UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE FILOSOFIA Y LETRAS

FACULTAD DE CIENCIAS FISICO-MATEMATICAS

PROPUESTA DIDACTICA

EL USO DE LA COMPUTADORA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA PARA INGENIERIA

Que para obtener el Grado de
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
con Especialidad en Matemáticas

PRESENTA:

MIGUEL ANGEL PATLAN RODRIGUEZ

Ciudad Universitaria San Nicolás de los Garza, N. L.

FEBRERO 1999

M A E

MATEMATICAS

1999

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN.

FACULTAD DE FILOSOFÍA Y LETRAS.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

PROPUESTA DIDÁCTICA.

EL USO DE LA COMPUTADORA
EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.
PARA INGENIERÍA

Que para obtener el Grado de
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
con Especialidad en Matemáticas.

Presenta:
MIGUEL ANGEL PATLÁN RODRÍGUEZ.

Ciudad Universitaria. San Nicolás de los Garza, N. L.

Febrero 1999.

Dedico la presente
como muestra de agradecimiento
por su valiosa ayuda
a la
Dra. Rosa Alicia Vázquez Cedeño

RESUMEN

En la presenta propuesta se destaca, cómo el desarrollo tecnológico ha impactado el proceso de enseñanza-aprendizaje. De manera particular la computadora se considera como un recurso didáctico, haciendo énfasis sobre las ventajas que nos ofrece en cuánto a la graficación. Se muestra cómo en algunos temas particulares de matemáticas, las gráficas por computadora pueden ayudar en la comprensión de conceptos, la resolución e interpretación de problemas, etc. Las gráficas se obtienen utilizando el paquete computacional Derive.

ÍNDICE

PÁGINA

INTRODUCCIÓN---1

CONTEXTO Y TEORÍA--4

PROPUESTA DIDÁCTICA------------------------------------18

CONCLUSIONES--31

PERSPECTIVAS Y RECOMENDACIONES-------------------32

BIBLIOGRAFÍA---33

ANEXOS--34

INTRODUCCIÓN

La educación que tenemos no es la que recibieron nuestros padres y también difiere de la que hoy llevan nuestros hijos, es decir la educación cambia según el contexto social.

Con la llegada al sector educativo de las computadoras, el proceso de enseñanza aprendizaje debe sufrir un cambio importante, en el sentido de que por ejemplo, la enseñanza de la matemática caracterizada por ser de cierta forma estática, algo formal y rigurosa, se convierta en un proceso más dinámico.

La computadora además de ser útil como instrumento de apoyo para realizar cálculos, ofrece la oportunidad de considerarla como un poderoso recurso didáctico, dado que se han desarrollado programas especialmente para graficar figuras geométricas o funciones matemáticas, estos programas tienen muchas ventajas sobre el pizarrón o lápiz y papel ya que despliegan gráficas complejas con gran velocidad y precisión, esto por supuesto con el uso adecuado por parte de maestros y alumnos.

En el campo de la enseñanza se destaca la importancia de los instrumentos audiovisuales, al respecto señala Gastón Fernández, (1983) "Las estadísticas demuestran que el destinatario de un mensaje recuerda del 30 al 35 por ciento de lo que ve y del 10 al 15 de lo que oye. Esto prueba que el oído no ayuda mucho a imprimir en nuestra mente un mensaje recibido, en tanto que el oído y la vista, conjuntamente, permiten hacer recordar mejor lo que les es comunicado."

"Partiendo del principio de que las cosas que podemos ver dejan una impresión más duradera en nuestra mente, es que cada vez con mayor intensidad y provecho se usan en comunicación los instrumentos audiovisuales, llamados también ayudas audiovisuales, puesto que ayudan a transmitir un mensaje con mayor evidencia y comprensión."

"Para comprender la importancia que tales instrumentos tienen en el campo de la enseñanza, por ejemplo, bástenos saber que estadísticas recientes han demostrado que el 81 por ciento de los alumnos presta atención a un film, mientras solo el 54 por ciento de los mismos presta atención a una conferencia; y que mientras un alumno recuerda el 20 por ciento de lo que se le enseña con ayuda de medios auxiliares audiovisuales, solo comprende y recuerda el 5 por ciento de las enseñanzas orales."

"Estas ayudas o materiales dinámicos, que incluyen el pizarrón, los rotafolios, mapas, diagramas, planos, dibujos, maquetas a escala reducida e incluso los objetos mismos que sean objeto de la conferencia o exposición oral, sirven de complemento a las formas verbales y contribuyen a presentar el tema en forma más clara y más convincente."

"Las ayudas visuales proyectadas, como diapositivas, tiras filmicas y películas, resultan especialmente muy útiles para la descripción de personas, lugares, objetos o sucesos que se aparten de lo común. Ha de tenerse en cuenta que las comunicaciones visuales son mensajes sintéticos que hablan a los ojos y son más eficaces que las palabras. Estos medios o ayudas a que nos hemos referido, se emplean para expresar visualmente un concepto o una idea y sirven para estimular la imaginación o poner de relieve una idea básica."

Un recurso didáctico muy común en la clase de matemáticas es la graficación en el pizarrón, también exponemos a los alumnos diversas gráficas en tareas, exámenes y materiales didácticos impresos como libros y folletos. La graficación se usa sobre todo para ilustrar conceptos geométricos, en cálculo para visualizar el comportamiento de funciones, en estadística las gráficas juegan un papel importante,y en general en la visualización e interpretación de los distintos entes matemáticos. Con el advenimiento de las microcomputadoras que cada vez están más al alcance de todos se nos presenta una importante herramienta para la graficación.

En nuestra experiencia docente nos hemos dado cuenta que por lo regular los alumnos tienen dificultad en la parte gráfica o interpretación geométrica de algunos problemas, los relacionados con el álgebra, el cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales, series de Fourier, por sólo destacar los más importantes. Por ejemplo a veces los alumnos no tienen la idea de la forma gráfica que tienen las funciones trigonométricas, la función coseno la dibujan trazando segmentos de rectas en lugar de darle la forma de onda, también en algunos casos una función cuadrática o cúbica la dibujan como rectas. Es decir los alumnos no logran la conexión entre representaciones gráficas y algebráicas, y no sólo esto sino también aquellas que conllevan a traslación, amplificación, reducción, rotación etc.

Los estudiantes normalmente no saben interpretar gráficamente las funciones, ecuaciones o en general las expresiones matemáticas. Esto es un **problema en el proceso de enseñanza aprendizaje**, que es el proceso docente educativo de la matemática de la **Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León,** delimitando el campo de acción a la utilización de recursos didácticos en especial el uso de las técnicas de computo que nos lleva a interrogarnos **¿Cómo contribuir con los recursos computacionales actuales al desarrollo de las habilidades de la representación gráfica para la matemática?**. Con el **objetivo de contribuir al logro de una mayor motivación y asimilación de conceptos**, que abordamos en nuestros cursos.

La importancia de nuestro trabajo radica que a partir de nuestra propia práctica y experiencia pretendemos mostrar cuan valiosa son las posibilidades que ofrece el uso de un paquete computacional (en nuestro caso el Derive) en el desarrollo de nuestra actividad académica en la enseñanza de las matemáticas. De esta forma planteamos como **hipótesis** del trabajo que **si se introduce al proceso de la enseñanza de la matemática la utilización de las técnicas de computo como recurso didáctico, entonces probablemente se lograra en el estudiantado una mayor motivación hacia las matemáticas, y por ende una mayor asimilación de la materia impartida.**

TAREAS CIENTÍFICAS PARA LA REALIZACIÓN DE LA PROPUESTA DIDÁCTICA

*Estudios de materiales referidos a la introducción de la computación en la enseñanza.

*Análisis lógico-histórico de las computadoras en la enseñanza.

*Estudio del sistema computacional Derive.

*Análisis de materiales de matemáticas en relación con los programas que se imparten en la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

*Elaboración de actividades relacionadas con la matemática y el uso de sistemas computacionales.

1.-CONTEXTO Y TEORÍA

1.1-ANÁLISIS LÓGICO-HISTÓRICO DE LAS COMPUTADORAS EN LA ENSEÑANZA

Tal como se plantea en P.C. Magazine (1993) ,las computadoras electromecánicas y electrónicas nacieron al final de los 30 y principios de los 40 en las universidades; sin embargo, tuvieron que pasar más de diez años antes de que se pensara seriamente en utilizarlas en para la enseñanza. Algunas de las universidades que estuvieron involucradas fueron la de Iowa, Pennsylvania, Harvard, Cambridge (Inglaterra) y Princeton. Asismismo, estuvieron involucrados centros de investigación industrial y militar como los Laboratorios Bell de la compañía telefónica americana y el Ballistic Research Laboratory de los campos de prueba de Aberdeen, Maryland, EUA. Las primeras aplicaciones de las computadoras fueron el cálculo de tablas balísticas para ayudar a los artilleros que combatieron en la segunda guerra mundial. En las universidades, las aplicaciones fueron a la investigación científica y tecnológica. Las aplicaciones a la enseñanza se dieron hasta la década de los 60.

Antes de la enseñanza las computadoras se utilizaron para apoyar procesos comerciales como el cálculo de nominas, control de inventarios y cuentas por cobrar. La razón por la que tardó tanto la aplicación de las computadoras a la educación, es que las primeras computadoras eran sumamente costosas y para que fueran rentables operaban en la modalidad de procesamiento en lote. Los usuarios sometían sus programas y datos por medio de tarjetas perforadas en un mostrador y regresaban por sus resultados varias horas después o al día siguiente. Cualquier error de una coma significaba un retraso adicional de varias horas. Dada esta ineficiente interacción, al escribir un programa relativamente sencillo y dejarlo funcionando correctamente, era una labor de semanas o meses; por lo tanto, solo se usaban las computadoras para proyectos importantes de investigación o tesis de grado , y no como ayuda en el proceso de enseñanza aprendizaje. Una vez que se desarrolló el tiempo compartido en el M. I. T. (Massachusetts Institute of Techonolgy) a principios de la década de los 60, aparecieron las grandes computadoras con muchas terminales conectadas, y en las cuales trabajan simultáneamente decenas y hasta centenares de personas cada quién en lo suyo. Fue entonces cuando se iniciaron proyectos serios para utilizar la computadora como auxiliar en el proceso enseñanza aprendizaje.

La automatización de la enseñanza no comenzó con la computadora. En la década de los 20, Sydney Pressey, profesor de un curso masivo introductorio de psicología educativa en la Universidad de Ohio, le ponía a sus alumnos pruebas semanales que estimó le llevaba al que calificaba, cinco meses al semestre de tiempo completo. Considerando que ese tiempo se podía utilizar de una manera más útil, procedió a diseñar una máquina parecida al carro modificado de una máquina de escribir con cuatro teclas y una ventana larga por la cual se podía ver un marco con una pregunta y cuatro posibles respuestas. Después de leer las preguntas, los estudiantes seleccionaban la respuesta más adecuada por medio de una de las teclas. Una prueba típica tenía treinta preguntas.

Pressey se dio cuenta que con ciertas modificaciones, la maquina no solo examinaba a los alumnos sino que también tenía algunas propiedades instruccionales, puesto que, como las preguntas Socráticas, los marcos podían enseñar. Pressey presentó una de sus máquinas en la reunión anual de la Asociación Psicológica Americana en 1934 y posteriormente publicó artículos sobre ellas. En 1932 Pressey confiaba tanto en sus máquinas que predijo una revolución industrial en la educación; revolución que no se llevó a cabo, entre otras cosas, por la gran depresión económica por la que atravesaban los Estados Unidos. El interés no volvió a surgir sino hasta la Segunda Guerra Mundial en el que hubo que entrenar rápidamente muchos operarios civiles y militares para labores diversas (operación de maquinaria, armas, equipo electrónico) durante la guerra. Y que continuó aún después de terminado el conflicto. Durante este tiempo, fue F. B. Skinner, un profesor de la Universidad de Harvard, quién sentó las bases psicológicas.

En 1954 Skinner desarrolló sus principios de análisis de la conducta y sostuvo que era indispensable una tecnologia de cambio de la conducta. Atacó la costumbre contemporánea de utilizar el castigo para cambiar la conducta y sugirió que el uso de recompensas o refuerzos positivos de la conducta correcta, era más atractivo desde el punto de vista social y pedagógicamente más eficaz. Además, definió la enseñanza como la modificación o moldeado de las respuestas emitidas conductualmente en vez de la transmisión del conocimiento. Opinó que el salón de clase no era un ambiente apropiado para dar refuerzo adecuado y sugirió las máquinas de enseñanza como una vía más práctica para lograrlo.

Skinner adoptó las máquinas de Pressey con algunas modificaciones para que no estuvieran restringidas a la selección de respuestas alternativas. Y dijo que el refuerzo intermitente y frecuente de respuestas correctas era la causa de la alteración de la conducta, por lo que organizó la instrucción en pequeñas unidades llamadas marcos (frames). Después de cada marco que presentaba información al estudiante se le pedía que diera una respuesta a una pregunta que se comparaba con la respuesta correcta o deseable. Si coincidían se daba un refuerzo. En vista de que los errores no generaban refuerzos, se trataban de evitar; lo cual se lograba haciendo que los marcos fueran muy cercanos entre sí y frecuentemente se daban sugerencias para que con más facilidad el estudiante diera respuestas correctas.

