UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MODELO BINIVEL APLICADO A UN PROBLEMA DE MIGRACIÓN HUMANA: CONSISTENCIA DEL EQUILIBRIO BINIVEL CON CONJETURAS VARIACIONALES

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN INGENIERÍA FÍSICA INDUSTRIAL

PRESENTA
YAZMÍN GUADALUPE ACOSTA SÁNCHEZ

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N. L. NOVIEMBRE 2014

Modelo Binivel Aplicado a un Problema de Migración Humana: Consistencia del Equilibrio Binivel con Conjeturas Variacionales

Yazmín Guadalupe Acosta Sánchez

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

División de Estudios de Posgrado

30 de septiembre de 2014

Modelo Binivel Aplicado a un Problema de Migración Humana: Consistencia del Equilibrio Binivel con Conjeturas Variacionales

Los miembros del comité aprueban las tesis de doctorado de Yazmín Guadalupe Acosta Sánchez.

Dra. María Aracelia Alcorta García ________________________________

Dr. Vyacheslav V. Kalashnikov (co-asesor) ________________________________

Dra. Nataliya I. Kalashnikova (co-asesor) ________________________________

Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez ________________________________

Dr. Sergio Belmares Perales ________________________________

Dedicada a:

Mis padres Rosendo Acosta Silva y Alejandra Sánchez Vazquez y hermanos Mayra Acosta y Luis Acosta, quienes me enseñaron el valor del estudio, de quienes he recibido su incondicional apoyo en cada proyecto que he emprendido en mi vida, a mi esposo Jesús Gerardo López Garza quien compartió a mi lado todos estos momentos de mi estudio doctoral, alentándome a seguir luchando por lo que quiero, a mis hijos Dariel y Sofía por quienes deseo superarme a mis tutores la Dra. Ma. Aracelia Alcorta quien estuvo conmigo en momentos difíciles de mi carrera y de mi vida, a los doctores Dr. Kalashnikov y Dra. Kalashnikova a quienes no tengo como agradecer su infinito apoyo y consejos para lograr mis objetivos, a todos ustedes que confiaron en mí, sin olvidar a Dios quien me puso en este camino, les dedico esta tesis.

Agradecimientos

A mis coasesores: Dra. María Aracelia Alcorta García, Dr.Vyacheslav V. Kalashnikov, Dra. Nataliya I. Kalashnikova, por su valioso apoyo y orientaciones a lo largo del doctorado y elaboración de mi tesis.

A los miembros del Comité de Tesis: Dra. María Aracelia Alcorta García, Dr.Vyacheslav V. Kalashnikov, Dra. Nataliya I. Kalashnikova, Dr. César Emilio Villarreal Rodríguez y Dr. Sergio Belmares Perales por sus valiosas recomendaciones para mejorar la calidad de la tesis.

A los miembros del Comité doctoral del DIFI, por su apoyo durante todo el doctorado.

A la UANL por su apoyo económico durante los congresos y colegiaturas.
A mis compañeros maestros y amigos por hacerse partícipes de una o de otra forma de mis actividades en el doctorado.

Notación

n   localidades, denotadas por i.

K   clases de una población, denotada por k.

$\bar{Q}_i^k$ Población inicial de la clase k en la localidad i.

Q_i^k población final de la clase k en la población i.

s_{ij}^k el flujo de migración de la clase k que va de la localidad i a la localidad j

c_{ij}^k función de costo de migración para el grupo de migrantes k que va de la localidad i a la localidad j.

Resumen

Modelo Binivel Aplicado a un Problema de Migración Humana:

Consistencia del Equilibrio Binivel con Conjeturas Variacionales

Publicación No. _______

Yazmín Acosta Sánchez

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Profesores co-asesores: Dra. Ma. Aracelia Alcorta,

Dr. Vyacheslav Kalashnikov y Dra. Nataliya Kalashnikova

Noviembre, 2014

En el trabajo desarrollado en la presente tesis fue obtenido el modelo binivel de migración humana usando el concepto del Equilibrio con conjeturas variacionales (CVE). En contraste a trabajos antes realizados, aqui nosotros obtenemos en forma natural una programación para el modelo binivel. Los agentes de nivel superior son los municipios de localidades en competencia, cuyas estrategias son las inversiones en las infraestructuras de los lugares (ciudades, pueblos, etc.) Estas inversiones tienen como objetivo hacer de los lugares más atractivos tanto para los residentes y los migrantes potenciales de otros lugares. En el nivel inferior del modelo, los residentes actuales (agrupados en comunidades profesionales) son también los migrantes potenciales a otros lugares. Ellos toman su decisión hacia donde migrar (o no) comparando los valores esperados de las funciones de utilidad estimada de los lugares de salida y de entrada, teniendo en cuenta las conjeturas de su grupo sobre las migraciones de flujos de equilibrio entre las localidades involucradas. La aplicación de una técnica especial

para verificar la consistencia de las conjeturas (coeficientes de influencia), los resultados de existencia y unicidad para el equilibrio constante de las variaciones conjeturales (CCVE) son establecidas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

Los problemas de la migración se ha estudiado activamente en muchos países en todo el mundo, ya que la información y los datos sobre la predicción en la migración es muy útil en una escala amplia de la economía. Los datos sobre la predicción de Migración puede estipular el desarrollo de las instalaciones necesarias para avanzar en empleo, educación, ecología, etc. Recíprocamente, los lugares con más infraestructura avanzada, mayor capacidad de empleo, el medio ambiente para niños, etc., puede atraer a más inmigrantes potenciales. Por otro lado, sobrecarga de viviendas e infraestructura de las instalaciones puede reducir el confort en la vida cotidiana. Por lo tanto, se puede esperar un equilibrio en las inversiones sobre las infraestructuras de las localidades como un estado de equilibrio de las variaciones conjeturadas.

1.2. Antecedentes

A lo largo de este tiempo, las diversas teorías de migración se han desarrollado. En el aspecto histórico corto, se puede confiar en la excelente encuesta fundamental [1].

En publicaciones anteriores [12],[13] los autores extienden el modelo anterior a el caso donde los coeficientes de variaciones conjeturadas pueden no ser constantes, sino también las funciones de la población total en el destino y de la fracción del grupo en este.

La principal novedad de la reciente publicación [14] se encuentra en las definiciones propuestas de conjeturas consistentes y las posibles formas de calcular las conjeturas consistentes y con su equilibrio constante de las variaciones conjeturadas (CCVE).

Motivado por la idea de una estructura binivel para los procesos de migración (la competencia del nivel superior entre las localidades, y el equilibrio del nivel inferior entre los migrantes potenciales), se propone una nueva formulación del modelo (binivel) de migración humana. Bajo los supuestos generales suficientes, que demuestran también la existencia de soluciones para la programación binivel.

1.3. Motivación

La motivación para la realización de este trabajo radica en la importancia encontrar un equilibrio en el problema de migración ya que estos datos de predicción podrían ayudar a los estados a entender el comportamiento del flujo de migración, sus motivaciones para cambiar de localidad, las inversiones que deben realizar para hacer de su estado un lugar atractivo para migrantes potenciales y llegar así a un equilibrio entre lo que cada localidad invertirá en infraestructuras, eduación, etc. y el flujo de migración entre los estados.

1.4. Aportaciones

A continuación son presentadas las aportaciones de esta tesis.

El planteamiento de un Modelo Binivel de Migración Humana [18] donde se plantea la obtención de la consistencia de un equilibrio con conjeturas que son variacionales se presentó en [15] The 2011 Las Vegas International Academic Conference Las Vegas, Nevada USA, October- 2011 y se publicó en el Journal ICICEL en el año 2012.

La aplicación de la ingeniería afectiva (ingeniería de Kansei) a la programación binivel en un caso de migración humana fué publicada como capítulo de libro en [16]. En este trabajo se presentan las conjeturas variacionales y las condiciones para su convergencia.

1.5. Organización de la Tesis

El documento se organiza de la siguiente manera. Sección 2 se deriva principalmente de los trabajos anteriores [12],[13] que describen el modelo propuesto de binivel para migración humana, definen el equilibrio de las variaciones conjeturales en el nivel inferior, y citar teoremas a partir de [12],[13] que establecen la existencia y unicidad del equilibrio del nivel inferior como una solución adecuada para un problema de la desigualdad variacional. La consistencia de las conjeturas y la existencia del equilibrio de los dos niveles correspondientes se discuten en la Sección 3. En la Sección 4 establecemos la existencia y unicicidad de los resultados para el equilibrio consistente con conjeturas variacionales. En la Sección 5 se presentan los resultados numéricos de la simulación realizada. Conclusión, trabajos a fulturo, referencias, agradecimientos, y las referencias se encuentran al final. Además en el Apéndice 1 se presentan la publicacion más relevantes de este trabajo. En el Apéndice 2 se presenta el código fuente de la aplicación.

Capítulo 2

Marco Teórico

El contenido de esta sección fué tomado de las siguientes referencias bibliográficas:

- [1] Migración y la eficiencia en los mercados de Europa,
- [11] Complementariedad, Equilibrio,
- [12] y [13] Modelo de migración humana,
- [14] Conjeturas Consistentes en el modelo de migración humana,
- [19] Introducción a Desigualdades Variacionales,
- [17] Conjeturas Consistentes.

2.1. Conceptos Iniciales: Equilibrio Estático con Conjeturas Variacionales

2.1.1. Introducción

Este capítulo presenta los diferentes conceptos de Equilibrio con Conjeturas Variacionales (CVE) que se han propuesto en la configuración de estrategias estáticas. El objetivo principal es revisar los resultados semifinales de la literatura, para decirlo en una idea común y general, y para documentar la existencia de tales equilibrios (o inexistencia). Sin embargo, a partir de un enfoque general se tiene un número de inconvenientes para el lector que descubre esta literatura, lo cual nos gustaría evitar. En efecto, una presentación general no es la forma más fácil de familiarizarse con la idea básica detrás del concepto de CVE. Tampoco es la forma más fácil de señalar diferentes problemas epistémicos y los defectos de los desarrollos anteriores de este concepto.

Se hace uso del célebre marco de duopolio de Cournot para presentar el concepto inicial de equilibrio con variaciones conjeturales, y compararla con el Equilibrio Cournot-Nash. También se ha utilizado para abordar las principales novedades de este concepto, y para ilustrar algunas cuestiones epistemológicas. Luego, a través de las definiciones formales de los conceptos principales, con una especial atención a la constante de equilibrio con conjeturas variacionales (CCVE). Se discuten las diferentes variantes de los equilibrios de las variaciones conjeturales propuestas a través del tiempo en la literatura, y sus caracterizaciones matemáticas.

Se sugiere un marco formal de la generalización de las ideas que subyacen a los equilibrios de las conjeturas variacionales, pero permitiendo la formulación de conjeturas, en un sentido más amplio.

2.1.2. Origen del Concepto de Conjeturas Variacionales.

El concepto de conjeturas variacionales apareció en el contexto del modelo de Dupolio de Cournot (Bowley 1924). Dos empresas compiten en un mercado homogéneo. Las variables de decisión son las cantidades que se producen. Supongamos, para simplificar, que la función de demanda inversa es lineal, si $q_1 \geq 0$ y $q_2 \geq 0$ denotan las cantidades producidas por las empresas 1 y 2 respectivamente, entonces el precio p de equilibrio del mercado es:

$$p = a - (q_1 + q_2)$$

donde a es un parámetro positivo. Cantidades admisibles son tales que $p \geq 0$.

Las dos empresas tienen la misma tecnología. No hay costos fijos y el costo marginal es constante. Así, el costo para la empresa i para producir cualquier cantidad dada se supone que es una función lineal:

$$C(q_i) = cq_i, \quad c > 0.$$

Para la empresa "i", la función de utilidad es la siguiente:

$$V^i(q_i, q_j) = [a - (q_i + q_j) - c]q_i, \quad j \neq i.$$

Las cantidades se eligen de forma simultánea, de una vez por todas. Cada empresa se comporta con el fin de maximizar su función de utilidad y, claro, su problema de decisión está configurado por la decisión de su rival. La empresa "i", está a la expectativa de la decisión de su rival q_j que en realidad es una información de suma importancia, ya que impulsa su propia elección "qi".

Aquí aparece el supuesto fundamental y distintivo del concepto de equilibrio con conjeturas variacionales. Se dice que para la empresa "i", la decisión de su rival q_j es una función de su propia elección q_i, formalmente $q_j = q_j(q_i)$. Esta hipótesis merece una cuidadosa discusión. Por el momento, vamos a investigar lo que la predicción acerca de las decisiones óptimas se pueden hacer sobre esta base. De la empresa "i", la elección de salida óptima resuelve el siguiente programa:

$$max_{q_i} V^i(q_j = q_j(q_i))$$

Un equilibrio interior satisface el sistema de condiciones de primer orden:

$$V_i^i(q_i, q_j) + V_j^i(q_i, q_j)q_j^{'}(q_i) \; = \; 0, \;\; i = 1, 2, \; j = 1, 2, \; i \neq j,$$

donde V_k^i denota la derivada parcial de V^i con respeto a la variable q_k. A menudo se utiliza la notación $f^{'}$para la derivada de la función f de una sola variable con respecto a su variable, como en $q_j^{'}$.

Más concretamente, en nuestro ejemplo, las condiciones de primer orden son:

$$a - (2q_i + q_j) - c - q_i q_j^{'}(q_i) = 0, \; i = 1, 2, \; j = 1, 2, \; i \neq j. \qquad (2.1)$$

El término $q_j^{'}(q_i)$ se conoce como la variación conjetural de la empresa i, es decir, que las de conjeturas de la firma i acerca de la reacción de empresa

j a un cambio infinitesimal en q_i. Vale la pena señalar que cuando este término es igual a cero (la empresa i espera que los rivales decidan, para ser independiente de ellos) las condiciones de primer orden se reducen a las del equilibrio de Cournot-Nash. Presumiblemente, cuando este término es diferente de cero, las conjeturas dan lugar a un resultado diferente. Este resultado se llama el equilibrio con conjeturas variacionales (o CVE) del juego. Más precisamente, en este ejemplo, cualquier resultado que van desde la solución del cartel de la competencia perfecta puede surgir con una adecuada selección de la conjetura, el lector familiarizado con este modelo puede comprobar que el primero se produce cuando $q_j^{'}(q_i) = 1$, mientras que el segundo sigue a $q_j^{'}(q_i) = -1$.

Desde el punto de vista epistémico, esta capacidad de predecir cualquier cosa es un grave defecto. La teoría no se ajusta a la disciplina de la metodología falsificacionista, que es ahora ampliamente aceptada entre los economistas (véase [6]) explica que esta metodología "se refiere a las teorías e hipótesis científicas, como si, y solo si sus predicciones son por lo menos en principio falsificables, es decir que prohiben determinados actos o estados o eventos que causen disturbios ".

Este requisito anterior es claramente violado cuando las conjeturas se pueden elegir arbitrariamente. Para superar estas críticas tempranas, el concepto se requiere para proporcionar predicciones refutables. Una manera sencilla ha sido la de considerar conjeturas endógenas. Los economistas primero consiguen que mediante la imposición, en términos generales, que las variaciones coyunturales de cada empresa corresponden a la pendiente de la mejor respuesta de su oponente.

La función de mejor respuesta de la empresa j, dicen, $b_j(q_i)$, lo que resulta del mecanismo de conjeturas de j, se obtiene como la solución de las condiciones de primer orden (2.1), indicados para la empresa j, con respecto a su variable estratégica q_j . Este refinamiento del concepto se conoce como un equilibrio consistente con conjeturas variacionales (o CCVE)

Restringiendo la atención a conjeturas simétricas y constantes, es decir, suponiendo que $q_j^{'}(q_i) = r$ para cualquier q_i y todas i, se encuentra que en el ejemplo anterior, solo la conjetura $r = -1$ es coherente.

El hecho de que $q_j^{'}(q_i) = q_i^{'}(q_j)$ es una conjetura consistente para las empresas Bothe se puede comprobar fácilmente a posteriori. Sustituyendo $q_i^{'}(q_j) = -1$ en las condiciones de primer orden (2.1) para la empresa j, se obtiene:

$$a - (2q_i + q_j) - c + q_j = 0.$$

Por consiguiente, la mejor respuesta de la empresa j, que es la solución de esta ecuación en la variable q_j, es:

$$b_j(q_i) = a - c - q_i.$$

La pendiente de la respuesta $b_j^{'} = -1$ resultante es por lo tanto mejor, como se conjeturó. Este CCVE predice un único resultado, y de aquí: el resultado de Bertrand (o el prefecto resultado de la competencia).

Una vez que la crítica Popperian anterior se descarta, este concepto parece ser atractivo en el recuento de varios. Se capta explícitamente la idea de que las acciones no son independientes uno de otro, y que los oligopolistas están preocupados por algunas de las reacciones. Sin embargo, después de una reflexión que sigue siendo bastante extraña.

Es intuitivo que la empresa i de las expectativas sobre las decisiones rivales basándose en las piezas relevantes de información que la empresa i posee. Sin embargo, sobre qué bases debe concretar i esperar la elección real hecha por firma j depende de algo que la empresa j no observa y sobre el que no tiene la información antes de efectuar su elección lo cual hace que surja la pregunta acerca de: Qué significa el concepto de equilibrio de las conjeturas variacionales en términos de información de la empresa y la racionalidad?

Los supuestos más exigentes, con lo que se refiere a la información y la racionalidad que se puede hacer, es doble. En primer lugar está la información completa, lo que significa que cada firma sabe lo que son todos los espacios de estrategias y todas las funciones de beneficio (véase, por ejemplo [9] (1992), Capítulo 1).

En segundo lugar hay un conocimiento común de la racionalidad: la empresa que sabe que la empresa j es racional y está perfectamente informado acerca de las estrategias, la propia y las ganancias de rivales, y el hecho de que el oponente es un tomador de decisiones racional, así, que las empresas saben todo eso. Una discusión de la hipótesis de conocimiento común puede ser visto en [21], Capítulo 5. Por estos motivos, tiene sentido que cada empresa puede construir un modelo para el comportamiento del competidor y buscar resultados que sean coherentes con la información completa y el conocimiento común. Una cuidadosa investigación revela que, en este ejemplo de duopolio de Cournot, cualquier resultado diferente del Equilibrio de

Cournot-Nash es incompatible con la información completa y los supuestos de conocimiento común. Para demostrar esto, tomemos el punto de vista de la empresa i y en lugar de pedir lo que debe hacer, vamos a investigar lo que no debe hacer. En primer lugar, no debe escoger otra estrategia q_i donde existe otra estrategia $q_i^{'}$ que da un mayor beneficio que cualquiera que sea la empresa rival, alguna vez decidirá elegir: la racionalidad y la información completa de la empresa que deseche las estrategias dominadas. En segundo lugar, se puede considerar el problema de la decisión del rival y saber si algunas de las estrategias rivales nunca se cambian porque están dominadas (dominio público). En el espacio restante de estrategias, algunas cantidades pueden convertirse en dominadas aunque no estaban inicialmente. Por consiguiente, es posible llevar a cabo una segunda ronda de supresiones dominadas. En otras palabras, un proceso reiterado de la supresión de las estrategias de dominación puede llevarse a cabo. Sólo las estrategias que sobreviven a este proceso son consistentes con la información completa y el conocimiento común. Para nuestro duopolio sencillo solo hay un par de estrategias que sobrevive a este proceso iterativo: el equilibrio de Cournot-Nash. Para un equilibrio de las conjeturas variacionales de cualquier tipo (de acuerdo o no, pero con conjeturas que no son cero) para tener sentido en este marco estático, es necesario que las empresas no cuenten con información completa, o la presunción de conocimiento común se relaja, o ambas posibilidades. Una tercera posibilidad sería que el modelo estático por sí mismo no procesara correctamente la situación del juego, una formulación completamente dinámica, será preferible. Las conjeturas son entonces un intento de incorporar verdaderas reacciones en un ambiente estático. El argumento anterior no significa que una CVE es un disparate en cualquier juego estático imaginable con información completa y el conocimiento común. Pero, definitivamente significa que el conjunto de situaciones estáticas donde se puede usar de manera constante se reduce, al menos en comparación con el equilibrio de Nash.

En resumen, las conjeturas que podrán conducir a equilibrios hechos de estrategias dominadas (directa o indirectamente) están en conflicto con las hipótesis de información completa y el conocimiento común. Para otras situaciones, no hay argumentos en contra de CVE de los que tengamos conocimiento. Los lectores interesados sobre los vínculos entre las diversas hipótesis relativas a los conceptos de información, el conocimiento y la solución pueden encontrar una introducción no técnica en la Junta (2002).

El punto de vista desarrollado en la presente, es que no hay una renovación del interés por el concepto de conjeturas en situaciones de juego, y esta renovación es en relación con la ausencia de información completa, el conocimiento común, o apropiadas formulaciones dinámicas. Modelos estáticos con conjeturas variacionales, se argumenta, pueden ser útiles los accesos directos para capturar de una manera sencilla los mensajes de la más complicada, pero los modelos correctamente especificados. Las definiciones de los equilibrios que pueden ser considerados para estos juegos tienen en cuenta las posibles reacciones de los otros jugadores: los equilibrios con conjeturas variacionales (Definición 1.3) y equilibrios con conjeturas variacionales consistentes (Definición 1.4). Las diferentes variantes que existen en la literatura para cada concepto se registran, y se discute la existencia de las propiedades de cada uno de ellos.

2.1.3. Equilibrios con Variaciones Conjeturales Generales (GCVE)

La definición menos restrictiva de los equilibrios con conjeturas variacionales es el utilizado por algunos autores como lo son Laitner (como se puede ver en [20]), Ulp (como se puede ver en [22]), Boyer y Moreau (como se puede ver en [2], en el contexto de Teoría de dupolio), y por Cornes y Sandler (como se puede ver en [5], en el contexto de la teoría de bienes públicos). Los Equilibrios con variaciones conjeturadas se basan en la idea de que los jugadores deben considerar las posibles variaciones de la estrategia de su oponente. Cuando hay una variación, debe haber algún ïnicial"de la estrategia que contempla la variación. Esto lleva a la noción de un punto de referencia (o "de referencia") perfil de la estrategia.

Definición de Equilibrio con conjeturas variacionales generales

Definición 1.3: Un par de conjeturas variacionales $r_i(e_j, e_i)i = 1, 2$, junto con un par de estrategias $(e_1^c, e_2^c) \in E$ es un equilibrio con conjeturas variacionales generales (GCVE) si (e_1^c, e_2^c) es una solución del problema de optimización:

$$maxV^i(e_i, e_j)|(e_1, e_2) \in E \ y \ e_j = \rho_j^c(e_i; e_i^c, e_j^c), \tag{2.2}$$

al mismo tiempo para $i = 1, 2$.

Este problema de optimización es una reminiscencia de lo que sucede en un juego de Stackelberg. En esa situación, el líder de la partida, siendo el primero en jugar, optimiza su rentabilidad, teniendo en cuenta la reacción de sus rivales, que se puede deducir. De hecho, ella sabe que el rival (el seguidor) es racional y optimizar su rentabilidad. El líder por lo tanto, puede sustituir, en su función de utilidad, la variable del rival con su mejor función de respuesta Nash χ_j^N. Esto lleva a un problema de optimización formalmente similar a (2.2), con P sustituido por χ_j^N.

Definición de Equilibrio con Variaciones Conjeturales Generales Consistentes

Definición 1.4: Un par de estrategias (e_1^c, e_2^c) y las conjeturas variacionales $r(e_1, e_2)$ con i= 1,2 son una constante de equilibrio con conjeturas variacionales generales (CGCVE) si:

- i)(e_1^c, e_2^c) es un GCVE para las conjeturas variacionales (r_1, r_2).
-)$\chi_i(e_j)$ es una solución en e_i de la ecuación (2.2), para algún $\epsilon > 0$, y para i=1,2,

$$\chi_i^{'}(e_j) = r_i(X_i(e_j), e_j), \quad |e_j - e_j^c| < \epsilon.$$

Observe que esta definición requiere la coincidencia de las pendientes en una vecindad del equilibrio. Esto está de acuerdo con la idea seminal que solo pequeñas variaciones sobre algún punto de referencia son relevantes.

Definición de Equilibrio con Variaciones Conjeturales Consistentes

Un equilibrio con conjeturas variacionales coherentes (CCVE) es un par de estrategias (e_1^c, e_2^c) y conjeturas $(r_1(e_2), r_2(e_1))$ tal que:

$$\begin{aligned} i) r_2(e_1) &= \chi_2^{'}(e_1) \;\; \forall e_1, \; |e_1^c - e_1| < \epsilon \\ ii) r_1(e_2) &= \chi_1^{'}(e_2) \;\; \forall e_2, \; |e_2^c - e_2| < \epsilon. \end{aligned} \tag{2.3}$$

2.1.4. Origen y Desarrollo de la Programación Lineal

La rama de la Investigación Operativa (IO) que se ocupa de la asignación óptima de recursos escasos entre las actividades de la competencia que se conoce como Programación Matemática, de los cuales la programación lineal (LP) es un caso especial. El desarrollo de la programación lineal se ha clasificado entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, y uno debe estar de acuerdo con dicha evaluación. Hoy en día es una herramienta estándar que ha salvado muchos miles o millones de dólares para muchas empresas o negocios de tamaño moderado, incluso en los distintos países industrializados del mundo, y su uso en otros sectores de la sociedad se ha ido extendiendo rápidamente.

La programación lineal trata de una clase de problemas de optimización, donde tanto la función objetivo a optimizar y todas las restricciones, son lineales en términos de las variables de decisión.

Una breve historia de la programación lineal:

1. En 1762, Lagrange resuelve los problemas tratables de optimización con restricciones de igualdad simples.

2. En 1820, Gauss resuelve sistemas de ecuaciones lineales por lo que ahora llamamos la eliminación Gausssiana. En 1866 Wilhelm Jordan perfecciona el método para encontrar menos errores al cuadrado como medida de bondad de ajuste. Ahora que se conoce como el método de Gauss-Jordan.

3. En 1939, Kantorovich desarrolla un método para resolver el llamado problema de planificación óptima (que, en realidad, fue el primer

problema de optimización no lineal).

4. En 1940, Hitchcock formula y resuelve una especie de problema de transporte en primer lugar.

5. En 1945, surgió equipo digital.

6. En 1947, Dantzig inventó el método simplex.

7. En 1968, Fiacco y McCormick introdujo el método de punto interior.

8. En 1984, Karmarkar aplicó el método del Punto Interior para resolver programas lineales además de su análisis innovador.

La programación lineal ha demostrado ser una herramienta extremadamente poderosa, tanto en el modelado de problemas del mundo real y como una teoría matemática de amplia aplicación.

La programación lineal utiliza un modelo matemático para describir el problema en cuestión. El adjetivo lineal significa que todas las relaciones funcionales están obligados a ser lineal. La programación de la palabra no se refiere aquí a la programación informática, sino que es esencialmente un sinónimo para la planificación. De este modo, la programación lineal consiste en la planificación de las actividades para obtener un resultado óptimo, es decir, un resultado que alcanza el mejor gol especificado (según el modelo matemático) entre todas las alternativas viables. Hoy en día, la programación matemática se llama optimización matemática (la Sociedad de Programación Matemática ha cambiado el nombre a la Sociedad de la Optimización Matemática).

En los últimos tiempos la palabra "programación", se sustituye por la de optimización, y la noción de una "programación lineal"puede ser reemplazada como sinónimo de "problema de optimización lineal".

La función objetivo de un programa lineal se suele escribir como:

$$z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_{nxn}.$$

La variable de decisión j-ésima es el costo por unidad j-ésima o el coeficiente de ganancia. Una restricción adicional es que la variable de decisión está obligada a ser continua en lugar de discreta. Los nombres de las variables comunmente se derivan del contexto del problema, pero para el caso genérico, z, es de los nombres utilizados tradicionalmente para el valor de la función objetivo y la variable de decisión j-ésimo, respectivamente.

Una función lineal no tiene mínimo o máximo en R^n. En la programación lineal, esta función se reduce al mínimo sujeto a ciertas restricciones, por ejemplo en la cantidad de material utilizado. Estas limitaciones tienen la forma de

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{inxn} \leq b_i. \tag{2.4}$$

En este caso, b_i es la cantidad existente de algunos de los factores i (recursos, materiales, tiempo, etc) , a_{ij} es la cantidad de ese factor que se utilizar para "producir", una unidad de la variable x_j y el uso total de los factores no se permite que sea mayor que dos veces. Si el factor i necesita ser completamente utilizada, la desigualdad en (2.4) es reemplazada por una ecuación. La desigualdad contraria también es posible.

