34
B5	3.27	0.18 (8)	0.18 (267)	10.14
C1	3.85	2.29 (15)	5.84 (114)	5.85
C2	4.17	0.96 (19)	4.29 (128)	5.03
C3	2.02	2.23 (27)	5.01 (142)	3.09
C4	3.07	2.69 (26)	11.55 (149)	5.82
C5	2.52	0.00 (4)	0.00 (194)	6.76
D1	2.23	1.28 (17)	1.76 (196)	3.48
D2	1.44	2.41 (16)	5.57 (123)	7.85
D3	2.51	1.72 (9)	7.49 (136)	6.25
D4	2.56	1.66 (149)	2.62 (162)	3.67
D5	2.37	0.34 (34)	4.32 (192)	4.86

Tabla A.12: Resultados para la relajación RA4 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	$\epsilon_L(\%)$	$\epsilon_{MF}(\%)$	$\epsilon_{UF}(\%)$	$\epsilon_{PF}(\%)$
A1	9.59	2.36 (3)	2.36 (132)	3.14
A2	2.28	0.00 (2)	0.00 (76)	22.79
A3	8.45	1.43 (4)	6.30 (144)	9.64
A4	6.75	6.25 (3)	9.27 (125)	21.99
A5	12.95	0.00 (1)	3.79 (134)	0.00
B1	4.40	1.75 (10)	4.06 (98)	5.31
B2	3.21	0.00 (58)	3.77 (161)	2.64
B3	4.04	1.82 (12)	6.03 (163)	4.73
B4	1.87	0.00 (3)	1.63 (150)	1.72
B5	3.34	0.18 (81)	6.48 (204)	4.91
C1	3.94	1.60 (19)	5.18 (148)	4.83
C2	3.18	0.46 (33)	0.46 (146)	3.84
C3	2.67	0.94 (46)	6.13 (179)	5.54
C4	1.96	1.31 (56)	2.25 (169)	5.99
C5	2.38	3.52 (16)	3.52 (146)	5.09
D1	0.39	0.00 (23)	0.00 (261)	3.19
D2	0.36	0.00 (19)	0.00 (211)	5.69
D3	0.85	0.08 (22)	3.79 (207)	1.60
D4	1.07	0.00(100)	1.88 (300)	0.95
D5	0.87	0.00 (24)	0.00 (193)	0.94

Tabla A.13: Resultados para la relajación RA5 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	6.84	0.00 (8)	6.75 (105)	6.75
A2	1.64	0.00 (1)	16.28 (97)	0.00
A3	6.06	0.00 (19)	0.00 (134)	9.68
A4	2.96	0.00 (11)	6.25 (121)	12.89
A5	9.18	0.00 (9)	0.00 (136)	3.70
B1	4.22	0.88 (31)	0.88 (134)	1.34
B2	2.10	0.00 (13)	3.19 (145)	0.04
B3	4.18	1.89 (15)	5.29 (131)	2.23
B4	3.33	0.00 (24)	0.00 (140)	14.21
B5	3.15	0.91 (1)	0.91 (100)	0.91
C1	3.29	0.00 (17)	2.49 (126)	3.92
C2	3.36	0.74 (16)	5.66 (162)	4.19
C3	2.25	0.03 (17)	2.73 (144)	2.19
C4	2.69	0.39 (14)	0.39 (174)	3.46
C5	1.41	0.00 (20)	4.32 (157)	4.31
D1	1.95	0.49 (59)	6.29 (145)	3.26
D2	1.47	0.00 (44)	5.49 (147)	4.92
D3	2.38	0.00 (18)	3.08 (183)	2.59
D4	2.76	0.14 (19)	0.69 (153)	0.95
D5	1.38	0.29 (91)	1.89 (148)	3.87

Tabla A.14: Resultados para la relajación RB1 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	5.29	1.81 (2)	1.81 (200)	4.14
A2	1.03	0.00 (1)	0.00 (82)	0.00
A3	4.70	0.00 (2)	1.43 (143)	6.30
A4	4.09	0.00 (9)	3.36 (159)	3.63
A5	6.69	0.00 (1)	0.00 (115)	0.00
B1	3.13	0.00(29)	0.00 (146)	0.55
B2	1.77	0.00(10)	0.00 (179)	1.16
B3	2.95	0.00 (9)	0.00 (159)	0.69
B4	1.11	0.00(10)	0.00 (145)	7.25
B5	0.55	0.00 (5)	0.91 (172)	0.91
C1	2.36	0.00(10)	1.13 (166)	0.73
C2	1.09	0.00(14)	0.00 (123)	2.26
C3	1.28	0.00(27)	1.61 (161)	1.61
C4	2.24	0.65 (18)	2.12 (147)	2.12
C5	0.89	0.00 (9)	0.00 (184)	1.25
D1	0.60	0.00(19)	0.00 (164)	0.98
D2	0.70	0.00(10)	0.00 (126)	2.34
D3	0.99	0.00(31)	1.25 (161)	2.70
D4	1.06	0.00 (5)	0.14 (154)	1.26
D5	0.35	0.00(14)	2.36 (184)	0.51