Skinner utilizaba lo que se llama programación lineal (no confundirla con la técnica matemática de optimización) por medio de la cual se definía cuidadosamente la secuenciación de los marcos para asegurar que casi no se presentarían errores en las respuestas del estudiante. Todos los estudiantes deberían pasar por la misma secuencia; las diferencias entre estudiantes se reflejaban en la velocidad de recorrido de esta. Por consiguiente, fue Skinner quién desató el movimiento de instrucción programada en los Estados Unidos que después se extendió por todo el orden.

Entre los primeros en abrazar el movimiento estuvieron los militares y los industriales. Los métodos de Skinner dominaron hasta finales de los 50. Decenas de máquinas y programas fueron diseñados; también aparecieron los textos programados. Los trabajos de Skinner fracasaron debido a su tendencia conductista, donde se desconoce la individualidad y por ende la personalidad del individuo, se mantiene el esquema estímulo-respuesta y se ignora el papel del profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje.

Norman Crowder, un instructor de la fuerza aérea norteamericana, cuestionó la idea del programa lineal y desarrolló el programa intrínseco o ramificado. Crowder consideraba que los errores en las respuestas, además de que eran inevitables, podrían ser útiles. En la programación ramificada se daba retroalimentación tanto para las respuestas correctas como para las erróneas (diferentes para cada caso). Esto permitía tomar en cuenta las diferencias de preparación previa de los estudiantes. Con la programación ramificada no todos los estudiantes pasaban por la misma secuencia, sino que ésta dependía de la situación de cada estudiante. La mayor parte de los programas de instrucción programada, hoy en día siguen algún método de programación ramificada, habiendo sido Gordon Pask quién construyó el puente entre Instrucción Programada e Instrucción Asistida por Computadora. En la Instrucción Asistida por Computadora (IAC), los papeles del estudiante y de la máquina se asemejan a los participantes de un diálogo en el cual ambos participantes se están constantemente adaptando uno al otro hasta que logran entenderse, comunicarse y despedirse. Sin embargo este comportamiento adaptivo ya no es posible llevarlo a cabo con máquinas mecánicas relativamente simples, sino que se requieren máquinas electrónicas elaboradas como las computadoras.

Aunque ya en los trabajos de Crowder se trata de rectificar algunas de las deficiencias de los trabajos Skinner esto aún resulta insuficiente, pués se sigue manteniendo la relación sólo máquina-alumno dejando fuera al otro sujeto del proceso que es el maestro y por mucho que se trate de atender a las indiferencias individuales de los alumnos la máquina actúa por caminos preestablecidos y nunca podrá abarcar todas las riquezas entre las relaciones de los sujetos.

En 1957, Simón Ramo un ingeniero eléctrico y exitoso industrial, publicó un plan visionario que describía el papel de la computadora en la educación. Por medio de esta máquina se automatizarían la enseñanza y también la administración de la misma. Para la mitad de la década de los 60 ya se había establecido firmemente en el mundo empresarial, el control administrativo de muchos de los procesos de negocios utilizando computadoras, y estos habían emigrado a escuelas que contaban con computadoras como en el caso de las universidades importantes. No obstante, quedaba pendiente la administración detallada de la instrucción así como la instrucción misma que hacen los maestros en clase. Los dos procesos dieron lugar a dos ramas del campo del computo educativo: la Instrucción Administrada por Computadoras (CMI del inglés Computer Managed Instruction) y la Instrucción Auxiliada por computadora (IAC).

En la instrucción administrada por computadora (CMI) las principales funciones a desarrollar son: examinar, calificar y llevar registros, diagnóstico de las dificultades en el aprendizaje, secuenciación de los módulos de instrucción, (siguiente módulo y módulos remediales) e informes de avances. Se han escrito varios programas grandes que hacen estas labores, dos de los más conocidos son: IPI/MIS (Individually Prescribed Instruction Management Information System), desarrollado en la Universidad de Pittsburgh y PLAN (Program for Learning in Accordance with Need), desarrollado en el American Institute for Research. Esta último surgió del proyecto TALENT que encontró en una encuesta que los estudiantes en cualquier salón de clase tienen conocimientos que discrepan mucho, por lo que la instrucción en grupo resulta muy ineficiente

Los desarrollos en Instrucción Administrada por computadora han sido opacados por la actividad de Instrucción Auxiliada por Computadora. Mientras que la primera fue obra de administradores, la segunda ha sido obra de educadores. Entre los actores pioneros en IAC se encuentran las universidades de Illinois, Stanford, la National Science Foundation y las empresas Control Data Corporation e IBM. A continuación se describen algunos de los grandes proyectos de esta área:

Entre el Institute for Mathematical Studies de la Universidad de Stanford e IBM se llevó a cabo uno de los primeros grandes proyectos de IAC que desarrolló un currículum completo para escuela primaria implantado en 1963 y cuyos materiales fueron mercadeados desde 1967 por la Computer Curriculum Corporation (CCC). Los materiales han sido probados exhaustivamente y han tenido un gran impacto, al grado que se estima que la mitad de las evaluaciones empíricas del uso de IAC en educación primaria, han sido hechas utilizando los materiales desarrollados en este proyecto. Los materiales están organizados en 24 bloques para los diferentes años escolares y con 5 niveles de dificultad. El contacto con cada bloque se inicia con un examen que establece el grado de dificultad para el día siguiente. Una calificación de 85 sobre 100 o más, pone al estudiante en el nivel más alto de dificultad en el bloque. Además se le da instrucción al alumno durante cinco días.
La calificación en el examen de un día determina el nivel de dificultad para el día siguiente. Por ejemplo si un estudiante obtiene menos de 60 sobre 100, se le baja un nivel de dificultad. Al final de cada bloque se pone un examen y después de cada cuatro bloques se da una lección de repaso y se aplica un examen sobre el repaso.

El Computer Education Research Laboratory (CERL) de la Universidad de Illinois en cooperación con la empresa Control Data Corporation (CDC), desarrollaron el proyecto Plato (Programmed Logic for Automatic Teaching Operations) el cual se implantó en muchas partes de los Estados Unidos y Europa. En 1960 bajo la dirección de Donald Bitzer se comenzó con una ILLIAC I que se utilizaba para ejercicios y práctica que después fue reemplazada por equipos mucho más poderosos y terminales especiales diseñadas para el proyecto. En cierto momento se tenía una Cyber 73-24 con 700 terminales en 400 localidades distintas. Se han ensayado modalidades tutoriales y de simulación incluyendo despliegues gráficos con terminales con despliegue de plasma (todo esto antes de la aparición de las computadoras personales). Entre los periféricos que se utilizaron están pantallas sensibles al tacto, sintetizadores de voz y video discos. Aunque se tienen materiales para muchos niveles escolares hay una preponderancia hacia la educación a nivel universitario.

Otro de los grandes proyectos de IAC, el proyecto TICCIT (Time-Shared Interactive Computer Controlled Information Television) fue desarrollado entre la MITRE Corporation y el Institute for Computer Uses in Education de la Universidad Brigham Young. Este proyecto no obstante haber sido abandonado eventualmente, ha tenido impacto en la enseñanza de conceptos de alto nivel. El sistema desarrollado utilizó dos minicomputadoras Nova 800 con disco duro y 125 terminales con receptores de televisión a colores de alta resolución con posibilidades gráficas adicionales y teclados especiales para aprendizaje. Las terminales, a diferencia de las del Sistema Plato que estaban conectadas a distancia por línea telefónica, tenían que estar muy cercanas a la minicomputadora. Después se utilizó un sistema de diseño instruccional llamado RULEG, el cual proporciona un enunciado (llamado "la regla") y ejemplos de cómo se utiliza la regla. El sistema era innovador en el sentido de que las tácticas instruccionales dependían de RULEG y no de los autores de cada uno de los programas de enseñanza. La audiencia principal eran estudiantes adultos aunque se hizo una versión para la enseñanza a nivel primario.

Se han reseñado proyectos estadounidenses por haber sido los proyectos pioneros de largo alcance de la aplicación de las computadoras en la educación. Posteriormente, se han tenido proyectos en varios países europeos, principalmente en Francia y el Reino Unido, así como en muchas otras partes del mundo.

En el Reino Unido entre 1973 y 1978 se realizó el proyecto NDPCAL (National Development Program in Computer Assisted Learning) patrocinado por el departamento de Educación y Ciencia del Reino Unido. Se han tenido 17 proyectos CAL (Computer Aided Learning) de los cuales nueve han sido en educación universitaria y posterior, tres en escuelas secundarias, dos en entrenamiento industrial y tres en entrenamiento militar. Se han escrito más de 450 paquetes de programas de tamaño muy diversos entre 10 y 10,000 líneas de código con una media de 700 líneas. Para el desarrollo de losprogramas se utilizaron los lenguajes FORTRAN, BASIC y lenguajes de autores especiales. Como en muchos otros proyectos similares, se han encontrado que el tiempo requerido para desarrollar materiales educativos computarizados para una hora de interacción con los alumnos, requiere del orden de 100 a 300 horas. Sin embargo, no se encontró curva de aprendizaje; es decir, no hay decremento en el tiempo requerido para el progreso debido a la experiencia adquirida durante desarrollos previos. Esto parece deberse a que los materiales nuevos que se van desarrollando son cada vez más elaborados para mantenerse en el estado del arte.

En el proyecto también se hicieron desarrollos en Instrucción Administrada por Computadora (CMI-Computer Managed Instruction) también conocida como aprendizaje Administrado por Computadora (CML-Computer Managed Learning). Entre los productos más importantes logrados está el paquete CAMOL (Computer Assisted Managenmentof Learning), que es un paquete libre de contenido que se puede utilizar para calificar exámenes, análisis de preguntas y administración de registros, pero que no llega a los aspectos de la enseñanza dentro del aula, o sea el cómo hacer, el cómo apoyar el método que usa el profesor.

En Francia, una comisión que preparó el Sexto Plan Gubernamental de cinco años, discutió la introducción de la computación en la educación y publicó un informe en 1971. Se nombró al Prof. W. Mercouroff como encargado de la misión de la informática para implantar las conclusiones de la comisión. Y se descartó la idea de enseñar ciencias de la computación a toda la población en la escuela secundaria por considerárseles habilidades técnicas. Asimismo, se eliminó la enseñanza programada y se les pidió a los maestros que desarrollaran materiales educativos computarizados basados en simulación y modelado en todas las disciplinas. Se definió una configuración computacional estándar y se ordenaron e instalaron minicomputadoras de dos empresas. Se creó un lenguaje especial llamado LSE (Langage Symbolique D'esenignement) en el departamento de computación de la escuela superior de electricidad, y se hicieron progresos hasta 1976 experimentando en 56 escuelas secundarias. El Instituto Nacional de Investigación Pedagógica fue quién realizó las evaluaciones.

Entre las conclusiones a las que se llegaron, está la de que IAC no reemplaza nada de lo que actualmente existe en la educación, sino que lo agrega a lo existente. Hubo algunos efectos considerados negativos como el hecho que muchos maestros se volvieran compufílicos (adoradores de la computadora) y tuvieron la tendencia a preocuparse más por los aspectos técnicos computacionales que por la educación. Al mismo tiempo, a otros maestros se les dificultó mucho la programación y le dedicaron demasiado a ese asunto en vez de a la pedagogía.

Muchos países han comenzado a tomar conciencia en que el uso de los medios audiovisuales pueden trasladar a los estudiantes experiencias más allá de la clase y difundir instrucción a lo ancho de más amplias áreas, haciendo accesible la educación a más personas.

1.2-LAS COMPUTADORAS EN LA ENSEÑANZA EN LA ÉPOCA ACTUAL

Al tiempo que crece la tecnología se incrementan las potencialidades educativas. El desarrollo de la tecnología de los ordenadores, de los video discos y los discos compactos, ha dado a la tecnología de la educación mejores herramientas con las que trabajar. Los discos compactos se utilizan para almacenar grandes cantidades de datos, como enciclopedias o películas. Con los nuevos equipos interactivos con ordenadores y CD-ROM, CD-I, o videodiscos, un estudiante interesado en cualquier asunto puede en cualquier momento utilizar una enciclopedia electrónica, además de ver una película sobre el mismo tema o buscar asuntos relacionados con sólo presionar un botón. Estas estaciones de aprendizaje combinan las ventajas de presentar los materiales con dibujos, películas, televisión y la instrucción añadida mediante el ordenador.

El uso de las tecnologías de la comunicación como el correo electrónico, el fax el ordenador y la videoconferencia, además de los servicios prestados por los satélites reduce las barreras del espacio y del tiempo. El uso de esas tecnologías está en aumento y ahora es posible formar a una audiencia muy dispersa con videos y audios y obtener otros datos por medio de los cuales se pueden evaluar los trabajos de los alumnos. En el futuro, es probable que en vídeo de doble banda se pueda transmitir información por todas las redes terrestres.

Las escuelas y los colegios cada vez usan más medios como internet, a través del cual pueden conectarse con un ordenador de la National Aeronautics and Space Administration (NASA) en Florida y obtener información sobre la exploración en el espacio bien en texto, en imagen fija o en video.

Quienes aprenden deben considerar los ordenadores como herramienta que pueden utilizar en todos los aspectos de sus estudios. En particular, necesitan las nuevas tecnologías multimedia para comunicar ideas, describir objetos y otras informaciones en su trabajo. Esto les exige seleccionar el mejor medio para trasladar su mensaje, para estructurar la información de una manera ordenada y para relacionar información que permita producir un documento multidimensional.