A menudo, los valores de x_j no pueden ser negativos. En este caso la restricción

$$x_j \geq 0,$$

necesitamos que se añada al modelo. Claramente, las variables también se puede limitar a tomar valores solo en un determinado (o ineludible ilimitado) intervalo de

$$x_j \geq x_j \geq x_j.$$

La programación lineal está en el centro de prácticamente toda la optimización. Muchos de los modelos comunes, tales como los producidos en los flujos de la red y la programación de personal, son casos especiales. Así, los modelos y métodos de comprensión LP proporciona las bases para la comprensión de los casos especiales.

2.1.5. Origen de la programación Binivel

Los problemas de dos niveles de programación (BLP) se han introducido en el área de la optimización en la era de los 70's y del siglo XX. Desde ese momento, un rápido desarrollo y la investigación intensiva de estos problemas se ha iniciado en la teoría y aplicaciones. Las contribuciones a este desarrollo han sido proporcionados por los matemáticos, economistas e ingenieros, y el número de artículos dentro de esta área está creciendo rápidamente. Sin embargo, los libros de texto de programación Binivel son escasos hasta la actualidad.

Los problemas de programación con dos niveles son los jerárquicos: los problemas de optimización que tienen un segundo problema de optimización (paramétrica), como parte de sus limitaciones. En la ingeniería y en ciencias de la naturaleza este "interior" (o "nivel inferior" o, "el seguidor") el problema se puede utilizar para encontrar un modelo mejor y más correcta de la naturaleza. En todas las situaciones, el exterior (o "nivel superior" o, "líder") problema refleja nuestro objetivo a alcanzar. Y el sentido de la programación de dos niveles está en que no podemos cumplir con este objetivo sin tener en cuenta la reacción del seguidor (es) a las decisiones del líder.

Desde el punto de vista matemático, el problema BLP es complicado: es NP-difícil (no determinista-polinómicamente duro), su formulación es difícil, incluso en relación con el concepto de solución, para muchas de sus reformulaciones como un problema estandar (de un solo nivel) las condiciones habituales de regularidad se violan en cada punto factible, etc.

Es el objetivo de esta sección enriquecer a un estandar o por supuesto, con los elementos de los fundamentos teóricos y las aplicaciones de BLP. El enfoque principal está en los conceptos de soluciones optimistas y pesimistas (o débil y fuerte)

2.1.6. Equilibrio de Cournot- Nash

Consideremos el ejemplo donde los responsables de las decisiones n (empresas) producen un producto homogéneo en las cantidades $x_i, i = 1, ..., n$. Supongamos que todos ellos tienen funciones diferenciables, convexas, funciones de costos $f_i(x_i)$ no negativas y obtener un ingreso de $x_i p(\sum_{J=1}^{n} x_J)$ a la hora de vender sus productos en el mercado común.

Aquí hay una función $p : R \to R$ llamada de demanda inversa que describe la dependencia del precio de mercado de la cantidad ofrecida de ese producto. Suponga que la función p es continuamente diferenciable, estrictamente convexa y decreciente en el conjunto de los números reales positivos $R++ := z \in R : z > 0$, pero la función $g(x) := xp(x)$ es cóncava en este intervalo. Sea $X_i := [a_i, b_i] \subset R++$ un intervalo acotado, donde la empresa i cree tener una producción rentable. Entonces, para calcular una cantidad óptima produciendo una firme ganancia máxima i se tiene que resolver el problema

$$\max_{x_i}\{x_i p(\sum_{j=1}^{n} x_j) - f_i(x_i) : x_i \in X_i\}, \tag{2.5}$$

que tiene una solución óptima $x_i(x_{-1})$, donde la abreviatura x_{-1} denota $x_{-1} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)^T$ .Consideremos ahora la situación cuando una de las firmas (por decir la firma 1) es capaz de hacer una ventaja sobre los otros en el sentido de que puede fijar su volumen producido primero x_1 y que todas las otras firmas reaccionarán a este volumen. Entonces, las empresas 2, ..., n, calculan un equilibrio de Nash entre ellos por medio de la solución $(n-1)$ problemas (2.5) para $i = 2, ..., n$, al mismo tiempo. Sea

$$p(\sum_{j=2}^{n} x_j) - f_i^{'}(0) > 0.$$

Esto implica que la empresa 1 va a producir un volumen de alimentación positiva. Supongamos que el equilibrio de Nash $(x_2(x_1), ..., x_n(x_1))^T$ entre las empresas 2, ..., n, se determina únicamente por cada x_1 fijo. A continuación, la empresa 1 tiene que resolver el siguiente problema con el fin de maximizar su beneficio:

$$\max_{x_1}\{x_1 p(\sum_{j=1}^{n} x_j) - f_1(x_1) : x_1 \in X_1, x_i(x_1), i = 2, ..., n\},$$

que se puede también expresar como sigue:

$$x_1 p(\sum_{j=1}^{n} x_j) - f_1(x_1) \to \min_{x_i},$$

sujeto a:

$$x_1 \in X_1$$
$$x_i \in \Psi_i(x_1). \tag{2.6}$$

Donde $\Psi_i(x_1)$ denota el conjunto de soluciones óptimas del problema (2.5) para la x_1 modificada. Este es un ejemplo sencillo de un juego de Stackelberg, que es por lo tanto un problema de programación binivel.

2.1.7. Origen y Desarrollo de la Programación Lineal Binivel

Los problemas de programación lineal Binivel son los problemas matemáticos de optimización, donde todas las restricciones y funciones objetivo son lineales, y el conjunto de todas las variables se reparte entre dos vectores x e y. Aquí, x puede ser elegido como una segunda solución óptima de un problema de programación lineal parametrizada en y. Así, el problema de programación lineal binivel es jerárquico en el sentido de que sus limitaciones se definen, en parte, con un segundo problema de optimización. El planteamiento de este segundo problema se presenta como sigue:

$$min_y\{c^T y : A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0\}, \tag{2.7}$$

donde $x \in R^n, y \in R^m, a \in R^p$ las matrices A1, así como el vector C son de dimensiones apropiadas.

$$\varphi_L(x) := \min_y \{cy : A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0\}.$$

Denota el valor de la función objetivo óptima (2.7), y T.

$$\Psi_L := \{y : A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0, c^T y = \varphi_L(x)\},$$

es el conjunto de soluciones óptimas. Entonces, el problema de programación lineal binivel se puede expresar como

$$\text{"}\min_{x}\text{"}\{d^{1T}x + d^{2T}y : A^{3}x = b, x \geq 0, y \in \Psi_L(x)\} \tag{2.8}$$

dónde $b \in R^1$ y todas las demás dimensiones se determinan de tal manera que coincidan con los de arriba.

En sentido estricto, esta definición del problema de programación lineal con dos niveles solo es válida en caso de que la solución del nivel inferior $y = y(x) \in \Psi_L(x)$ se determine exclusivamente para cada y posible x. Las comillas en "min"se han utilizado para expresar esta incertidumbre en la definición del problema de programación lineal con dos niveles (2.8) en caso de falta de unicidad de las soluciones óptimas x en el nivel inferior. Sin embargo, si el problema del nivel inferior (2.7) tiene a lo sumo una solución óptima (global) para todos los valores del parámetro y, las comillas se pueden quitar, y aparece la notación común de un problema de optimización (programación) .

2.1.8. Aplicaciones de la programación lineal binivel y lineal-mixto

La lista de aplicaciones notificados de programación lineal con dos niveles es muy largo y de rápido crecimiento. En lo que sigue, algunas aplicaciones importantes se mencionan y se describe en breve. Por supuesto, esta lista está lejos de ser completa y solo se incluye para dar cuenta de las diferentes áreas donde se puede implementar la programación lineal con dos niveles. Un problema de optimización lineal jerárquico motivados por una variedad de problemas de aplicación militar. Especialmente importantes son: (a) ofensiva estratégica y el diseño de la estructura defensiva de la fuerza, (b) la estructura estratégica de bombarderos de la Fuerza, y (c) basando así como la asignación de los aviones tácticos a las misiones. El problema Bracken-McGill para el cálculo de la producción óptima y las decisiones de marketing sujetas a la restricción de que la función mínima de la empresa social para cada producto es mayor o igual a una constante dada es un ejemplo de una relación principal-agente. Aquí las variables del agente no están involucrados en el problema del nivel superior. Que la empresa se organiza de forma jerárquica, con una unidad superior y varias unidades subordinadas, donde todas las unidades subordinadas se supone controlan un conjunto separado de variables y tratan de maximizar sus propias funciones objetivos lineales sobre conjuntos de estrategias mutuamente interdependientes. Este problema puede servir como un ejemplo de programación lineal binivel uno, si la unidad superior (el líder) quiere, por ejemplo, de forma óptima distribuir los recursos entre las unidades subordinadas. Un problema de equilibrio para la localización de la mejor ubicación para una nueva instalación de una empresa, para calcular el nivel de producción de esta nueva instalación y para planificar los patrones de envío, para que el beneficio de la empresa sea maximizada. La principal característica del problema de equilibrio para ubicación de las instalaciones es que este modelo tiene en cuenta los cambios en los precios de mercado y niveles de producción en cada una de las empresas de la competencia causadas por el aumento de la oferta global de los productos resultantes de la creación en el trabajo de la nueva instalación.

Diferentes problemas de planificación del tráfico o el transporte con la congestión se puede formular como tareas de programación binivel entera mixta. Un ejemplo es el siguiente: Una unidad superior quiere equilibrar óptimamente los costos de transporte, de inversión y el mantenimiento de una red de tráfico, en donde los usuarios se comportan de acuerdo con el primer principio de Wardrop de equilibrio de tráfico. Un problema relacionado con el transporte urbano también se puede considerar, en su camino de tributación y los precios de las entradas son de tránsito que se determine.

Programación lineal binivel se aplica a la resolución de conflictos en la gestión internacional de ríos. Por ejemplo en algunos países como India y Bangladesh, el agua inicia su recorrido desde el río Ganges y obtener energía hidroeléctrica, el riego y protección contra las inundaciones por el uso de una serie de presas en ambos países, son los objetivos. Ambos estados realizan inversiones en depósitos y deciden sobre el tamaño de las presas y el almacenamiento de agua subterránea, los niveles de uso del agua para riego y energía hidroeléctrica. Se llevan a cabo planteamientos en los cuales hay que elegir la India o Bangladesh como el líder, así como considerar un árbitro (las Naciones Unidas).

Configuración del funcionamiento óptimo de una planta de aluminio se formula como un problema de programación binivel mixto lineal. Aquí, en el nivel inferior, se minimizan los costos como resultado de las actividades y el consumo de materia prima en las áreas de la varilla y el ánodo de la fundición de aluminio. El objetivo en el nivel superior es el de maximizar la producción de aluminio.

Programación Binivel

El modelo de optimización matemática es un sistema de ecuaciones matemáticas (desigualdades) y las expresiones que describen el objetivo del usuario. El sistema de ecuaciones (desigualdades) describe el conjunto de alternativas para la decisión del usuario y la tarea del usuario es seleccionar una de las alternativas que cumplan su objetivo mejor. Para ello, una llamada función objetivo que se utiliza debe ser minimizada / maximizada en el conjunto de las alternativas.

Supuestos (abstracciones) de la programación lineal

Se debe reconocer que varias suposiciones y abstracciones se han hecho para llegar a un modelo manejable. Si los productos son elementos discretos, la solución no es realizable mediante programación lineal. Este enfoque, sin embargo, no en los resultados generales factibles, soluciones mucho menos óptimas.

Principio de la divisibilidad

La suposición de la que parte la programación lineal es que las variables tienen valores reales y las unidades que son arbitrariamente divisibles. La imposición de requisitos de integralidad lleva a un modelo de programación entera. En caso de problemas de gran tamaño, este modelo es mucho más difícil de resolver que el modelo de programación lineal, es NP-hard

Principio de Proporcionalidad

Una mayor abstracción en la programación lineal es que la función objetivo y las straints estafadores se forman mediante la suma de los términos individuales que son proporcionales a los valores de las variables. Cuando las no linealidades están presentes, deben ser aproximado o convertirse en formas lineales para programación lineal si se va a utilizar. Algoritmos no lineales de programación son en general menos eficaces para los algoritmos para la solución de modelos lineales.

Principio de seguridad

En realidad, muchos parámetros y coeficientes en un modelo son solo estimaciones y no constantes conocidas. Los valores reales tienden a ser inciertas, por ejemplo, estimaciones de la demanda se ven afectadas por una variedad de lo desconocido, a menudo fallan las máquinas, etc. Sin embargo, el modelo estándar de programación lineal hace caso omiso de las dinámicas cambiantes y fluctuaciones temporales que están presentes en un sistema. Todos los parámetros y los coeficientes se supone que es constante y conocido con certeza.

La construcción de modelos de programación lineal

Esta sección está dedicada a ciertas formalidades y las definiciones aceptadas en outlaying y la construcción de modelos de programación lineal. Algunas cuestiones de terminología también se consideran.

Terminología

Variables de Decisión

Las variables de decisión están representadas por las variables algebraicas, con nombres como $x_1, x_2, ..., x_n$. El número de variables de decisión es n, y X_J es el nombre de la variable j-ésima. En una situación específica, a menudo es conveniente utilizar otros nombres, como $x_{\{}ij\}$, y_k. Una asignación de valores a las variables de un problema se conoce como una solución.

Función Objetivo

La función objetivo se evalúa un criterio cuantitativo de importancia inmediata, tales como el costo, beneficio, utilidad o rendimiento. La función objetivo general lineal se puede escribir como

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j.$$

Donde c_j es el coeficiente de la variable de decisión j-ésima. El criterio seleccionado puede ser maximizado o minimizado.

Restricciones

Una restricción es una desigualdad o la igualdad de la imposición de restricciones en las decisiones. Las restricciones se derivan de una variedad de fuentes, tales como recursos limitados, las obligaciones contractuales, o las leyes físicas. En general, un programa lineal se dice que tiene m restricciones lineales que pueden ser indicados como

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \left\{ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \right\} b_i, i = 1, ..., m.$$

El número de actividades conjuntas que se llama un coeficiente tecnológico, y el número de bi se llama el de la derecha-lateral (lado derecho) valor de la i-ésima restricción. Las desigualdades estrictas $(<, >, =)$ no son permitidas. A veces identificar las limitaciones escritas en esta forma como estructurales (o, funcional) para distinguirlas de las restricciones de no negatividad y simples límites superiores se definen a continuación.

Las restricciones de no negatividad

En la mayoría de los problemas prácticos, las variables están obligadas a ser no negativas, es decir

$$x_j \geq 0, j = 1, ..., n.$$

Este tipo especial de restricción se denomina restricción de no negatividad. Algunas veces las variables están obligados a ser no positiva o incluso puede ser restringido.

Límites superiores simples.

Asociado con cada variable puede ser una cantidad especial llamado el límite superior simple u_j. Una simple acotación en el límite superior del valor de arriba, esto es

$$x_j \leq u_j, j = 1, ..., n.$$

La programación lineal Completa (LP)

La combinación de todos estos componentes en una sola declaración produce el general de programación lineal problema de programación: Minimizar o Maximizar:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

sujeto a:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i, i = 1, ..., m.$$

$$0 \leq x_j \leq u_j, j = 1, .., n.$$

Región Factible

Las restricciones, incluidas las restricciones de no negatividad y simples límites superiores, definen la región factible, o conjunto factible. Elementos del conjunto factible se denominan soluciones factibles.

Parámetros

La colección de coeficientes $c_j, a_i j, b_i$ para todos los valores de los índices i y j son llamados los parámetros del modelo. Para el modelo para ser completamente determinado, todos los parámetros deben ser especificados.

Método gráfico

Modelos de programación lineal con dos variables se puede ilustrar de forma gráfica. Usar una rejilla de dos dimensiones y ejemplos sencillos, ahora discutir una variedad de propiedades de la solución que puede ser exhibida por los modelos más generales.

La mayoría de los problemas de programación lineal no son tan fáciles de visualizar como los de esta sección. Cuando hay más de tres variables, no es posible sacar la región factible completa. Los conceptos y el lenguaje introducido aquí, sin embargo, siguen siendo adecuados para describir la geometría de un problema y las características de las soluciones. En las dimensiones superiores, las líneas que definen los límites de la región factible convertido hiperplanos y las regiones factibles convertido en n-dimensional poliédrica. Independientemente de las dimensiones, soluciones óptimas todavía se pueden encontrar en los puntos extremos de la región factible, un problema particular puede tener una solución finita o infinita, y los modelos pueden no tener las regiones factibles. Por lo tanto, podemos listar un resumen de los conceptos, que son válidos para cualquier dimensión.

Resumen de los conceptos

Solución: Una asignación de valores a las variables de decisión es una solución para el modelo. Dada una solución, las expresiones que describen la función objetivo y las restricciones pueden ser evaluados. Una solución es factible si todos los problemas estructurales, las restricciones de no negatividad, y los límites superiores simples está satisfecho. Si cualquiera de estas restricciones es violada, la solución se dice que es inviable. Solución 'optima: una solución factible que maximiza o minimiza la función objetivo (según el criterio) se llama la solución óptima. El propósito de un algoritmo de programación lineal es encontrar la solución óptima (s), o determinar que no existe solución factible. Alternativa Óptima: Si hay más de una solución óptima (soluciones que produzcan el mismo valor de z), el modelo se dice que tiene soluciones óptimas múltiples o alternativas. Muchos de los problemas prácticos tienen óptimos alternativos. No hay solución posible: Si no hay una especificación de los valores de las variables de decisión que satisface todas las restricciones, el problema se dice que no tiene solución factible. En los problemas prácticos, es imposible que el conjunto de restricciones no permite una solución factible. Si tal situación se produce el modelo no es correcta o que los parámetros no son correctos. Modelo sin límites: Si no hay soluciones viables para que la función objetivo puede tener los valores arbitrariamente grandes (si se maximiza) o arbitrariamente pequeños (es decir, los valores negativos con valores absolutos arbitrariamente grande) si se minimiza, el modelo se dice que es ilimitado. En situaciones prácticas esta situación es poco probable, también. Se debe notar que, en situaciones prácticas, la solución obtenida óptima (s) debe ser interpretada cuidadosamente con respecto a la situación práctica bajo consideración. Los errores en el modelo deben ser excluidos.

2.1.9. Construcción de Modelos de Programación Lineal de dos Niveles (BLP)

Comenzamos nuestras consideraciones con el problema de programación lineal binivel. Casi siempre vamos a considerar los problemas donde las restricciones de nivel superior en (2.8) dependen solo de x.El problema de nivel inferior (2.7) puede ser reescrito como

$$\min_{y}\{c^T u : A^1 y \leq aA^2 x, x \geq 0\}, \tag{2.9}$$

donde $x \in R, y \in R^m, a \in R^p$ y las matrices A^1, A^2, así como el vector c, tienen dimensiones apropiadas. Al igual que en el capítulo 1, denota el conjunto de soluciones óptimas del problema (2.9) con

$$\begin{aligned}\Psi_L(x) &:= \arg\min_y\{cy : a - A^2xy \leq aA^2x, x \geq 0\} \\ &:= \{y \in R^m : c^Tu = \varphi(x), y \leq a - A^2x, x \geq 0\},\end{aligned}$$

donde

$$\varphi(x) := \min_y\{c^Ty : A^1y \leq a - A^2x, y \geq 0\}$$

denota el valor de la función objetivo óptima del problema (2.9). Entonces, el problema de programación lineal binivel (BLP) se pueden formular como

$$\text{"}\min_x\text{"}\{d^{1T}x + d^{2T}y = d^{2T}y : A^3x = b, x \geq 0, y \in \Psi_L(x)\}, \qquad (2.10)$$

donde todas las demás dimensiones se determinan de tal manera que coincidan con los indicados anteriormente. Observe de nuevo que la formulación con las comillas se utiliza para subrayar la incertidumbre en la definición del programación binivel en el caso de la multiplicidad de las soluciones óptimas del nivel inferior.

La Naturaleza Geométrica de la Programación Lineal Binivel

El conjunto factible del problema de programación lineal con dos niveles podría estar compuesto por la unión de las caras de la serie M. Se puede demostrar que esto es una propiedad general del problema lineal binivel.

Definición 2.1. Un mapeo punto a conjunto $R^p \to 2^{R^q}$ se llama poliédrico, si su gráfica

$$gph\Gamma := \{(x, y) \in R^p \times R^q : y \in \Gamma(x)\}$$

es igual a la unión de un número finito de conjuntos convexos poliédricos.

Aquí, un conjunto poliédrico convexo es la intersección de un número finito de semiespacios.

Teorema 2.1. El L Mapeo Punto a Conjunto $\Psi_L(\cdot)$ es Poliédrica.

Haciendo uso de la definición 2.1, el problema de programación lineal binivel (BLP) se puede resolver mediante la minimización de la función objetivo en cada uno de los componentes de gph Ψ_L sujeto a las restricciones de nivel superior de un problema en (2.10). Cada uno de estos subproblemas es un problema de optimización lineal. Por lo tanto, como corolario del Teorema 2.1, se obtiene:

Corolario 2.1. Si la solución óptima del problema del nivel inferior (2.9) se determina únicamente para cada valor del parámetro x, entonces existe una solución óptima al problema (2.10), que es un vértice del conjunto

$$\{(x, y) : A^2x + A^1y \leq a, A^3x = b, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

También es posible mostrar que la gráfica de $\Psi_l(\cdot)$ está conectada, por lo tanto, el conjunto factible del problema de programación lineal binivel (2.10) está conectada, también. El siguiente ejemplo muestra que todavía esto es, en general, no válida si las limitaciones en función de la solución óptima del nivel inferior se añaden al problema de nivel superior.

2.1.10. Reducción de Problemas de Programación Binivel a un Programa Matemático con la Complementariedad Restringida

Teoría de la dualidad y el análisis de sensibilidad también son útiles en la solución problemas de programación de dos niveles al reducirlo a los programas de matemáticas, con las limitaciones de la complementariedad.

Consideremos el problema de nivel inferior (2.7) en la forma

$$\min_{y}\{c^T y : A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0\}, \tag{2.11}$$

donde $x \in R^n, y \in R^m, a \in R^p$ y las matrices A_1, A_2, así como el vector c, tienen dimensiones apropiadas. Al igual que en el capítulo 1, denota el conjunto de soluciones óptimas de problemas (2.11) con

$$\begin{aligned} \Psi_L(x) &:= Arg\min_{y}\{c^T y : A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0\} := \\ &:= \{y \in R^m : c^T y = \varphi(x), A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0\}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

donde

$$\varphi(x) := \min_{y}\{c^T y : A^1 y \leq a - A^2 x, y \geq 0\}$$

denota el valor de la función objetivo óptima del problema (2.11). Entonces, el problema de programación lineal binivel (BLP) se pueden formular como

$$"min_x"\{d^{1T} x = d^{2T} y : A^3 x = b, x \geq 0, y \in \Psi_L(x)\}, \tag{2.13}$$

donde todas las demás dimensiones se determinan de tal manera que coincidan con los indicados anteriormente. Observe de nuevo que la formulación con las comillas se utiliza para subrayar la incertidumbre en la definición del programa binivel en el caso de la multiplicidad de las soluciones óptimas del nivel inferior. Supongamos ahora que el problema de que la válvula inferior tiene una solución única $y = y(x)$ para cada $x \geq 0$. Luego por la propiedad dualidad fuerte, para cada fijo $x \geq 0$, existe (al menos un) vector de variables $\lambda \geq 0, \lambda \in R^p$, de manera que sea factible para el problema dual, es decir,

$$\lambda^T A^1 = c^T \geq 0, \tag{2.14}$$

y por el teorema de la complementariedad, las condiciones de complementariedad siguientes se mantienen:

$$(\lambda^T A^1 - c^T)y = 0; \; \lambda^T(a - A^1 y - A^2 x) = 0. \tag{2.15}$$

A medida que el contrario también es cierto, es decir, las condiciones (2.14) y (2.15) son válidas para ciertos x,y negativos, y λ implica que y resuelve (únicamente) el problema de nivel inferior para el fijo $x \in R^n$, se puede sustituir el problema de programación de dos niveles (2.7),(2.13) con un problema (evidentemente) equivalente de programación matemática con restricciones de complementariedad de la siguiente manera:

$$Minimize\ Z = d^{1T}x + d^{2T}y$$

sujeto a:

$$
\begin{aligned}
&(1) A^1 y = A2x \leq a, \qquad (2.16)\\
&(2) A^3 x = b,\\
&(3) \lambda^T A^1 = c^T \geq 0,\\
&(4) \lambda^T A^1 y = c^T y = 0,\\
&(5) \lambda^T A^1 y + \lambda^T A^2 x - \lambda^T a = 0,
\end{aligned}
$$

y

$$y \geq 0, x \geq 0, \lambda \geq 0.$$

El problema (2.16) tiene un solo nivel, las ecuaciones (4) y (5) son (no lineales) las condiciones de complementariedad, que dan el nombre de MPCC a este problema. Sin embargo, es posible resolver mediante un método simple algo modificado. Es decir, esta versión simple debe ver que ni la pareja de variables (λ_l, ξ_i) ni (y_j, η_j) pertenecen simultáneamente a la lista de variables básicas en cualquier iteración. En este caso, $\xi_i, i = 1, ..., p$, y , $\eta_j, j = 1, ..., m$ son variables de holgura para las restricciones (1) y (3), respectivamente. Otro método popular para resolver el CCM reducida consiste en la aplicación de las técnicas bien conocidas de la función de penalización. En más detalle, en algunas condiciones suplementarias no demasiado restrictivas, el problema (2.16) es equivalente (para $M1 > 0$ y $M_2 > 0$ suficientemente grande) para el problema de programación no lineal siguiente, pero que tiene limitaciones estructurales solo lineales:

$$Min\ Z = d^{1T}x + d^{2T}y + M_1(\lambda^T A^1 + c^T y) + M_2(\lambda^T A^1 y + \lambda^T A^2 x - \lambda^T a)$$

sujeto a:

$$(1) A^1 y + A^2 x \leq a,$$

$$(2) A^3 x = b,$$

$$(3) \lambda^T A^1 + c^T \geq 0,$$

y

$$y \geq 0, x \geq 0, \lambda \geq 0.$$

Capítulo 3

Modelo Binivel para el problema de Migración Humana

3.1. Planteamiento del Problema

Los modelos de migración humana atrajeron un interés fuerte por parte de los investigadores de operaciones en los años noventas del último siglo; véase [3], [4] entre otros. La mayoría de los artículos y libros pertinentes desarrollan condiciones que garantizan la existencia y unicidad de equilibrio en los modelos propuestos. Se han examinado varias formas del equilibrio de Nash bajo una suposición de competencia perfecta, es decir, cada grupo de la población descuida la posible influencia de la migración sobre el nivel de vida en el destino. Ahora nosotros proponemos que este modelo se convierta en un Modelo Binivel, donde el nivel inferior será representado por los migrantes potenciales, mientras que el nivel superior se ve representado por cada una de las ciudades competidoras, con el objetivo de aumentar su atractividad hacía los migrantes potenciales. Más adelante se verá claramente como están dados cada uno de estos niveles.

De manera similar que en [4], [12], [13], consideramos una economía cerrada con:

- n localidades, denotadas por i.
- K clases de una población, denotada por k.
- $\bar{Q}_i^k$ población inicial de la clase k en la localidad i.
- Q_i^k población final de la clase k en la población i.
- s_{ij}^k flujo de migración de la clase k que va de la localidad i a la localidad j.
- c_{ij}^k función de costo de migración para el grupo de migrantes k que va de la localidad i a la localidad j.

Se tienen los siguientes supuestos

- A1. Asumimos que los costos de migración refelejados no solo toman en cuenta el costo del trasladarse de una localidad a otra, sino también el costo personal y psicológico según la percepción de una clase cuando se mueve entre las localidades. La utilidad de u_i^k *(atractivo de la localidad i percivido por la clase k), depende de la población en el destino, es decir, $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$. Este supuesto es bastante natural: de hecho, en muchos casos, las ciudades con mayor población ofrece muchas más posibilidades de encontrar un empleo, un mejor servicio médico y las instalaciones de la casa, un desarrollo de la infraestructura, etc. Por otro lado, cuando el desarrollo de la infraestructura va a la zaga de las demandas de la ciudad moderna, la mayor población puede dar lugar a cierta disminución en los niveles de vida, y por lo tanto, de los valores de utilidad.

- A2. Cada persona de la clase k, al considerar la posibilidad de trasladarse de un lugar i a una ubicación j, no solo tiene en cuenta la diferencia en los valores de utilidad afectada en la ubicación inicial y el destino, sino también el incremento esperado (negativo) del valor afectado en j.