Tabla A.15: Resultados para la relajación RB2 tipo 2

Tamaño	Subgradiente			
	ϵ_L (%)	ϵ_{MF} (%)	ϵ_{UF} (%)	ϵ_{PF} (%)
A1	12.27	0.00 (34)	1.81 (145)	1.81
A2	2.15	0.00 (14)	0.00 (156)	21.97
A3	7.69	0.00 (67)	1.43 (154)	9.64
A4	6.29	0.00 (5)	12.89 (172)	18.37
A5	10.95	0.00 (4)	3.79 (163)	3.79
B1	5.68	0.41 (54)	2.59 (205)	5.06
B2	3.71	0.00 (60)	3.19 (208)	3.19
B3	5.57	2.23 (23)	7.29 (179)	5.95
B4	4.62	0.00 (56)	0.00 (200)	15.77
B5	3.77	0.18 (26)	2.66 (216)	9.13
C1	4.42	0.00 (56)	1.35 (171)	8.17
C2	3.92	0.68 (63)	1.41 (199)	4.02
C3	2.81	0.03 (50)	2.73 (203)	1.57
C4	4.26	0.65 (35)	2.13 (183)	8.81
C5	2.64	1.44 (32)	1.44 (198)	6.92
D1	2.43	0.49 (50)	0.49 (212)	10.63
D2	1.98	1.05 (107)	2.97 (225)	7.19
D3	2.96	0.00 (64)	0.00 (236)	6.80
D4	3.14	0.42 (131)	0.73 (191)	3.12
D5	1.86	0.00 (69)	3.32 (213)	3.77

Tabla A.16: Resultados para la relajación RB5 tipo 2

APÉNDICE B

FORMULACIONES EQUIVALENTES

Para demostrar la equivalencia entre las dos formulaciones consideradas en el capítulo 4, demostramos que la solución óptima de la formulación A es factible para la formulación B, y que la solución óptima de la formulación B es factible para la formulación A, lo cual implica para nuestras formulaciones, que se cumplen las ecuaciones:

DEMOSTRACIÓN:

$$\sum_j x_{ij} \leq b_i, \quad i \in I, \quad (\text{B.1})$$

$$x_{ij} \leq m_{ij}y_i, \quad i \in I, j \in J, \quad (\text{B.2})$$

si y sólo si

$$\sum_j x_{ij} \leq b_i y_i \quad i \in I, \quad (\text{B.3})$$

y además se cumplen:

$$\sum_i x_{ij} \leq p_j, \quad j \in J, \quad (\text{B.4})$$

$$s_{jk} \leq l_{jk}y_i, \quad j \in J, k \in K, \quad (\text{B.5})$$

si y sólo si

$$\sum_i x_{ij} \leq p_j z_j, \quad j \in J, \quad (\text{B.6})$$

Primero demostramos que la solución óptima $(x_{ij}^*, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*)$ cumple la igualdad

$$\sum_i x_{ij} = \sum_k s_{jk}, \quad j \in J, \quad (\text{B.7})$$

Para esto, suponemos que \exists la solución óptima $(x_{ij}^*, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*)$ tal que

$$\sum_i x_{ij}^* > \sum_k s_{jk}^*, \quad \forall j \in \hat{J} \subseteq J, \text{ con } \hat{J} \neq \emptyset \quad (\text{B.8})$$

entonces

$$\sum_i x_{ij}^* = \sum_k s_{jk}^* + \alpha_j, \quad \forall j \in \hat{J} \quad (\text{B.9})$$

donde $\alpha_j > 0$ es el producto que se queda en el almacén $j \in \hat{J}$. Sabemos que existe una solución $(\bar{x}_{ij}, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*)$ con:

$$\sum_i \bar{x}_{ij} = \sum_k s_{jk}^*, \quad \forall j \in \hat{J} \quad (\text{B.10})$$

la cual es factible. Entonces, la función de costos queda como sigue:

$$w(x_{ij}^*, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*) = w(\bar{x}_{ij}, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*) + \sum_j w(\alpha_j) \quad (\text{B.11})$$

Pero sabemos que $\sum_j w(\alpha_j) > 0, \forall \alpha_j > 0, j \in J$. Entonces,

$$w(\bar{x}_{ij}, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*) < w(x_{ij}^*, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*) + \sum_j w(\alpha_j) \quad (\text{B.12})$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto la solución óptima cumple la igualdad B.7.