Además de ser un tema en sí mismo, las nuevas tecnologías tienen incidencia sobre la mayor parte de las áreas del conocimiento. En las ciencias se usan ordenadores con sensores para ordenar y manejar los datos; para realizar modelos en las matemáticas, la geometría y el álgebra; en el diseño y en la tecnología, los ordenadores son fundamentales en los niveles de la premanufactura; en las lenguas modernas, las comunicaciones electrónicas dan acceso a las retransmisiones extranjeras y otros materiales, y en la música el ordenador permite a los alumnos componer y estudiar sin tener que aprender a tocar los instrumentos tradicionales. Para quienes requieren atenciones educativas especiales, proporciona el acceso a los materiales más útiles y permite a los estudiantes a pesar de sus dificultades expresar sus pensamientos en palabras, dibujos y actividades.

Los radicales desarrollos tecnológicos en la miniaturización, las comunicaciones electrónicas y los multimedia confirman la promesa de convertir los ordenadores en algo cercano, verdaderamente personal y móvil. El paso a la tecnología digital esta eliminando las barreras entre la difusión, las publicaciones y el teléfono al hacer que todos estos medios sean accesibles gracias a los programas de ordenador y de las televisiones. Estos desarrollos no sólo darán a los estudiantes acceso a amplias bibliotecas y recursos multimedia, sino también al acceso directo a tutores y a los fenómenos naturales en todo el mundo.

La creciente renovación y disponibilidad de la tecnología en las escuelas y colegios permitirá una enseñanza más individualizada, lo que provocará muchas consecuencias en el sistema educativo.

Dado que la tecnología proporciona un fácil acceso de los estudiantes a los materiales previamente preparados por los profesores, el papel del profesor pasará a ser más el de un mentor o animador del aprendizaje y no sólo la fuente de los conocimientos. El acceso de los estudiantes a la información hará que la orientación y la evaluación pasen a ser procesos más positivos y cercanos gracias al uso de este tipo de herramientas.

Puesto que dicha tecnología puede ayudar a los estudiantes a trabajar en diferentes niveles y contenido, se podrán atender mejor los aprendizajes diferenciados, lo que permitirá desarrollar las capacidades individuales de todos y cada uno de los alumnos. La simplicidad y rigor de la tecnología para evaluar continuamente los avances de los estudiantes individualmente permitirá al sistema medir la calidad del aprendizaje real.

El uso de la tecnología para proporcionar acceso a la información y al monitor y la posibilidad de evaluar el aprendizaje significa que éste puede realizarse en cualquier momento y lugar. El desarrollo en la tecnología de la comunicación y el incremento en la práctica personal de la tecnología permitirán que lo aprendido en las escuelas y colegios se integren con los que se aprenden en cualquier otro lugar.

A partir de la primera mitad del siglo se comienza a desarrollar un tremendo interés en incorporar tecnología en la enseñanza. En la época actual, producto de gran cantidad de experiencias que se han implantado, parece existir consenso en que la enseñanza de la matemática debe actualizarse, modificando los planes tradicionales en todos los niveles: primaria, media y universitaria. Es importante que los profesores de matemática reflexionemos al respecto. El proceso de modificación de esquemas tradicionales en la enseñanza de la matemática es lento pero inevitable.

Existen desde ya hace algunos años calculadoras de bolsillo capaces de graficar funciones y susceptibles a ser programadas por el usuario. Algunas pueden realizar incluso, operaciones simbólicas. Las funciones que estas calculadoras realizan, anteriormente eran solo hechas por computadoras. El tamaño compacto de estas y su bajo costo, comparado con el de una computadora, hacen de este dispositivo una herramienta bastante accesible en el aula. De hecho, son cada vez más estudiantes que ya cuentan con este recurso tecnológico. Aunque este recurso está cada vez más presente en el aula, en una clase típica de matemáticas pareciera ignorarse este hecho. En algunos casos el uso en el salón de clases de una calculadora de este tipo es, incluso inhibido. Lo anterior puede deberse a que los profesores no saben a ciencia cierta como utilizar este recurso o el rechazo de los mismos a la tecnología.

Usar la computadora como elemento auxiliar en la enseñanza de la matemática, es perjudicial según opinan algunos, rechazan la introducción de nuevas tecnologías en la clase aludiendo a la deshumanización del alumno, a que se perderá la habilidad para el cálculo, etc. Las verdaderas razones son otras, la introducción de elementos nuevos en la educación, supone trabajo y más trabajo no reconocido por nadie. Otros en cambio piensan que si no se incorporan es condenarse a ser sustituidos por ella en gran parte de sus labores. Para quiénes defienden su introducción, aún no es claro cual es la mejor forma o la forma más adecuada para introducirlas. Se puede incorporar como una herramienta de cálculo, pero también como un medio para hacer una matemática más experimental, es decir utilizarla como un recurso didáctico donde se puede unir el mundo abstracto de las matemáticas con el mundo concreto del alumno.

1.3-LAS COMPUTADORAS EN EL APRENDIZAJE

Al respecto de las computadoras en el aprendizaje existen diversos criterios a los cuales en cierta forma ya nos hemos referido, definiéndose posiciones en cuánto ventajas y desventajas en el proceso. Uno de los criterios al respecto son las ventajas que plantean Pérez (1998), las cuales son:

* Incrementa la motivación porque los softwares ofrecen retroalimentación y responden a las preguntas y dudas de los estudiantes.

* Incrementan el disfrute del aprendizaje porque los estudiantes cambian de un rol pasivo de receptores del conocimiento a un rol activo de buscadores del conocimiento.

* Reduce el tiempo de aprendizaje porque personaliza la enseñanza al acomodarse a los distintos estilos de aprendizaje.

* Auto-conduce la instrucción porque estimula al estudiante a que invierta el tiempo en temas en lo que está más débil preferentemente que en temas donde domina más.

* Incrementa la retención debido a que mejora el compromiso y participación del que aprende.

* El dominio del contenido está más asegurado porque los programas pueden ser diseñados de forma tal que no se imparta un nuevo material hasta que los alumnos no demuestren dominar el material anterior.

* La privacidad porque los estudiantes interactúan uno a uno y son libres de hacer preguntas sin sentirse intimidados o avergonzados.

* La oportunidad de conducir procedimientos de laboratorios simulados y experimentos los cuales son demasiados peligrosos para ser realizados por los estudiantes o que requieren un equipo de laboratorio caro.

El primer análisis a gran escala sobre el efecto de las computadoras en el aprendizaje de las matemáticas en los salones de clase estadounidense, apareció en la interfase (Sept. 1998) donde se manifiesta que, cuando son utilizadas de manera selectiva por maestros capacitados en las escuelas de enseñanza media, pueden aumentar significativamente el desempeño académico.
Pero el estudio también indicó que su valor en la escuela primaria es mucho más limitado y que cuando se utilizan principalmente para ejercicios y prácticas en cualquier nivel, lo cual es común, o cuando los estudiantes pasan largos periodos de tiempo utilizándolas, las computadoras en las escuelas pueden ser contraproducentes.

Los resultados implican que los distritos escolares deben gastar más en computadoras en las escuelas de enseñanza media que en las primarias y deben concentrar la atención en el desarrollo profesional de los maestros para asegurarse de que saben utilizar las computadoras de manera efectiva.

El estudio llamado "Does it Compute ?" (¿Computa?) publicado recientemente fue realizado por un investigador del Servicio de Exámenes Educativos en Princeton, New Jersey, y auspiciado por la revista Education Week y el intercambio Milken sobre Educación Tennológica, que promueve el uso efectivo de las computadoras en el salón de clases.
El análisis utilizó los resultados de miles de estudiantes de cuarto año de primaria y segundo de secundaria para la asignatura de matemáticas en 1996 de la Evaluación Nacional del Progreso Educativo, o NAEP, el examen más citado que se aplica a muestras de estudiantes en todo Estados Unidos.
El estudio se basó en encuestas de estudiantes y maestros sobre el uso de la computadora en el salón de clases.

Entre los estudiantes de segundo año de secundaria, se encontró que cuando éstos usaban las computadoras para matemáticas más complejas como simulaciones, las cuales miden variables cambiantes, o aplicaciones, donde los datos son manipulados y analizados, se registraron incrementos de más de una tercera parte de un año académico.
Para los alumnos de cuarto grado que usaban computadoras para juegos matemáticos, el incremento fue de una décima parte de un año académico, o el equivalente a unas cuantas semanas de instrucción.
Al utilizar una amplia muestra y controlar factores como nivel socioeconómico, preparación de los maestros, tamaño del grupo y ambiente escolar, el nuevo estudio ofrece una perspectiva en el candente debate sobre el costo-beneficio de los 5 mil millones de dólares gastados anualmente en computadoras escolares en Estados Unidos.

"Cuando las computadoras se utilizan para realizar ciertas tareas, principalmente para aplicar conceptos de orden superior, y cuando los maestros son suficientemente expertos en el uso de la computadora para dirigir a los estudiantes hacia usos productivos de manera más general, parecen estar asociados con incrementos significativos en los logros matemáticos", concluyó el reporte, escrito por Harold Wenglinsky.
El reporte añade: "Los efectos de la tecnología parecen ser mucho menores en el cuarto grado de primaria que en el segundo de secundaria y, por lo tanto, pueden no ser efectivos en cuanto a su costo. En la medida en que el principal beneficio de las computadoras está en aplicar habilidades de más alto orden, puede que no haya muchas oportunidades de beneficiarse al usar computadoras antes de la enseñanza media".

En vista de la naturaleza limitada y confusa de los hallazgos, es probable que sean utilizados por ambas partes en el debate sobre si la inversión está justificada. En 1983, había una computadora por cada 125 estudiantes, mientras que en 1995 la proporción era de una por cada nueve.
El estudio encontró que los alumnos de ambos niveles utilizan las computadoras en la escuela casi con la misma frecuencia. Los estudiantes de bajos recursos tienen tanto acceso a las computadoras como los que tienen una mejor condición económica y, de hecho, los estudiantes pobres tuvieron más altos niveles de uso de las computadoras que sus contrapartes de buena posición económica.

El reporte también encontró que cuando las computadoras se usaron principalmente para ejercicios y práctica en secundaria, hubo menores logros académicos. Para los alumnos de escuela primaria, los juegos matemáticos estuvieron positivamente relacionados con el logro académico.
El reporte admite que su método permite una posible confusión entre causa y efecto, diciendo que los buenos estudiantes pueden utilizar las computadoras de maneras más complejas. Pero al llevar un control de los antecedentes y el trabajo estudiantil del año anterior, el estudio concluyó que las computadoras eran la causa probable de los resultados positivos.

Educar con tecnología (Interfase Sept. 1998)
Con una visión orientada hacia al 2000, el Dr. Rafael Rangel Sostman, Rector del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey comentó que lo que se pretende es fomentar el autoaprendizaje, la búsqueda de información y el trabajo en equipo, para acelerar la forma de aprender de los alumnos .
La parte que más ha llamado la atención del nuevo modelo educativo del ITESM ha sido la tecnología, pues no solo ha invertido hasta ahora más de 15 millones de dólares en la construcción de su red que permitirá a los alumnos accesarla desde cualquier lugar de cualquiera de sus 30 campus, sino que propició la adquisición de más de 15 mil ordenadores portátiles entre sus alumnos y maestros. Y las inversiones se incrementaron pues el ITESM tiene programado invertir en un plazo de cinco años hasta 60 millones de dólares para las instalaciones de conectividad y servidores, además de que calcula que en menos de dos años el 100 por ciento de sus más de 80 mil alumnos contara con cuando menos un ordenador portátil.

Está en marcha pues la profunda transformación en el modelo educativo de una de las instituciones más prestigiosas y exitosas no sólo del país, sino incluso de Latinoamérica; los resultados que se obtengan de ella deberán incidir notablemente en el futuro no sólo de sus estudiantes o familias, sino del país. Y si éstos son buenos, otras escuelas y universidades iniciaran procesos similares, pues los expertos tienen claro que el conocimiento ligado a la tecnología se ha convertido en el impulsor de la productividad de las sociedades modernas.

2.-PROPUESTA DIDÁCTICA

A pesar de la cada vez mayor accesibilidad a equipos de computo, uno de los problemas que surgen en algunas instituciones, es contar con la infraestructura adecuada y suficiente, es decir tener laboratorios con computadoras en un número de acuerdo a la cantidad de alumnos, o sea tener los recursos en cantidad y calidad adecuada para poder realizar la tarea que nos proponemos; otras cuestiones muy importantes dentro de esta problemática son los que corresponden al cuando introducirlos en el proceso enseñanza-aprendizaje y el que introducir.

En cuanto al uso de computadoras, existe una gran variedad de paquetes para la enseñanza entre los que podemos mencionar al Math-Cad, Matlab, Maple, Derive, Graphic Calculus, Calcula, Microcalc, Converge, etc. Los tres primeros de la lista son muy poderosos y por lo tanto caros y con exigencias que pudiesen ser muy fuertes para algunos equipos de computo. De los últimos cinco, Derive es el más caro, pero también el más versátil no sólo en términos de las capacidades propias del paquete, sino también por sus exigencias sobre el equipo de cómputo lo cual lo ha hecho muy popular en algunos países.