Estas funciones utilidad también incorporan parámetros que reflejan la magnitud de las inversiones realizadas por las autoridades de la ubicación con el fin de mejorar la infraestructura, capacidad profesional, la construcción del hogar, alimentación, etc. Exactamente éstos montos de inversión juegan el rol de las estrategias municipales en el juego en el nivel superior.

3.1.1. Planteamiento del Problema en el Nivel Inferior

Primero, describimos el problema del nivel inferior. Las ecuaciones de conservación del flujo, se obtienen para cada clase k y para cada localidad i, y las desigualdades que prohiben la repetición de migración o migración en cadena, se enumeran a continuación. La población final de cada una de las clases k en cada una de las ciudades **i** e **j** estarán definidas como:

$$Q_i^k = \bar{Q_i}^k + \sum s_{ij}^k - \sum s_{ji}^k, \quad i = 1, ..., n \tag{3.1}$$

$$\sum s_{ji}^k \leq \bar{Q}_i^k, i = 1, ..., n \tag{3.2}$$

con $s_{ij}^k \geq 0$ para toda k, i, y $i \neq j$. El conjunto factible que denota el problema es: $M = (Q, s) : s \geq 0 \;\; y \;\; (Q, s)$ satisface (3.1) y (3.2).

Los estados de la ecuación (3.1) de la población de la clase k de la localidad i es determinada por la población inicial de la población de la clase k en la localidad i además del flujo de migración que entra a i de la clase k, menos el flujo de migración que sale de i de esta misma clase. La Ecuación (3.2) afirma que el flujo que sale de i de la clase k no puede exceder la población inicial de la clase k de i, ya que no se permite la migración en cadena.

Suponemos que los migrantes son racionales, entonces la migración continua hasta que ningún individuo tenga incentivos para trasladarse, ya que una decisión unilateral ya no produciría una ganancia neta positiva (la ganancia en la utilidad esperada menos el costo de migración)

Con la finalidad de extender el modelo de migración humana de [11] aquí introducimos los siguientes conceptos.

w_{ij}^{k+} son los coeficientes de influencia tomados en cuenta por un individuo de la clase k que planea moverse de i a j. Este coeficiente es definido por su suposición de que después de que el movimiento de los individuos s_{ij}^{k} de la clase k de i a j la población total de la clase k en j será igual a:

$$\bar{Q}_j^{\,k+} + w_{ij}^{k+} s_{ij}^{k}.$$

Por otro lado, w_{ij}^{k-} son los coeficientes de influencia conjeturados por un individuo de la clase k que piensa en moverse de i a j, determinado por la suposición que después del movimiento de individuos s_{ij}^{k}, el total de la población de la clase k permanecerá igual a:

$$\bar{Q}_j^{\,k-} - w_{ij}^{k-} s_{ij}^{k}.$$

Ahora, suponemos que **A1** y **A2** concernientes a las funciones de utilidad y variaciones esperadas en los valores de utilidad son exactamente el mismo que está descrito en [12]. Haciendo uso de la notación introducida anteriormente, estamos en posición de definir un estado de equilibrio para el modelo del nivel inferior como se ve a continuación.

3.1.2. Definición del Equilibrio en el Nivel Inferior

Una población multiclase y patrón de flujo $(Q^*, s^*) \in M$ es un equilibrio en el nivel inferior; si para cada clase k=1,...,K, y para cada par de localidades i,j=1,...,n; $i \neq j$, las siguientes relaciones se cumplen:

$$u_i^k - w_{ij}^{k-} s_{ij}^{k*} \frac{du_i^k}{dQ_i^k}(Q^*) + b_{ij}^k + a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \begin{cases} = u_j^k - w_{ij}^{k+} s_{ij}^{k*} \frac{du_j^k}{dQ_j^k}(Q^*) - \lambda_i^k & \text{si } s_{ij}^{k*} > 0 \\ \geq u_j^k - w_{ij}^{k+} s_{ij}^{k*} \frac{du_j^k}{dQ_j^k}(Q^*) - \lambda_i^k & \text{si} s_{ij}^{k*} = 0; \end{cases}$$

$$\lambda_i^k \begin{cases} \geq 0, & \text{si} \sum_{l \neq i} s_{il}^{k*} = \bar{Q}_i^k; \\ = 0, & \text{si} \sum_{l \neq i} s_{il}^{k*} < \bar{Q}_i^k; \end{cases} \tag{3.3}$$

A3 Suponemos que los coeficientes de influencia son funciones sobre la población actual de la localidad en cuestión y el flujo de migración de la localidad i a la localidad j, satisface las siguientes condiciones:

$$w_{ij}^{k+} s_{ij}^k(Q, s) = v_{ij}^{k+} s_{ij}^k + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^k,$$

y

$$w_{ij}^{k-} s_{ij}^k(Q, s) = v_{ij}^{k-} s_{ij}^k - \sigma_{ij}^{k-} Q_i^k,$$

donde:

$$v_{ij}^{\pm} \geq 0, \sigma_{ij}^{\pm} \geq 0, k = 1, ..., K; i, j = 1, ..., n; i \neq j.$$

Tomando en cuenta **A3** y omitiendo la falta de agumento Q^* in las funciones de utilidad, de (3.7) obtenemos que:

$$u_i^k - (v_{ij}^{k-} s_{ij}^{k*} - \sigma_{ij}^{k-} Q_i^{k*}) \frac{du_i^k}{dQ_i^k} + b_{ij}^k + a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \begin{cases} = u_j^k + (v_{ij}^{k+} s_{ij}^{k*} + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^{k*}) \frac{du_j^k}{dQ_j^k} - \lambda_i^k & \text{si } s_{ij}^{k*} > 0 \\ \geq u_j^k + (v_{ij}^{k+} s_{ij}^{k*} + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^{k*}) \frac{du_j^k}{dQ_j^k} - \lambda_i^k & \text{si} s_{ij}^{k*} = 0; \end{cases}$$

La existencia del siguiente resultado, fue establecida en otros trabajos previos [12]-[13].

Teorema 1

Una población y flujo de migración perteneciente a $(Q^*, s^*) \in M$ satisface las condiciones de equilibrio (3.7) y (3.3) si y solo si resuelve el problema de desigualdad variacional siguiente:

$$\langle -u(Q^*), Q - Q^* \rangle + \langle c(s^*) - d(Q^*, s^*), s - s^* \rangle \geq 0, \quad \forall (Q, s) \in M. \quad (3.4)$$

La existencia de al menos una solución a la desigualdad variacional (3.4) se deduce de la teoría general de desigualdades variacionales, bajo el supuesto único de diferenciabilidad continua de la utilidad y la continuidad en la función de costo de migración, ya que el posible conjunto convexo M es compacto (cf., por ejemplo, [19]).

La unicidad del equilibrio de la población y el flujo de migración perteneciente a (Q^*, s^*) se demostró en [13] y [14].

Teorema 2

Consideremos la desiguldad variacional: Dada $y^* \in M \subset R^n$ tal que:

$$\langle F(y^*), y - y^* \rangle \geq 0, \forall y \in M. \quad (3.5)$$

Si el operador $F : R^n \to R^n$ es estrictamente monótona, esto es

$$\langle F(y^1), -F(y^2), y^1 - y^2 \rangle > 0, \forall y^1 \neq y^2.$$

Si la desigualdad (3.5) tiene solución esta es única. Esto es, tiene a lo mucho una solución. Una vez establecida la existencia y unicidad del equilibrio (en el nivel inferior) entre los migrantes potenciales, podemos pasar a el concepto de equilibrio en el nivel superior entre las autoridades municipales.

3.2. Definición del Equilibrio en el Nivel Superior

Suponemos que la función de utilidad asociada a la localidad i y los migrantes potenciales de la clase k, tienen la forma:

$$u_i^k(Q) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i. \tag{3.6}$$

Donde $A_i^k > 0$, $B_i^k > 0$ son parámetros relacionados a las facilidades del ambiente para los inmigrantes potenciales de la clase k en la localidad i. En el sentido económico A_i^k podría ser el costo promedio de la casa en la localidad i en un distrito donde la clase k prefiere o puede vivir, mientras que B_i^k puede ser como un coeficiente de adaptación inversa para los inmigrantes de la clase k, es decir que entre menor sea B_i^k mayor será el grado de adaptación de la famiia promedio de esta clase k en la localidad i. Finalmente, el parámetro $R_i^k > 0$ refleja el monto de inversión por las autoridades de la localidad i en la mejora del entorno tanto para los recién llegados como para los habitantes regulares.

Ahora suponemos que los volumenes de inversión $R_i^k > 0$ son usados como estrategias de los jugadores (autoridades municipales de las localidades involucradas), esto es la base para definir un estado de equilibrio en el juego (nivel superior).

Un vector de inversión $R^* = (R_1^*, ..., R_n^*)$ es un equlibrio en el nivel superior, si por cada localidad i, i=1,...,n, la función de utilidad de la autoridad municipal $U_i = U_i(R_i, R_{-i}^*)$ alcanza su valor máximo exactamente en $R_i = R_i^*$ (suponiendo que todos los otros jugadores se aferran a sus valores de inversión R_{-i}^*).

Aquí, la función de utilidad municipal $U_i(R)$ es la suma ponderada de funciones de utilidad de la localidad de todas las clases migrantes potenciales determinada a continuación:

$$U_i(R) = \frac{Q_i^{1*}}{Q_i^*} u_i^1(Q^*) + ... + \frac{Q_i^{k*}}{Q_i^{K*}} u_i^K(Q^*). \tag{3.7}$$

Donde Q^* es el valor del equilibrio de la población en el nivel inferior, que por los Teoremas 1 y 2 existe de manera única para cualquier vector (fijo) de inversiones $\mathbf{R}$ que participan en la estructura de las funciones de utilidad de las localidades (3.6).

3.3. Existencia del Equilibrio Binivel con Conjeturas Consistentes

La consistencia de las conjeturas (o, los coeficientes de influencia) surgen de forma natural como un importante tema. De hecho la existencia de al menos un equilibrio de coeficientes de influencia arbitrarios obliga a seleccionar algunas conjeturas justificadas por lo que el concepto anterior del equilibrio tiene sentido.

SE propone un concepto de consistencia conjeturada del nivel inferior y la formulación del resultado de existencia para el equilibrio binivel con un equilibrio consistente conjeturado para el nivel inferior. Basado sobre el criterio de consistencia propuesto en [17], formulamos la siguiente definición. Aquí, por simplicidad, suponemos que la función de utilidad para cada localidad i y para cada grupo de migrantes potenciales de la clase k es afín de la forma:

$$u_i^k(Q) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i \text{ con } A_i^k > 0, B_i^k > 0.$$

Después para cada función de costo cuadrática de migración $\alpha_{ij}^k > 0$; y finalmente, las conjeturas (coeficientes de influencia) son constantes, i.e.

$$\sigma_{ij}^{\pm} = 0 \text{y } \nu_{ij}^{k-} = \nu_{ij}^k \geq 0 \ \forall i, j.$$

3.3.1. Conjeturas Consistentes

Definición: Un modelo de equilibrio en el nivel inferior $(Q^*, s^*) \in M$ (LLE), los coeficientes de influencia

$$\nu_{ij}^k, \ k = 1, ..., K; \ j = 1, ..., n; \ i \neq j,$$

se dice que son consistentes si y solo si, las siguientes igualdades son válidas para todos los i,j=1,2,...,n, $i \neg j$, y k=1,...,K:

$$\nu_{ij}^k = \frac{1}{2 + \sum_{l \neq i,j} \frac{1}{\nu_{lj}^k + \frac{\alpha_{lj}^k R_j}{2B_j^k}}}. \tag{3.8}$$

El LLE con conjeturas consistentes es llamado un equilibrio consistente con conjeturas variacionales (CCVE) en aplicación al modelo de migración humana antes descrito.

Ahora estamos en posición de formular la existencia del siguiente resultado.

Teorema 3.1

Bajo las suposiciones A1, A2 y A3, existe un equilibrio consistente con conjeturas variacionales (CCVE) de aplicación al modelo de migración humana antes descrito. ■

Al demostrar el teorema 3.1, se establece que ciertos mapeos de dimensiones finitas involucrados en las ecuaciones (3.8) son continuos y contractantes, y establece los subconjuntos compactos correspondientes. Esto nos permite encontrar uno, para cada grupo de migración potencial fijo **k**, y cada localidad de destino **j**, buenas aproximaciones de las conjeturas consistentes con un simple procedimiento de iteraciones:

$$\nu_{ij}^{k,(m)} = \frac{1}{2 + \sum_{l \neq i,j} \frac{1}{\nu_{lj}^{k,(m)} + \frac{\alpha_{lj}^{k} R_j}{2B_j^k}}} \quad m = 0, 1, ..., \tag{3.9}$$

$$\nu_{ij}^{k,(0)} = 0, \; i = 1, ..., n; \; i \neq j. \tag{3.10}$$

Teorema 3.2

Para cada grupo fijo **k** de los migrantes potenciales y cada ubicación de destino **j**, las conjeturas aproximadas (coeficientes de influencia) $\nu_{ij}^{k,(m)}$ obtenidas en las fórmulas (3.9) convergen (en $m \to \infty$) a la solución única:

$$\nu_j^k = (\nu_{ij}^k)_{i=1, i \neq j}^n$$

del sistema (3.8) ■

Capítulo 4

Aplicación de la Ingeniería de Kansei a Modelos de Migración Humana desde un Enfoque Binivel.

Preliminares

Cuando se requiere trabajar con respuestas directas del usuario, existen innumerables técnicas que contribuyen a definir los mecanismos para realizar dicha labor. De entre una variedad, entre las técnicas que permiten disminuir la complejidad está la Ingeniería Kansei. A pesar de ser una metodología completa, su estructura se extiende al uso de diversas técnicas que al aplicarlas dentro de los métodos de evaluación de usabilidad, hace que el proceso sea más complejo, no obstante, se puede hacer uso de uno de los elementos que la conforman, el Diferencial Semántico, que proporciona una aproximación más cercana a las necesidades de los usuarios [23]. La Ingeniería Kansei (IK) es una de las metodologías precursoras y más completas en el campo del diseño emocional. Se trata de una herramienta de ingeniería que permite captar las necesidades emocionales de los usuarios y establecer modelos matemáticos de predicción para relacionar las características de los productos con esas necesidades emocionales (como se puede ver en [23]).

La aplicación de la ingeniería afectiva (Ingeniería de Kansei) a la programación binivel en un caso de migración humana es presentado en este capítulo y fué publicado en [16]. En este trabajo se presentan las conjeturas variacionales y las condiciones para su convergencia.

En forma similar a [11], [12] y [13] consideremos una economía cerrada con

- n locaciones, denotadas por i
- K clases de poblaciones, denotadas por k
- $\overline{Q}_i^k$ población inicial fija de clase k en locación i
- Q_i^k población inicial de clase k en locación i
- S_{ij}^k población final de clase k en locación i
- $c_{ij}^k(s_{ij}^k) = b_{ij}^k s_{ij}^k + \frac{1}{2}a_{ik}^k(s_{ij}^k)^2$ costo por la migración del grupo k de la locación i a la locación j.

Asumamos que el costo de la migración refleja no solo el costo del traslado físico, sino también los costos personal y psicológico (afecto) según la percepción de una clase cuando se mueve de un lugar a otro. La utilidad (atractivo de la localidad i según la percepción por clase k), depende de la población en el destino, es decir, $u_i^k = u_i^k(Q_i)^k$. Este supuesto es bastante natural: de hecho, en muchos casos, la ciudades con mayor población ofrecen muchas más posibilidades para encontrar un trabajo, mejores instalaciones de servicios médicos y habitacionales, una infraestructura desarrollada, etc, lo cual se describe facilmente por el principios de la Ingeniería Kansei. Estas funciones de utilidad también incorporan parámetros que reflejan la magnitud de las inversiones realizadas por la ubicación de autoridades con el fin de mejorar la infraestructura, capacidades de empleo, la construcción del hogar, fuente de alimentación, y así sucesivamente, con base en los principios de la Ingeniería Kansei. Exactamente estas cantidades de inversión desempeñan el papel de las estrategias municipales en el juego de nivel superior.

En primer lugar, se describe el problema de nivel inferior. La conservación de los ecuaciones de flujo, dan para cada clase k y cada ubicación i, y las desigualdades que prohiben la migración repetida o cadena, se enumeran a continuación:

$$Q_i^k = Q_i^{-k} + \sum_{j \neq i} s_{ji}^k - \sum_{j \neq i} s_{ij}^k, \tag{4.1}$$

y

$$\sum_{j \neq i} s_{ji}^k \leq Q_i^{-k}, \tag{4.2}$$

con $s_{ji}^k \geq 0$

Denotemos el conjunto factible del problema por

$M = \{(Q, s) \mid s \geq 0,\ (Q, s)$ satisface (4.1), (4.2) $\}$

La ecuación (4.1) indica que la población de la clase k en la posición i está determinada por la población inicial de la clase k en la posición i mas la migración en flujo hacia i de esa clase, menos la migración en flujo fuera de i para esa clase. La ecuación 4.2 afirma que el flujo de i de la clase k no puede exceder de la población inicial de la clase k en i, ya que no se permite la migración en cadena.

Asumimos que los migrantes son racionales y que estan motivados para migrar a algún lugar especifico, y que la migración continúa hasta que los individuos estén motivados para ir a ese destino y por lo tanto sin incentivo para moverse, ya que una decisión unilateral no produciría una ganancia neta positiva (la ganancia en el valor de utilidad esperada menos la migración costo).

Con el fin de extender el modelo de migración humana desde [11], aqui introducimos los siguientes conceptos.

Consideremos un coeficiente de influencia tomado en cuenta por un individuo de la clase k en movimiento de i a j. Este coeficiente es definido suponiendo que después del movimiento de los individuos de la clase k de i a j la población total de la clase k en j se convertirá a:

$$\overline{Q}_j^{k+} + w_{ij}^{k+} s_{ij}^k.$$

Por otro lado w_{ij}^{k-} es el coeficiente conjeturado de influencia por un individuo de la clase k moviéndose de i a j, determinado por la suposición de que después del movimiento del individuo, la población total de la clase k en i será igual a

$$\overline{Q}_i^{k-} - w_{ij}^{k-} s_{ij}^k.$$

Supongamos que se cumplen los siguientes supuestos relativos de las funciones utilidad afectada y las variaciones esperadas de los valores de utilidad:

- A1. La función utilidad afectada $u_i^k = u_i^k(Q_i)^k$ es monótona decreciente y continuamente diferenciable.

- A2. Cada persona de la clase k, al considerar la posibilidad de trasladarse de un lugar i a una ubicación j, no solo tiene en cuenta la diferencia en los valores de utilidad afectada en la ubicación inicial y el destino, sino también el incremento esperado (negativo) del valor afectado en j

$$s_{ij}^k w_{ij}^k + \partial u_j^k / \partial Q_j^k$$

y el incremento de valor esperado afecto utilidad (positivo) en ubicación i.

$$-s_{ij}^k w_{ij}^{k-} + \partial u_i^k / \partial Q_i^k$$

4.1. Definición del Equilibrio

4.1.1. Definición de Equilibrio en el Nivel Inferior

Un patrón de población multi-clase y el flujo $(Q^*, s^*)\epsilon M$ forman un equilibrio en el nivel inferior, si para cada clase $k = 1, 2, ...K$, y para cada par de ubicaciones $i, j = 1, 2..n; j \neq i$, la siguiente relación se cumple:

$$\begin{aligned} u_i^k - s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}(Q^*) + b_{ij}^k + a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \qquad &= u_i^k + s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}(Q^*) - \lambda_i^k \ si \ s_{ij}^{K*} \geq 0; \\ &\geq u_i^k + s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}(Q^*) - \lambda_i^k \ si \ s_{ij}^{K*} = 0; \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lambda_i^k \qquad &\geq 0 \ if \ \sum_{l \neq i} s_{il}^{k*} = \overline{Q}_i^k; \\ &= 0 \ if \ \sum_{l \neq i} s_{il}^{k*} < \overline{Q}_i^k. \end{aligned} \tag{4.3}$$

- A3. Suponemos que los coeficientes de influencia son funciones dependientes de la población actual en la ubicación en cuestión y el flujo de la migración de un lugar i a la localización j, satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
s_{ij}^{k*}w_{ij}^{k+}(Q,s) &= v_{ij}^{k+}s_{ij}^{k}+\sigma_{ij}^{k+}Q_j^k, \qquad (4.4)\\
s_{ij}^{k*}w_{ij}^{k-}(Q,s) &= v_{ij}^{k-}s_{ij}^{k}-\sigma_{ij}^{k-}Q_j^k,\\
v_{ij}^{k+-}\geq 0,\ +\sigma_{ij}^{k+-} &\geq 0,\ k=1....J; i\neq j.
\end{aligned}
$$

Tomando en cuenta la suposición A3 y omitiendo el argumento en la utilidad de las funciones, tenemos que (4.3) se convierte en:

$$
\begin{aligned}
&u_i^k - s_{ij}^{k*}v_{ij}^{k-}\frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}+\sigma_{ij}^{k-}Q_j^{k*}\frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}+b_{ij}^k+a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \qquad (4.5)\\
&= u_i^k + s_{ij}^{k*}v_{ij}^{k+}\frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}+\sigma_{ij}^{k+}Q_j^{k*}\frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}-\lambda_i^k\ si\ s_{ij}^{k*}>0;
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&u_i^k - s_{ij}^{k*}v_{ij}^{k-}\frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}+\sigma_{ij}^{k-}Q_j^{k*}\frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}+b_{ij}^k+a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \qquad (4.6)\\
&= u_i^k + s_{ij}^{k*}v_{ij}^{k+}\frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}+\sigma_{ij}^{k+}Q_j^{k*}\frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}-\lambda_i^k\ si\ s_{ij}^{k*}=0.
\end{aligned}
$$

Asumimos que la función utilidad afectada asociada con una locación particular y una clase singular pueden depender de la población asociada con todas las clases y cada locación, como un vector de funciones $u = u(Q)$. Además asumimos que el costo asociado con la migración entre dos locaciones puede depender en general del flujo de cada clase entre cada par de locaciones, $c = c(s)$, lo cual se puede representar como:

$$
d(Q,s) = (d_{ij}^k(Q,s)), \qquad (4.7)
$$

donde

$$
(d_{ij}^k(Q,s)) = s_{ij}^{k*}v_{ij}^{k-}\frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}-\sigma_{ij}^{k-}Q_j^{k*}\frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}+s_{ij}^{k*}v_{ij}^{k+}\frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j i^k}-\sigma_{ij}^{k+}Q_j^{k*}\frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} (4.8)
$$

El siguiente resultado es establecido en publicaciones previas: [12], [13].

Teorema 4.1. Un patrón de población y flujo de migración (Q^*, s^*) satisface la condiciones de equilibrio (4.3) y (4.3) si y solo si se resuelve el problema de desigualdad variacional siguiente

$$\langle -u(Q^*), Q - Q^* \rangle + \langle C(s^*) - d(Q^*, s^*), s - s^* \rangle \geq 0 \;\forall (Q, s) \in M. \quad (4.9)$$

La existencia de al menos una solución para la desigualdad variacional 4.9 se sigue de la teoría general de desigualdad de variaciones bajo la única suposición de diferenciabilidad continua de la función de utilidad y continuidad de las funciones de costo de migración c, dado que el conjunto M es compacto (ver por ejemplo [19]). Por ahora se suprime el superíndice k por simplicidad. La unicidad del patron de migración y el equilibrio de la población se sigue de la suposición de que el operador

$$\begin{pmatrix} -u(Q) \\ c(s) - d(Q, s) \end{pmatrix} : R^{k \times n} \times R^{(k \times n) \times (n-1)} \to R^{k \times n} \times R^{(k \times n) \times (n-1)},$$

involucrando las funciones de costo de utilidad y migración es estrictamente monotono sobre el conjunto M :

$$\langle \begin{pmatrix} -u(Q^1) \\ c(s^1) - d(Q^1, s^1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u(Q^2) \\ c(s^2) - d(Q^2, s^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^1 - Q^2 \\ s^1 - s^2 \end{pmatrix} \rangle > 0,$$

$$\forall \begin{pmatrix} Q^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Q^2 \\ s^2 \end{pmatrix}$$

esto es,

$$-\langle u(Q^1) - u(Q^2), Q^1 - Q^2 \rangle + \langle c(s^1) - c(s^2), s^1 - s^2 \rangle -$$

$$\langle d(Q^1, s^1) - d(Q^2, s^2), s^1 - s^2 \rangle > 0$$

La última es una consecuencia del resultado clásico de los problemas de la teoría de desigualdad variacional (ver por ejemplo [19]) y se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 4.2 Considere la desigualdad variacional siguiente: Encontrar $y^* \in M \subset R^n$ tal que

$$\langle f(y^*), y - y^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in M. \tag{4.10}$$

Si el operador es estrictamente monótono, esto es

$$\langle f(y^1) - f(y^2), y^1 - y^2 \rangle > 0, \ \forall y^1 \neq y^2, \tag{4.11}$$

entonces la desigualdad variacional (4.10) tiene a lo mucho una solución.$\blacksquare$

Habiendo establecido la existencia y unicidad del equilibrio (nivel inferior) para el potencial de imigrantes, a continuación se presentará el concepto de equilibrio del nivel superior, para las autoridades municipales.

4.2. Definición de Equilibrio del Nivel Superior

Asumiremos que la función de utilidad de afecto asocialda con la locación i y la clase k para el potencial de migrantes tiene la foma:

$$u_i^k(Q_i) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i, \tag{4.12}$$

donde $A_i^k > 0, \ B_i^k > 0$, son parámetros referentes a las facilidades ambientales para la migración de la clase k en la locación i. Por ejemplo, el sentido económico de A_i^k podría ser del costo promedio de una casa en la localidad i en un distrito donde los representantes típicos de la clase k prefieren asentarse, mientras que B_i^k podría interpretarse como un coeficiente de afecto inverso para los inmigrantes de clase k, es decir, el valor más bajo de B_i^k, el ms alto grado de afecto revelado por la familia promedio de la muestra de la clase k para la creciente población de la localidad i. Por último, el parámetro $R_i > 0$ refleja el monto de la inversión por el autoridades de ubicación i en la mejora del medio ambiente para los recién llegados y los habitantes regulares: cuanto mayor sea el cantidad de inversión, menor es el efecto negativo del crecimiento población en el atractivo y el afecto de grado de la ubicación tanto para los habitantes actuales y potenciales.

Ahora supondremos que los volumenes de inversión se utilizan como estrategias de los actores (autoridades municipales de las localidades involucradas), son estándar para definir un estado de equilibrio en (nivel superior) el juego.

Un vector de inversión $R^* = (R_1^*, R_2^*, ...R_n^*)$ es un equilibrio en el nivel superior, si por cada locación i, $i = 1, ..., n$, la función de utilidad de la autoridad municipal $U = U_i(R_i, R_{-i}^*)$ alcanza su valor máximo exactamente en $R_i = R_i^*$(suponiendo que todos los demás jugadores se aferran a sus valores de inversión) $R_i^* = (R_1^*, R_2^*, ..., R_{i-1}^*, R_{i+1}^*, ..., R_n^*)$. Aquí, la función de utilidad afectiva del municipio $U_i = U_i(R)$ es la suma ponderada de las funciones de utilidad de la ubicación de todas las clases de migrantes potenciales y se determina a continuación:

$$U_i(R) = \frac{Q_i^{1*}}{Q_i^*} u_i^1(Q^*) + ... + \frac{Q_i^{k*}}{Q_i^*} u_i^k(Q^*), \tag{4.13}$$

donde Q^* es el equilibrio del menor nivel de los valores de la población, que (debido a Teoremas 4.1 y 4.2) existen de forma única para cualquier vector fijo de inversiones R (fijo) involucrado en las funciones de utilidad afecto de las locaciones (4.12).