De manera similar se puede demostrar que $\sum_j s_{jk}^* = q_k$. ■

Ahora demostraremos la equivalencia de las formulaciones.

DEMOSTRACIÓN: Sea $(x_{ij}^*, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*)$ la solución óptima para la formulación A, entonces:

$$x_{ij} \leq m_{ij} y_i = \min \{b_i, p_j\} y_i, \quad i \in I, j \in J, \quad (\text{B.13})$$

■ Si $y_i^* = 0$,

$$\Rightarrow x_{ij}^* \leq 0, \quad \forall j \in J \quad (\text{B.14})$$

$$\Rightarrow \sum_i x_{ij}^* \leq 0 = b_i y_i^* \quad (\text{B.15})$$

Por lo tanto es factible para la formulación B.

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \text{ Si } y_i^* = 1, \\
 & \Rightarrow x_{ij}^* \leq b_i = b_i y_i^*, \quad \forall i \in I, \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto es factible para la formulación B.

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \text{ Si } z_j^* = 1, \\
 & \Rightarrow x_{ij}^* \leq b_i = b_i y_i^*, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.17})
 \end{aligned}$$

Por lo tanto es factible para la formulación B.

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \text{ Si } z_j^* = 0, \\
 & \Rightarrow s_{jk}^* \leq 0, \quad \forall j \in J, k \in K \quad (\text{B.18})
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_k s_{jk}^* \leq 0 \quad \forall j \in J \quad (\text{B.19})$$

pero sabemos que, como es una solución óptima, $\sum_k s_{jk}^* = \sum_i x_{ij}^*$, $\forall j \in J$,

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_i x_{ij}^* = \sum_k s_{jk}^* \leq 0 \quad \forall j \in J \quad (\text{B.20})$$

$$\Rightarrow \sum_i x_{ij}^* \leq 0 \leq p_j z_j^*, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.21})$$

Por lo tanto es factible para la formulación B.

Para demostrar que una solución óptima para la formulación B es factible para la formulación A, tomamos la solución $(x_{ij}^*, y_i^*, s_{jk}^*, z_j^*)$ óptima para la formulación B,

$$\blacksquare \text{ Si } z_j^* = 1,$$

$$\sum_i x_{ij}^* \leq p_j \quad \forall j \in J \quad (\text{B.22})$$

y por optimalidad, sabemos que $\sum_i x_{ij}^* = \sum_k s_{jk}^*$ y $\sum_k s_{jk} = q_k$, entonces,

$$s_{jk} \leq q_k \quad \forall j \in J, k \in K \quad (\text{B.23})$$

y como $\sum_i x_{ij}^* = \sum_k s_{jk}^*$, entonces

$$\sum_k s_{jk}^* \leq p_j \quad \forall j \in J \quad (\text{B.24})$$

$$\Rightarrow s_{jk}^* \leq p_j \quad \forall j \in J, k \in K \quad (\text{B.25})$$

$$\text{por lo tanto: } s_{jk}^* \leq \min \{p_j, q_k\} z_j^*. \quad \forall j \in J, k \in K \quad (\text{B.26})$$

Por las ecuaciones (B.22) y (B.26), entonces es factible para la formulación A.

■ Si $z_j^* = 0$,

$$\sum_i x_{ij}^* \leq 0, \quad \forall j \in J \quad (\text{B.27})$$

$$\Rightarrow \sum_i x_{ij}^* \leq p_j, \quad \forall j \in J \quad (\text{B.28})$$

$$\Rightarrow \sum_i x_{ij}^* = \sum_k s_{jk}^* \leq 0, \quad \forall j \in J \quad (\text{B.29})$$

$$\Rightarrow s_{jk}^* \leq 0, \quad \forall j \in J, k \in K \quad (\text{B.30})$$

$$\Rightarrow s_{jk}^* \leq \min \{p_j, q_k\} z_j^*, \quad \forall j \in J, k \in K \quad (\text{B.31})$$

Por las ecuaciones (B.28) y (B.31), entonces es factible para la formulación A.