El paquete Derive para la microcomputadora es un poderoso programa que nos permite realizar complicados cálculos matemáticos, esto incluye tanto los aritméticos como los simbólicos. También nos permite obtener hermosas gráficas de funciones de una o dos variables, es decir curvas en el plano y superficies en el espacio tridimensional. También podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales y en general realizar diferentes cálculos del Álgebra Lineal, por ejemplo, transpuesta e inversa de una matriz, cálculo de valores y vectores característicos etc. Además podemos realizar diferentes actividades en cálculo diferencial e integral, por ejemplo, límites, derivadas e integrales tanto definidas como indefinidas, Series de Fourier y polinomios de Taylor.

Además podemos graficar funciones dadas implícitamente, por ejemplo las cónicas, o curvas de grado superior.

El escoger el Software más adecuado, en qué forma y en qué momento utilizarlo, es sin duda muy importante, esto debe analizarse y discutirse en conjunto por los miembros de la academia de la materia involucrada, para de esta manera tomar la decisión más acertada.

El uso de la computadora favorece la interrelación maestro-alumno y como consecuencia el trabajo independiente de los mismos. La actividad de los alumnos pasa a primer plano, trabajan para solucionar las tareas que el maestro propone, predomina el aprendizaje productivo, Si él necesita pensar, construir y emplear su pensamiento para desarrollar las actividades y no que el aspecto computacional apareciera como simple rutina de cálculo. Se puede trabajar en equipos, propiciando el desarrollo e intercambio de conocimientos y habilidades.

En el presente trabajo la actividad va dirigida específicamente a la incorporación en el proceso de enseñanza de las matemáticas, estas técnicas de cómputo como recurso didáctico de manera que posibiliten el tránsito en el pensamiento del estudiante de manera que él mismo pueda construir, materializar, visualizar resultados y en general un apoyo que permita de manera decisiva contribuir a la asimilación de diferentes conceptos y que al mismo tiempo le motive en el aprendizaje. Metodológicamente consideramos que el centro de la actividad estará en la introducción de un paquete computacional que posibilite directamente diferentes aspectos.

Las acciones que fundamentalmente apoyaran el uso de la computadora en la enseñanza de la matemática en Ingeniería serán:

1.-Como apoyo en las clases de tipo teórico.

Está acción posibilitará que el alumno materialice mediante la visualización en pantalla aspectos que resultan fundamentales para la apropiación de determinados conceptos.

De manera general una buena parte de las dificultades que tienen los estudiantes en la matemática se asienta en el nivel de abstracción y de poca interpretación real de los conceptos matemáticos los cuales han sido llevados a la enseñanza de forma desvinculada del contexto histórico social.

Esto de manera efectiva posibilitaría por una parte visualización de representaciones, presentación en la clase de ejemplos más complicados sin perdida de tiempo. Ejemplos: Gráficas diversas, relación entre la gráfica de un pilinomio y sus raíces, interpretación de la solución de una ecuación diferencial, interpretación gráfica de la serie de Fourier.

2.-Cómo recurso importante en actividades prácticas.

Al utilizar este tipo de recurso didáctico que disminuiría de manera sensible el tiempo dedicado a las operaciones de cálculo se lograría por una parte la realización de un mayor número de ejercicios y problemas, pero al mismo tiempo se posibilitaría la verificación de condiciones para la existencia y unicidad de soluciones, que en muchos casos son olvidados dentro del requerimiento del proceso enseñanza-aprendizaje.

Esto además contribuye a que el estudiante realice sus construcciones sobre la base de su propia experiencia y que el estudio, digamos la variación de parámetros en una expresión logre ser interpretada a partir de su propia experiencia y no sólo de lo que le maestro explique en clase. Ejemplos: Gráficas Diversas, relación entre la gráfica de un polinomio y sus raíces, gráfica de una función de dos variables, interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial, interpretación gráfica de las series de Fourier, Aplicaciones de la derivada.

3.-Como apoyo para la interpretación de problemas y sus soluciones.

Cómo parte de lo actual en cuanto a las necesidades de la enseñanza de las matemáticas, este recurso didáctico nos ayuda para la comprensión y visualización e interpretación de problemas y su proceso de resolución.

El problema ya se ha derivado de situaciones prácticas asociadas al contexto histórico-social como propias de la profesión o puramente dentro de la matemática contribuye de manera decisiva a la formación de una actitud productiva y constructiva por parte de los alumnos, esto a su vez dará sentido real a la actividad. Ejemplo: Gráficas diversas, trayectorias ortogonales, Gráficas de una función de dos variables, interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial, relación entre la gráfica de un polinomio y sus raíces, aplicaciones de la derivada.

4.-Para la visualización e interpretación de convergencias y aproximaciones.

La convergencia y la aproximación son dos conceptos de alto contenido teórico en lo que a las matemáticas u otras ciencias corresponde. Esto al mismo tiempo constituye un requerimiento básico de la época y del modo de actuar de los futuros ingenieros. El campo de actuar de un profesional de estas ramas lleva de manera implícita el cálculo y la modelación sobre la base de aspectos relativos a la convergencia y a la aproximación por sólo mencionar dos de los aspectos relacionados con los programas en que desarrollamos nuestro trabajo.
Este recurso didáctico posibilita de manera muy directa y sencilla el trabajo en estas dos direcciones. Ejemplo: interpretación gráfica de la serie de Fourier, interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial, relación entre la gráfica de un polinomio y sus raíces, trayectorias ortogonales, gráficas diversas.
De esta manera queda por nosotros establecido las indicaciones fundamentales para la inserción en el proceso docente-educativo del recurso didáctico de la computadora con el objetivo de contribuir a la asimilación de los conocimientos.

2.1-IMPLEMENTACIÓN PRÁCTICA

Lo que presentamos en esta propuesta son algunas gráficas realizadas por computadora (utilizando el paquete Derive) que pueden complementar el aprendizaje de las matemáticas sobre algunos tópicos en particular.
Recalcando lo anteriormente dicho, que Software utilizar, cómo usarlo y en que momento, debe ser decisión de una academia.

Gráficas por computadora como recurso didáctico aplicadas en los siguientes tópicos particulares:

*Gráficas diversas
*Relación entre la gráfica de un polinomio f(x) y las raíces de la ecuación f(x)=0
*Aplicaciones de la derivada
*Gráfica de una función de dos variables
*Interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial
*Trayectorias Ortogonales
*Interpretación gráfica de la serie de Fourier

GRÁFICAS DIVERSAS

La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituyen, en conjunto, un problema de tan gran importancia en todas las ramas de la matemática y sus aplicaciones, que se le ha dado el nombre especial de *construcción de curvas*. Es difícil sobrevalorar la importancia del dibujo de gráficas en matemáticas. Su introducción, por Descartes, no solo precedió, sino que contribuyó en gran medida, a los grandes avances matemáticos desde la mitad del siglo XVII. En palabras de Lagrange: "Mientras álgebra y geometría caminaron por separado, su avance fue lento y sus aplicaciones limitadas. Pero cuando ambas se unieron, sacaron cada una de la otra vitalidad nueva y desde entonces avanzaron con paso rápido hacia la perfección".
Hoy día, gobierno, ciencia, industria, comercio, educación y ciencias sociales o de la salud, hacen amplio uso de gráficos para describir y predecir relaciones entre variables.
En Cálculo se discuten conceptos que son útiles a la hora de dibujar la gráfica de una función, algunos de estos conceptos son:

*Dominio y recorrido
*Intersecciones con los ejes
*Simetría
*Puntos de discontinuidad
*Asíntotas horizontales y verticales
*Puntos en que no existe la derivada
*Extremos relativos
*Creciente, Decreciente
*Concavidad
*Puntos de inflexión

En Álgebra se estudia el problema de la construcción e interpretación de la gráfica de un polinomio. En Geometría Analítica se discute la construcción de curvas planas y de superficies en el espacio tridimensional. A pesar de los conocimientos y sugerencias que se dan en Cálculo, Álgebra y Geometría Analítica para esbozar la gráfica de una función, el trazado de una gráfica puede requerir considerable ingenio, por lo cual no debemos rechazar el uso de la tecnología.
Enseguida se da una pequeña muestra de las gráficas que puede realizar la computadora, gráficas que podrían surgir de problemas en donde la matemática se aplica.

(Gráficas en anexo 1)

RELACIÓN ENTRE LA GRÁFICA DE UN POLINOMIO f(x) Y LAS RAICES DE LA ECUACIÓN f(x)=0

En teoría de ecuaciones se menciona la relación que existe entre la gráfica de un polinomio f(x) y las raíces de la ecuación f(x)=0. Algunas de estas características son las siguientes:

1.Si *r* es una raíz real no repetida de f(x)=0, entonces la gráfica de f(x) corta el eje X en x=*r* pero no es tangente a él en ese punto.

2.Sea *r* una raíz real repetida de multiplicidad *m* de f(x)=0. Si *m* es par, la gráfica de f(x) es tangente al eje X en x=*r* pero no corta el eje X en ese punto.

3.Sea *r* una raíz real repetida de multiplicidad *m* de f(x)=0. Si *m* es impar, la gráfica de f(x) es tangente al eje X en x=*r* y corta el eje X en ese punto.

En las gráficas siguientes se pueden confirmar estas características. Aquí se sostiene la ventaja que nos ofrece la computadora, ya que al hacer un "acercamiento" donde la gráfica corta el eje X, se pueden apreciar las características mencionadas.

(Gráficas en anexo 2)

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Una de las aplicaciones más comunes del cálculo consiste en hallar máximos y mínimos. Se usan en la solución de algunos problemas prácticos, ya que es muy común escuchar o leer términos como máximo beneficio, mínimo costo, mínimo tiempo, voltaje máximo, tamaño óptimo, área mínima, máxima intensidad, distancia mínima. A continuación se presenta un ejemplo resuelto en la forma tradicional, es decir analíticamente, aplicando la derivada y posteriormente se muestra como gráficamente mediante la computadora se llega al mismo resultado.

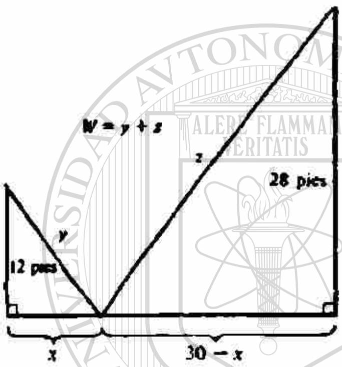


FIGURA 4.56

Dos postes, de 12 y 28 pies de altura, distan 30 pies entre sí. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar el mínimo cable posible?

Solución: Si W es la longitud del cable, tenemos, de acuerdo con la Figura 4.56,

$$W = y + z \qquad \text{Ecuación primaria}$$

En este problema, en vez de despejar y en términos de z (o viceversa), despejaremos ambos y, z en términos de una tercera variable x (Figura 4.56). Por el teorema de Pitágoras,

$$x^2 + 12^2 = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 144}$$

$$(30 - x)^2 + 28^2 = z^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$$

Por tanto,

$$W = y + z = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}, \quad 0 \le x \le 30$$

Derivando W respecto a x, tenemos

$$\frac{dW}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 144}} + \frac{x - 30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$$

Haciendo $dW/dx = 0$, obtenemos

$$x^2(x^2 - 60x + 1684) = (30 - x)^2(x^2 + 144)$$

que se simplifica a

$$320(x - 9)(2x + 45) = 0$$

Como $x = -22{,}5$ no está en el intervalo $[0, 30]$ y

(Gráficas en anexo 3)

$$W(0) \approx 53{,}04, \qquad W(9) = 50 \qquad \text{y} \qquad W(30) \approx 60{,}31$$

concluimos que el cable debe fijarse a 9 pies del poste de 12 pies.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Las funciones de más de una variable aparecen con frecuencia en problemas prácticos, por ejemplo:

1.El área de un rectángulo depende de dos cantidades, la longitud y la anchura.

2.Si un objeto se halla en el espacio, entonces la temperatura de un punto P en el objeto puede depender de tres coordenadas rectangulares X, Y, Z, de P.

3.Si la temperatura de un objeto en el espacio varía en el tiempo t, entonces se tienen cuatro variables X, Y, Z y t.

4.Un fabricante puede saber que el costo C de producir cierto artículo depende del material, la mano de obra, el equipo, el costo del mantenimiento y los gastos generales. Entonces, C depende de 5 variables.

Un aspecto importante en problemas que involucran funciones de dos variables es la gráfica de dichas funciones. Los programas de computadora pueden generar estas gráficas que resultarían muy difíciles o imposibles sin esta tecnología. Se puede usar la computadora para representar gráficamente las curvas de nivel, las trazas de una superficie en varios planos y superficies en diversas perspectivas. A continuación en un problema de aplicación de integrales dobles se muestra como la gráfica de una función de dos variables puede ayudar en la comprensión o entendimiento del problema, esta gráfica si se tratara de hacer en la forma tradicional, es decir en el pizarrón, desde luego que no sería imposible, pero no tan fácil como solo oprimir una tecla de la computadora, además la precisión de las gráficas combinadas con los colores es una ventaja que los maestros difícilmente podemos igualar.