4.3. Existencia de un Equilibrio Binivel con Conjeturas Consistentes

La consistencia de las conjeturas (coeficientes de influencia) se presenta naturalmente como un importante aspecto. Junto con esto, la existencia de al menos un equilibrio para los coeficientes de influencia obliga a seleccionar algunas conjeturas justificadas para dar sentido al equilibrio. En esta sección se propone un concepto de consistencia y se formula la existencia de un resultado para las conjeturas variacionales de equilibrio. La siguiente definición es basada en el criterio de consistencia propuesto en [14]. Por simplicidad se repite la suposición de que la función de utilidad del afecto para cada locación i y cada grupo potencial migrante k es lineal de la forma $u_i^k(Q_i) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i$, con $A_i^k > 0,\ B_i^k > 0, R_i > 0$; ahora $a_{ij}^* > 0$, para cada función de costo cuadrática de migración; y finalmente, las conjeturas (coeficientes de influencia) son constantes, i.e.$\sigma_{ij}^{k\pm} = 0$, y $v_{ij}^{k+} = v_{ij}^{k-} = v_{ij}^k \geq 0,\ \forall i, j, k.$

Definición 4.1. En un patrón de nivel inferior (LLE) de equilibrio $(Q^*, s^*) \in M$, los coeficientes de influencia $v_{ij}^k, k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$, son llamados consistentes si se cumple la siguiente desigualdad:

$$v_{ij}^k = \frac{1}{2 + \sum_{l \neq j, l \neq i} \frac{1}{v_{lj}^k + \frac{\alpha_{lj}^k R_j}{2B_j^k}}}. \tag{4.14}$$

El LLE con conjeturas consistentes es llamado estado de equilibrio de conjeturas variacionales consistentes (CCVES) en la aplicación al modelo de migración humana descrito anteriormente.

Ahora estamos en condiciones de formular el siguiente resultado referente a la existencia.

Teorema 4.3. Tomando como verdaderas las suposiciones A1, A2 y A3, y si todos las inversiones son acotadas ($i.e, 0 < R_i \leq R, \forall i = 1, ...n$), entonces existe un estado de equilibrio conjetural (CCVES) en aplicación al modelo de migración humana.

En la demostración del Teorema 4.1, se establecieron ciertos mapeos de dimensión infinita involucrados en las ecuaciones (4.14) los cuales son continuos y contraen los correspondientes subconjuntos compactos. Esto se sigue para encontrar para cada grupo fijo k de migrante potencial y cada locación de destino j, buenas aproximaciones para las conjeturas consistentes (coeficientes de influencia) $v_{ij}^k, k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$, aplicando un procedimiento de iteraciones, se obtiene:

$$v_{ij}^{k,m+1} = \frac{1}{2 + \sum_{l \neq j, l \neq i} \frac{1}{v_{lj}^{k,m} + \frac{\alpha_{lj}^k R_j}{2B_j^k}}},\ m = 0, 1, ... \tag{4.15}$$

$v_{ij}^{k,0} = 0, k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j,$

Teorema 4.4 Para cada grupo fijo k de migrantes potenciales y cada destino j, conjeturas aproximadas (coeficientes de influencia) $v_{ij}^{k,m} k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$, obtenidos por la fórmula (4.15) converge (cuando $m \to \infty$) a la única solución $v_i^k = (v_{ij}^k)^n, k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$, del sistema (4.14).

Como investigación a futuro, se van a extender estos resultados al caso de funciones de utilidad de afecto no cnecesariametne lineales con conjeturas (coeficientes de influencia) discontinuas. Sin embargo algunas de las técnicas necesarias para esto, pueden ser desarrolladas ahora. Para valores fijos de k and j, denotamos el valor de la inversa de la derivada de la función de utilidad de afecto $u_j^k = u_j^k(Q_j^k)$ por

$$\tau = \left[\frac{du_j^k}{dQ_j^k} Q_j^k\right]^{-1} > 0, \tag{4.16}$$

y reescribiendo las igualdades de consistencia(4.14) en una forma mas general:

$$v_{ij}^k = \frac{1}{2 + \sum_{l \neq j, l \neq i} \frac{1}{v_{lj}^k + \tau \frac{\alpha_{lj}^k}{2}}}, \tag{4.17}$$

donde $\tau \in (-\infty, 0]$. Cuando $\tau \to -\infty$ la solución del sistema (4.17) tiende a la única solución límite $V_{ij}^k = \frac{1}{2}, k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$. Para todos los valores finitos del parámetro $\tau \leq 0$ se establece la siguiente afirmación.

Teorema 4.5. Para cada grupo fijo k de migrantes potenciales y cada destino j, y para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$ existe una única solución de ecuaciones (4.17) como una colección de funciones continuas y contractantes $v_{ij}^k = v_{ij}^k(\tau),\ k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$. Además: $v_{ij}^k(0) = 0$, y $v_{ij}^k(\tau) \to \frac{1}{2}$ cuando $\tau \to \infty$ $\forall k = 1, ..., K,\ i, j = 1, ...n; i \neq j$.

4.4. Resultados Numéricos

El modelo de programación binivel obtenido se aplicó al caso en el cual se tienen dos localidades en las cuales se aprecia flujo de personas migrantes. En este ejemplo numérico se consideraron dos localidades y dos tipos de migrantes potenciales. Cada localidad realizó inversiones (R_1 *y* R_2), tomando para estas números pequeños (a escala) para facilitar el cálculo de

$R1\backslash R2$	0.001	0.0001
0.001	$(-0.084217, -0.15232)$	$(-0.14289, -0.03165)$
0.0001	$(-0.016445, -0.246787)$	$(-0.083999, -0.152689)$
0.00001	$(-0.001817, -0.263040)$	$(-0.016399, -0.246840)$
0.000001	$(-0.001870^{*}, -0.2647941)$	$(-0.001812, -0.263055)$

Cuadro 4.1: Resultados obtenidos de la simulación. Los asteriscos denotan los valores óptimos.

$R1\backslash R2$	0.00001	0.000001
0.001	$(-0.1536, -0.00354)$	$(-0.1584, -0.00035912^{*})$
0.0001	$(-0.14286, -0.031727)$	$(-0.15364, -0.003555)$
0.00001	$(-0.083977, -0.152726)$	$(-0.14286, -0.031734)$
0.000001	$(-0.016395, \sim -0.246)$	$(-0.08397^{*}, -0.15273^{*})$

Cuadro 4.2: Continuación de la tabla de resultados obtenidos de la simulación. Los asteriscos denotan los valores óptimos.

los resultados, con la finalidad de observar cuales eran los resultados arrojados por los migrantes potenciales (u_1, u_2), con el objetivo de encontrar un punto óptimo.

Como se puede observar en la siguiente tabla, podemos ver que para las inversiones $R_1 = 0.000001$ y $R_2 = 0.001$, los migrantes potenciales u_1 logran su máximo en -0.0001870, mientras que los migrantes potenciales u_2 lo logran en -0.00035912 con $R_1 = 0.001$ y $R_2 = 0.000001$. Todos los resultados obtenidos fueron programados en Maple.

4.4.1. Resultados

Se realizaron algunas pruebas, aplicando algunas funciones diferentes. Los resultadso se muestran a continuación.

- Usando la función:

$$\frac{(5 - s_1 2 + s_2 1)}{(r1 + 1)} - \frac{(3 - s_2 1 + s_1 2)}{(r_2 + 1)},$$

bajo cualquiera de las restricciones que fijamos, los valores para los cuales obtuvimos resultados de salida para ambas ciudades fueron 0.1 para $w12$ y 50 para $w21$.

- Usando la función:

$$\frac{(5000 - s_1 2 + s_2 1)}{(r_1 + 1)} - \frac{(3000 - s_2 1 + s_1 2)}{(r_2 + 1)}$$

No se encontraron cambios relevantes, a excepción de cuando se usó la restricción de

$$4 * r_1 - r_2 = 0, \ r_2 + 100000 >= 0.$$

Donde se obtuvieron valores de salida en ambas ciudades para valores de $w12$ en los valores 0 y 1, y para $w21$ en los valores 49.32 y 142.7.

- Para otros valores de $w12$ y $w21$ se obtuvo lo siguiente.

Fueron consideradas las siguientes restricciones

$$\begin{aligned} 4 * r1 - r2 &= 0, \ r1 - 499000 >= 0 \qquad (4.18) \\ -1 * r1 + 2 * r2 &= 0, \ r1 - 499000 >= 0 \\ 4 * r1 - r2 &= 0, \ r2 + 100000 >= 0 \\ 4 * r1 - r2 &= 0, \ r2 - 100000 >= 0 \end{aligned}$$

Como resultado se tiene que la mayor parte migran de la ciudad 1 a la 2 en cada función.

$w12$	$w21$	$s12$	$s21$	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$r1$	$r2$	otros	$r1a$	$r2a$
1	3	0	2999	0	1.18	0	7.75		5.70×10^5	0.02
2	0	0	3000	0	3.24	0	750.97		1.91×10^6	46995.5
3	0	0	3000	0	3.24	0	750.97		1.91×10^6	46995.5
2	3	0	2999	0	1.18	0	7.759		5.79×10^6	0.025
2.13	37.06	0	382.75	0	0	0	3.52×10^6		6.59×10^5	0.025
1.55	37.06	0	382.77	0	0	0	3.53×10^6		6.59×10^6	0
1	171.07	0	106.02	0	0	0	7.76×10^6		6.59×10^6	0
0	49.32	0	287.04	0	0.000060		4.86×10^6		8.10×10^6	0
0	49.33	0	287.56	0	0	0	4.86×10^6		6.58×10^6	0
1	142.7	0	99.4	0	0	0	$7.70x10^6$		8.16×10^6	0
2.14	37.06	0	382,77	0	0	0	3.53×10^6		6.59×10^6	0
2	37	0	383.39	0	0	0	3.54×10^6		1.91×10^6	4699.5
1	142	0	99.89	0	0	0	7.7×10^6		8.16×10^6	0
0.99	142	0	99,82	0	0	0	7.7×10^6		8.16×10^6	0

Cuadro 4.3: Algunos valores asignados a los parámetros en la simulación.

Observaciones:

- Cuando la Ciudad 2 invierte al menos el doble que la Ciudad 1, los seguidores deciden migrar a la Ciudad 2.
- La última fila de la tabla 2 indica cambios mucho mas significativos respecto al resto de los datos.
- La Ciudad 2 tiene que realizar una inversión mucho mayor a la de la Ciudad 1 para lograr que los seguidores migren hacia ella.
- En la última fila de la Tabla 2 notamos que los migrantes comienzan a aproximarse a valores iguales a partir de que la Ciudad 1 invierte 2000 veces mas que la Ciudad 2.

Loa resultados anteriores fueron obtenidos mediante simulacin en Maple. Los archivos de programación en Maple, se pueden ver en el Apéndice 2.

Capítulo 5

Conclusiones

Se ha investigado el modelo de migración humana basado en los principios de ingenieria de Kansei, involucrando conjeturas de los grupos de migración concernientes a las variaciones de los valores de la función de utilidad de afecto ambos relacionados con el origen y el destino. Para formular las condiciones de este modelo se usa el concepto de conjetura de equilibrio variacional (CVE). Se establece la existencia y unicidad par ael equilibrio en cuestión y se introduce un concepto de conjeturas consistentes (coeficientes de influencia) junto con el correspondiente CVEs. El teotrema garantiza la existencia y unicidad de la solución para cada sistema de consistencia y aqui es obtenido el estado de equilibrio de las conjeturas variacionales. (CCVES), ha sido también probado.

Capítulo 6

Recomendaciones para Trabajos Futuros

En nuestra investigación futura, vamos a extender los resultados obtenidos para el caso en el que no necesariamente las funciones de utilidad sean afín y las conjeturas no necesariamente continuas. Para ello, algunas de las técnicas necesarias se pueden desarrollar ahora, para las utilidades afines y conjeturas continuas. En primer lugar, introducimos el valor de la derivada de la función inversa de la utilidad $u_j^k = u_j^k(Q_j^k)$ por la fórmula:

$$\tau = \left[\frac{du_j^k}{dQ_j^k}(Q_j^k) \right]^{-1} < 0,$$

Y reescribimos las ecuaciones de consistencia de manera más general:

$$\nu_{ij}^k = \frac{1}{2 + \sum_{l \neq j} \frac{1}{\nu_{lj}^k - \tau \frac{\alpha_{lj}^k}{2}}}$$

Donde $\tau \in (-\infty, 0]$. Cuando $\tau \to -\infty$, entonces el sistema (15) tiene solución límite (única)

$$\nu_{ij}^k = \frac{1}{2},\ i - 1, ..., n;\ i \neq j.$$

Para cada valor finito de $\tau \in (-\infty, 0]$ establecemos la siguiente afirmación.

Teorema 6.

Para cada grupo fijo **k** de los migrantes potenciales y cada localidad de destino **j**, y para cualquier $\tau \in (-\infty, 0]$, existe una solución única a las ecuaciones (15) como un conjunto de funciones continuas:

$$\alpha_{ij}^k = \alpha_{ij}^k(\tau),\ i = 1, ..., n;\ i \neq j.$$

Además $\alpha_{ij}^k(0) \to \frac{1}{2}$, cuando $\tau \to -\infty, \forall i = 1, ..., n; i \neq j$. También es notado que el modelo de migración humana con conjeturas variacionales puede ser extendido en un futuro al caso en el cual las condiciones pueden ser reemplazadas por $Q_i^k \geq 0, i = 1, ...n, k = 1, ...K$, la cual considera la repetición de la cadena de migración. En este caso el conjunto M deja de ser compacto, lo cual hace insuficiente el uso de la teoría de variaciones para demostrar la existencia de equilibrio. Entonces los resultados de Bulavsky [3] y futuros desarrollos en Isac et al. [11] pueden ser usados. La existencia de equilibrio será garantizada para varias clases de funciones de utilidad y costos de migración que son libres para familias excepcionales de elementos (EFE).

Bibliografía

[1] Akkoyunlu S. and R. Vickerman (2001), Migration and the Efficiency of European Labour Markets, Working Paper, Department of Economics, The University of Kent at Canterbury.

[2] Boyer, M. and Moreau, M. (1983), "Conjectures, Rationality, and Duopoly Theory", International Journal of Industrial Organisation, vol. 1, pp. 23-41.

[3] Bulavsky, V.A. and Kalashnikov, V.V. (1995), Equilibria in generalized Cournot and Stackelberg models, Economics and Mathematical Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody, in Russian), vol.31, no.3, pp.164-176.

[4] Bulavsky, V.A. and Kalashnikov, V.V. (2002), Complimentarity, equilibrium, efficiency and economics, Kluwer Academic Publishers, Dordrchet.

[5] Cornes R., and Sandler T., (1984), Easy riders, joint production and public goods, Economic Joutnal 94, 580-598.

[6] Denver D., Hands G., Fisher J., (2003) Constituency Campaigning in Britain 1992-2001 Centralization and Modernization, I MacAllister Party Politics, Ed. Sage Publications, 9 (5), 541-559.

[7] Dempe S., Foundation of Bilevel Programming (Dordrecht/London/Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002).

[8] Dempe, S., and Kalashnikov V.V. (eds.): Optimization with Multivalued Mappings: Theory, Applications and Algorithms (New York: Springer Science +Business Media, 2006).

[9] Gibbons R., (1992), Game Theory for Applied Economics, Princeton University Press, Cap. 1.

[10] Hillier, F., and G. J. Lieberman: Introduction to Mathematical Programming (New York: McGraw-Hill, 2005. - 8th ed.)

[11] Isac G., Bulavsky V. A. and Kalashnikov V. V. (2002), Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics, Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.

[12] Kalashnikov V. V., Kalashnykova N. I., LuévanosR., Uranga C., Méndez M. and Luévanos A. (2007), " Un modelo de migración humana: Experimentos numéricos basados sobre los datos de las tres ciudades Laguneras, " Estudios Demográficos y Urbanos, Colegio de México, vol.22, no.3, pp.731-760.

[13] Kalashnikov V. V., Kalashnykova N. I., Luévanos R., Uranga C., Méndez M. and Luévanos A. (2008), " Numerical experimentation with a human migration model, " European J. Oper. Res., vol.189, issue1, pp. 208-229

[14] Kalashnykova N. I., Kalashnikov V. V. and Chávez Delgadillo L. R. (2011), "Consistent conjectures in a human migration model: Defini-

tion, existence and computation," International Journal of Innovative Computing, Information and Control, ICIC International, Japan, vol. 7, no. 4, pp. 1949-1957.

[15] Kalashnikov V. V., Kalashnykova N. I., Alcorta Garca M. A., Acosta Snchez Y. G., Kalashnikov V. V., Consistent Conjectural Variations Equilibrium In A Bilevel Human Migration Model, The 2011 Las Vegas International Academic Conference Las Vegas, Nevada USA, October- 2011 pp. 885-895.

[16] Kalashnikov V. V., Kalashnykova N.I, Acosta Snchez Y. G., Affective engineering in applications to bilevel human migration models, Industrial Applications of Affective Engineering, DOI: $10{,}1007/978-3-319-04798-0_3$, © Springer International Publishing Switzerland 2014, pp. 27 - 38. ISBN: 978-3-319-04798-0.

[17] Kalashnikov V. V., Bulavsky V. A., Kalashnykova N. I. and Castillo F.J. (2011), "Mixed oligopoly with consistent conjectures,.[Eu]ropean J. Oper. Res., vol. 210, issue 3, pp. 729-735.

[18] Kalashnikov V. V., Kalashnykova N. I., Alcorta Garca M. A., Acosta Snchez Y. G., Kalashnikov V. V., A Bilevel Human Migration Model: Consistency Conjectural Variations Equilibrium, ICICEL, Vol 6, No. 4, April-2012, pp 885-890.

[19] Kinderlehrer D. and G. Stampacchia (1980), An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, NY, USA: Academic Press.

[20] Laitner J., 'Rational' duopoly equilibria. Quarterly Journal of Economics, 95 (1980), pp. 641662. Full Text via CrossRef. Lapan, 1982;

[21] Osborne and Rubinstein (1994), A Course in Game Theory, MIT Press, Cap. 5.

[22] Ulph, David. Rational conjectures in the theory of oligopoly.Ïnternational Journal of Industrial Organization 1.2 (1983): 131-154.

[23] Vergara, M., and Mondragón, S. (2008), Ingeniería Kansei: una potente metodología aplicada al diseño emocional. Faz, 2008, Núm. 2, 49-56.

Capítulo 7

Apéndice 1

Publicación

Capítulo 8

Apéndice 2

Código fuente de la aplicación.

Metadata of the chapter that will be visualized in SpringerLink

Book Title	Industrial Applications of Affective Engineering
Series Title	
Chapter Title	Affective Engineering in Application to Bi-Level Human Migration Models
Copyright Year	2014
Copyright HolderName	Springer International Publishing Switzerland

Corresponding Author	Family Name	**Kalashnikov**
	Particle	
	Given Name	**Vyacheslav V.**
	Prefix	
	Suffix	
	Division	
	Organization	Tecnológico de Monterrey (ITESM, Campus Monterrey)
	Address	Ave. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, 64849, Monterrey, NL, Mexico
	Division	Central Economics and Mathematics Institute (CEMI)
	Organization	Russian iAcademy of Sciences (RAS)
	Address	Nakhimovsky pr. 47, Moscow, Russian Federation
	Division	
	Organization	Sumy State University
	Address	Rimsky-Korsakov st. 2, Sumy, 40007, Ukraine
	Email	kalash@itesm.mx
		slavkamx@mail.ru
Author	Family Name	**Kalashnykova**
	Particle	
	Given Name	**Nataliya I.**
	Prefix	
	Suffix	
	Division	
	Organization	Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL)
	Address	Ave. Universidad S/N, 66450, San Nicolás de los Garza, NL, Mexico
	Email	nkalash2009@gmail.com
Author	Family Name	**Acosta Sánchez**
	Particle	
	Given Name	**Yazmín G.**
	Prefix	
	Suffix	
	Division	
	Organization	Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL)
	Address	Ave. Universidad S/N, 66450, San Nicolás de los Garza, NL, Mexico
	Email	lic_acosta9@hotmail.com
Author	Family Name	**Kalashnikov**

Particle	
Given Name	**Vitaliy V.**
Prefix	
Suffix	
Division	Graduate School of Economics
Organization	Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL), Campus Mederos
Address	Ave. Lázaro Cárdenas 3600, 64890, Monterrey, NL, Mexico
Email	kalashnikov_de@yahoo.de

Abstract	In this paper, we develop a bi-level human migration model using the concepts of affective engineering (*Kansei* Engineering) and conjectural variations equilibrium (CVE). In contrast to previous existing works, we develop a bi-level programming model in a natural form. The upper level agents are municipalities of competing locations, whose strategies are investments into the infrastructures of the locations (cities, towns, etc.). These investments aim at making the locations more attractive for both residents and potential migrants from other locations, which clearly demands affective engineering tools. At the lower level of the model, the present residents (grouped into professional communities) are also potential migrants to other locations. They make their decision where to migrate (if at all) by comparing the expected values of the utility functions of the outbound and inbound locations, estimated by taking into account their group's conjectures concerning equilibrium migration flows between the involved locations. The utility functions reflect the affective engineering technique because their values are based on the potential migrants' affection to the target locations. Applying a special technique to verify the consistency of the conjectures (influence coefficients), the existence and uniqueness results for the consistent conjectural variations equilibrium (CCVE) are established.

Keywords (separated by '-')	Bi-level human migration model - *Kansei* (Affection) utility functions - Variational inequality formulation - Consistency criterion - Consistent conjectural variations equilibrium

Layout: T1 Standard SC | Book ID: 313214_1_En | Book ISBN: 978-3-319-04798-0
Chapter No.: 3 | Date: 8 March 2014 2:17 PM | Page: 27/38

Affective Engineering in Application to Bi-Level Human Migration Models

Vyacheslav V. Kalashnikov, Nataliya I. Kalashnykova, Yazmín G. Acosta Sánchez and Vitaliy V. Kalashnikov

Abstract In this paper, we develop a bi-level human migration model using the concepts of affective engineering (*Kansei* Engineering) and conjectural variations equilibrium (CVE). In contrast to previous existing works, we develop a bi-level programming model in a natural form. The upper level agents are municipalities of competing locations, whose strategies are investments into the infrastructures of the locations (cities, towns, etc.). These investments aim at making the locations more attractive for both residents and potential migrants from other locations, which clearly demands affective engineering tools. At the lower level of the model, the present residents (grouped into professional communities) are also potential migrants to other locations. They make their decision where to migrate (if at all) by comparing the expected values of the utility functions of the outbound

V. V. Kalashnikov (✉)
Tecnológico de Monterrey (ITESM, Campus Monterrey),
Ave. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, 64849 Monterrey, NL, Mexico
e-mail: kalash@itesm.mx; slavkamx@mail.ru

V. V. Kalashnikov
Central Economics and Mathematics Institute (CEMI),
Russian iAcademy of Sciences (RAS), Nakhimovsky pr. 47, Moscow, Russian Federation

V. V. Kalashnikov
Sumy State University, Rimsky-Korsakov st. 2, Sumy 40007, Ukraine

N. I. Kalashnykova · Y. G. Acosta Sánchez
Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL),
Ave. Universidad S/N, 66450 San Nicolás de los Garza, NL, Mexico
e-mail: nkalash2009@gmail.com

Y. G. Acosta Sánchez
e-mail: lic_acosta9@hotmail.com

V. V. Kalashnikov
Graduate School of Economics, Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL),
Campus Mederos, Ave. Lázaro Cárdenas 3600, 64890 Monterrey, NL, Mexico
e-mail: kalashnikov_de@yahoo.de

J. Watada et al. (eds.), *Industrial Applications of Affective Engineering*,
DOI: 10.1007/978-3-319-04798-0_3, © Springer International Publishing Switzerland 2014

Layout: T1 Standard SC Book ID: 313214_1_En Book ISBN: 978-3-319-04798-0
Chapter No.: 3 Date: 8 March 2014 2:17 PM Page: 28/38

and inbound locations, estimated by taking into account their group's conjectures concerning equilibrium migration flows between the involved locations. The utility functions reflect the affective engineering technique because their values are based on the potential migrants' affection to the target locations. Applying a special technique to verify the consistency of the conjectures (influence coefficients), the existence and uniqueness results for the consistent conjectural variations equilibrium (CCVE) are established.

Keywords Bi-level human migration model • *Kansei* (Affection) utility functions • Variational inequality formulation • Consistency criterion • Consistent conjectural variations equilibrium

1 Introduction

Migration problems have been actively studied in many countries throughout the world, as the information/migration prediction data are extremely useful on a large economic scale. Migration prediction data can stipulate development of facilities necessary to advance employment, education, and ecology. Reciprocally, locations with more advanced infrastructure, higher employment capacities, ecologically friendly environments, etc., can generate the affection of the inhabitants and thus attract more potential migrants. However, overloaded housing/infrastructure facilities may reduce the comfort in everyday life, thus contradicting the Kansei engineering principles. Therefore, one can expect a trade-off in the investments into a locations infrastructure, balanced at a conjectural variations equilibrium state.

Various migration theories have been developed over time. In a shorter historical aspect, however, one may rely on the excellent fundamental survey Akkoyunlu and Vickerman [1].

In the works by Bulavsky and Kalashnikov [2, 3], a new array of conjectural variations equilibria (CVE) was introduced and investigated in which the influence coefficients of each agent affected the structure of the Nash equilibrium. In particular, constant conjectural influence factors were used in the human migration model examined in [4]. More precisely, the potential migration groups were taking into account not only the current difference between the utility function values at the destination and original locations but also the possible variations in the utility values implied by the change of population volume due to the migration flows. These conjectured variations could be described with an aid of the so-called *influence coefficients*. In other words, we did not consider a perfect competition but rather a generalized Cournot-type model (in contrast to the classic Cournot model).

In their previous papers [5, 6], the authors extended the latter model to the case where the conjectural variation coefficients may not only be constants but also functions of the total population at the destination and of the group's fraction in it. Moreover, we allow these functions to take distinct values at the abandoned location and at the destination, which should elevate the models flexibility. As an experimental

Layout: T1 Standard SC | Book ID: 313214_1_En | Book ISBN: 978-3-319-04798-0
Chapter No.: 3 | Date: 8 March 2014 2:17 PM | Page: 29/38

verification of the proposed model, we developed a specific form of the model based upon relevant population data of a three-city agglomeration at the boundary of two Mexican states: Durango (Dgo.) and Coahuila (Coah.). Specifically, we considered the 1980–2005 dynamics of population growth in three cities—Torreón (Coah.), Gómez Palacio (Dgo.), and Lerdo (Dgo.)—and proposed utility functions of three various types for each of the three cities. To our knowledge, these types of utility functions were not used in previous literature dealing with the human migration model. After collecting the necessary information about the average movement and transportation (i.e., migration) costs for each pair of cities, we applied the above-mentioned human migration model to this example. Numerical experiments were conducted, with interesting results concerning the probable equilibrium states.

The novel approach of the recent paper by Kalashnikov et al. [7] lies in the proposed definitions of consistent conjectures and in the outskirt of possible ways to calculate the consistent conjectures and the related consistent conjectural variation equilibrium state (CCVES).

Motivated by the ideas of bi-level structures of migration processes (the upper level competition among municipalities and the lower level equilibrium among the potential migrants), we proposed a new (bi-level) formulation of the human migration model. Under general enough assumptions, we also proved the existence of solutions to the bi-level program. The results of the numerical experiments (which are still underway) will only be outlined.

Sections 2 and 3, in primarily following the previous papers by Kalashnikov et al. [5, 6] and Kalashnikov et al. [7], describe the proposed bi-level human migration model, define the conjectural variation equilibrium at the lower level, and cite Theorems 3.1 and 3.2 from [5, 6], which establish the existence and uniqueness of the lower level equilibrium as a solution of an appropriate variational inequality problem. The consistency of the conjectures and the existence of the corresponding bi-level equilibrium are discussed in Sect. 4. In contrast to the previous paper [8], here we extend the lower lever (and thus, also the upper level) utility functions from linear to quadratic ones. The conclusions (Sect. 5), acknowledgments, and the list of references complete the paper.

2 Problem Statement and Preliminaries

Similar to [4–6], consider a closed economy with:

- n locations, denoted by i;
- K classes of population, denoted by k;
- $\bar{Q}_i^k$ initial fixed population of class k in location i;
- Q_i^k final population of class k in location i;
- s_{ij}^k migration flow of class k from origin i to destination j;
- $c_{ij}^k\left(s_{ij}^k\right) = b_{ij}^k s_{ij}^k + \frac{1}{2} a_{ij}^k \left(s_{ij}^k\right)^2$ migration cost for residents from group k moving from location i to location j.

Assume that the migration cost reflects not only the cost of physical movement but also the personal and psychological (affection) cost as perceived by a class when moving between locations. The utility u_i^k (attractiveness of location i as perceived by class k) depends on the population at destination, that is, $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$. This assumption is quite natural: indeed, in many cases, the cities with higher population provide much more possibilities to find a job, better medical service and household facilities, a developed infrastructure, etc., which is readily described by the principles of *Kansei* Engineering. On the other hand, when the infrastructure development lags behind the modern city demands, the higher population may lead to certain decrease in the living standards, in the inhabitants' affection to their place, and hence, of the affection utility values.