■ Si $y_i^* = 0$,

$$\sum_j x_{ij}^* \leq 0, \quad \forall j \in J \quad (\text{B.32})$$

$$\Rightarrow \sum_i x_{ij}^* \leq b_i, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.33})$$

Pero sabemos que $\sum_k s_{jk}^* \leq p_j$, entonces por optimalidad

$$\sum_k s_{jk}^* = \sum_i x_{ij}^* = p_j, \quad \forall j \in J \quad (\text{B.34})$$

$$\Rightarrow x_{ij}^* \leq p_j, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.35})$$

$$\Rightarrow x_{ij}^* \leq \min \{b_i, p_j\} y_i^*, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.36})$$

Por las ecuaciones (B.33) y (B.36), entonces es factible para la formulación A.

■ Si $y_i^* = 1$,

$$\Rightarrow \sum_j x_{ij}^* \leq b_i, \quad \forall i \in I \quad (\text{B.37})$$

$$\Rightarrow x_{ij}^* \leq b_i \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.38})$$

pero sabemos que $\sum_i x_{ij}^* \leq p_j$,

$$\Rightarrow x_{ij}^* \leq p_j, \quad \forall i \in I, j \in J \Rightarrow x_{ij}^* \leq \min \{b_i, p_j\} y_i^*, \quad \forall i \in I, j \in J \quad (\text{B.39})$$

Por las ecuaciones (B.37) y (B.39), entonces es factible para la formulación A. ■

BIBLIOGRAFÍA

- K. Aardal. Capacitated facility location: Separation algorithms and computational experience. *Mathematical Programming*, 81:149–175, 1998.
- K. Aardal, M. Labbé, J. Leung y M. Queyranne. On the two-level uncapacitated facility location problem. *INFORMS J. Comput*, 8:289–301, 1996.
- P. Avella y M. Boccia. A cutting plane algorithm for the capacitated facility location problem. *Computational Optimization and Applications*, 43:39–65, 2009.
- P. Avella, M. Boccia, A. Sforza y I. Vasilev. An effective heuristic for large-scale capacitated facility location problems. *Journal of Heuristics*, 15, 2009.
- F. Barahona y F. Chudak. Near-optimal solutions to large-scale facility location problems. *Discrete Optimization*, 2:35–50, 2005.
- A. Barros y M. Labbé. A general model for the uncapacitated facility and depot location problem. *Location science*, 2:173–191, 1994.
- J. E. Beasley. *Lagrangian relaxation, Modern heuristic techniques for combinatorial problems*. John Wiley and Sons, New York, NY, 1993.
- J. M. Bloemhof-Ruwaard, M. Salomon y L. N. Van Wassenhove. The capacitated distribution and waste disposal problem. *European Journal of Operational Research*, 88:490–503, 1996.
- A. Bumb. *Approximation algorithms for facility location problems*. Tesis doctoral, University of Twente, 2002.

- M. Caserta y E. Quiñonez. A cross entropy-based metaheuristic algorithm for large-scale capacitated facility location problems. *Journal of Operation Research Society*, 60:1439–1448, oct 2009.
- P. Chardaire, J. L. Lutton y A. Sutter. Upper and lower bounds for the two-level simple plant location problem. *Annals of Operations Research*, 86:117–140, 1999.
- C. Chyu y W. Chang. Multi-exchange neighborhood search heuristics for the multi-source capacitated facility location problem. *IEMS*, 8:29–36, 2008.
- A. J. Conejo, E. Castillo, R. Mínguez y R. García-Bertrand. *Decomposition techniques in mathematical programming*. Springer-Verlag, 2006.
- I. A. Contreras y J. A. Díaz. Scatter search for the single source capacitated facility location problem. *Annals of Operation Research*, 157:73–89, 2007.
- G. Cornuejols, R. Sridharan y J. M. Thizy. A comparison of heuristics and relaxations for the capacitated plant location problem. *European Journal of Operational Research*, 50:280–297, 1991.
- D. Erlenkotter. A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operation Research*, 26:992–1009, 1978.
- III H. Everett. Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. *Operations Research*, 11:399–417, 1963.
- V. J. Filho y R. D. Galvão. A tabu search heuristic for the concentrator location problem. *Location Scencesi*, 6:189–209, 1998.
- M. L Fisher. The lagrangian relaxation method for solving integer programming problems. *Management Science*, 27:1–18, 1981.
- M. L. Fisher. An application oriented guide to lagrangian relaxation. *Interfaces*, 15:10–21, apr 1985.
- M. L. Fisher, R. Jaikumar y L .N. Van-Wassenhove. A multiplier adjustment method for the generalized assignment problem. *Management Science*, 32:1095–1103, 1986.