(Gráficas en anexo 4)

INTEGRALES MÚLTIPLES

El fondo de muchos lagos tiene la forma de una *senoide* (o *sinusoide*) *elíptica*. Supongamos que la frontera de un lago es la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ y sea h_M la profundidad máxima del agua. Entonces puede suponerse que el fondo del lago tiene la forma de la gráfica de la senoide elíptica dada por

$$f(x, y) = -h_M \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right)$$

para $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) \leq 1$

Calcular el volumen V y la profundidad media h_{med} del agua del lago.

Solución Si R es la región elíptica correspondiente a la superficie del lago , entonces

$$V = \iint_R |f(x, y)|\, dA = h_M \iint_R \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) dA.$$

La forma del integrando

sugiere hacer la sustitución

$$x = au, \quad y = bv.$$

En este caso el jacobiano es $\partial(x, y)/\partial(u, v) = ab$ y la región S correspondiente a R es el círculo $u^2 + v^2 \leq 1$

$$V = abh_M \iint_S \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{u^2 + v^2}\right) du\, dv.$$

Podemos evaluar esta integral usando la sustitución por coordenadas polares $u = r\cos\theta$, $v = r \operatorname{sen}\theta$. Esto da

$$V = abh_M \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) r\, dr\, d\theta.$$

$$V = abh_M \int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} r\right) + \frac{2}{\pi} r \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} r\right)\right]_0^1 d\theta$$

$$= abh_M \int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right) d\theta$$

$$= abh_M\left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\right)2\pi \approx 1.4535abh_M.$$

Esta fórmula puede usarse para estimar el volumen del agua de un lago a partir de las tres medidas a, b y h_M.

$$h_{med} = \frac{1}{\pi ab}\iint_R |f(x, y)|\, dA.$$

y por lo tanto $$h_{med} \approx \frac{1}{\pi ab}(1.4535)abh_M \approx 0.4627h_M.$$

Un estudio de 107 lagos en todo el mundo dio un valor medio para h_{med}/h_M de 0.467.

INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Al intentar resolver numerosos problemas en varias ramas de las ciencias y la ingeniería, se han originado las ecuaciones diferenciales. En la siguiente lista, que podría ampliarse, se indican algunos de estos problemas.

1. El problema de determinar el movimiento de un proyectil, cohete, satélite o planeta.
2. El problema de determinar la carga o la corriente en un circuito eléctrico.
3. El problema de la conducción de calor en una barra o una plancha.
4. El problema de determinar las vibraciones de un alambre o una membrana.
5. El estudio de la rapidez de descomposición de una sustancia radiactiva o la rapidez del crecimiento de una población.
6. El estudio de las reacciones químicas.
7. El problema de la determinación de curvas que tienen ciertas propiedades geométricas.

En cada uno de los problemas antes mencionados, los objetos obedecen ciertas leyes científicas. Estas leyes implican diversas razones de cambio de una o más cantidades con respecto a otras. Recordemos que estas razones de cambio se expresan matemáticamente mediante derivadas. En la formulación matemática de cada uno de los problemas mencionados, las diversas razones de cambio se expresan mediante derivadas, y las leyes científicas dan lugar a ecuaciones matemáticas que contienen derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales.

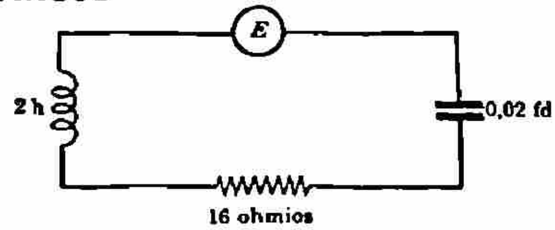
Después de resolver una ecuación diferencial, es importante discutir cuál es el significado de dicha solución. En el siguiente problema se da una interpretación gráfica de la solución de una ecuación diferencial que resulta de encontrar la carga y la corriente en un circuito eléctrico.

(Gráficas en anexo 5)

ECUACIONES DIFERENCIALES

CIRCUITOS ELECTRICOS

Un inductor de 2 henrys, una resistencia de 16 ohmios y un condensador de 0,02 faradios se conectan en serie con una f.e.m. de E voltios. En $t = 0$ tanto la carga del condensador como la corriente del circuito valen cero. Encontrar la carga y la corriente en cualquier tiempo $t > 0$ si $E = 100 \operatorname{sen} 3t$ (voltios).



Sean Q e I respectivamente la carga y corriente instantáneas en el tiempo t. Por las leyes de Kirchhoff tenemos

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0{,}02} = E \tag{1}$$

y como $I = dQ/dt$,

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E \tag{2}$$

bajo las condiciones iniciales $Q(0) = 0,\ I(0) = Q'(0) = 0$.

Si $E = 100 \operatorname{sen} 3t$, entonces (2) es en este caso

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \operatorname{sen} 3t$$

Tomando la transformada de Laplace encontramos que

$$(s^2 + 8s + 25)q = \frac{150}{s^2+9}$$

y
$$q = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

$$= \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

Así que
$$Q = \frac{25}{26}\operatorname{sen} 3t - \frac{75}{52}\operatorname{sen} 3t + \frac{25}{26}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t$$

$$= \frac{25}{52}(2\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3\cos 3t + 2\operatorname{sen} 3t)$$

y entonces
$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17\operatorname{sen} 3t + 6\cos 3t)$$

Para grandes valores de t, los términos de Q o de I en que aparece e^{-4t} son despreciables y se llaman los *términos transitorios* o la *parte transitoria* de la solución. Los otros términos se llaman los *términos permanentes* o la *parte permanente* de la solución.

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

En muchas aplicaciones de ingeniería, se da una familia de curvas y se necesita hallar otra familia cuyas curvas se intersequen formando ángulos rectos con cada una de las curvas dadas (el ángulo de intersección de dos curvas se define como el ángulo entre las tangentes a ellas en el punto de intersección). Entonces se dice que las curvas de las dos familias son mutuamente ortogonales o que forman una red ortogonal y los miembros de la familia así obtenida reciben el nombre de **trayectorias ortogonales** de las curvas dadas. Algunos ejemplos conocidos son los siguientes: los meridianos en la superficie terrestre son las trayectorias ortogonales de los paralelos, en un mapa las curvas del descenso más pronunciado son las trayectorias ortogonales de las líneas de contorno, en electrostática las líneas equipotenciales y las líneas de fuerza eléctrica son trayectorias ortogonales entre sí. Las trayectorias ortogonales desempeñan un papel importante en varios campos de la física, por ejemplo, en hidrodinámica y en conducción del calor.

Dada una familia de curvas F $(x, y, c,)$ que se representa por una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

la ecuación diferencial de las trayectorias ortogonales es.

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

y tales trayectorias se obtienen al resolver esta ecuación.

Ejemplo: Campo de temperaturas
Las curvas de temperatura constante T $(x, y) = constante$, en un campo de temperatura se llaman isotermas; sus trayectorias ortogonales son las curvas a lo largo de las cuales fluirá el calor (en regiones en las que no se tengan fuentes o sumideros de calor y se encuentren llenas con un medio homogéneo). Si se dan las isotermas mediante

$y = c - \frac{1}{2}x^2$ entonces las curvas de flujo del calor son $y = \ln x - c$

En la gráfica siguiente se muestran las isotermas en color rojo y las curvas del flujo del calor en color verde.

(Gráficas en anexo 6)

INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA SERIE DE FOURIER

Con frecuencia aparecen funciones periódicas en los problemas de Ingeniería. Su representación desde el punto de vista de funciones periódicas simples, como el seno y el coseno, tiene gran importancia práctica, lo cual conduce a las series de Fourier. Estas series constituyen un auxiliar muy útil para la resolución de diversos problemas que comprenden ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

La teoría de las series de Fourier es un tanto complicada, pero su aplicación es sencilla.De cierta manera, las series de Fourier son más universales que la de Taylor, porque muchas funciones periódicas discontinuas de interés práctico pueden desarrollarse considerando aquéllas pero, por supuesto no tienen representaciones en serie de Taylor.

A través de gráficas se logra convencer a los alumnos de que una función periódica se puede representar mediante una serie de Fourier, ya que la demostración sobre la convergencia de la serie requiere conocimientos superiores.

Consideremos una función periódica f(t) con periodo T
la cual se puede representar mediante la siguiente serie

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t) \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

a una serie como esta se le llama serie trigonométrica de Fourier
todos los armónicos de la serie son funciones periódicas de la forma
acos(bt), asen(bt)
a continuación primeramente se da una interpretación gráfica de estos términos en relación con los parámetros a y b. Posteriormente se grafica una función particular, la función valor absoluto del seno y los primeros cinco términos de su serie, aquí se hace una acercamiento de la gráfica para visualizar como es el comportamiento de la gráfica de los términos, se puede observar que la gráfica de dichos términos se van "pegando" al eje X, por lo que la suma de estos cinco términos se puede utilizar como una buena aproximación de la función, lo cual se muestra en las últimas gráficas.

(Gráficas en anexo 7)

CONCLUSIONES

El constante cambio de las nuevas tecnologías ha producido aspectos significativos en la forma de vida, estas tecnologías también han afectado a los procesos tradicionales de enseñar y aprender. En las ciencias se usan ordenadores con sensores para ordenar y manejar los datos, para realizar modelos en las matemáticas. Como el ritmo del avance no parece que vaya a frenarse, el reto está en aprender a adaptarse a los cambios. Para conseguirlo, los sistemas de aprendizajes y aquellos que los manejan deben preparar a las personas a trabajar con las nuevas tecnologías con seguridad y de forma adecuada, y a superar con solvencia los cambios constantes en las nuevas formas de trabajar haciendo del aprendizaje un proceso natural permanente.

La utilización de las nuevas tecnologías en la enseñanza está, sin duda, plenamente justificada si tenemos en cuenta que uno de los objetivos básicos de la educación ha de ser la preparación de los adolescentes para ser ciudadanos de una sociedad tecnológicamente avanzada.

La tecnología debe ser vista como un apoyo en el aprendizaje de los estudiantes, nunca como un sustituto del maestro, de esta forma la computadora es un elemento más del conjunto de recursos o medios didácticos del proceso enseñanza aprendizaje Los ejercicios realizados por computadora tienen el propósito de reafirmar o complementar los conocimientos impartidos por el maestro.

El estudio realizado lleva a concretar con cuatro formas fundamentales de introducir la computadora en la enseñanza de la matemática en ingeniería: como apoyo en las clases de tipo teórico, como recurso importante en actividades prácticas, como apoyo para la interpretación de problemas y sus soluciones, para la visualización e interpretación de convergencias y aproximaciones.

Concluimos que el uso de estos recursos didácticos indudablemente favorecen el proceso de enseñanza aprendizaje, y la motivación de los alumnos por la asignatura, teniéndose en cuenta el propósito que pretendemos de nuestros futuros egresados, que cumplan un determinado encargo social. Todo lo anterior conduce al cumplimiento de la hipótesis propuesta.

PERSPECTIVAS Y RECOMENDACIONES

Es innegable que el desarrollo de la computación ha sido impresionante en los últimos años, esto implica una modificación curricular que las instituciones tienen que asumir como innovación que llevaría al mejoramiento del aprendizaje. En el futuro el educador debe ser capaz de integrar la ayuda tecnológica con los conocimientos pedagógicos. Todo esto hace necesario programas de formación y capacitación de profesores, ya que como todos los recursos didácticos, la computadora incrementa el nivel académico siempre y cuando se utilice apropiadamente. De tal manera que la utilización de estas técnicas se logre de una forma planificada y organizada en el proceso de enseñanza aprendizaje teniendo en cuenta los elementos en forma de sistema que integran el proceso. De esta forma quedan muchos aspectos por investigar en este sentido para continuar el trabajo brevemente iniciado con esta propuesta.