These affection utility functions also incorporate parameters reflecting the scale of investments made by the location's authorities in order to improve the infrastructure, employment capacities, household construction, power supply, and so on, based upon the principles of *Kansei* Engineering. Exactly these amounts of investment play the role of the municipality strategies in the game at the upper level.

First, we describe the lower level problem. The conservation of flow equations, given for each class k and each location i, and the inequalities forbidding repeated or chain migration are listed below:

$$Q_i^k = \bar{Q}_i^k + \sum_{j \neq i} s_{ji}^k - \sum_{j \neq i} s_{ij}^k, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

and

$$\sum_{j \neq i} s_{ij}^k \leq \bar{Q}_i^k, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

with $s_{ij}^k \geq 0$, $\forall k = 1, \ldots, K$; $j \neq i$. Denote the problem's feasible set by

$$M = \{(Q, s) |\ s \geq 0,\ (Q, s) \text{ satisfies } (1) - (2)\}. \tag{3}$$

Equation (1) states that the population of class k at location i is determined by the initial population of class k at location i plus the migration flow into i of that class minus the migration flow *out* of i for the same class. Equation (2) postulates that the flow out of i by migrants of group k cannot exceed the initial population of group k at i, because no chain migration is allowed in this model.

Assume that the migrants are rational and affection-motivated and that migration continues until no individual has any affection to the target location and thus any incentive to move, since a unilateral decision will no longer yield a positive net gain (the gain in the expected affection utility value minus the migration cost).

In order to extend the human migration model from [4], here we introduce the following concepts.

Definition 1 Let $w_{ij}^{k+} \geq 0$ be an influence coefficient taken in account by an individual of class k considering a possibility of moving from i to j. This coefficient is defined by his/her assumption that after the movement of s_{ij}^k individuals of class k from i to j the total population of class k at j equals:

Layout: T1 Standard SC | Book ID: 313214_1_En | Book ISBN: 978-3-319-04798-0
Chapter No.: 3 | Date: 8 March 2014 2:17 PM | Page: 31/38

$$\bar{Q}_j^k + w_{ij}^{k+} s_{ij}^k. \tag{4}$$

At the same time, let $w_{ij}^{k-} \geq 0$ be an influence coefficient conjectured by an individual of group k planning to move from i to j, determined by the assumption that after the movement of s_{ij}^k individuals, the total population of class k in i will remain

$$\bar{Q}_i^k - w_{ij}^{k-} s_{ij}^k. \tag{5}$$

We accept the following assumptions concerning the affection utility functions and expected variations in the utility values:

A1. The affection utility $u_i^k = u_i^k\left(Q_i^k\right)$ is a monotone decreasing and continuously differentiable function.

A2. Each person of group k, when considering his/her possibility of moving from location i to location j, takes into account not only the difference in the affection utility values at the initial location and the destination, but also both the expected (negative) increment of the affection value at the destination j:

$$s_{ij}^k w_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}, \tag{6}$$

and the expected (positive) affection utility value increment in the abandoned location i:

$$-s_{ij}^k w_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}. \tag{7}$$

3 Definition of Equilibrium

In this section, we will define what we understand as the conjectural variations equilibrium (CVE) both at the lower and the upper level of the new migration model.

3.1 Definition of Equilibrium at the Lower Level

At the lower level, we use the same concept of CVE as defined in our previous works [5–7].

Definition 2 A multiclass population and flow pattern $(Q^*, s^*) \in M$ *are the equilibrium at the lower level,* if for each class $k = 1, \ldots, K$, and for every pair of locations (i, j), $i, j = 1, \ldots, n$; $i \neq j$, the following relationships hold:

$$u_i^k - s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}(Q^*) + b_{ij}^k + a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \begin{cases} = u_j^k + s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k+} \dfrac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}(Q^*) - \lambda_i^k, \text{ if } s_{ij}^{k*} > 0; \\ \ge u_j^k + s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k+} \dfrac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}(Q^*) - \lambda_i^k, \text{ if } s_{ij}^{k*} = 0; \end{cases} \tag{8}$$

and

$$\lambda_i^k \begin{cases} \ge 0, \text{ if } \sum\limits_{\ell \neq i} s_{ij}^{k*} = \bar{Q}_i^k; \\ = 0, \text{ if } \sum\limits_{\ell \neq i} s_{ij}^{k*} < \bar{Q}_i^k. \end{cases} \tag{9}$$

□

In order to proceed with the equilibrium existence and uniqueness results, we need an extra assumption to hold.

A3. We assume that the influence coefficients are functions depending upon the current population at the location in question and the migration flow from location i to location j, satisfying the following conditions:

$$s_{ij}^k w_{ij}^{k+}(Q, s) = v_{ij}^{k+} s_{ij}^k + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^k, \tag{10}$$

and

$$s_{ij}^k w_{ij}^{k-}(Q, s) = v_{ij}^{k-} s_{ij}^k + \sigma_{ij}^{k-} Q_i^k, \tag{11}$$

where

$$v_{ij}^{k\pm} \ge 0, \ \sigma_{ij}^{k\pm} \ge 0, \ k = 1, \ldots, K; \ i \neq j. \tag{12}$$

Taking into account assumption A3 and omitting for shortness the argument Q^* in the utility functions, we turn (8) into:

$$u_i^k - s_{ij}^{k*} v_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + \sigma_{ij}^{k-} Q_i^{k*} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + b_{ij}^k + a_{ij}^k s_{ij}^{k*} = u_j^k + s_{ij}^{k*} v_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^{k*} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} - \lambda_i^k,$$
$$\text{if} \quad s_{ij}^{k*} > 0; \tag{13}$$

and

$$u_i^k - s_{ij}^{k*} v_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + \sigma_{ij}^{k-} Q_i^{k*} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + b_{ij}^k + a_{ij}^k s_{ij}^{k*} \ge u_j^k + s_{ij}^{k*} v_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^{k*} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} - \lambda_i^k,$$
$$\text{if} \quad s_{ij}^{k*} = 0. \tag{14}$$

Assume that the affection utility function associated with a particular location and a single class can depend upon the population associated with every class and each location, that is, compose a vector-function $u = u(Q)$. Also suppose that the cost

Layout: T1 Standard SC | Book ID: 313214_1_En | Book ISBN: 978-3-319-04798-0
Chapter No.: 3 | Date: 8 March 2014 2:17 PM | Page: 33/38

associated with migration between two locations as perceived by a particular class can depend, in general, upon the flow of each class between every pair of locations, i.e., compose an aggregate vector-function $c = c(s)$. Finally, let us form an auxiliary vector of the appropriate size as follows:

$$d(Q,s) := \left(d_{ij}^k(Q,s)\right), \tag{15}$$

where

$$d_{ij}^k(Q,s) := s_{ij}^k v_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} - \sigma_{ij}^{k-} Q_i^k \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + s_{ij}^k v_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^k \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}. \tag{16}$$

Now, we are in a position to formulate the following result established in the previous papers [5, 6]:

Theorem 1 *A population and migration flow pattern satisfy the equilibrium conditions* (8) *and* (9) *if, and only if it solve the variational inequality problem*

$$\left\langle -u\left(Q^*\right), Q - Q^* \right\rangle + \left\langle c\left(s^*\right) - d\left(Q^*, s^*\right), s - s^* \right\rangle \geq 0, \quad \forall (Q,s) \in M. \tag{17}$$

□

The existence of at least one solution to the variational inequality (17) follows from the general theory of variational inequalities, under the sole assumption of continuous differentiability of the utility functions u and continuity of migration cost functions c, since the feasible convex set M is compact (*cf.*, for example, Kinderlehrer and Stampacchia [9]).

From now on, we omit the superscript k for simplicity purpose. The uniqueness of the equilibrium population and migration flow pattern (Q^*, s^*) follows under the assumption that the compound operator

$$\begin{pmatrix} -u(Q) \\ c(s) - d(Q,s) \end{pmatrix} : R^{K\times n} \times R^{K\times n\times(n-1)} \to R^{K\times n} \times R^{K\times n\times(n-1)}, \tag{18}$$

involving the utility and migration cost functions, is strictly monotone over the feasible set M:

$$\begin{gathered} \left\langle \begin{pmatrix} u(Q^1) \\ c(s^1) - d(Q^1, s^1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u(Q^2) \\ c(s^2) - d(Q^2, s^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^1 - Q^2 \\ s^1 - s^2 \end{pmatrix} \right\rangle > 0, \\ \forall \begin{pmatrix} Q^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Q^2 \\ s^2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{19}$$

that is,

$$\begin{gathered} -\left\langle u\left(Q^1\right) - u\left(Q^2\right), Q^1 - Q^2 \right\rangle + \left\langle c\left(s^1\right) - c\left(s^2\right), s^1 - s^2 \right\rangle \\ -\left\langle d\left(Q^1, s^1\right) - d\left(Q^2, s^2\right), s^1 - s^2 \right\rangle > 0, \quad \forall \begin{pmatrix} Q^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Q^2 \\ s^2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{20}$$

The latter is a consequence of the following classical result of the Theory of Variational Inequality Problems (*see*, for example, Kinderlehrer and Stampacchia [8]):

Theorem 2 *Consider the variational inequality: Find a $y^* \in M \subset R^m$ such that,*

$$\left\langle F\left(y^*\right), y - y^* \right\rangle \geq 0, \quad \forall y \in M. \tag{21}$$

If the operator $F : R^m \to R^m$ is strictly monotone over M, that is,

$$\left\langle F\left(y^1\right) - F\left(y^2\right), y^1 - y^2 \right\rangle > 0, \quad \forall y^1, y^2 \in M,\ y^1 \neq y^2, \tag{22}$$

then the variational inequality (21) has at most one solution. □

Having established the existence and uniqueness of the (lower level) equilibrium among the potential migrants, we may pass to the concept of the upper level equilibrium among the municipal authorities.

3.2 Definition of Equilibrium at the Upper Level

We assume that the affection utility function associated with location i and class k of potential migrants has the form (which is an extension of the linear utility function used in the previous work [8])

$$u_i^k\left(Q_i^k\right) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i^k - \beta_i^k \left(Q_i^k\right)^2, \tag{23}$$

where $A_i^k > 0$, $B_i^k > 0$, $\beta_i^k > 0$ are parameters related to the environment facilities for the potential immigrants of group k in location i. For instance, the economical sense of A_i^k could be the average cost of a household in location i in a district where the typical representatives of class k prefer to settle down, while B_i^k might be interpreted as an inverse affection coefficient for the immigrants of group k: that is, the lower the value of B_i^k, the higher the degree of affection revealed by the average family of the specimen of class k to the growing population of location i. Finally, the parameter R_i reflects the amount of investment by the authorities of location i into the improvement in the environment for the newcomers and the regular inhabitants: The higher the invested amount, the lower the negative effect of the growing population on the location's attractiveness and affection grade for both the current and potential inhabitants.

Now supposing that the investment volumes $R_i > 0$ are used as strategies of the players (municipal authorities of the locations involved), it is standard to define an equilibrium state in the (upper level) game.

Definition 3 An investment vector $R^* = \left(R_1^*, \ldots, R_n^*\right)$ is called the *equilibrium at the upper level* if for any location i, $i = 1, \ldots, nc$, the municipal authority's utility function $U_i = U_i\left(R_i, R_{-i}^*\right)$ attains its maximum value exactly at $R_i = R_i^*$, if it is assumed that all the rest of the players are stuck to their investment values $R_{-i}^* = \left(R_1^*, \ldots, R_{i-1}^*, R_{i+1}^*, \ldots, R_n^*\right)$. Here, the municipality affection utility function $U_i = U_i(R)$ is the weighted sum of the location's utility functions of all the classes of potential migrants determined below:

$$U_i(R) := \frac{Q_i^{1*}}{Q_i^*} u_i^1\left(Q^*\right) + \cdots + \frac{Q_i^{K*}}{Q_i^*} u_i^K\left(Q^*\right), \tag{24}$$

where Q^* is the equilibrium of the lower level population values, which (due to Theorems 3.1 and 3.1) exists uniquely for any (fixed) vector of investments R involved into the structure of locations' affection utility functions (23). □

4 Existence of a Bi-level Equilibrium with Consistent Conjectures

The consistency of conjectures (or, the influence coefficients) arises naturally as an important issue. Indeed, the existence of at least one equilibrium for arbitrary influence coefficients obliges one to select some justified conjectures so that the above concept of the equilibrium make sense. In this section, we propose a concept of consistency and formulate the existence result for the consistent conjectural variations equilibrium (CCEV).

Based upon the consistency criterion proposed in [10], we formulate the following definition. Here, for simplicity, we recall our assumption that the affection utility function for each location i and every potential migrant group k are quadratic of the form $u_i^k\left(Q_i^k\right) = A_i^k - \frac{B_i^k}{R_i} Q_i - \beta_i^k \left(Q_i^k\right)^2$, with $A_i^k > 0,\ B_i^k > 0, R_i > 0,\ \beta_i^k > 0$; next, $a_{ij}^k > 0$ for each quadratic migration cost function; and finally, conjectures (influence coefficients) are constant with zero elasticity, i.e., $\sigma_{ij}^{k,\pm} = 0$, and $v_{ij}^{k+} = v_{ij}^{k-} = v_{ij}^k > 0$, for all i, j, k.

Definition 4 At a lower level equilibrium (LLE) pattern $(Q^*, s^*) \in M$, the influence coefficients $v_{ij}^k \equiv w_{ij}^k \frac{B_j^k}{R_j}$, $k = 1, \ldots, K; i, j = 1, \ldots, n; i \neq j$, are referred to as *consistent*, if the following equalities hold:

$$w_{ij}^k = \frac{1}{2\frac{B_j^k}{R_j \beta_j^k} + \sum_{\substack{\ell \neq j \\ \ell \neq k}} \frac{1}{w_{\ell j}^k + \frac{a_{\ell j}^k R_j}{B_j^k}}}. \tag{25}$$

The LLE with consistent conjectures is called a *consistent conjectural variations equilibrium state* (CCVES) in application to the above-described human migration model.

□

Layout: T1 Standard SC Book ID: 313214_1_En Book ISBN: 978-3-319-04798-0
Chapter No.: 3 Date: 8 March 2014 2:17 PM Page: 36/38

Now, we are in a position to formulate the following existence result.

Theorem 3 *Under assumptions* A1, A2, *and* A3, *and if all the investment sums are bounded (i.e.,* $0 < R_i \le R$, $i = 1, \ldots, n$*), then there exists a consistent conjectural equilibrium state (CCVES) in application to the above-described bi-level human migration model.*

□

When proving Theorem 4, we established that certain infinite-dimensional mappings involved in Eq. (4) are continuous and contracting over corresponding compact subsets. This allows one to find, for each fixed group k of potential migrant and each destination location j, good approximations for the consistent conjectures (influence coefficients) $v_{ij}^k \equiv w_{ij}^k \frac{B_j^k}{R_j}$, $k = 1, \ldots, K; i, j = 1, \ldots, n; i \neq j$, by applying a simple iteration procedure:

$$w_{ij}^{k,(m+1)} = \frac{1}{2\frac{B_j^k}{R_j \beta_j^k} + \sum_{\substack{\ell \neq j \\ \ell \neq i}} \frac{1}{w_{\ell j}^{k,(m)} + \frac{a_{\ell j}^k R_j}{B_j^k}}}, \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{26}$$

with $w_{ij}^{k,(0)} = 0$, $k = 1, \ldots, K; i, j = 1, \ldots, n; i \neq j$.

The convergence of process (26) is established in the following theorem.

Theorem 4 *For each fixed group k of potential migrants and every pair location-destination (i,j),* $i \neq j$*, the approximate conjectures (influence coefficients) obtained by formulas* (26) *converge (as* $m \to \infty$*) to the unique solution of system* (25).

□

In our future research, we are going to extend the obtained results to the case of not necessarily quadratic affection utility functions and discontinuous conjectures (influence coefficients). However, some of the necessary technique can be developed now, in the case of quadratic utilities and continuous conjectures. To do that, for fixed values of k and j, we denote the value of the inverse of the derivative of the affection utility function by

$$\tau := \left[\frac{du_j^k}{dQ_j^k} \left(Q_j^k \right) \right]^{-1} < 0, \tag{27}$$

and rewrite the consistency equalities (25) in a more general form:

$$w_{ij}^k = \frac{1}{-\frac{2}{\tau \beta_j^k} + \sum_{\substack{\ell \neq j \\ \ell \neq i}} \frac{1}{w_{\ell j}^k - \tau a_{\ell j}^k}}, \tag{28}$$

where $\tau \in (-\infty, 0]$. When $\tau \to -\infty$, then the solution of system (28) tends to the unique limit solution $v_{ij}^k \equiv w_{ij}^k \frac{B_j^k}{R_j} = 1$, $k = 1, \ldots, K; i, j = 1, \ldots, n; i \neq j$. In other words, for all the finite values of the parameter $\tau \le 0$, we can prove the following result.

Theorem 5 *For each fixed group k of potential migrants and every pair location-destination (i, j), $i \neq j$, and for any $\tau \in (-\infty, 0]$, there exists a unique solution of Eq.* (28) *as a collection of continuous functions $w_{ij}^k = w_{ij}^k(\tau)$, $i, j = 1, \dots, n;\ i \neq j$. Furthermore, $w_{ij}^k(0) = 0$, and $v_{ij}^k(\tau) \equiv w_{ij}^k(\tau)\frac{B_j^k}{R_j} \to 1$ as $\tau \to -\infty$,* for all *$i, j = 1, \dots, n;\ i \neq j$* □

5 Conclusions and Future Research

We investigated a human migration model based upon *Kansei* engineering principles and involving conjectures of the migration groups concerning the variations in the affection utility function values, both in the abandoned location and in the destination site. To formulate equilibrium conditions for this model, we used the concept of conjectural variation equilibrium (CVE). We established the existence and uniqueness results for the equilibrium in question, and introduced a concept of consistent conjectures (influence coefficients) together with the corresponding CVEs. The theorem guaranteeing the existence and uniqueness of a solution to each consistency system, and therefore the consistent conjectural variation equilibrium state (CCVES), was also proven.

We also notice that the human migration model with conjectural variations can be further extended and examined in the case when constraint (2) is replaced by a weaker condition, as in

$$Q_i^k \geq 0,\ i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, K, \tag{29}$$

which allows us to consider the repeated or chain migration. In this case, the feasible set M ceases to be compact (remaining, however, convex), which makes the use of the general theory of variational inequality problems insufficient to demonstrate the existence of equilibrium. Then, subtler results obtained in Bulavsky et al. [11] and further developed in Isac et al. [4] can be used instead. Indeed, the existence of equilibrium will be guaranteed for various classes of affective utility functions and migration costs that are free of exceptional families of elements (EFE).

Acknowledgements The first author's research activities were financially supported by the R&D Department (Cátedra de Investigación) CAT-174 of the Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (ITESM), Campus Monterrey, and by the SEP-CONACYT grant CB-2008-01-106664, Mexico. The second and the fourth authors were also supported by the SEP-CONACyT grant CB-2009-01-127691 and the PAICYT project CE250-09, Mexico. The fourth author was supported by the SEP-CONACyT grant CB-2011-11-169765.

References

1. Akkoyunlu S, Vickerman R (2001) Migration and the efficiency of European labour markets. Working Paper, Department of Economics, The University of Kent at Canterbury
2. Bulavsky VA, Kalashnikov VV (1994) One-parametric driving method to study equilibrium. Econ Math Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody, in Russian) 30(2):129–138

3. Bulavsky VA, Kalashnikov VV (1995) Equilibria in generalized Cournot and Stackelberg models. Econ Math Methods (Ekonomika i Matematicheskie Metody, in Russian) 31(3):164–176
4. Isac G, Bulavsky VA, Kalashnikov VV (2002) Complementarity, equilibrium, efficiency and economics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
5. Kalashnikov VV, Kalashnykova NI, Luévanos R, Uranga C, Méndez M, Luévanos A (2007) Un modelo de migración humana: Experimentos numéricos basados sobre los datos de las tres ciudades Laguneras. Estudios Demográficos y Urbanos 22(3):731–760
6. Kalashnikov VV, Kalashnykova NI, Luévanos R, Uranga C, Méndez M, Luévanos A (2008) Numerical experimentation with a human migration model. European J Oper Res 189(1):208–229
7. Kalashnikov VV, Kalashnykova NI, Chávez Delgadillo LR (2011) Consistent conjectures in a human migration model: definition, existence and computation. Int J Innovative Comput Inf Control 7(4):1949–1957
8. Kalashnikov VV, Kalashnykova NI, Alcorta García MA, Acosta Sánchez YG, KalashnikovVV Jr (2012) Consistent conjectural variations equilibrium in a bilevel human migrationmodel. Int Bus Eco Res J 11(2):195–204
9. Kinderlehrer D, Stampacchia G (1980) An introduction to variational inequalities and their applications. Academic Press, New York
10. Kalashnikov VV, Bulavsky VA, Kalashnykova NI, Castillo FJ (2011) Mixed oligopoly with consistent conjectures. European J Oper Res 210(3):729–735
11. Bulavsky VA, Isac G, Kalashnikov VA (1998) Application of topological degree theory to complementarity problems. In: Migdalas A et al (eds) Multilevel optimization: algorithms and applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp 333–358

```
with(Optimization) :
NLPSolve(((( (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) (20.0000
    + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 )/R1 ))) / (52.9512 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31
    + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 ) C (( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) (50.0000
    + (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 )/R1 ))) / (52.9512 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31
    + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 )), {( 3.8000 + ( 5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31)
    / R1 C (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32 ) / R2 C lambda_1a) *( sa_12)
    C (11.2000 + ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) / R1 C ( 1.0000   sp_21 + sp_23
    C sp_12 C sp_32) / R2 C lambda_1p)* (sp_12) C (9.2000 + ( 5.0000 + sa_12 + sa_13
    C sa_21 C sa_31) / R1 C (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23 ) / R3 C lambda_1a)
    * (sa_13) C (15.8000 + ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) / R1 C (0.6000 + sp_31
    + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 C lambda_1p)* (sp_13) C (lambda_2a C ( 5.0000 + sa_12
    + sa_13 C sa_21 C sa_31) / R1 + ( 3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32) / R2 + 3.5000 )
    * (sa_21) C (lambda_2p C (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 ) / R1 + (1.0000
    + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 ) / R2 + 8.5000 ) *( sp_21) C( 5.5000 + (3.0000 + sa_21
    + sa_23 C sa_12 C sa_32) / R2 + ( 1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23) / R3
    C lambda_2a) * (sa_23) C (5.5000 + ( 1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2
    C (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 C lambda_2p) *( sp_23) C( lambda_3a
    C (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 + ( 1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
    / R3 + 9.3000 )* (sa_31) C (lambda_3p C ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 ) / R1
    + (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 + 14.3000) * (sp_31) C (lambda_3a
    C (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32 ) / R2 + ( 1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
    / R3 + 4.25000 )* (sa_32) C (lambda_3p C ( 1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 )
    / R2 + (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 + 4.25000) * (sp_32) C (5.0000
    + sa_12 + sa_13 )* (lambda_1a ) C( 2.0000 + sp_12 + sp_13 ) * (lambda_1p) C (3.0000
    + sa_21 + sa_23 )* (lambda_2a ) C(1.0000 + sp_21 + sp_23 )* (lambda_2p ) C (1.5000
    + sa_31 + sa_32 )* (lambda_3a ) C( 0.6000 + sp_31 + sp_32) * (lambda_3p) = 0,
    (3.8000 + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 C( 3.0000 + sa_21 + sa_23
    C sa_12 C sa_32) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
    C sp_31) / R1 C (1.0000   sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 ) / R2 C lambda_1p) R 0,
    (9.2000 + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 C( 1.5000 + sa_31 + sa_32
    C sa_13 C sa_23) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
    C sp_31) / R1 C( 0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 C lambda_1p) R 0,
```

$$
(lambda\_2a \mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + 3.5000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_2p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) \mathrm{R}\, 0, (5.5000 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_2a) \mathrm{R}\, 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_2p) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a \mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 + 9.3000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a \mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}) \mathrm{R}\, 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) \mathrm{R}\, 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) \mathrm{R}\, 0, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) \mathrm{R}\, 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) \mathrm{R}\, 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) \mathrm{R}\, 0, R1 = 1, R2 = 50\}, R3 = 100,) assume = nonnegative;
$$

$$
[0.140504080669807241, [R1 = 1., R2 = 50., R3 = 100., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 0., lambda\_2p = 4.90000000000000, lambda\_3a = 5.38823529411765, lambda\_3p = 10.7000000000000, sa_{12} = 2.58823529411765, sa_{13} = 0., sa_{21} = 0., sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]] \tag{1}
$$

$$
NLPSolve\Bigg(\bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31})\Big(20.0000 + \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}) \mathrm{C} \Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31})\Big(50.0000 + \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31})\bigg), \{((3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 \mathrm{C}\, lambda\_1a) * (sa_{12}) \mathrm{C} (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 \mathrm{C}\, lambda\_1p) * (sp_{12}) \mathrm{C} (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_1a) * (sa_{13}) \mathrm{C} (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_1p) * (sp_{13}) \mathrm{C} (lambda\_2a \mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + 3.5000)
$$

* (sa_21) C (lambda_2p C (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) / R1 + (1.0000
+ sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2 + 8.5000) * (sp_21) C(5.5000 + (3.0000 + sa_21
+ sa_23 C sa_12 C sa_32) / R2 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23) / R3
C lambda_2a) * (sa_23) C (5.5000 + (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2
C (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 C lambda_2p) *(sp_23) C(lambda_3a
C (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31) / R1 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 + 9.3000) * (sa_31) C (lambda_3p C (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) / R1
+ (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 + 14.3000) * (sp_31) C (lambda_3a
C (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32) / R2 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 + 4.25000) * (sa_32) C (lambda_3p C (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32)
/ R2 + (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 + 4.25000) * (sp_32) C (5.0000
+ sa_12 + sa_13)* (lambda_1a) C (2.0000 + sp_12 + sp_13) * (lambda_1p) C (3.0000
+ sa_21 + sa_23)* (lambda_2a) C (1.0000 + sp_21 + sp_23) * (lambda_2p) C (1.5000
+ sa_31 + sa_32)* (lambda_3a) C (0.6000 + sp_31 + sp_32) * (lambda_3p) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31) / R1 C(3.0000 + sa_21 + sa_23
C sa_12 C sa_32) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
C sp_31) / R1 C (1.0000 sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2 C lambda_1p) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31) / R1 C (1.5000 + sa_31 + sa_32
C sa_13 C sa_23) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
C sp_31) / R1 C (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 C lambda_1p) R 0,
(lambda_2a C (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31) / R1 + (3.0000 + sa_21 + sa_23
C sa_12 C sa_32) / R2 + 3.5000) R 0, (lambda_2p C (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
C sp_31) / R1 + (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32) / R2 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2
C (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 C lambda_2p) R 0, (lambda_3a
C (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31) / R1 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 + 9.3000) R 0, (lambda_3p C (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) / R1
+ (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a
C (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32) / R2 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 + 4.25000) R 0, (lambda_3p C (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32) / R2
+ (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_12
+ sa_13) R 0, (2.0000 + sp_12 + sp_13) R 0, (3.0000 + sa_21 + sa_23) R 0, (1.0000
+ sp_21 + sp_23) R 0, (1.5000 + sa_31 + sa_32) R 0, (0.6000 + sp_31 + sp_32) R 0, R1
= 5, R2 = 50, R3 = 100 }, assume = nonnegative);

0.190693271713735346, [R1 = 2., R2 = 20., R3 = 30., lambda_1a = 0., lambda_1p = 0., **(2)**

lambda_2a = 0., lambda_2p = 6.70000000000000, lambda_3a = 5.68636363636364,

$lambda\_3p = 12.5000000000000, sa_{12} = 3.33066907387547\ 10^{-16}, sa_{13} = 0., sa_{21} = 0.727272727272728, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\ ]]$

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31})\Big(20.0000 + \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31}) \text{ C } \Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31})\Big(50.0000 + \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31})\bigg),$