- R. D. Galvão. Uncapacitated facility location problems: Contributions. *Pesquisa Operacional*, 24:7–38, 2004.
- L. Gao y E. P. Robinson. Uncapacitated facility location: General solution procedure and computational experience. *European Journal of Operational Research*, 76:410–427, aug 1994.
- B. Gendron y F. Semet. Formulations and relaxations for a multi-echelon capacitated location-distribution problem. *Computers and Operations Research*, 36:1335–1355, 2009.
- A. M. Geoffrion. Lagrangean relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study*, 2:82–114, 1974.
- F. Glover y D. Klingman. Layering strategies for creating exploitable structure in linear and integer programs. *Mathematical Programming*, 40:165–182, 1988.
- S. Gortz y A. Klose. A subgradient-based branch and bound algorithm for the capacitated facility location problem. *Working paper no. 2009/1, Department of Operations Research, University of Aarhus*, 2009.
- M. Guignard. Lagrangian relaxation. *TOP*, 11:151–228, 2003.
- M. Guignard y S. Kim. Lagrangean decomposition: a model yielding stronger lagrangean bounds. *Mathematical Programming*, 39:215–228, 1987.
- M. Guignard y M. B. Rosenwein. An application of lagrangean decomposition to the resource-constrained minimum weighted arborescence problem. *Networks*, 20:345–359, 1990.
- M. Held y R. M. Karp. The traveling salesman problem and minimum spanning trees. *Operations Research*, 18:1138–1162, 1970.
- M. Held y R. M. Karp. The traveling salesman problem and minimum spanning trees: part ii. *Mathematical Programming*, 1:6–25, 1971.

- M. Held, P. Wolfe y H Crowder. Validation of subgradient optimization. *Mathematical Programming*, 6:62–88, 1974.
- Y. Hinojosa, J. Puerto y F. R. Fernández. A multiperiod two-echelon multicommodity capacitated plant location problem. *European Journal of Operation Research*, 123:271–291, 2000.
- H. Jia, F. Ordoñez y M. Dessouky. A modeling framework for facility location of medical services for large scale emergencies. *IIE Transactions*, 39, 2007.
- K. Jörnsten y M. Näsberg. A new lagrangian relaxation approach to the generalized assignment problem. *European Journal of Operation Research*, 27:313–323, 1986.
- A. Klose. An lp-based heuristic for two-stage capacitated facility location problems. *Journal of the Operational Research Society*, 50:157–166, feb 1999.
- A. Klose. A lagrangian relax and cut approach for the two-stage capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 126:408–421, oct 2000.
- A. Klose y A. Drexl. Bounds for the capacitated facility location problem based on column generation. *Management Science*, 51:1689–1705, 2005.
- A. Klose y A. Drexl. Facility location models for distribution system design. *European Journal of Operation Research*, 162:4–29, 2004.
- A. A. Kuehn y M. J. Hamburger. A heuristic program for locating warehouses. *Management Science*, 9:643–666, 1963.
- M. Landete y A. Marín. New facets for the two-stage uncapacitated facility location polytope. *Computational Optimization and Applications*, 44:487–519, jan 2009.
- L. S. Lasdon. *Optimization Theory for Large Systems*. Dover Publications, 2002.
- C. Lemaréchal. *Lagrangian relaxation, Computational Combinatorial Optimization*. Primavera Verlag, Heidelberg, 2001.