BIBLIOGRAFÍA

1.Hwei P. Hsu. 1986
Análisis de Fourier
Editorial Addison-Wesley Iberoamericana, México

2.Kreyzig Erwin 1991
Matemáticas avanzadas para Ingeniería
Editorial LIMUSA, México

3.Lehamn Charles H. 1990
Álgebra
Editorial LIMUSA, México

4.Olga Lidia Pérez Gonzáles
Notas del curso Didáctica de las Matemáticas
Maestría en la Enseñanza de las Ciencias
U.A.N.L. Julio 1998

5.ROSS S. L. 1982
Introducción a las Ecuaciones Diferenciales
Nueva Editorial Interamericana, México

6.Spiegel Murray R. 1971
Transformadas de Laplace
Mc. Graw-Hill, México

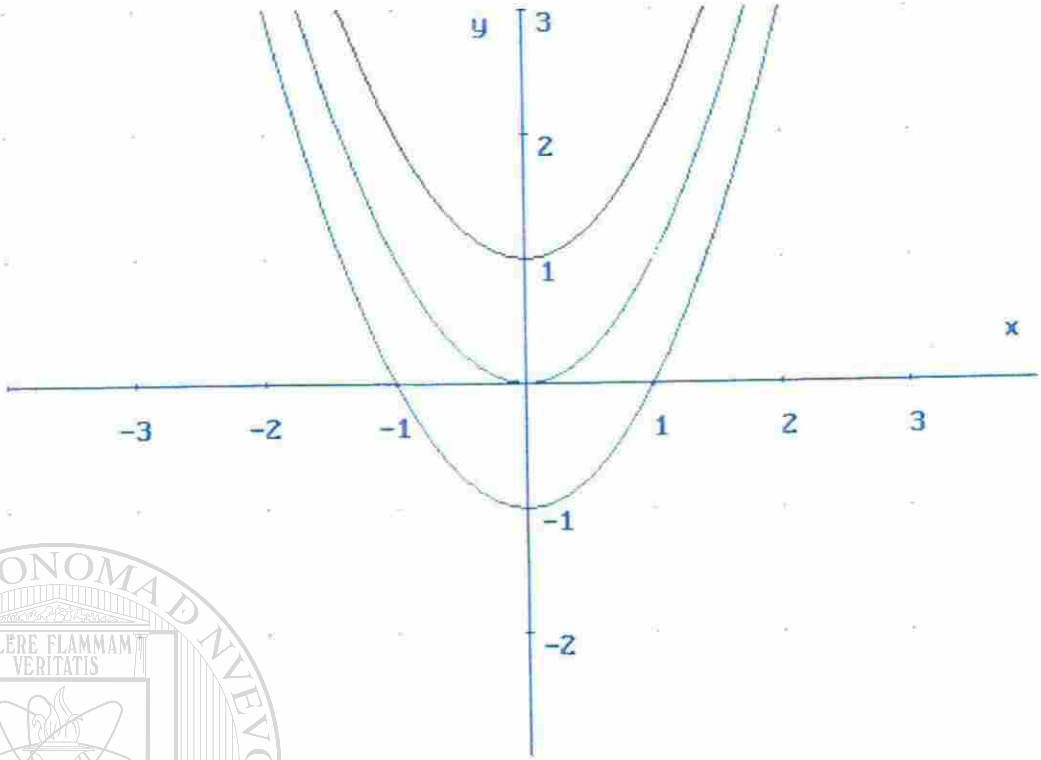
7.Swokowski Earl W. 1989
Cálculo con Geometría Analítica
Grupo Editorial Iberoamericana, México

8.P. C: Magazine en Español
Año 4 #8, Agosto 1993

9.Interfase Septiembre 1998
Hemeroteca U.A.N.L.