$\{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31}) / R1 \text{ C } (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \text{ C } sa_{12} \text{ C } sa_{32}) / R2 \text{ C } lambda\_1a) * (sa_{12})$
$\text{ C } (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31}) / R1 \text{ C } (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23} \text{ C } sp_{12} \text{ C } sp_{32}) / R2 \text{ C } lambda\_1p) * (sp_{12}) \text{ C } (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31}) / R1 \text{ C } (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \text{ C } sa_{13} \text{ C } sa_{23}) / R3 \text{ C } lambda\_1a)$
$* (sa_{13}) \text{ C } (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31}) / R1 \text{ C } (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \text{ C } sp_{13} \text{ C } sp_{23}) / R3 \text{ C } lambda\_1p) * (sp_{13}) \text{ C } (lambda\_2a \text{ C } (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \text{ C } sa_{12} \text{ C } sa_{32}) / R2 + 3.5000)$
$* (sa_{21}) \text{ C } (lambda\_2p \text{ C } (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \text{ C } sp_{12} \text{ C } sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21}) \text{ C } (5.5000 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \text{ C } sa_{12} \text{ C } sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \text{ C } sa_{13} \text{ C } sa_{23}) / R3$
$\text{ C } lambda\_2a) * (sa_{23}) \text{ C } (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \text{ C } sp_{12} \text{ C } sp_{32}) / R2$
$\text{ C } (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \text{ C } sp_{13} \text{ C } sp_{23}) / R3 \text{ C } lambda\_2p) * (sp_{23}) \text{ C } (lambda\_3a$
$\text{ C } (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \text{ C } sa_{13} \text{ C } sa_{23}) / R3 + 9.3000) * (sa_{31}) \text{ C } (lambda\_3p \text{ C } (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31}) / R1 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \text{ C } sp_{13} \text{ C } sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) \text{ C } (lambda\_3a$
$\text{ C } (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \text{ C } sa_{12} \text{ C } sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \text{ C } sa_{13} \text{ C } sa_{23}) / R3 + 4.25000) * (sa_{32}) \text{ C } (lambda\_3p \text{ C } (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \text{ C } sp_{12} \text{ C } sp_{32}) / R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \text{ C } sp_{13} \text{ C } sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) \text{ C } (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a) \text{ C } (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p) \text{ C } (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a) \text{ C } (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p) \text{ C } (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) * (lambda\_3a) \text{ C } (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda\_3p) = 0,$

$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \text{ C } sa_{21} \text{ C } sa_{31}) / R1 \text{ C } (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \text{ C } sa_{12} \text{ C } sa_{32}) / R2 \text{ C } lambda\_1a) \text{ R } 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \text{ C } sp_{21} \text{ C } sp_{31}) / R1 \text{ C } (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23} \text{ C } sp_{12} \text{ C } sp_{32}) / R2 \text{ C } lambda\_1p) \text{ R } 0,$

(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}
C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C *lambda_1a*) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C *lambda_1p*) R 0,
(*lambda_2a* C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (*lambda_2p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32})/ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 C *lambda_2a*) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C *lambda_2p*) R 0, (*lambda_3a*
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000) R 0, (*lambda_3p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (*lambda_3a*
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000) R 0, (*lambda_3p* C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})/ R2
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13}) R 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R 0, (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23}) R 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R 0, *R1*
= 10, *R2* = 50}, *R3* = 100 , *assume* = *nonnegative*) ;

[0.221841385103073552, [*R1* = 10., *R2* = 50., *R3* = 100., *lambda_1a* = 0., *lambda_1p* = 0., **(3)**
lambda_2a = 2.55000000000021, *lambda_2p* = 8.14000000000000, *lambda_3a*
= 8.35000000000018, *lambda_3p* = 13.9400000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}
= 2.99999999999822, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}
= 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]]

NLPSolve((((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) (20.0000

+ $\frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})}{R1}$)) / (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}

+ sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) C ((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) (50.0000
+ $\frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})}{R1}$)) / (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}

+ sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})), {(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})
/ R1 C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C *lambda_1a*) * (sa_{12})
C (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C(1.0000 sp_{21} + sp_{23}
C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C *lambda_1p*) * (sp_{12}) C (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}
C sa_{21} C sa_{31}) / R1 (C 1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23} / R3 C *lambda_1a*)

$*(sa_{13})\,\mathrm{C}\,(15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}$
$+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{13})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}$
$+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)$
$*(sa_{21})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000$
$+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)*(sp_{21})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(3.0000+sa_{21}$
$+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/R3$
$\mathrm{C}\,lambda\_2a)*(sa_{23})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$
$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)*(sp_{23})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+9.3000)*(sa_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}$
$+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+14.3000)*(sp_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+4.25000)*(sa_{32})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$
$/\mathrm{R2}+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+4.25000)*(sp_{32})\,\mathrm{C}\,(5.0000$
$+sa_{12}+sa_{13})*(lambda\_1a)\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13})*(lambda\_1p)\,\mathrm{C}\,(3.0000$
$+sa_{21}+sa_{23})*(lambda\_2a)\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23})*(lambda\_2p)\,\mathrm{C}\,(1.5000$
$+sa_{31}+sa_{32})*(lambda\_3a)\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32})*(lambda\_3p)=0,$
$(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$
$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\quad sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$
$(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}$
$\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$
$(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$
$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)\,\mathrm{R}\,0,\ (5.5000$
$+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2a)\,\mathrm{R}\,0,\ (5.5000+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$
$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+9.3000)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}$
$+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+14.3000)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+4.25000)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$
$+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+4.25000)\,\mathrm{R}\,0,\ (5.0000+sa_{12}$
$+sa_{13})\,\mathrm{R}\,0,\ (2.0000+sp_{12}+sp_{13})\,\mathrm{R}\,0,\ (3.0000+sa_{21}+sa_{23})\,\mathrm{R}\,0,\ (1.0000$
$+sp_{21}+sp_{23})\,\mathrm{R}\,0,\ (1.5000+sa_{31}+sa_{32})\,\mathrm{R}\,0,\ (0.6000+sp_{31}+sp_{32})\,\mathrm{R}\,0,\ R1$
$=10,\quad R2=1,\quad R3=20\},\ assume=nonnegative);$

$\left[\ 0.221841385103096950, \left[R1 = 10., R2 = 1., R3 = 20., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 2.55000000000000, lambda\_2p = 8.14000000000000, lambda\_3a = 8.35000000000000, lambda\_3p = 13.9400000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 3., sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1.00000000000000, sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\right]\right]$ **(4)**

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Big(\big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\big)\Big(20.0000 + \frac{\big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\big)}{R1}\Big)\Big) \Big/ \big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31} + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\big)\,\mathrm{C}\,\Big(\big(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\big)\Big(50.0000 + \frac{\big(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\big)}{R1}\Big)\Big) \Big/ \big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31} + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\big)\Bigg),$

$\{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}) / R1\,\mathrm{C}\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}) / R2\,\mathrm{C}\,lambda\_1a) * (sa_{12})$
$\mathrm{C}\,(11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}) / R1\,\mathrm{C}\,(1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}) / R2\,\mathrm{C}\,lambda\_1p) * (sp_{12})\,\mathrm{C}\,(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}) / R1\,\mathrm{C}\,(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}) / R3\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)$
$* (sa_{13})\,\mathrm{C}\,(15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}) / R1\,\mathrm{C}\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}) / R3\,\mathrm{C}\,lambda\_1p) * (sp_{13})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}) / R2 + 3.5000)$
$* (sa_{21})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21})\,\mathrm{C}\,(5.5000 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}) / R3$
$\mathrm{C}\,lambda\_2a) * (sa_{23})\,\mathrm{C}\,(5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C}\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}) / R3\,\mathrm{C}\,lambda\_2p) * (sp_{23})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) * (sa_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) * (sa_{32})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$
$/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32})\,\mathrm{C}\,(5.0000$
$+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a)\,\mathrm{C}\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p)\,\mathrm{C}\,(3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a)\,\mathrm{C}\,(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p)\,\mathrm{C}\,(1.5000$
$+ sa_{31} + sa_{32}) * (lambda\_3a)\,\mathrm{C}\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda\_3p) = 0,$
$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}) / R1\,\mathrm{C}\ \ 3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$

$C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2\, C\, lambda\_1a) R\, 0,\ (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21}$
$C\, sp_{31}) / R1\, C\, (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2\, C\, lambda\_1p)\ R\, 0,$
$(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1\, C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$C\, sa_{13} C\, sa_{23}) / R3\, C\, lambda\_1a) R\, 0,\ (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21}$
$C\, sp_{31}) / R1\, C\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3\, C\, lambda\_1p)\ R\, 0,$
$(lambda\_2a\, C\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2 + 3.5000) R\, 0,\ (lambda\_2p\, C\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21}$
$C\, sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) R\, 0,\ (5.5000$
$+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23})$
$/ R3\, C\, lambda\_2a) R\, 0,\ (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2$
$C\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3\, C\, lambda\_2p)\ R\, 0, (lambda\_3a$
$C\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) R\, 0,\ (lambda\_3p\, C\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) R\, 0,\ (lambda\_3a$
$C\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) R\, 0,\ (lambda\_3p\, C\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) R\, 0,\ (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}) R\, 0,\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R\, 0,\ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R\, 0,\ (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}) R\, 0,\ (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R\, 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R\, 0,\ R1$
$= 10,\ R2 = 5,\ R3 = 20\ \},\ assume = nonnegative\ );$

$$[0.221841385103096561, [R1 = 10., R2 = 5., R3 = 20., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 2.55000000000001, lambda\_2p = 8.14000000000000, lambda\_3a = 8.35000000000000, lambda\_3p = 13.9400000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 2.99999999999997, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1.00000000000000, sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]] \quad (5)$$

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31})\Big(20.0000$
$+ \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) C\, \Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31})\Big(50.0000$
$+ \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31})\Big),\ \{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31})$
$/ R1\, C\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2\, C\, lambda\_1a) * (sa_{12})$
$C\, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1 (C\ \ 1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}$

$\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 \,\mathrm{C}\, lambda\_1p) * (sp_{12}) \,\mathrm{C}\, (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$
$\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \,\mathrm{C}\, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_1a)$
$* (sa_{13}) \,\mathrm{C}\, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21} \,\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \,\mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31}$
$+ sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_1p) * (sp_{13}) \,\mathrm{C}\, (lambda\_2a \,\mathrm{C}\, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \,\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + 3.5000)$
$* (sa_{21}) \,\mathrm{C}\, (lambda\_2p \,\mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21} \,\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 + (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21}) \,\mathrm{C}\, (5.5000 + (3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23} \,\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23}) / R3$
$\mathrm{C}\, lambda\_2a) * (sa_{23}) \,\mathrm{C}\, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_2p) *(sp_{23}) \,\mathrm{C}\, (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) * (sa_{31}) \,\mathrm{C}\, (lambda\_3p \,\mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21} \,\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) \,\mathrm{C}\, (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \,\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) * (sa_{32}) \,\mathrm{C}\, (lambda\_3p \,\mathrm{C}\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32})$
$/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) \,\mathrm{C}\, (5.0000$
$+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a) \,\mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p) \,\mathrm{C}\, (3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a) \,\mathrm{C}\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p) \,\mathrm{C}\, (1.5000$
$+ sa_{31} + sa_{32}) * (lambda\_3a) \,\mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda\_3p) = 0,$
$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \,\mathrm{C}\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 \,\mathrm{C}\, lambda\_1a) \,\mathrm{R}\, 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21}$
$\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \,\mathrm{C}\, (1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 \,\mathrm{C}\, lambda\_1p) \,\mathrm{R}\, 0,$
$(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \,\mathrm{C}\, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_1a) \,\mathrm{R}\, 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21}$
$\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \,\mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_1p) \,\mathrm{R}\, 0,$
$(lambda\_2a \,\mathrm{C}\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + 3.5000) \,\mathrm{R}\, 0, (lambda\_2p \,\mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21}$
$\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) \,\mathrm{R}\, 0, (5.5000$
$+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \,\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_2a) \,\mathrm{R}\, 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \,\mathrm{C}\, lambda\_2p) \,\mathrm{R}\, 0,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{21} \,\mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) \,\mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \,\mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{21} \,\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) \,\mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \,\mathrm{C}\, sa_{12} \,\mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \,\mathrm{C}\, sa_{13} \,\mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) \,\mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \,\mathrm{C}\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \,\mathrm{C}\, sp_{12} \,\mathrm{C}\, sp_{32}) / R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \,\mathrm{C}\, sp_{13} \,\mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) \,\mathrm{R}\, 0, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}) \,\mathrm{R}\, 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) \,\mathrm{R}\, 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \,\mathrm{R}\, 0, (1.0000$

$+ sp_{21} + sp_{23}) \mathrm{R}\, 0,\ (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) \mathrm{R}\, 0,\ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) \mathrm{R}\, 0,\ R1$
$= 10,\ R2 = 10,\ R3 = 20\ \},\ )\ assume = nonnegative$;

$\big[\ 0.221841385103049626, \big[R1 = 10., R2 = 10., R3 = 20., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0.,$ **(6)**
$lambda\_2a = 2.55000000000072, lambda\_2p = 8.14000000000000, lambda\_3a$
$= 8.35000000000036, lambda\_3p = 13.9400000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}$
$= 2.99999999999641, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}$
$= 1.00000000000000, sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\ \big]\big]$

$NLPSolve\Bigg(\ \Bigg(\Big(\big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31}\big)\Big(20.0000$
$+ \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ \big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}\big)\, \mathrm{C}\, \Big(\big(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}\big)\Big(50.0000$
$+ \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ \big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}\big)\Bigg),\ \{\big(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31})$
$/ R1\, \mathrm{C}\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\, \mathrm{C}\, sa_{12}\, \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2\, \mathrm{C}\, lambda\_1a) * (sa_{12})$
$\mathrm{C}\, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1\, \mathrm{C}\, (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}$
$\mathrm{C}\, sp_{12}\, \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2\, \mathrm{C}\, lambda\_1p) * (sp_{12})\, \mathrm{C}\, (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$
$\mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1\, \mathrm{C}\, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, \mathrm{C}\, sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3\, \mathrm{C}\, lambda\_1a)$
$* (sa_{13})\, \mathrm{C}\, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1\, \mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31}$
$+ sp_{32}\, \mathrm{C}\, sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3\, \mathrm{C}\, lambda\_1p) * (sp_{13})\, \mathrm{C}\, (lambda\_2a\, \mathrm{C}\, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\, \mathrm{C}\, sa_{12}\, \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + 3.5000)$
$* (sa_{21})\, \mathrm{C}\, (lambda\_2p\, \mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 + (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}\, \mathrm{C}\, sp_{12}\, \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21})\, \mathrm{C}\, (5.5000 + (3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23}\, \mathrm{C}\, sa_{12}\, \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, \mathrm{C}\, sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3$
$\mathrm{C}\, lambda\_2a) * (sa_{23})\, \mathrm{C}\, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\, \mathrm{C}\, sp_{12}\, \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C}\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, \mathrm{C}\, sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3\, \mathrm{C}\, lambda\_2p) * (sp_{23})\, \mathrm{C}\, (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{21}\, \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, \mathrm{C}\, sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) * (sa_{31})\, \mathrm{C}\, (lambda\_3p\, \mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{21}\, \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, \mathrm{C}\, sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31})\, \mathrm{C}\, (lambda\_3a$
$\mathrm{C}\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\, \mathrm{C}\, sa_{12}\, \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, \mathrm{C}\, sa_{13}\, \mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) * (sa_{32})\, \mathrm{C}\, (lambda\_3p\, \mathrm{C}\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\, \mathrm{C}\, sp_{12}\, \mathrm{C}\, sp_{32})$
$/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, \mathrm{C}\, sp_{13}\, \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32})\, \mathrm{C}\, (5.0000$
$+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a)\ \mathrm{C}\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p)\ \mathrm{C}\, (3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a)\ \mathrm{C}\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p)\ \mathrm{C}\, 1.5000$

$+ sa_{31} + sa_{32})^{*} (lambda\_3a) \mathrm{C}(0.6000 + sp_{31} + sp_{32})^{*} (lambda\_3p) = 0,$
$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 \mathrm{C}(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 \mathrm{C} lambda\_1a) \mathrm{R}\, 0,\ (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21}$
$\mathrm{C} sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2 \mathrm{C} lambda\_1p) \mathrm{R}\, 0,$
$(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 \mathrm{C}(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$\mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23}) / R3 \mathrm{C} lambda\_1a) \mathrm{R}\, 0,\ (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21}$
$\mathrm{C} sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 \mathrm{C} lambda\_1p) \mathrm{R}\, 0,$
$(lambda\_2a \mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + 3.5000) \mathrm{R}\, 0,\ (lambda\_2p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21}$
$\mathrm{C} sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2 + 8.5000) \mathrm{R}\, 0,\ (5.5000$
$+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 \mathrm{C} lambda\_2a) \mathrm{R}\, 0,\ (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 \mathrm{C} lambda\_2p) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) \mathrm{R}\, 0,\ (lambda\_3p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 + 14.3000) \mathrm{R}\, 0,\ (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0,\ (lambda\_3p \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0,\ (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}) \mathrm{R}\, 0,\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) \mathrm{R}\, 0,\ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) \mathrm{R}\, 0,\ (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}) \mathrm{R}\, 0,\ (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) \mathrm{R}\, 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) \mathrm{R}\, 0,\ R1$
$= 30,\ R2 = 1,\ R3 = 40 \},\ assume = nonnegative \,);$

$[\ 0.221841385103088595, [R1 = 30., R2 = 1., R3 = 40., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0.,$ **(7)**
$lambda\_2a = 3.18333333333399, lambda\_2p = 8.38000000000000, lambda\_3a$
$= 8.98333333333336, lambda\_3p = 14.1800000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}$
$= 2.99999999999936, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}$
$= 1.00000000000000, sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]]$

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) \Big(20.0000$
$+ \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31})}{R1} \Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) \mathrm{C} \Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) \Big(50.0000$
$+ \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31})}{R1} \Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) \Bigg),\ \{ (\quad 3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C}) sa_{31}$

/ R1 C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda_1a) *(sa_{12})
C (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C(1.0000 sp_{21} + sp_{23}
C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p)* (sp_{12}) C (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}
C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a)
* (sa_{13}) C (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C(0.6000 + sp_{31}
+ sp_{32} C sp_{13} C sp_{23})/ R3 C lambda_1p)* (sp_{13})C (lambda_2a C (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})/ R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000)
* (sa_{21}) C (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) *(sp_{21}) C(5.5000 + (3.0000 + sa_{21}
+ sa_{23} C sa_{12} C sa_{32})/ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})/ R3
C lambda_2a)* (sa_{23}) C (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) *(sp_{23}) C(lambda_3a
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000)* (sa_{31})C (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})/ R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) C (lambda_3a
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000)* (sa_{32})C (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})
/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) C (5.0000
+ sa_{12} + sa_{13})* (lambda_1a) C(2.0000 + sp_{12} + sp_{13})* (lambda_1p) C (3.0000
+ sa_{21} + sa_{23})* (lambda_2a) C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23})* (lambda_2p) C (1.5000
+ sa_{31} + sa_{32})* (lambda_3a) C(0.6000 + sp_{31} + sp_{32})* (lambda_3p) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (1.0000 sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}
C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_1p) R 0,
(lambda_2a C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 +(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})/ R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) R 0,(lambda_3a
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000) R 0, (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})/ R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000) R 0,(lambda_3p C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C)sp_{32} / R2

$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, C\, sp_{13}\, C\, sp_{23}) / R3 + 4.25000)\ R\ 0,\ (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13})\ R\ 0,\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13})\ R\ 0,\ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23})\ R\ 0,\ (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23})\ R\ 0,\ (1.5000 + sa_{31} + sa_{32})\ R\ 0,\ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32})\ R\ 0,\ R1$
$= 30,\ R2 = 5,\ R3 = 40\ ,\ )\ assume = nonnegative$;

$[0.221841385103096950, [R1 = 30., R2 = 5., R3 = 40., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0.,$ **(8)**
$lambda\_2a = 3.18333333333333, lambda\_2p = 8.38000000000000, lambda\_3a$
$= 8.98333333333333, lambda\_3p = 14.1800000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}$
$= 3.00000000000000, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}$
$= 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]]$

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31})\Big(20.0000$
$+ \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31})}{R1}\Big)\Big)\Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31})\, C\, \Big(\Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31})\Big(50.0000$
$+ \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31})}{R1}\Big)\Big)\Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31})\Big),\ \{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31})$
$/ R1\, C\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\, C\, sa_{12}\, C\, sa_{32}) / R2\, C\, lambda\_1a) * (sa_{12})$
$C\, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31}) / R1\, C\, (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}$
$C\, sp_{12}\, C\, sp_{32}) / R2\, C\, lambda\_1p) * (sp_{12})\, C\, (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$
$C\, sa_{21}\, C\, sa_{31}) / R1\, C\, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, C\, sa_{13}\, C\, sa_{23}) / R3\, C\, lambda\_1a)$
$* (sa_{13})\, C\, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31}) / R1\, C\, (0.6000 + sp_{31}$
$+ sp_{32}\, C\, sp_{13}\, C\, sp_{23}) / R3\, C\, lambda\_1p) * (sp_{13})\, C\, (lambda\_2a\, C\, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\, C\, sa_{12}\, C\, sa_{32}) / R2 + 3.5000)$
$* (sa_{21})\, C\, (lambda\_2p\, C\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31}) / R1 + (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}\, C\, sp_{12}\, C\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21})\, C\, (5.5000 + (3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23}\, C\, sa_{12}\, C\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, C\, sa_{13}\, C\, sa_{23}) / R3$
$C\, lambda\_2a) * (sa_{23})\, C\, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\, C\, sp_{12}\, C\, sp_{32}) / R2$
$C\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, C\, sp_{13}\, C\, sp_{23}) / R3\, C\, lambda\_2p) * (sp_{23})\, C\, (lambda\_3a$
$C\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\, C\, sa_{21}\, C\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, C\, sa_{13}\, C\, sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) * (sa_{31})\, C\, (lambda\_3p\, C\, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\, C\, sp_{21}\, C\, sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, C\, sp_{13}\, C\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31})\, C\, (lambda\_3a$
$C\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\, C\, sa_{12}\, C\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\, C\, sa_{13}\, C\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) * (sa_{32})\, C\, (lambda\_3p\, C\, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\, C\, sp_{12}\, C\, sp_{32})$
$/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\, C\, sp_{13}\, C\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32})\, C\ 5.0000$

$+sa_{12}+sa_{13})*$ (lambda_1a) C(2.0000 $+sp_{12}+sp_{13})*$ (lambda_1p) C (3.0000 $+sa_{21}+sa_{23})*$ (lambda_2a) C(1.0000 $+sp_{21}+sp_{23})*$ (lambda_2p) C (1.5000 $+sa_{31}+sa_{32})*$ (lambda_3a) C(0.6000 $+sp_{31}+sp_{32})*$ (lambda_3p) = 0, (3.8000 + (5.0000 $+sa_{12}+sa_{13}$ C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(3.0000 $+sa_{21}+sa_{23}$ C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 $+sp_{12}+sp_{13}$ C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (1.0000 $sp_{21}+sp_{23}$ C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p) R 0, (9.2000 + (5.0000 $+sa_{12}+sa_{13}$ C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(1.5000 $+sa_{31}+sa_{32}$ C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 $+sp_{12}+sp_{13}$ C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (0.6000 $+sp_{31}+sp_{32}$ C sp_{13} C sp_{23})/ R3 C lambda_1p)R 0, (lambda_2a C (5.0000 $+sa_{12}+sa_{13}$ C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 $+sa_{21}+sa_{23}$ C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (lambda_2p C (2.0000 $+sp_{12}+sp_{13}$ C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (1.0000 $+sp_{21}+sp_{23}$ C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000 + (3.0000 $+sa_{21}+sa_{23}$ C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 $+sa_{31}+sa_{32}$ C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + (1.0000 $+sp_{21}+sp_{23}$ C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C (0.6000 $+sp_{31}+sp_{32}$ C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) R 0, (lambda_3a C (5.0000 $+sa_{12}+sa_{13}$ C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 $+sa_{31}+sa_{32}$ C sa_{13} C sa_{23}) / R3 + 9.3000) R 0, (lambda_3p C (2.0000 $+sp_{12}+sp_{13}$ C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (0.6000 $+sp_{31}+sp_{32}$ C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a C (3.0000 $+sa_{21}+sa_{23}$ C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 $+sa_{31}+sa_{32}$ C sa_{13} C sa_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (lambda_3p C (1.0000 $+sp_{21}+sp_{23}$ C sp_{12} C sp_{32})/ R2 + (0.6000 $+sp_{31}+sp_{32}$ C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 $+sa_{12}+sa_{13}$) R 0, (2.0000 $+sp_{12}+sp_{13}$) R 0, (3.0000 $+sa_{21}+sa_{23}$) R 0, (1.0000 $+sp_{21}+sp_{23}$) R 0, (1.5000 $+sa_{31}+sa_{32}$) R 0, (0.6000 $+sp_{31}+sp_{32}$) R 0, R1 = 30, R2 = 10, R3 = 40 , }assume = nonnegative ;

[0.221841385103096200, [$R1 = 30., R2 = 10., R3 = 40.,$ lambda_1a = 0., lambda_1p = 0., lambda_2a = 3.18333333333334, lambda_2p = 8.38000000000000, lambda_3a = 8.98333333333334, lambda_3p = 14.1800000000000, $sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 2.99999999999994, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.$]] **(9)**

NLPSolve((((5.0000 $+sa_{12}+sa_{13}$ C sa_{21} C sa_{31}) (20.0000 + $\frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31})}{R1}$))) / (52.9512 $+sa_{12}+sa_{13}$ C sa_{21} C sa_{31} $+sp_{12}+sp_{13}$ C sp_{21} C sp_{31}) C((2.0000 + $sp_{12}+sp_{13}$ C sp_{21} C sp_{31} (50.0000

$$+\frac{(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})}{\mathrm{R1}}\Big)\Big)\Big/\big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$$

$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\big),\ \{(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})$
$/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)*(sa_{12})$
$\mathrm{C}\,(11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\quad sp_{21}+sp_{23}$
$\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{12})\,\mathrm{C}\,(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}$
$\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)$
$*(sa_{13})\,\mathrm{C}\,(15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}$
$+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{13})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}$
$+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)$
$*(sa_{21})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000$
$+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)*(sp_{21})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(3.0000+sa_{21}$
$+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/R3$
$\mathrm{C}\,lambda\_2a)*(sa_{23})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$
$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)*(sp_{23})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+9.3000)*(sa_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}$
$+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+14.3000)*(sp_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+4.25000)*(sa_{32})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$
$/\mathrm{R2}+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+4.25000)*(sp_{32})\,\mathrm{C}\,(5.0000$
$+sa_{12}+sa_{13})*(lambda\_1a)\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13})*(lambda\_1p)\,\mathrm{C}\,(3.0000$
$+sa_{21}+sa_{23})*(lambda\_2a)\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23})*(lambda\_2p)\,\mathrm{C}\,(1.5000$
$+sa_{31}+sa_{32})*(lambda\_3a)\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32})*(lambda\_3p)=0,$
$(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$
$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\quad sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$
$(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}$
$\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$
$(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$
$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)\,\mathrm{R}\,0,\ (5.5000$
$+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2a)\,\mathrm{R}\,0,\ (5.5000+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$
$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)\,\mathrm{R}\,0,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}$

```
/R3+9.3000)R 0, (lambda_3pC (2.0000+sp12+sp13 C sp21 C sp31)/R1
+ (0.6000+sp31+sp32 C sp13 C sp23 ) /R3+14.3000) R 0, (lambda_3a
C (3.0000+sa21+sa23 C sa12 C sa32 ) /R2+( 1.5000+sa31+sa32 C sa13 C sa23)
/R3+4.25000)R 0, (lambda_3pC (1.0000+sp21+sp23 C sp12 C sp32 )/R2
+ (0.6000+sp31+sp32 C sp13 C sp23 ) /R3+4.25000) R 0, (5.0000+sa12
+sa13) R 0, (2.0000+sp12+sp13 ) R 0,( 3.0000+sa21+sa23) R 0, (1.0000
+sp21+sp23 )R 0, ( 1.5000+sa31+sa32) R 0,( 0.6000+sp31+sp32) R 0, R1
= 50, R2 = 1}, R3 = 100 , )assume = nonnegative ;
```

$$\Big[\ 0.221841385103083655, \big[R1 = 50., R2 = 1., R3 = 100., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 3.31000000000103, lambda\_2p = 8.42800000000000, lambda\_3a = 9.11000000000002, lambda\_3p = 14.2280000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 2.99999999999899, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\ \big]\Big] \tag{10}$$

```
NLPSolve( ( ( (5.0000+sa12+sa13 C sa21 C sa31 ) (20.0000
+ (5.0000+sa12+sa13 C sa21 C sa31 ) / R1 ) ) / (52.9512+sa12+sa13 C sa21 C sa31
+sp12+sp13 C sp21 C sp31 )C ( (2.0000+ sp12+sp13 C sp21 C sp31) (50.0000
+ (2.0000+sp12+sp13 C sp21 C sp31 ) / R1 ) ) / (52.9512+sa12+sa13 C sa21 C sa31
+sp12+sp13 C sp21 C sp31 ) ), {( 3.8000+( 5.0000+sa12+sa13 C sa21 C sa31)
/R1 C (3.0000+sa21+sa23 C sa12 C sa32 ) /R2 C lambda_1a) *( sa12)
C (11.2000+ (2.0000+sp12+sp13 C sp21 C sp31 ) /R1 C( 1.0000 sp21+sp23
C sp12 C sp32) /R2 C lambda_1p) * (sp12) C (9.2000+ (5.0000+sa12+sa13
C sa21 C sa31) /R1 C (1.5000+sa31+sa32 C sa13 C sa23 ) /R3 C lambda_1a)
* (sa13) C (15.8000+ ( 2.0000+sp12+sp13 C sp21 C sp31)/R1 C (0.6000+sp31
+sp32 C sp13 C sp23)/R3 C lambda_1p)* (sp13 )C (lambda_2aC (5.0000+sa12
+sa13 C sa21 C sa31 )/R1+ (3.0000+sa21+sa23 C sa12 C sa32 ) /R2+3.5000)
* (sa21) C (lambda_2pC (2.0000+sp12+sp13 C sp21 C sp31 ) /R1+( 1.0000
+sp21+sp23 C sp12 C sp32 ) /R2+8.5000) *( sp21) C( 5.5000+(3.0000+sa21
+sa23 C sa12 C sa32)/R2+ (1.5000+sa31+sa32 C sa13 C sa23 )/ R3
C lambda_2a) * (sa23) C (5.5000+ ( 1.0000+sp21+sp23 C sp12 C sp32) /R2
C (0.6000+sp31+sp32 C sp13 C sp23 ) /R3 C lambda_2p) *( sp23) C( lambda_3a
C (5.0000+sa12+sa13 C sa21 C sa31 ) /R1+( 1.5000+sa31+sa32 C sa13 C sa23)
/R3+9.3000) * (sa31) C( lambda_3pC( 2.0000+sp12+sp13 C sp21 C sp31 /R1
```