- K. Liao y G. Diansheng. A clustering-based approach to the capacitated facility location problem. *Transactions in GIS*, 12:323–339, 2008.
- I. Litvinchev, S. Rangel y J. Saucedo. A lagrangian bound for many to many assignment problems. *Journal of Combinatorial Optimization*, 19(3):241–257, 2008.
- Y. Liu y X. Zhu. Capacitated fuzzy two-stage location- allocation problem. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 3:987–999, 2007.
- Z. Lu y N. Bostel. A facility location model for logistics systems including reverse flows: The case of remanufacturing activities. *Computer and Operations Research*, 34:299–323, 2005.
- A. Marín. Lower bounds for the two-stage uncapacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 179:1126–1142, may 2007.
- A. Marín y B. Pelegrín. Applying lagrangian relaxation to the solution of two-stage location problems. *Annals of Operation Research*, 86:179–198, 1999.
- A. Marín y B. Pelegrín. Heurísticas de descomposición lagrangiana para algunos problemas de localización discreta. *OR Spectrum*, 30:655–673, 2008.
- R. Martin. *Large scale linear and integer optimization: A united approach*. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1999.
- M. Näsberg, K. O. Jörnsten y P. A. Smeds. Variable splitting - a new lagrangean relaxation approach to some mathematical programming problems. Reporte técnico, Linkoping University, 1985.
- M. Osorio y A. Sánchez. A preprocessing procedure for fixing the binary variables in the capacitated facility location problem through pairing and surrogate constraint analysis. *WSEAS on Mathematics*, 8:583–592, 2008.
- M. T. Ramos y J. Sáenz. Solving capacitated facility location problems by fenchel cutting planes. *Journal of the Operational Research Society*, 56:297–306, 2005.

- C. Ribero y M. Minoux. Solving hard constrained shortest path problems by lagrangean relaxation and branch-and-bound algorithms. *Mathematics of Operation Research*, 53:303–316, 1986.
- G. T. Ross y R. M. Soland. A branch-and-bound algorithm for the generalized assignment problem. *Mathematical Programming*, 8:91–103, 1975.
- J. Sahin y H. Sural. A review of hierarchical facility location models. *Computers and Operation Research*, 34:2310–2331, 2007.
- J. Saucedo-Martínez. *Uso de cotas lagrangianas mejoradas para los problemas de optimización con la estructura de descomposición doble*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León, 2009.
- J. F. Shapiro. A survey of lagrangian techniques for discrete optimization. *Annals of Discrete Mathematics*, 5:113–138, 1974.
- J. F. Shapiro. *Mathematical Programming: structure and algorithms*. Jhon Wiley, 1979.
- F. Shepardson y R. E. Martsen. A lagrangean relaxation algorithm for the two-duty scheduling problem. *Management Science*, 26:274–281, 1980.
- L.V. Snyder. Facility location under uncertainty: a review. *IIE Transactions*, 38, 2006.
- R. Soenen. *Contribution l'étude des systemes de conduite en temps reel en vue de la commande d'unités de fabrication*. Tesis doctoral, Université de Lille, 1977.
- R. Sridharan. A lagrangian heuristic for the capacitated plant location problem with side constraints. *Journal of the Operational Research Society*, 42:579–585, 1991.
- M. Sun, E. Ducati y V. Armentano. Solving capacitated facility location problem using tabu search. En *Globalization Challenge and Management Transformation*, 76–81, 2007.

-
- S. Tragantalerngsak, J. Holt y M. Ronnqvist. An exact method for the two-echelon, single-source, capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 123:473–489, 2000.
- J. Troncoso, R. Garrido y X. Ibacache. Modelos de localización de instalaciones: una aplicación para la producción y logística forestal. *Bosque (Valdivia)*, 23:57–67, 2002.
- V. Verter. Uncapacitated and capacitated facility location problems. En *Foundations of Location Analysis*, volumen 155, 25–37, 2011.
- S. Wang, J. Watada y W. Pedrycz. Value-at-risk-based two-stage fuzzy facility location problems. *IIE Transactions on Industrial Informatics*, 5:465–482, 2009.
- B. Wildbore. *Theoretical and computational analysis of the two-stage capacitated plant location problem*. Tesis doctoral, Massey University, 2008.
- J. Wollenweber. A multi-stage facility location problem with staircase and splitting of commodities: model, heuristic approach and application. *OR Spectrum*, 30: 655–673, 2008.
- L. A. Wolsey. *Integer programming*. John Wiley and Sons, New York, NY, 1999.

FICHA AUTOBIOGRÁFICA

Edith Lucero Ozuna Espinosa

Candidato para el grado de Doctor en Ingeniería
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

HEURÍSTICA LAGRANGIANA PARA EL PROBLEMA
DE LOCALIZACIÓN CAPACITADO EN DOS ETAPAS

Nací el 18 de abril de 1985 en la ciudad de Guadalupe, Nuevo León, México. Realicé mis estudios de licenciatura en matemáticas en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León. Posteriormente realicé mis estudios de maestría en el Posgrado en Ingeniería de Sistemas de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la misma universidad bajo la dirección del Dr. Igor Litvinchev. En el 2009 ingresé al Doctorado en Ingeniería con especialidad en Ingeniería de Sistemas del mismo posgrado también bajo la dirección del Dr. Litvinchev.