ANEXOS

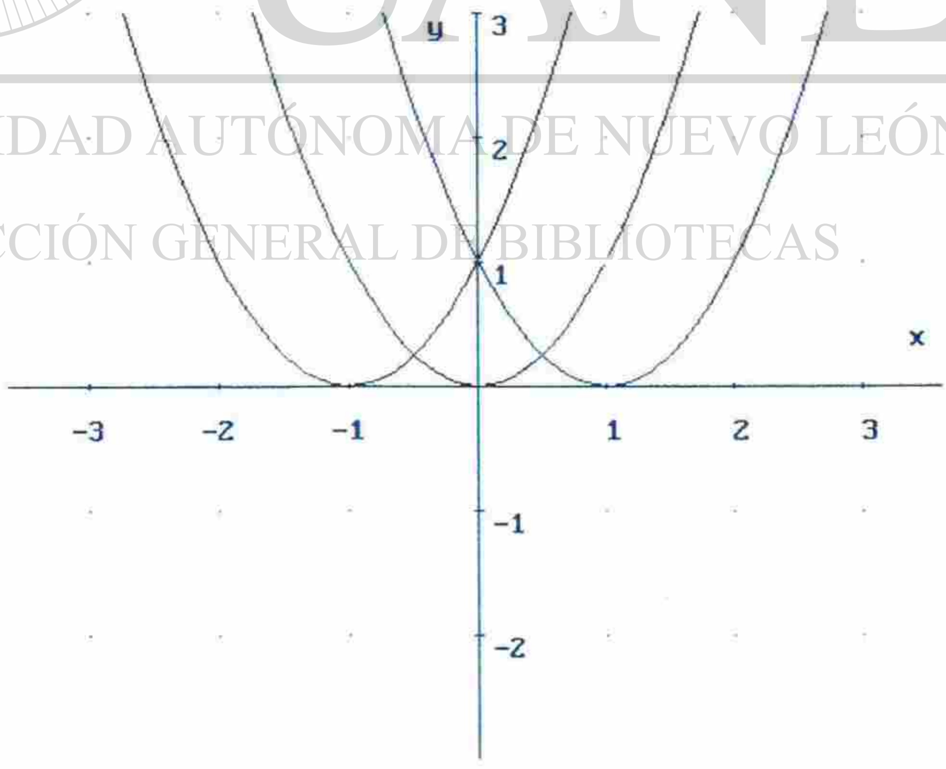
ANEXO 1



#1: x^2

#2: $x^2 + 1$

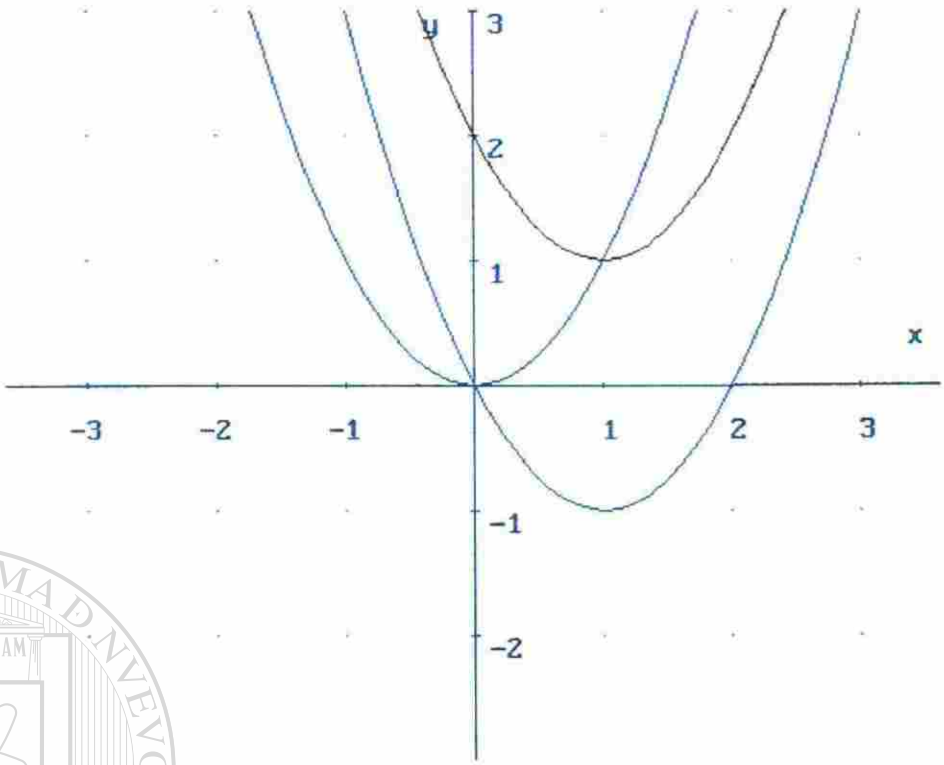
#3: $x^2 - 1$



#1: x^2

#2: $(x + 1)^2$

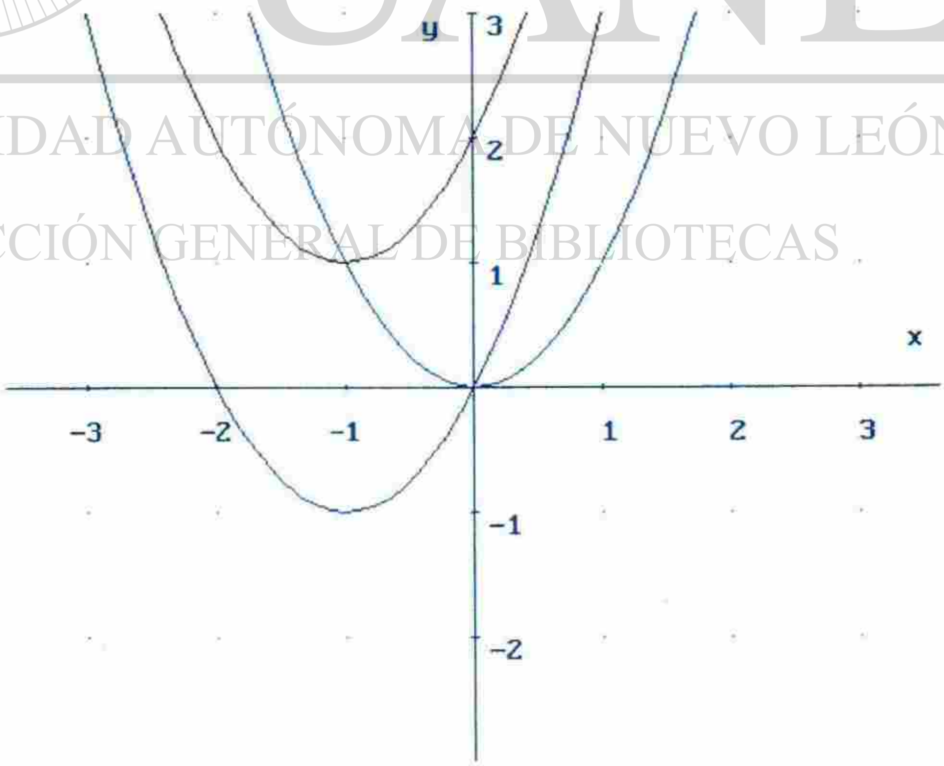
#3: $(x - 1)^2$



#1: x^2

#2: $(x - 1)^2 + 1$

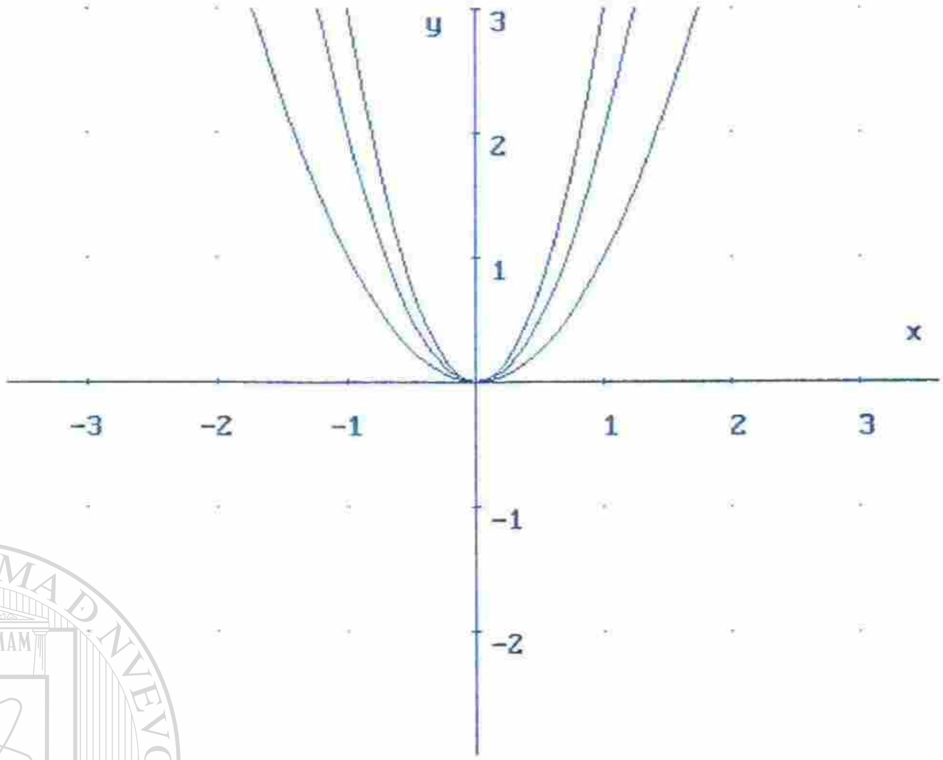
#3: $(x - 1)^2 - 1$



#1: x^2

#2: $(x + 1)^2 + 1$

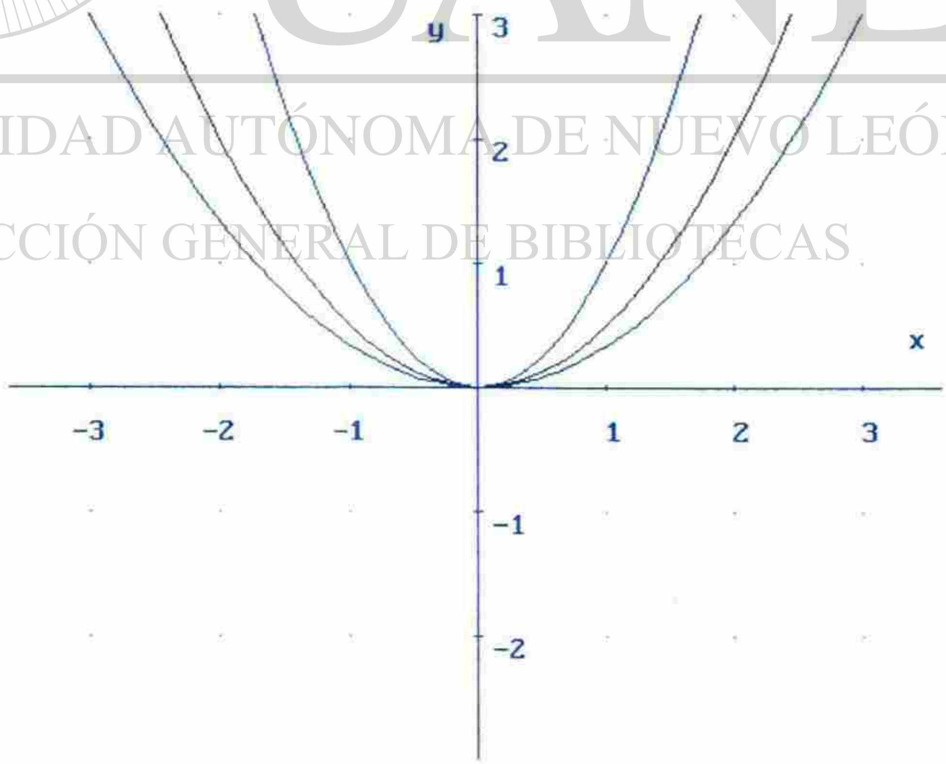
#3: $(x + 1)^2 - 1$



#1: x^2

#2: $2 \cdot x^2$

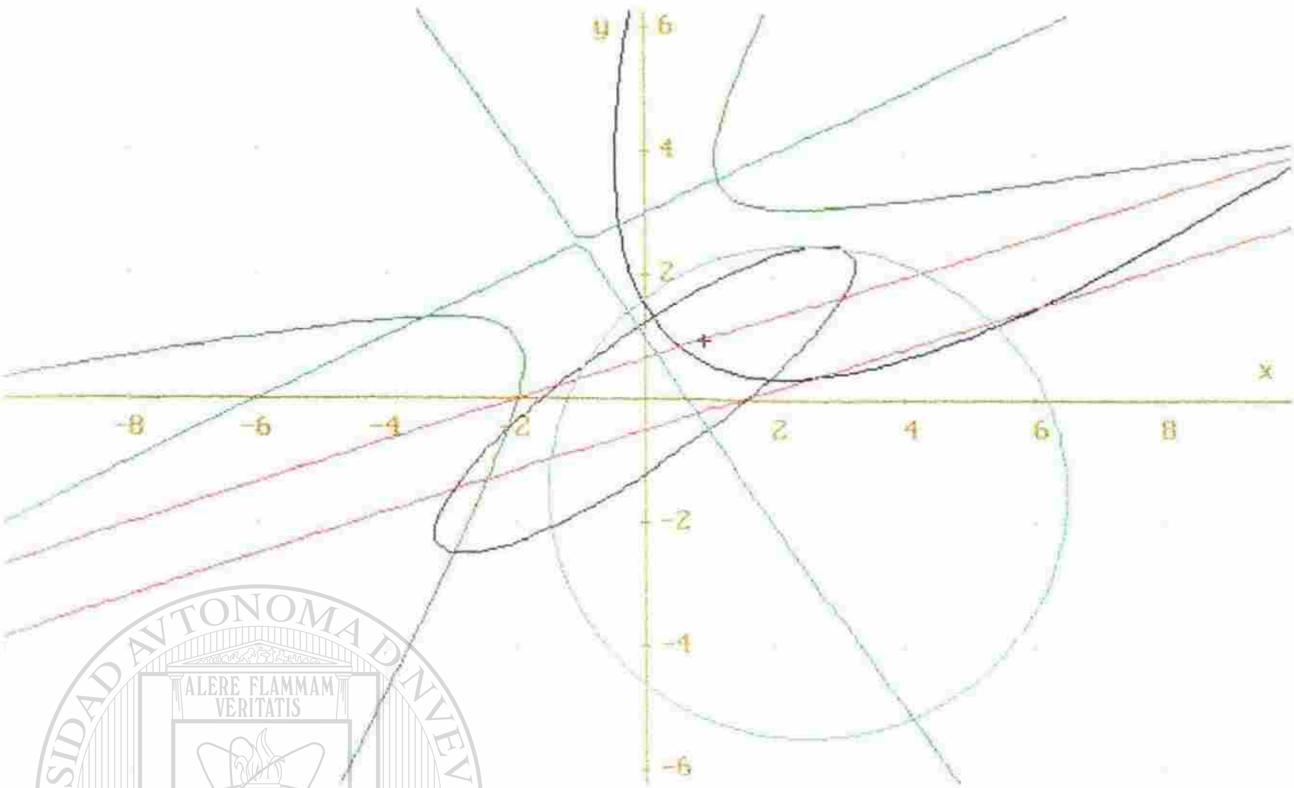
#3: $3 \cdot x^2$



#1: x^2

#2: $\frac{1}{2} \cdot x^2$

#3: $\frac{1}{3} \cdot x^2$



#1: $16 \cdot x^2 - 24 \cdot x \cdot y + 9 \cdot y^2 - 60 \cdot x - 80 \cdot y + 100 = 0$

#2: $32 \cdot x^2 - 72 \cdot x \cdot y + 53 \cdot y^2 = 80$

#3: $4 \cdot x^2 - 24 \cdot x \cdot y + 11 \cdot y^2 + 56 \cdot x - 58 \cdot y + 95 = 0$

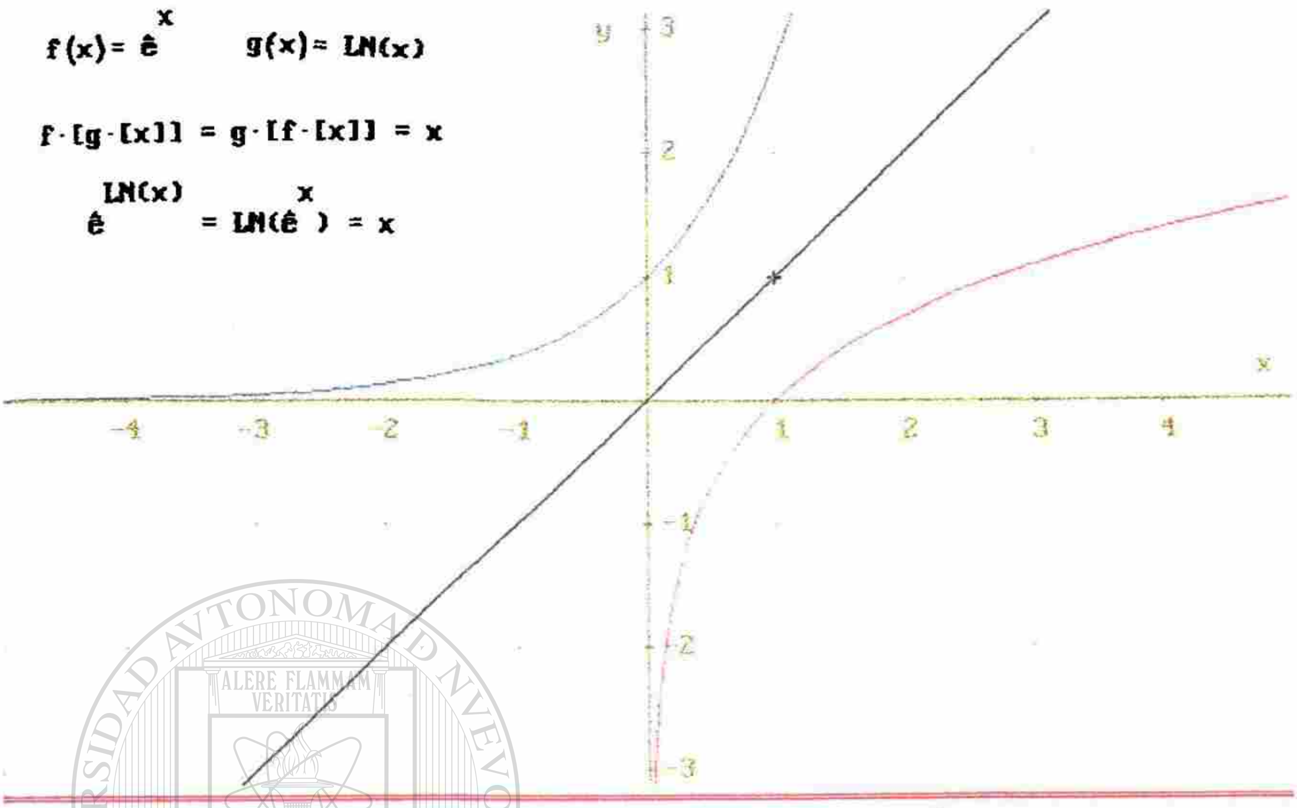
#4: $3 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y - 4 \cdot y^2 + 16 \cdot x + 16 \cdot y - 12 = 0$

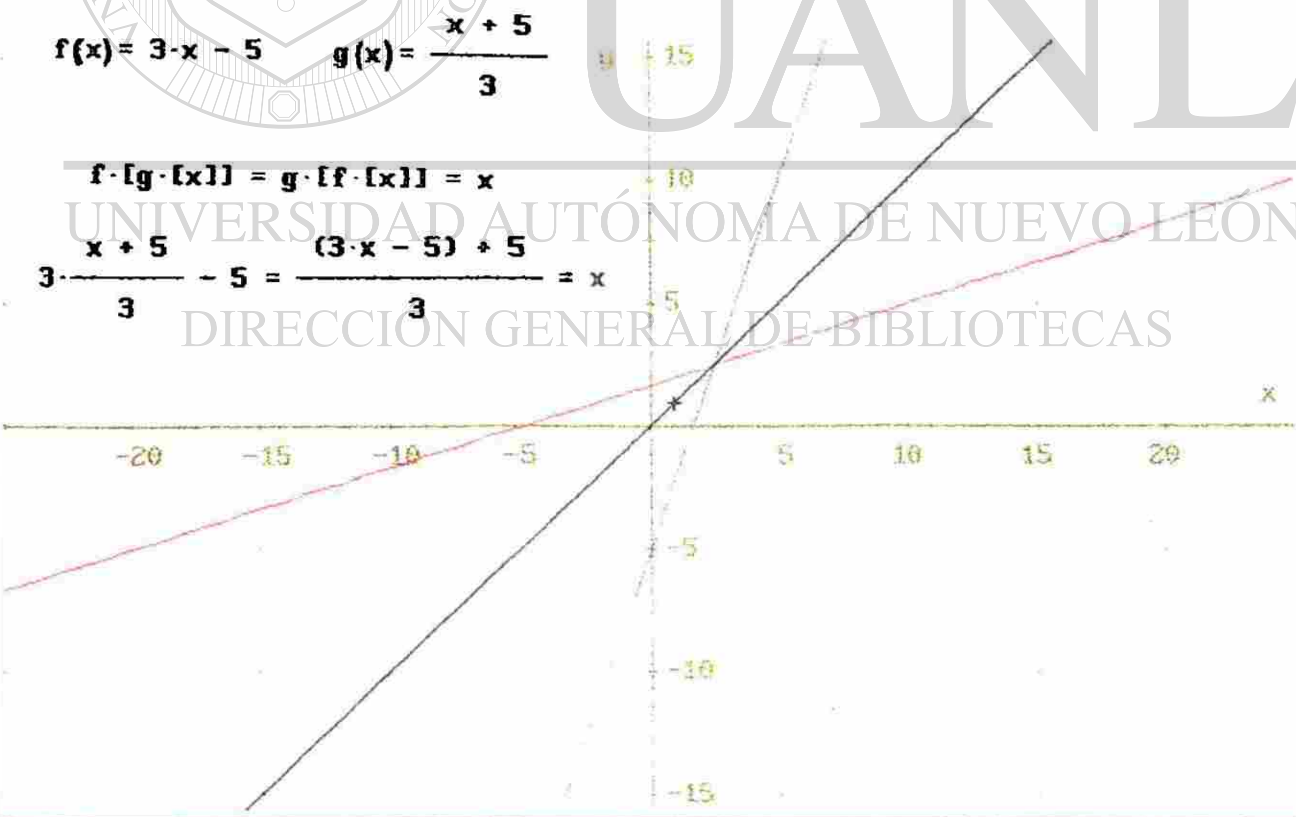
#5: $5 \cdot x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 10 \cdot y^2 - 12 \cdot x - 22 \cdot y + 17 = 0$

#6: $x^2 + 8 \cdot x \cdot y + 16 \cdot y^2 - 4 \cdot x - 16 \cdot y + 7 = 0$

#7: $2 \cdot x^2 - 12 \cdot x \cdot y + 18 \cdot y^2 + x - 3 \cdot y - 6 = 0$

#8: $2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 - 10 \cdot x + 6 \cdot y - 15 = 0$