$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) \mathrm{C} (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) * (sa_{32}) \mathrm{C} (lambda\_3p \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32})$
$/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) \mathrm{C} (5.0000$
$+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a) \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p) \mathrm{C} (3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a) \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p) \mathrm{C} (1.5000$
$+ sa_{31} + sa_{32}) * (lambda\_3a) \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda\_3p) = 0,$
$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 \mathrm{C}\, lambda\_1a) \mathrm{R}\, 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21}$
$\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 \mathrm{C}\, lambda\_1p) \mathrm{R}\, 0,$
$(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$\mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_1a) \mathrm{R}\, 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21}$
$\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_1p) \mathrm{R}\, 0,$
$(lambda\_2a \mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + 3.5000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_2p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21}$
$\mathrm{C}\, sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2 + 8.5000) \mathrm{R}\, 0, (5.5000$
$+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 \mathrm{C}\, lambda\_2a) \mathrm{R}\, 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_2p) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}) / R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}) \mathrm{R}\, 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) \mathrm{R}\, 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) \mathrm{R}\, 0, (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}) \mathrm{R}\, 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) \mathrm{R}\, 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) \mathrm{R}\, 0, R1$
$= 50, R2 = 5\}, R3 = 100 ,) assume = nonnegative ;$

$[0.221841385079017295, [R1 = 50., R2 = 5., R3 = 100., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0.,$ **(11)**
$lambda\_2a = 3.31000000040201, lambda\_2p = 8.42800000000000, lambda\_3a$
$= 9.11000000003655, lambda\_3p = 14.2280000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}$
$= 2.99999999817270, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}$
$= 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]]$

$NLPSolve((((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} (\mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31} \quad 20.0000$

$+\frac{(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})}{\mathrm{R1}}\Big)\Big)\Big/\Big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$

$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\Big)\mathrm{C}\,\Big(\Big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\Big)\Big(50.0000$
$+\frac{(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})}{\mathrm{R1}}\Big)\Big)\Big/\Big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$

$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\Big)\Big),\ \{(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})$
$/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)*(sa_{12})$
$\mathrm{C}\,(11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\ \ sp_{21}+sp_{23}$
$\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{12})\,\mathrm{C}\,(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}$
$\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)$
$*(sa_{13})\,\mathrm{C}\,(15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}$
$+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{13})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}$
$+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)$
$*(sa_{21})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000$
$+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)*(sp_{21})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(3.0000+sa_{21}$
$+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/R3$
$\mathrm{C}\,lambda\_2a)*(sa_{23})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$
$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)*(sp_{23})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+9.3000)*(sa_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}$
$+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+14.3000)*(sp_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+4.25000)*(sa_{32})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$
$/\mathrm{R2}+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+4.25000)*(sp_{32})\,\mathrm{C}\,(5.0000$
$+sa_{12}+sa_{13})*(lambda\_1a)\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13})*(lambda\_1p)\,\mathrm{C}\,(3.0000$
$+sa_{21}+sa_{23})*(lambda\_2a)\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23})*(lambda\_2p)\,\mathrm{C}\,(1.5000$
$+sa_{31}+sa_{32})*(lambda\_3a)\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32})*(lambda\_3p)=0,$
$(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$
$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\ \ sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$
$(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}$
$\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$
$(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$
$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)\,\mathrm{R}\,0,\ (lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$
$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)\,\mathrm{R}\,0,\ (5.5000$

$+ \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2} + \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right)$
$/ \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_2a\big) \mathrm{R}\, 0, \big(5.5000 + \left(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\right) / \mathrm{R2}$
$\mathrm{C} \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_2p\big) \mathrm{R}\, 0, \big(lambda\_3a$
$\mathrm{C} \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) / \mathrm{R1} + \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right)$
$/ \mathrm{R3} + 9.3000\big) \mathrm{R}\, 0, \big(lambda\_3p\, \mathrm{C} \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1}$
$+ \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3} + 14.3000\big) \mathrm{R}\, 0, \big(lambda\_3a$
$\mathrm{C} \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2} + \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right)$
$/ \mathrm{R3} + 4.25000\big) \mathrm{R}\, 0, \big(lambda\_3p\, \mathrm{C} \left(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\right) / \mathrm{R2}$
$+ \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3} + 4.25000\big) \mathrm{R}\, 0, \big(5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}\big) \mathrm{R}\, 0, \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\right) \mathrm{R}\, 0, \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\right) \mathrm{R}\, 0, \big(1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}\big) \mathrm{R}\, 0, \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\right) \mathrm{R}\, 0, \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\right) \mathrm{R}\, 0, R1$
$= 50, \quad R2 = 10, \} \quad R3 = 100, \quad assume = nonnegative\big);$

$\big[0.221841385103096950, \big[R1 = 50., R2 = 10., R3 = 100., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0.,$ **(12)**
$lambda\_2a = 3.31000000000000, lambda\_2p = 8.42800000000000, lambda\_3a$
$= 9.11000000000000, lambda\_3p = 14.2280000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}$
$= 3.00000000000000, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}$
$= 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\,\big]\big]$

$NLPSolve\Bigg(\bigg(\Big(\big(\left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) \Big(20.0000$
$+ \frac{\left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right)}{\mathrm{R1}}\Big)\Big) \Big/ \big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\big) \mathrm{C} \Big(\left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) \Big(50.0000$
$+ \frac{\left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right)}{\mathrm{R1}}\Big)\Big) \Big/ \big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\big)\bigg), \{\big(3.8000 + \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right)$
$/ \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2}\, \mathrm{C}\, lambda\_1a\big) * \left(sa_{12}\right)$
$\mathrm{C} \big(11.2000 + \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \big(1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23}$
$\mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\big) / \mathrm{R2}\, \mathrm{C}\, lambda\_1p\big) * \left(sp_{12}\right) \mathrm{C} \big(9.2000 + \big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$
$\mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\big) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_1a\big)$
$* \left(sa_{13}\right) \mathrm{C} \big(15.8000 + \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \big(0.6000 + sp_{31}$
$+ sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\big) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_1p\big) * \left(sp_{13}\right) \mathrm{C} \big(lambda\_2a\, \mathrm{C} \big(5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\big) / \mathrm{R1} + \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2} + 3.5000\big)$
$* \left(sa_{21}\right) \mathrm{C} \big(lambda\_2p\, \mathrm{C} \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1} + \big(1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\big) / \mathrm{R2} + 8.5000\big) * \left(sp_{21}\right) \mathrm{C} \big(5.5000 + \big(3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\big) / \mathrm{R2} + \big(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23} \quad / R3$

C lambda_2a) * (sa_{23}) C (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) *(sp_{23}) C(lambda_3a C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 + 9.3000) * (sa_{31}) C (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) C (lambda_3a C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 + 4.25000) * (sa_{32}) C (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13})* (lambda_1a) C(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda_1p) C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23})* (lambda_2a) C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda_2p) C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32})* (lambda_3a) C(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda_3p) = 0, (3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (1.0000 sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p) R 0, (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})/ R1 C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_1p) R 0, (lambda_2a C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32})/ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) R 0, (lambda_3a C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 + 9.3000) R 0, (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})/ R1 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32})/ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}) R 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R 0, (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) R 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R 0, R1 = 10, R2 = 20, R3 = 1 },) assume = nonnegative ;

$$\left[0.221841385103096950, \left[R1 = 10., R2 = 20., R3 = 1., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 2.55000000000000, lambda\_2p = 8.14000000000000, lambda\_3a = 8.35000000000000, lambda\_3p = 13.9400000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 3.00000000000000, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0. \right]\right] \tag{13}$$

$$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Bigg(\big((5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\big(20.0000$$

$$+\frac{(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})}{\mathrm{R1}}\big)\big)\Big/\big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$$

$$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\,\mathrm{C}\,\Big(\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\big)\big(50.0000$$

$$+\frac{(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})}{\mathrm{R1}}\big)\big)\Big/\big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$$

$$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\Big),\ \{(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})$$

$$/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)*(sa_{12})$$

$$\mathrm{C}\,(11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\ \ sp_{21}+sp_{23}$$

$$\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{12})\,\mathrm{C}\,(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}$$

$$\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)$$

$$*(sa_{13})\,\mathrm{C}\,(15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}$$

$$+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*(sp_{13})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}$$

$$+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+3.5000)$$

$$*(sa_{21})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}+(1.0000$$

$$+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}+8.5000)*(sp_{21})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(3.0000+sa_{21}$$

$$+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/R3$$

$$\mathrm{C}\,lambda\_2a)*(sa_{23})\,\mathrm{C}\,(5.5000+(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}$$

$$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)*(sp_{23})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$$

$$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$$

$$/\mathrm{R3}+9.3000)*(sa_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}$$

$$+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+14.3000)*(sp_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$$

$$\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$$

$$/\mathrm{R3}+4.25000)*(sa_{32})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$$

$$/\mathrm{R2}+(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}+4.25000)*(sp_{32})\,\mathrm{C}\,(5.0000$$

$$+sa_{12}+sa_{13})*(lambda\_1a)\,\mathrm{C}\,(2.0000+sp_{12}+sp_{13})*(lambda\_1p)\,\mathrm{C}\,(3.0000$$

$$+sa_{21}+sa_{23})*(lambda\_2a)\,\mathrm{C}\,(1.0000+sp_{21}+sp_{23})*(lambda\_2p)\,\mathrm{C}\,(1.5000$$

$$+sa_{31}+sa_{32})*(lambda\_3a)\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32})*(lambda\_3p)=0,$$

$$(3.8000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/R1\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}$$

$$\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (11.2000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$$

$$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.0000\ \ sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})/\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$$

$$(9.2000+(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}$$

$$\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\,\mathrm{R}\,0,\ (15.8000+(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}$$

$$\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)\,\mathrm{R}\,0,$$

$$\left(lambda\_2a\,\mathrm{C}\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)/R1+\left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}\right)/R2+3.5000\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(lambda\_2p\,\mathrm{C}\left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)/R1+\left(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}\right)/R2+8.5000\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(5.5000+\left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}\right)/R2+\left(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}\right)/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_2a\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(5.5000+\left(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}\right)/R2\,\mathrm{C}\left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}\right)/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_2p\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(lambda\_3a\,\mathrm{C}\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)/R1+\left(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}\right)/R3+9.3000\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(lambda\_3p\,\mathrm{C}\left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)/R1+\left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}\right)/R3+14.3000\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(lambda\_3a\,\mathrm{C}\left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}\right)/R2+\left(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}\right)/R3+4.25000\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(lambda\_3p\,\mathrm{C}\left(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}\right)/R2+\left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}\right)/R3+4.25000\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\right)\mathrm{R}\,0,\ \left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\right)\mathrm{R}\,0,\ R1=10,\ R2=20,\ R3=5\ \},\ assume=nonnegative\ );$$

$$\left[0.221841385102812288,\ \left[R1=10.,\ R2=20.,\ R3=5.,\ lambda\_1a=0.,\ lambda\_1p=0.,\ lambda\_2a=2.55000000000324,\ lambda\_2p=8.14000000000000,\ lambda\_3a=8.35000000000216,\ lambda\_3p=13.9400000000000,\ sa_{12}=0.,\ sa_{13}=0.,\ sa_{21}=2.99999999997840,\ sa_{23}=0.,\ sa_{31}=1.50000000000000,\ sa_{32}=0.,\ sp_{12}=0.,\ sp_{13}=0.,\ sp_{21}=1.,\ sp_{23}=0.,\ sp_{31}=0.600000000000000,\ sp_{32}=0.\right]\right] \tag{14}$$

$$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\bigg(\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)\left(20.0000+\frac{\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)}{R1}\right)\bigg)\Big/\left(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)\mathrm{C}\,\bigg(\left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)\left(50.0000+\frac{\left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)}{R1}\right)\bigg)\Big/\left(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)\Bigg),\ \{\left(3.8000+\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)/R1\,\mathrm{C}\left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}\right)/R2\,\mathrm{C}\,lambda\_1a\right)*\left(sa_{12}\right)\,\mathrm{C}\left(11.2000+\left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)/R1\,\mathrm{C}\left(1.0000\ \ sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32}\right)/R2\,\mathrm{C}\,lambda\_1p\right)*\left(sp_{12}\right)\mathrm{C}\left(9.2000+\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)/R1\,\mathrm{C}\left(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23}\right)/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_1a\right)*\left(sa_{13}\right)\mathrm{C}\left(15.8000+\left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31}\right)/R1\,\mathrm{C}\left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23}\right)/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_1p\right)*\left(sp_{13}\right)\mathrm{C}\left(lambda\_2a\,\mathrm{C}\left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\right)/R1+\left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32}\right)/R2+3.5000\right)$$

$* (sa_{21}) \mathrm{C} (lambda\_2p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) / R1 + (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21}) \mathrm{C} (5.5000 + (3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23} \mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23}) / R3$
$\mathrm{C}\, lambda\_2a) * (sa_{23}) \mathrm{C} (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_2p) * (sp_{23}) \mathrm{C} (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) * (sa_{31}) \mathrm{C} (lambda\_3p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) \mathrm{C} (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) * (sa_{32}) \mathrm{C} (lambda\_3p \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32})$
$/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) \mathrm{C} (5.0000$
$+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a) \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p) \mathrm{C} (3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a) \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p) \mathrm{C} (1.5000$
$+ sa_{31} + sa_{32}) * (lambda\_3a) \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda\_3p) = 0,$
$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 \mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 \mathrm{C}\, lambda\_1a) \mathrm{R}\, 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21}$
$\mathrm{C} sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.0000 \;\; sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2 \mathrm{C}\, lambda\_1p) \mathrm{R}\, 0,$
$(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 \mathrm{C} (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$\mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_1a) \mathrm{R}\, 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21}$
$\mathrm{C} sp_{31}) / R1 \mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_1p) \mathrm{R}\, 0,$
$(lambda\_2a \mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$\mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + 3.5000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_2p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21}$
$\mathrm{C} sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2 + 8.5000) \mathrm{R}\, 0, (5.5000$
$+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 \mathrm{C}\, lambda\_2a) \mathrm{R}\, 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2$
$\mathrm{C} (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 \mathrm{C}\, lambda\_2p) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C} sa_{21} \mathrm{C} sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 + 9.3000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \mathrm{C} (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C} sp_{21} \mathrm{C} sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 + 14.3000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3a$
$\mathrm{C} (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C} sa_{12} \mathrm{C} sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C} sa_{13} \mathrm{C} sa_{23})$
$/ R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0, (lambda\_3p \mathrm{C} (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C} sp_{12} \mathrm{C} sp_{32}) / R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C} sp_{13} \mathrm{C} sp_{23}) / R3 + 4.25000) \mathrm{R}\, 0, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}) \mathrm{R}\, 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) \mathrm{R}\, 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) \mathrm{R}\, 0, (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}) \mathrm{R}\, 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) \mathrm{R}\, 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) \mathrm{R}\, 0, R1$
$= 10, R2 = 20\}, R3 = 10,), assume = nonnegative$;

[0.221841385102943239, [$R1 = 10.$, $R2 = 20.$, $R3 = 10.$, $lambda\_1a = 0.$, $lambda\_1p = 0.$, **(15)**
$lambda\_2a = 2.55000000000175$, $lambda\_2p = 8.14000000000000$, $lambda\_3a$

$= 8.35000000000117, lambda\_3p = 13.9400000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21}$
$= 2.99999999998833, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21}$
$= 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\,]]$

$$NLPSolve\Bigg(\bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})\Big(20.0000 + \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31} + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})\,C\,\Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})\Big(50.0000 + \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31} + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})\bigg),$$

$$\{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})/R1\,C\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32})/R2\,C\,lambda\_1a)*(sa_{12})$$
$$C\,(11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})/R1\,C\,(1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32})/R2\,C\,lambda\_1p)*(sp_{12})\,C\,(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})/R1\,C\,(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23})/R3\,C\,lambda\_1a)$$
$$*(sa_{13})\,C\,(15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})/R1\,C\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23})/R3\,C\,lambda\_1p)*(sp_{13})\,C\,(lambda\_2a\,C\,(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})/R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32})/R2 + 3.5000)$$
$$*(sa_{21})\,C\,(lambda\_2p\,C\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})/R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32})/R2 + 8.5000)*(sp_{21})\,C\,(5.5000 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32})/R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23})/R3$$
$$C\,lambda\_2a)*(sa_{23})\,C\,(5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32})/R2\,C\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23})/R3\,C\,lambda\_2p)*(sp_{23})\,C\,(lambda\_3a\,C\,(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})/R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23})/R3 + 9.3000)*(sa_{31})$$
$$C\,(lambda\_3p\,C\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})/R1 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23})/R3 + 14.3000)*(sp_{31})\,C\,(lambda\_3a\,C\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32})/R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23})/R3 + 4.25000)*(sa_{32})$$
$$C\,(lambda\_3p\,C\,(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32})/R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23})/R3 + 4.25000)*(sp_{32})\,C\,(5.0000 + sa_{12} + sa_{13})*(lambda\_1a)\,C\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13})*(lambda\_1p)\,C\,(3.0000$$
$$+ sa_{21} + sa_{23})*(lambda\_2a)\,C\,(1.0000 + sp_{21} + sp_{23})*(lambda\_2p)\,C\,(1.5000 + sa_{31} + sa_{32})*(lambda\_3a)\,C\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32})*(lambda\_3p) = 0,$$
$$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31})/R1\,C\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32})/R2\,C\,lambda\_1a)\ R\ 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31})/R1\,C\,(1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32})/R2\,C\,lambda\_1p\ R\ 0,$$

$\left(9.2000 + \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_1a\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(15.8000 + \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_1p\right) \mathrm{R}\, 0,$
$\left(lambda\_2a \mathrm{C} \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) / \mathrm{R1} + \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2} + 3.5000\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(lambda\_2p \mathrm{C} \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1} + \left(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\right) / \mathrm{R2} + 8.5000\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(5.5000 + \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2} + \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_2a\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(5.5000 + \left(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\right) / \mathrm{R2}\, \mathrm{C} \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_2p\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(lambda\_3a \mathrm{C} \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) / \mathrm{R1} + \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right) / \mathrm{R3} + 9.3000\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(lambda\_3p \mathrm{C} \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1} + \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3} + 14.3000\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(lambda\_3a \mathrm{C} \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2} + \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{23}\right) / \mathrm{R3} + 4.25000\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(lambda\_3p \mathrm{C} \left(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\right) / \mathrm{R2} + \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} \mathrm{C}\, sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{23}\right) / \mathrm{R3} + 4.25000\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\right) \mathrm{R}\, 0,\ \left(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\right) \mathrm{R}\, 0,\ R1 = 30,\ R2 = 40,\ R3 = 1\ \},\ assume = nonnegative\ );$

$[0.221841385103081379, [R1 = 30., R2 = 40., R3 = 1., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 3.18333333333340, lambda\_2p = 8.38000000000000, lambda\_3a = 8.98333333333337, lambda\_3p = 14.1800000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 2.99999999999881, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]]$ **(16)**

$NLPSolve\left(\left(\left(\left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right)\left(20.0000 + \frac{\left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right)}{\mathrm{R1}}\right)\right) \Big/ \left(52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) \mathrm{C} \left(\left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right)\left(50.0000 + \frac{\left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right)}{\mathrm{R1}}\right)\right) \Big/ \left(52.9512 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right)\right),\ \{\left(3.8000 + \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} \mathrm{C}\, sa_{12} \mathrm{C}\, sa_{32}\right) / \mathrm{R2}\, \mathrm{C}\, lambda\_1a\right) * \left(sa_{12}\right) \mathrm{C} \left(11.2000 + \left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} \mathrm{C}\, sp_{21} \mathrm{C}\, sp_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23} \mathrm{C}\, sp_{12} \mathrm{C}\, sp_{32}\right) / \mathrm{R2}\, \mathrm{C}\, lambda\_1p\right) * \left(sp_{12}\right) \mathrm{C} \left(9.2000 + \left(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} \mathrm{C}\, sa_{21} \mathrm{C}\, sa_{31}\right) / \mathrm{R1}\, \mathrm{C} \left(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} \mathrm{C}\, sa_{13} \mathrm{C}\right) sa_{23}\ \ / \mathrm{R3}\, \mathrm{C}\, lambda\_1a\right)$

* (sa_{13}) C (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31}
+ sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_1p) * (sp_{13}) C (lambda_2a C (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000)
* (sa_{21}) C (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21}) C (5.5000 + (3.0000 + sa_{21}
+ sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / *R3*
C lambda_2a) * (sa_{23}) C (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) * (sp_{23}) C (lambda_3a
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / *R1* + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000) * (sa_{31}) C (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) C (lambda_3a
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000) * (sa_{32}) C (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})
/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) C (5.0000
+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda_1a) C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda_1p) C (3.0000
+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda_2a) C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda_2p) C (1.5000
+ sa_{31} + sa_{32}) * (lambda_3a) C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda_3p) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / *R1* C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (1.0000 sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}
C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_1p) R 0,
(lambda_2a C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) R 0, (lambda_3a
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000) R 0, (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000) R 0, (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13}) R 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R 0, (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23}) R 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R 0, *R1*
= 30, *R2* = 40, *R3* = 5 },) *assume* = *nonnegative* ;

$$\left[0.221841385103096922, \left[R1 = 30., R2 = 40., R3 = 5., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 3.18333333333333, lambda\_2p = 8.38000000000000, lambda\_3a = 8.98333333333333, lambda\_3p = 14.1800000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 3.00000000000000, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1.00000000000000, sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\right]\right] \tag{17}$$

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\Big(20.0000$

$+ \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$

$+ sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\,\mathrm{C}\,\Big((2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\Big(50.0000$

$+ \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})}{R1}\Big)\Big) \Big/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$

$+ sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\Bigg), \{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})$

$/R1\,\mathrm{C}\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\,/R2\,\mathrm{C}\,lambda\_1a) * (sa_{12})$

$\mathrm{C}\,(11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\,/R1\,\mathrm{C}\,(1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23}$

$\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})\,/R2\,\mathrm{C}\,lambda\_1p) * (sp_{12})\,\mathrm{C}\,(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$

$\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\,/R1\,\mathrm{C}\,(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})\,/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)$

$* (sa_{13})\,\mathrm{C}\,(15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\,/R1\,\mathrm{C}\,(0.6000 + sp_{31}$

$+ sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\,/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_1p) * (sp_{13})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2a\,\mathrm{C}\,(5.0000 + sa_{12}$

$+ sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\,/R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\,/R2 + 3.5000)$

$* (sa_{21})\,\mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\,/R1 + (1.0000$

$+ sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})\,/R2 + 8.5000) * (sp_{21})\,\mathrm{C}\,(5.5000 + (3.0000 + sa_{21}$

$+ sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\,/R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})\,/R3$

$\mathrm{C}\,lambda\_2a) * (sa_{23})\,\mathrm{C}\,(5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})\,/R2$

$\mathrm{C}\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\,/R3\,\mathrm{C}\,lambda\_2p) * (sp_{23})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$

$\mathrm{C}\,(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\,/R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$

$/R3 + 9.3000) * (sa_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\,/R1$

$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\,/R3 + 14.3000) * (sp_{31})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3a$

$\mathrm{C}\,(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\,/R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$

$/R3 + 4.25000) * (sa_{32})\,\mathrm{C}\,(lambda\_3p\,\mathrm{C}\,(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$

$/R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\,/R3 + 4.25000) * (sp_{32})\,\mathrm{C}\,(5.0000$

$+ sa_{12} + sa_{13}) * (lambda\_1a)\,\mathrm{C}\,(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda\_1p)\,\mathrm{C}\,(3.0000$

$+ sa_{21} + sa_{23}) * (lambda\_2a)\,\mathrm{C}\,(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda\_2p)\,\mathrm{C}\,(1.5000$

$+ sa_{31} + sa_{32}) * (lambda\_3a)\,\mathrm{C}\,(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda\_3p) = 0,$

$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}\quad /R1\,\mathrm{C}\quad 3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$

$C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2\, C\, lambda\_1a) R\, 0,\ (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1\, C\, (1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2\, C\, lambda\_1p)\ R\, 0,\ (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1\, C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}) / R3\, C\, lambda\_1a) R\, 0,\ (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1\, C\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3\, C\, lambda\_1p)\ R\, 0,\ (lambda\_2a\, C\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2 + 3.5000) R\, 0,\ (lambda\_2p\, C\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2 + 8.5000\ ) R\, 0,\ (5.5000 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}) / R3\, C\, lambda\_2a) R\, 0,\ (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2\, C\, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3\, C\, lambda\_2p)\ R\, 0, (\ lambda\_3a\, C\, (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}) / R3 + 9.3000) R\, 0,\ (lambda\_3p\, C\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3 + 14.3000) R\, 0,\ (lambda\_3a\, C\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}) / R3 + 4.25000) R\, 0,\ (lambda\_3p\, C\ (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}) / R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}) / R3 + 4.25000) R\, 0,\ (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}) R\, 0,\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R\ 0,\ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R\, 0,\ (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) R\, 0,\ (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R\, 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R\, 0,\ R1 = 30,\ R2 = 40,\ R3 = 10\ ,\ )\ assume = nonnegative$;

$$\left[\ 0.221841385103096950,\ [R1 = 30., R2 = 40., R3 = 10., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 3.18333333333333, lambda\_2p = 8.38000000000000, lambda\_3a = 8.98333333333333, lambda\_3p = 14.1800000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 3., sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1., sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\ ]\right] \tag{18}$$

$NLPSolve\Bigg(\ \Bigg(\bigg((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31})\bigg(20.0000 + \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31})}{R1}\bigg)\bigg) \bigg/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) C\ \bigg((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31})\bigg(50.0000 + \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31})}{R1}\bigg)\bigg) \bigg/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31} + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31})\Bigg),\ \{(\ 3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}) / R1\, C\, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}) / R2\, C\, lambda\_1a) * (sa_{12}) C\, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}) / R1\, (C\ 1.0000\ \ sp_{21} + sp_{23}$

C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p) * (sp_{12}) C (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}
C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a)
* (sa_{13}) C (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C(0.6000 + sp_{31}
+ sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_1p)* (sp_{13})C (lambda_2a C (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})/ R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32})/ R2 + 3.5000)
* (sa_{21}) C (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) *(sp_{21}) C(5.5000 + (3.0000 + sa_{21}
+ sa_{23} C sa_{12} C sa_{32})/ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})/ R3
C lambda_2a) * (sa_{23}) C (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) *(sp_{23}) C(lambda_3a
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000)* (sa_{31})C (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})/ R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) C (lambda_3a
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000)* (sa_{32})C (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})
/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) C (5.0000
+ sa_{12} + sa_{13})* (lambda_1a) C(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (lambda_1p) C (3.0000
+ sa_{21} + sa_{23})* (lambda_2a) C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (lambda_2p) C (1.5000
+ sa_{31} + sa_{32})* (lambda_3a) C(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (lambda_3p) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (1.0000 sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda_1p) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}
C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_1p) R 0,
(lambda_2a C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (lambda_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})/ R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})/ R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda_2p) R 0,(lambda_3a
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000) R 0, (lambda_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})/ R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000) R 0, (lambda_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})/ R2
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13}) R 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} R 0, (1.0000

$+sp_{21}+sp_{23})\mathrm{R}\,0,\ (1.5000+sa_{31}+sa_{32})\ \mathrm{R}\,0,(0.6000+sp_{31}+sp_{32})\mathrm{R}\,0,\ R1$
$=\ 50,\quad R2\ =\ 100,\quad R3\ =\ 1\quad ,\quad)\ assume\ =\ nonnegative\quad ;$

$[\ 0.221841385103096894, [R1=50., R2=100., R3=1., lambda\_1a=0., lambda\_1p=0.,$ **(19)**
$lambda\_2a=3.31000000000000, lambda\_2p=8.42800000000000, lambda\_3a$
$=9.11000000000000, lambda\_3p=14.2280000000000, sa_{12}=0., sa_{13}=0., sa_{21}$
$=3.00000000000000, sa_{23}=0., sa_{31}=1.50000000000000, sa_{32}=0., sp_{12}=0., sp_{13}=0., sp_{21}$
$=1., sp_{23}=0., sp_{31}=0.600000000000000, sp_{32}=0.\ ]]$

$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Big(\big((5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\big(20.0000$
$+\ \frac{(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\mathrm{C}sa_{21}\mathrm{C}sa_{31})}{\mathrm{R1}}\big)\Big)\Big/(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$
$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\mathrm{C}\ \Big((2.0000+\ sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\big(50.0000$
$+\ \frac{(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\mathrm{C}sp_{21}\mathrm{C}sp_{31})}{\mathrm{R1}}\big)\Big)\Big/(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31}$
$+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\Big),\ \{(\ 3.8000+(\ 5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})$
$/\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\ /\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)\ *(\ sa_{12})$
$\mathrm{C}\,(11.2000+\ (2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\ /\mathrm{R1}\,\mathrm{C}(\ 1.0000\quad sp_{21}+sp_{23}$
$\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})\ /\mathrm{R2}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*\ (sp_{12})\ \mathrm{C}\ (9.2000+\ (\ 5.0000+sa_{12}+sa_{13}$
$\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\ /\mathrm{R1}\,\mathrm{C}\,(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})\ /\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1a)$
$*\ (sa_{13})\ \mathrm{C}\,(15.8000+\ (2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\ /\mathrm{R1}\,\mathrm{C}(\ 0.6000+sp_{31}$
$+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})/\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_1p)*\ (sp_{13})\,\mathrm{C}\ (lambda\_2a\,\mathrm{C}\ (5.0000+sa_{12}$
$+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})/\mathrm{R1}+\ (3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\ /\mathrm{R2}+3.5000)$
$*\ (sa_{21})\ \mathrm{C}\,(lambda\_2p\,\mathrm{C}\ (2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})\ /\mathrm{R1}+(\ 1.0000$
$+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})\ \ /\mathrm{R2}+8.5000)\ *(\ sp_{21})\ \mathrm{C}(\ 5.5000+(3.0000+sa_{21}$
$+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})/\mathrm{R2}+\ (\ 1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})/\ R3$
$\mathrm{C}\,lambda\_2a)*\ (sa_{23})\ \mathrm{C}\ (5.5000+\ (\ 1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})\ /\mathrm{R2}$
$\mathrm{C}\,(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\ \ /\mathrm{R3}\,\mathrm{C}\,lambda\_2p)\ *(\ sp_{23})\ \mathrm{C}(\ lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{21}\,\mathrm{C}\,sa_{31})\ \ /\,R1+(\ 1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+9.3000)*\ (sa_{31})\,\mathrm{C}\ (lambda\_3p\,\mathrm{C}\ (\ 2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{21}\,\mathrm{C}\,sp_{31})/\mathrm{R1}$
$+\ (0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\ \ /\mathrm{R3}+14.3000)\ *\ (sp_{31})\ \mathrm{C}\,(lambda\_3a$
$\mathrm{C}\,(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,\mathrm{C}\,sa_{12}\,\mathrm{C}\,sa_{32})\ \ /\mathrm{R2}+(\ 1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,\mathrm{C}\,sa_{13}\,\mathrm{C}\,sa_{23})$
$/\mathrm{R3}+4.25000)*\ (sa_{32})\,\mathrm{C}\ (lambda\_3p\,\mathrm{C}\ \ (1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,\mathrm{C}\,sp_{12}\,\mathrm{C}\,sp_{32})$
$/\mathrm{R2}+\ (0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,\mathrm{C}\,sp_{13}\,\mathrm{C}\,sp_{23})\ \ /\mathrm{R3}+4.25000)*\ (\ sp_{32})\ \mathrm{C}\,(5.0000$
$+sa_{12}+sa_{13})*\ (lambda\_1a)\ \mathrm{C}(\ 2.0000+sp_{12}+sp_{13})*\ (lambda\_1p)\,\mathrm{C}\ (3.0000$
$+\ sa_{21}+\ sa_{23})*(\ lambda\_2a)\quad \mathrm{C}(\ \ 1.0000+sp_{21}+sp_{23}\ (*\ \ lambda\_2p\ \ \mathrm{C}(\ \ 1.5000$

```
+ sa_31 + sa_32 )* (lambda_3a )C (0.6000 + sp_31 + sp_32 )* (lambda_3p ) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 C( 3.0000 + sa_21 + sa_23
C sa_12 C sa_32) / R2 C lambda_1a) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
C sp_31) / R1 C (1.0000   sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 ) / R2 C lambda_1p) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 C( 1.5000 + sa_31 + sa_32
C sa_13 C sa_23) / R3 C lambda_1a) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
C sp_31) / R1 C (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 C lambda_1p) R 0,
(lambda_2a C (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 + ( 3.0000 + sa_21 + sa_23
C sa_12 C sa_32) / R2 + 3.5000 ) R 0, (lambda_2p C (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21
C sp_31) / R1 + (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 ) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32 ) / R2 + (1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23 )
/ R3 C lambda_2a) R 0, (5.5000 + ( 1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 ) / R2
C (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 C lambda_2p) R 0,( lambda_3a
C (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 +( 1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 + 9.3000 ) R 0, (lambda_3p C ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 ) / R1
+ (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda_3a
C (3.0000 + sa_21 + sa_23 C sa_12 C sa_32 ) / R2 +( 1.5000 + sa_31 + sa_32 C sa_13 C sa_23)
/ R3 + 4.25000 ) R 0, (lambda_3p C (1.0000 + sp_21 + sp_23 C sp_12 C sp_32 ) / R2
+ (0.6000 + sp_31 + sp_32 C sp_13 C sp_23 ) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_12
+ sa_13 ) R 0, (2.0000 + sp_12 + sp_13 ) R 0,( 3.0000 + sa_21 + sa_23) R 0, (1.0000
+ sp_21 + sp_23 ) R 0, (1.5000 + sa_31 + sa_32 ) R 0, ( 0.6000 + sp_31 + sp_32 ) R 0, R1
= 50, R2 = 100, R3 = 5 , )assume = nonnegative ;
```

$$\left[0.221841385103096977, \left[R1 = 50., R2 = 100., R3 = 5., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0., lambda\_2a = 3.31000000000000, lambda\_2p = 8.42800000000000, lambda\_3a = 9.11000000000000, lambda\_3p = 14.2280000000000, sa_{12} = 0., sa_{13} = 0., sa_{21} = 3.00000000000000, sa_{23} = 0., sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 0.999999999999998, sp_{23} = 0., sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.\right]\right] \quad \textbf{(20)}$$

```
NLPSolve( ( ( (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) (20.0000

+ (5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31 ) / R1 ) ) / (52.9512 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31

+ sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 )C ( ( 2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) (50.0000
+ (2.0000 + sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31 ) / R1 ) ) / (52.9512 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C sa_31

+ sp_12 + sp_13 C sp_21 C sp_31) ) ,{( 3.8000 + 5.0000 + sa_12 + sa_13 C sa_21 C) sa_31
```

/R1 C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) /R2 C *lambda_1a*) *(sa_{12})
C (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) /R1 C(1.0000 sp_{21} + sp_{23}
C sp_{12} C sp_{32}) /R2 C *lambda_1p*) * (sp_{12}) C (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}
C sa_{21} C sa_{31}) /R1 C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) /R3 C *lambda_1a*)
* (sa_{13}) C (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) /R1 C(0.6000 + sp_{31}
+ sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 C *lambda_1p*) * (sp_{13}) C (*lambda_2a* C (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) /R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) /R2 + 3.5000)
* (sa_{21}) C (*lambda_2p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) /R1 + (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) /R2 + 8.5000) *(sp_{21}) C(5.5000 + (3.0000 + sa_{21}
+ sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) /R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) /*R3*
C *lambda_2a*) * (sa_{23}) C (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) /R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 C *lambda_2p*) *(sp_{23}) C(*lambda_3a*
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) /*R1* +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/R3 + 9.3000) * (sa_{31}) C (*lambda_3p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) /R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 + 14.3000) * (sp_{31}) C (*lambda_3a*
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) /R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/R3 + 4.25000) * (sa_{32}) C (*lambda_3p* C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})
/R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 + 4.25000) * (sp_{32}) C (5.0000
+ sa_{12} + sa_{13}) * (*lambda_1a*) C(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (*lambda_1p*) C (3.0000
+ sa_{21} + sa_{23}) * (*lambda_2a*) C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (*lambda_2p*) C (1.5000
+ sa_{31} + sa_{32}) * (*lambda_3a*) C(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (*lambda_3p*) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) /*R1* C(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) /R2 C *lambda_1a*) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) /R1 C (1.0000 sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) /R2 C *lambda_1p*) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) /R1 C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}
C sa_{13} C sa_{23}) /R3 C *lambda_1a*) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) /R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 C *lambda_1p*) R 0,
(*lambda_2a* C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) /R1 +(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) /R2 + 3.5000) R 0, (*lambda_2p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) /R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) /R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) /R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/R3 C *lambda_2a*) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) /R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 C *lambda_2p*) R 0,(*lambda_3a*
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) /R1 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/R3 + 9.3000) R 0, (*lambda_3p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) /R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) /R3 + 14.3000) R 0, (*lambda_3a*
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) /R2 +(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/R3 + 4.25000) R 0,(*lambda_3p* C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) /R2

$$+\left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23}\right)/R3+4.25000\Big)\,R\,0,\ \left(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\right)R\,0,\ \left(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\right)R\,0,\left(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\right)R\,0,\ \left(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\right)R\,0,\ \left(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\right)R\,0,\left(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\right)R\,0,\ R1=50,\ R2=100\},\ R3=10\ ,\ assume=nonnegative\Big);$$

$$\Big[0.221841385103096950,\ \big[R1=50.,\ R2=100.,\ R3=10.,\ lambda\_1a=0.,\ lambda\_1p=0.,\ lambda\_2a=3.31000000000000,\ lambda\_2p=8.42800000000000,\ lambda\_3a=9.11000000000000,\ lambda\_3p=14.2280000000000,\ sa_{12}=0.,\ sa_{13}=0.,\ sa_{21}=3.00000000000000,\ sa_{23}=0.,\ sa_{31}=1.50000000000000,\ sa_{32}=0.,\ sp_{12}=0.,\ sp_{13}=0.,\ sp_{21}=1.00000000000000,\ sp_{23}=0.,\ sp_{31}=0.600000000000000,\ sp_{32}=0.\big]\Big] \qquad \textbf{(21)}$$

$$NLPSolve\Bigg(\Bigg(\Big(\big(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}\big)\Big(20.0000+\frac{\big(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}\big)}{R1}\Big)\Big)\Big/\big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)\,C\,\Big(\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)\Big(50.0000+\frac{\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)}{R1}\Big)\Big)\Big/\big(52.9512+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)\Bigg),$$

$$\{\big(3.8000+\big(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}\big)/R1\,C\,\big(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32}\big)/R2\,C\,lambda\_1a\big)*\big(sa_{12}\big)\,C\,\big(11.2000+\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)/R1\,C\,\big(1.0000\ \ sp_{21}+sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32}\big)/R2\,C\,lambda\_1p\big)*\big(sp_{12}\big)\,C\,\big(9.2000+\big(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}\big)/R1\,C\,\big(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23}\big)/R3\,C\,lambda\_1a\big)*\big(sa_{13}\big)\,C\,\big(15.8000+\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)/R1\,C\,\big(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23}\big)/R3\,C\,lambda\_1p\big)*\big(sp_{13}\big)\,C\,\big(lambda\_2a\,C\,\big(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}\big)/R1+\big(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32}\big)/R2+3.5000\big)*\big(sa_{21}\big)\,C\,\big(lambda\_2p\,C\,\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)/R1+\big(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32}\big)/R2+8.5000\big)*\big(sp_{21}\big)\,C\,\big(5.5000+\big(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32}\big)/R2+\big(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23}\big)/R3\,C\,lambda\_2a\big)*\big(sa_{23}\big)\,C\,\big(5.5000+\big(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32}\big)/R2\,C\,\big(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23}\big)/R3\,C\,lambda\_2p\big)*\big(sp_{23}\big)\,C\big(lambda\_3a\,C\,\big(5.0000+sa_{12}+sa_{13}\,C\,sa_{21}\,C\,sa_{31}\big)/R1+\big(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23}\big)/R3+9.3000\big)*\big(sa_{31}\big)\,C\,\big(lambda\_3p\,C\,\big(2.0000+sp_{12}+sp_{13}\,C\,sp_{21}\,C\,sp_{31}\big)/R1+\big(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23}\big)/R3+14.3000\big)*\big(sp_{31}\big)\,C\,\big(lambda\_3a\,C\,\big(3.0000+sa_{21}+sa_{23}\,C\,sa_{12}\,C\,sa_{32}\big)/R2+\big(1.5000+sa_{31}+sa_{32}\,C\,sa_{13}\,C\,sa_{23}\big)/R3+4.25000\big)*\big(sa_{32}\big)\,C\,\big(lambda\_3p\,C\,\big(1.0000+sp_{21}+sp_{23}\,C\,sp_{12}\,C\,sp_{32}\big)/R2+\big(0.6000+sp_{31}+sp_{32}\,C\,sp_{13}\,C\,sp_{23}\big)/R3+4.25000\big)*\big(sp_{32}\big)\,C\ 5.0000$$

$+ sa_{12} + sa_{13})*(lambda\_1a)\ C(2.0000 + sp_{12} + sp_{13})*(lambda\_1p)\ C\ (3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23})*(lambda\_2a)\ C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23})*(lambda\_2p)\ C\ (1.5000$
$+ sa_{31} + sa_{32})*(lambda\_3a)\ C(0.6000 + sp_{31} + sp_{32})*(lambda\_3p) = 0,$
$(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31})\ /\ R1\ C(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$C\ sa_{12}\ C\ sa_{32})\ /\ R2\ C\ lambda\_1a)\ R\ 0,\ (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\ C\ sp_{21}$
$C\ sp_{31})\ /\ R1\ C\ (1.0000\quad sp_{21} + sp_{23}\ C\ sp_{12}\ C\ sp_{32})\ /\ R2\ C\ lambda\_1p)\ R\ 0,$
$(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31})\ /\ R1\ C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$C\ sa_{13}\ C\ sa_{23})\ /\ R3\ C\ lambda\_1a)\ R\ 0,\ (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\ C\ sp_{21}$
$C\ sp_{31})\ /\ R1\ C\ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\ C\ sp_{13}\ C\ sp_{23})\ /\ R3\ C\ lambda\_1p)\ R\ 0,$
$(lambda\_2a\ C\ (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31})\ /\ R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$C\ sa_{12}\ C\ sa_{32})\ /\ R2 + 3.5000)\ R\ 0,\ (lambda\_2p\ C\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\ C\ sp_{21}$
$C\ sp_{31})\ /\ R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\ C\ sp_{12}\ C\ sp_{32})\ /\ R2 + 8.5000)\ R\ 0,\ (5.5000$
$+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\ C\ sa_{12}\ C\ sa_{32})\ /\ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\ C\ sa_{13}\ C\ sa_{23})$
$/\ R3\ C\ lambda\_2a)\ R\ 0,\ (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\ C\ sp_{12}\ C\ sp_{32})\ /\ R2$
$C\ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\ C\ sp_{13}\ C\ sp_{23})\ /\ R3\ C\ lambda\_2p)\ R\ 0,\ (lambda\_3a$
$C\ (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31})\ /\ R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\ C\ sa_{13}\ C\ sa_{23})$
$/\ R3 + 9.3000)\ R\ 0,\ (lambda\_3p\ C\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\ C\ sp_{21}\ C\ sp_{31})\ /\ R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\ C\ sp_{13}\ C\ sp_{23})\ /\ R3 + 14.3000)\ R\ 0,\ (lambda\_3a$
$C\ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}\ C\ sa_{12}\ C\ sa_{32})\ /\ R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}\ C\ sa_{13}\ C\ sa_{23})$
$/\ R3 + 4.25000)\ R\ 0,\ (lambda\_3p\ C\ (1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\ C\ sp_{12}\ C\ sp_{32})\ /\ R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\ C\ sp_{13}\ C\ sp_{23})\ /\ R3 + 4.25000)\ R\ 0,\ (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13})\ R\ 0,\ (2.0000 + sp_{12} + sp_{13})\ R\ 0,\ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23})\ R\ 0,\ (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23})\ R\ 0,\ (1.5000 + sa_{31} + sa_{32})\ R\ 0,\ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32})\ R\ 0,\ R1$
$= 0.001,\ R2 = 0.001,\ R3 = 200000000000000\},\ assume = nonnegative);$

$[\ 0.000545933448320114722,\ [R1 = 0.00100000000000000, R2 = 0.00100000000000000, R3$ **(22)**
$= 2.00000000000000\ 10^{14},\ lambda\_1a = 0.100000000000001,\ lambda\_1p = 0.,\ lambda\_2a$
$= 0.,\ lambda\_2p = 0.,\ lambda\_3a = 0.,\ lambda\_3p = 0.,\ sa_{12} = 0.,\ sa_{13} = 5.00000000000000,$
$sa_{21} = 0.,\ sa_{23} = 2.99450000000000,\ sa_{31} = 0.00930000000000094,\ sa_{32} = 0.,\ sp_{12} = 0.,\ sp_{13}$
$= 1.98420000000000,\ sp_{21} = 0.,\ sp_{23} = 0.994500000000000,\ sp_{31} = 0.,\ sp_{32} = 0.\ ]]$

$NLPSolve\Bigg(\ \Bigg(\Big(\big((5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31})\ (20.0000$

$+ \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31})}{R1}\big)\Big)\Big/\ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13}\ C\ sa_{21}\ C\ sa_{31}$

$+ sp_{12} + sp_{13}\ C\ sp_{21}\ C\ sp_{31})\ C\Big((\quad 2.0000 + \ sp_{12} + sp_{13}\ C\ sp_{21}\ C\ sp_{31}\quad 50.0000$

$+ \frac{\left(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}\right)}{R1} \Big)\Big) \Big/ \Big(52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}$

$+ sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}\Big),\ \{\Big(\ 3.8000 + \big(\ 5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big)$
$/ R1\, C \big(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big)\ / R2\, C\, lambda\_1a\Big) * \big(\ sa_{12}\big)$
$C \big(11.2000 + \big(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}\big) / R1\, C \big(\ 1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23}$
$C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big) / R2\, C\, lambda\_1p\big) * \big(sp_{12}\big) C \big(9.2000 + \big(\ 5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$
$C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big) / R1\, C \big(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big)\ / R3\, C\, lambda\_1a\big)$
$* \big(sa_{13}\big) C \big(15.8000 + \big(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}\big) / R1\, C \big(\ 0.6000 + sp_{31}$
$+ sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}\big) / R3\, C\, lambda\_1p\big) * \big(sp_{13}\big) C \big(lambda\_2a\, C\ \big(\ 5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big) / R1 + \big(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big)\ / R2 + 3.5000\big)$
$* \big(sa_{21}\big) C \big(lambda\_2p\, C \big(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}\big)\ / R1 + \big(\ 1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big)\ / R2 + 8.5000\big) * \big(\ sp_{21}\big)\ C \big(\ 5.5000 + \big(3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big) / R2 + \big(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big) / R3$
$C\, lambda\_2a\big) * \big(sa_{23}\big) C \big(5.5000 + \big(\ 1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big) / R2$
$C \big(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}\big)\ / R3\, C\, lambda\_2p\big) * \big(\ sp_{23}\big)\ C \big(\ lambda\_3a$
$C \big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big)\ / R1 + \big(\ 1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big)$
$/ R3 + 9.3000\big) * \big(sa_{31}\big) C \big(lambda\_3p\, C\ \big(\ 2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21} C\, sp_{31}\big) / R1$
$+ \big(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}\big)\ / R3 + 14.3000\big) * \big(sp_{31}\big) C \big(lambda\_3a$
$C \big(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big)\ / R2 + \big(\ 1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big)$
$/ R3 + 4.25000\big) * \big(sa_{32}\big) C \big(lambda\_3p\, C\ \big(\ 1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big)$
$/ R2 + \big(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}\big)\ / R3 + 4.25000\big) * \big(sp_{32}\big) C \big(5.0000$
$+ sa_{12} + sa_{13}\big) * \big(lambda\_1a\big)\ C \big(\ 2.0000 + sp_{12} + sp_{13}\big) * \big(lambda\_1p\big) C \big(3.0000$
$+ sa_{21} + sa_{23}\big) * \big(lambda\_2a\big)\ C \big(\ 1.0000 + sp_{21} + sp_{23}\big) * \big(lambda\_2p\big) C \big(1.5000$
$+ sa_{31} + sa_{32}\big) * \big(lambda\_3a\big)\ C \big(\ 0.6000 + sp_{31} + sp_{32}\big) * \big(lambda\_3p\big) = 0,$
$\big(3.8000 + \big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big)\ / R1\, C \big(\ 3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big) / R2\, C\, lambda\_1a\big) R\, 0,\ \big(11.2000 + \big(\ 2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21}$
$C\, sp_{31}\big) / R1\, C \big(1.0000 \quad sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big)\ / R2\, C\, lambda\_1p\big)\ R\, 0,$
$\big(9.2000 + \big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big)\ / R1\, C \big(\ 1.5000 + sa_{31} + sa_{32}$
$C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big) / R3\, C\, lambda\_1a\big) R\, 0,\ \big(15.8000 + \big(\ 2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21}$
$C\, sp_{31}\big) / R1\, C \big(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}\big)\ / R3\, C\, lambda\_1p\big)\ R\, 0,$
$\big(lambda\_2a\, C \big(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big)\ / R1 + \big(\ 3.0000 + sa_{21} + sa_{23}$
$C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big) / R2 + 3.5000\big) R\, 0,\ \big(lambda\_2p\, C\ \big(\ 2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C\, sp_{21}$
$C\, sp_{31}\big) / R1 + \big(1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big)\ / R2 + 8.5000\big) R\, 0,\ \big(5.5000$
$+ \big(3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C\, sa_{12} C\, sa_{32}\big)\ / R2 + \big(1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big)$
$/ R3\, C\, lambda\_2a\big) R\, 0,\ \big(5.5000 + \big(\ 1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C\, sp_{12} C\, sp_{32}\big) / R2$
$C \big(0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C\, sp_{13} C\, sp_{23}\big)\ / R3\, C\, lambda\_2p\big)\ R\, 0, \big(\ lambda\_3a$
$C \big(\ 5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C\, sa_{21} C\, sa_{31}\big)\ \ / R1 + \big(\ 1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C\, sa_{13} C\, sa_{23}\big)$

$/R3 + 9.3000) R 0, (lambda\_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (lambda\_3a$
$C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})$
$/R3 + 4.25000) R 0, (lambda\_3p C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2$
$+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13}) R 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R 0, (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23}) R 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R 0, R1$
$= 1, R2 = 5000, R3 = 10 \}, assume = nonnegative)$;

$[0.138721934289440158, [R1 = 1., R2 = 5000., R3 = 10., lambda\_1a = 0., lambda\_1p = 0.,$ **(23)**
$lambda\_2a = 0., lambda\_2p = 4.90000000000000, lambda\_3a = 5.49886022795441,$
$lambda\_3p = 10.7000000000000, sa_{12} = 2.69886022795441, sa_{13} = 0., sa_{21} = 0., sa_{23} = 0.,$
$sa_{31} = 1.50000000000000, sa_{32} = 0., sp_{12} = 0., sp_{13} = 0., sp_{21} = 1.00000000000000, sp_{23} = 0.,$
$sp_{31} = 0.600000000000000, sp_{32} = 0.]]$

$NLPSolve\left(\left(\left((5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) \left(20.0000 + \frac{(5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})}{R1}\right)\right) \middle/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}\right.\right.$
$+ sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) C \left((2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) \left(50.0000 + \frac{(2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})}{R1}\right)\right) \middle/ (52.9512 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}$
$+ sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31})), \{(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31})$
$/R1 C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C lambda\_1a) * (sa_{12})$
$C (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (1.0000 \; sp_{21} + sp_{23}$
$C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C lambda\_1p) * (sp_{12}) C (9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13}$
$C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C lambda\_1a)$
$* (sa_{13}) C (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31}$
$+ sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda\_1p) * (sp_{13}) C (lambda\_2a C (5.0000 + sa_{12}$
$+ sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000)$
$* (sa_{21}) C (lambda\_2p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1 + (1.0000$
$+ sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) * (sp_{21}) C (5.5000 + (3.0000 + sa_{21}$
$+ sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23}) / R3$
$C lambda\_2a) * (sa_{23}) C (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2$
$C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C lambda\_2p) * (sp_{23}) C (lambda\_3a$
$C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})$
$/R3 + 9.3000) * (sa_{31}) C (lambda\_3p C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1$

+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) * (sp_{31}) C (*lambda_3a*
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000)* (sa_{32})C (*lambda_3p* C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32})
/ R2 + (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) * (sp_{32}) C (5.0000
+ sa_{12} + sa_{13})* (*lambda_1a*) C(2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) * (*lambda_1p*) C (3.0000
+ sa_{21} + sa_{23})* (*lambda_2a*) C(1.0000 + sp_{21} + sp_{23}) * (*lambda_2p*) C (1.5000
+ sa_{31} + sa_{32})* (*lambda_3a*) C(0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) * (*lambda_3p*) = 0,
(3.8000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / *R1* C(3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 C *lambda_1a*) R 0, (11.2000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (1.0000 sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 C *lambda_1p*) R 0,
(9.2000 + (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 C(1.5000 + sa_{31} + sa_{32}
C sa_{13} C sa_{23}) / R3 C *lambda_1a*) R 0, (15.8000 + (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C *lambda_1p*) R 0,
(*lambda_2a* C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}
C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + 3.5000) R 0, (*lambda_2p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21}
C sp_{31}) / R1 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2 + 8.5000) R 0, (5.5000
+ (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 C *lambda_2a*) R 0, (5.5000 + (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
C (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 C *lambda_2p*) R 0, (*lambda_3a*
C (5.0000 + sa_{12} + sa_{13} C sa_{21} C sa_{31}) / R1 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 9.3000) R 0, (*lambda_3p* C (2.0000 + sp_{12} + sp_{13} C sp_{21} C sp_{31}) / R1
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 14.3000) R 0, (*lambda_3a*
C (3.0000 + sa_{21} + sa_{23} C sa_{12} C sa_{32}) / R2 + (1.5000 + sa_{31} + sa_{32} C sa_{13} C sa_{23})
/ R3 + 4.25000) R 0, (*lambda_3p* C (1.0000 + sp_{21} + sp_{23} C sp_{12} C sp_{32}) / R2
+ (0.6000 + sp_{31} + sp_{32} C sp_{13} C sp_{23}) / R3 + 4.25000) R 0, (5.0000 + sa_{12}
+ sa_{13}) R 0, (2.0000 + sp_{12} + sp_{13}) R 0, (3.0000 + sa_{21} + sa_{23}) R 0, (1.0000
+ sp_{21} + sp_{23}) R 0, (1.5000 + sa_{31} + sa_{32}) R 0, (0.6000 + sp_{31} + sp_{32}) R 0, *R1*
= 2, *R2* = 60, *R3* = 70}, *assume* = *nonnegative*);