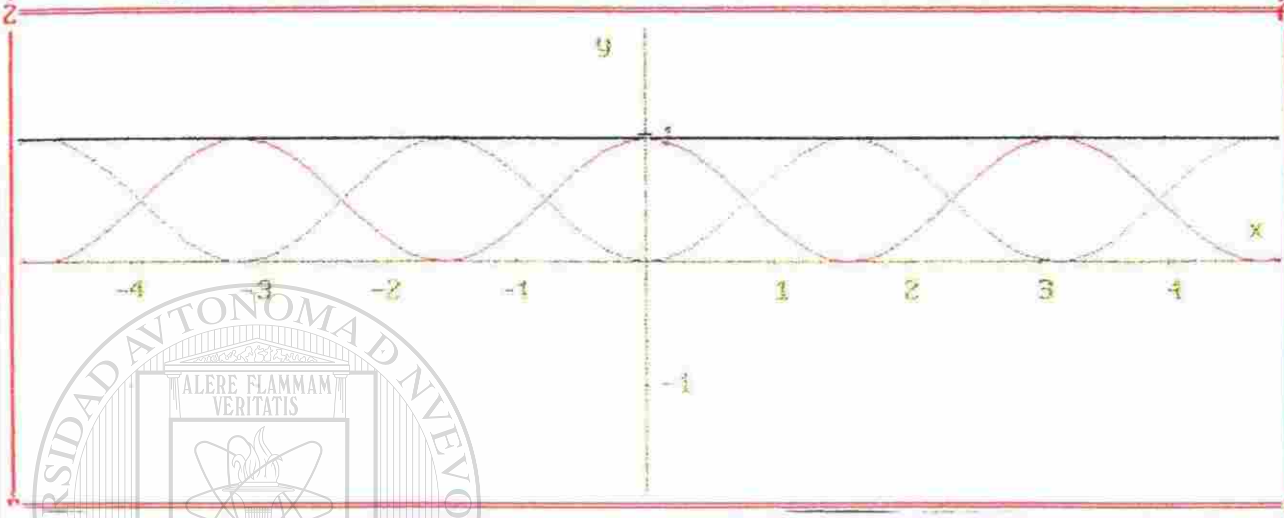

f(x)= ê^x   g(x)= LN(x)
f·[g·[x]] = g·[f·[x]] = x
ê^LN(x) = LN(ê^x) = x
y
x
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4
3 2 1 -1 -2 -3


f(x)= 3·x − 5   g(x)= (x + 5)/3
f·[g·[x]] = g·[f·[x]] = x
3·((x + 5)/3) − 5 = ((3·x − 5) + 5)/3 = x
y
x
-20 -15 -10 -5 5 10 15 20
15 10 5 -5 -10 -15

#1: $SIN(t)^2$

#2: $COS(t)^2$

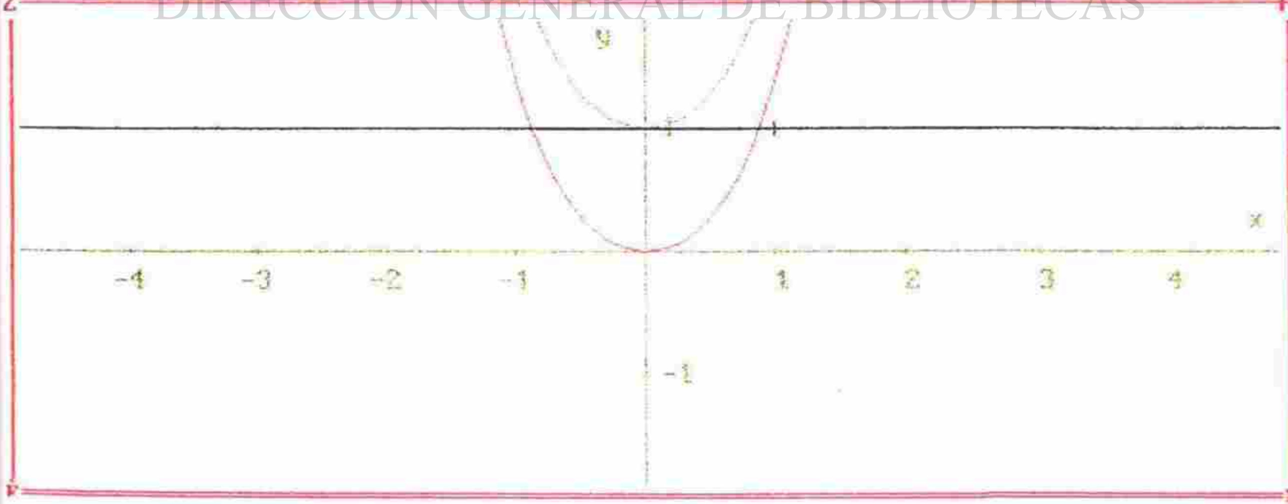
#3: $SIN(t)^2 + COS(t)^2$

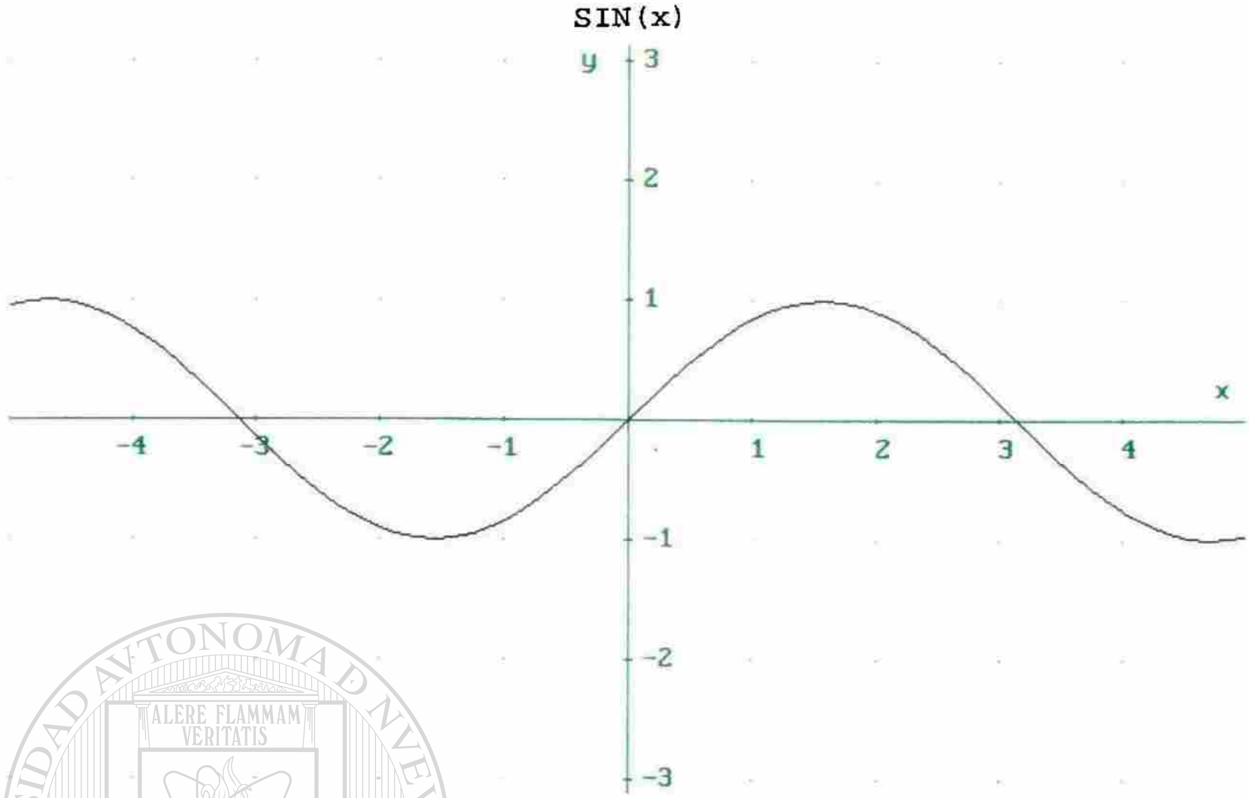


#1: $COSH(x)^2$

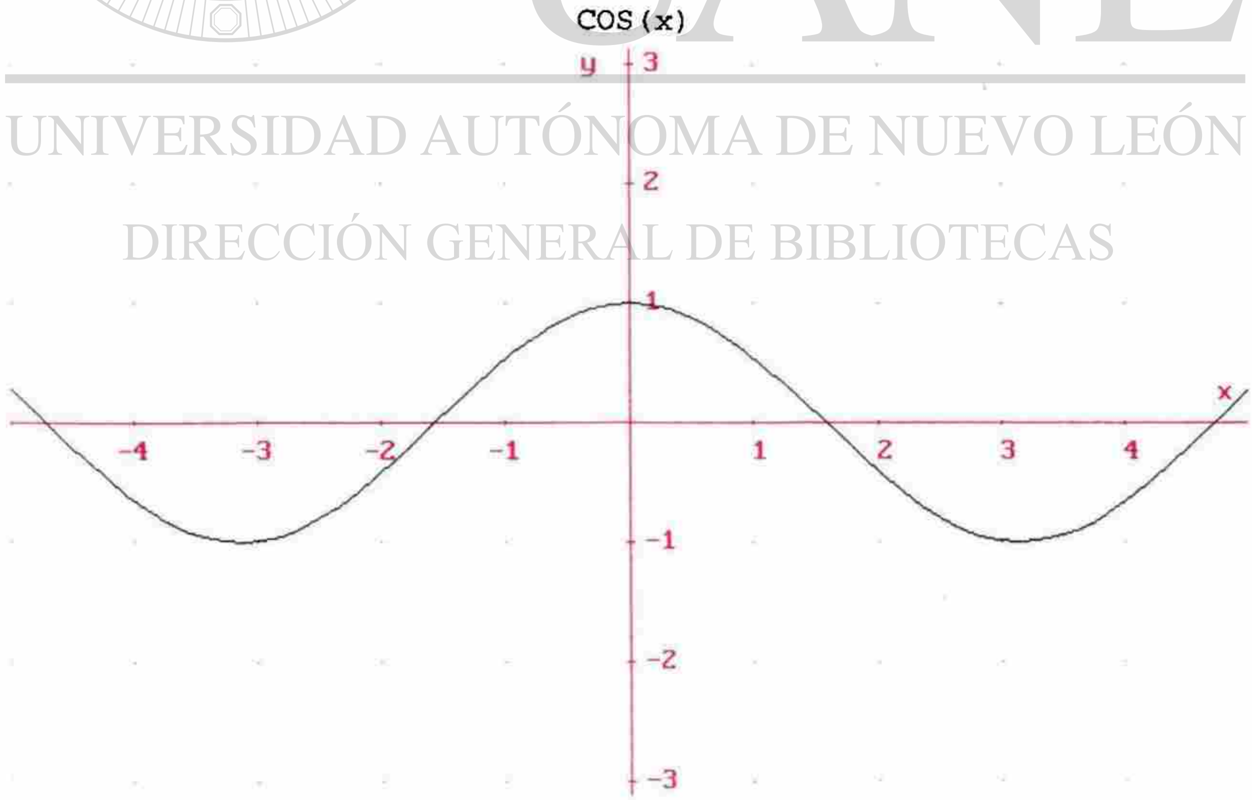
#2: $SINH(x)^2$

#3: $COSH(x)^2 - SINH(x)^2$



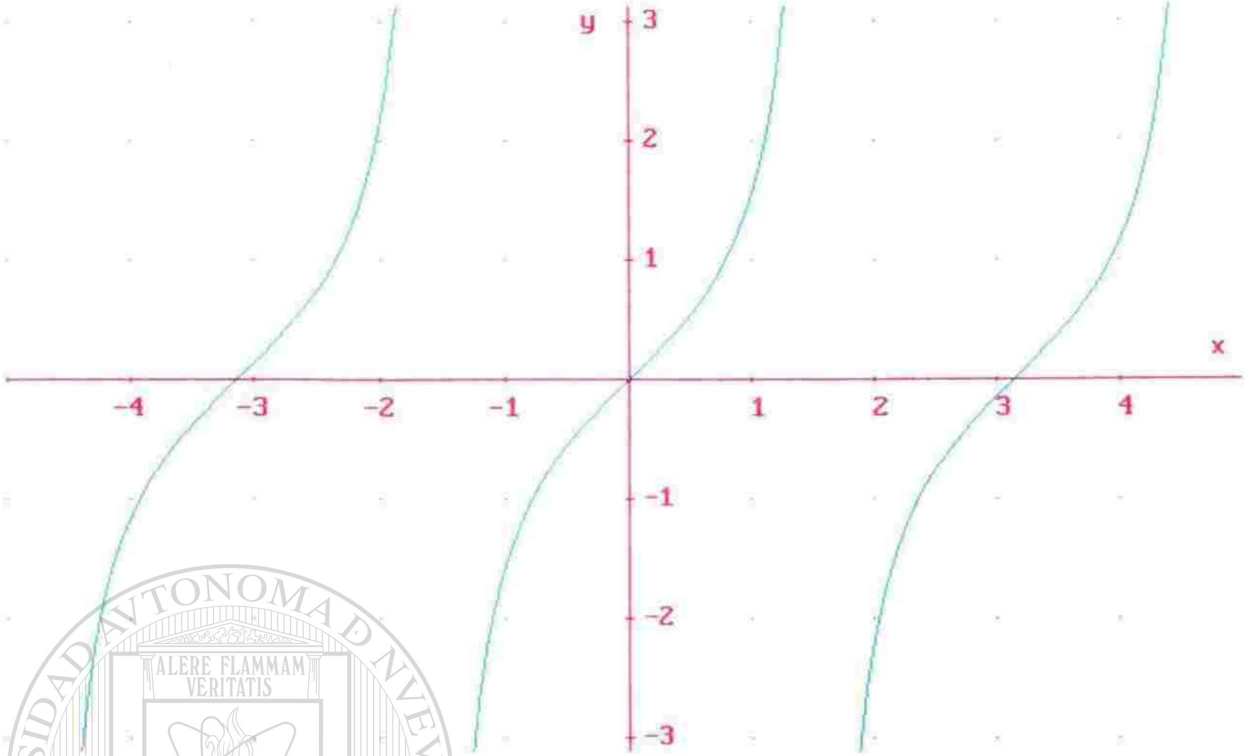


SIN(x)
y
3
2
1
-1
-2
-3
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

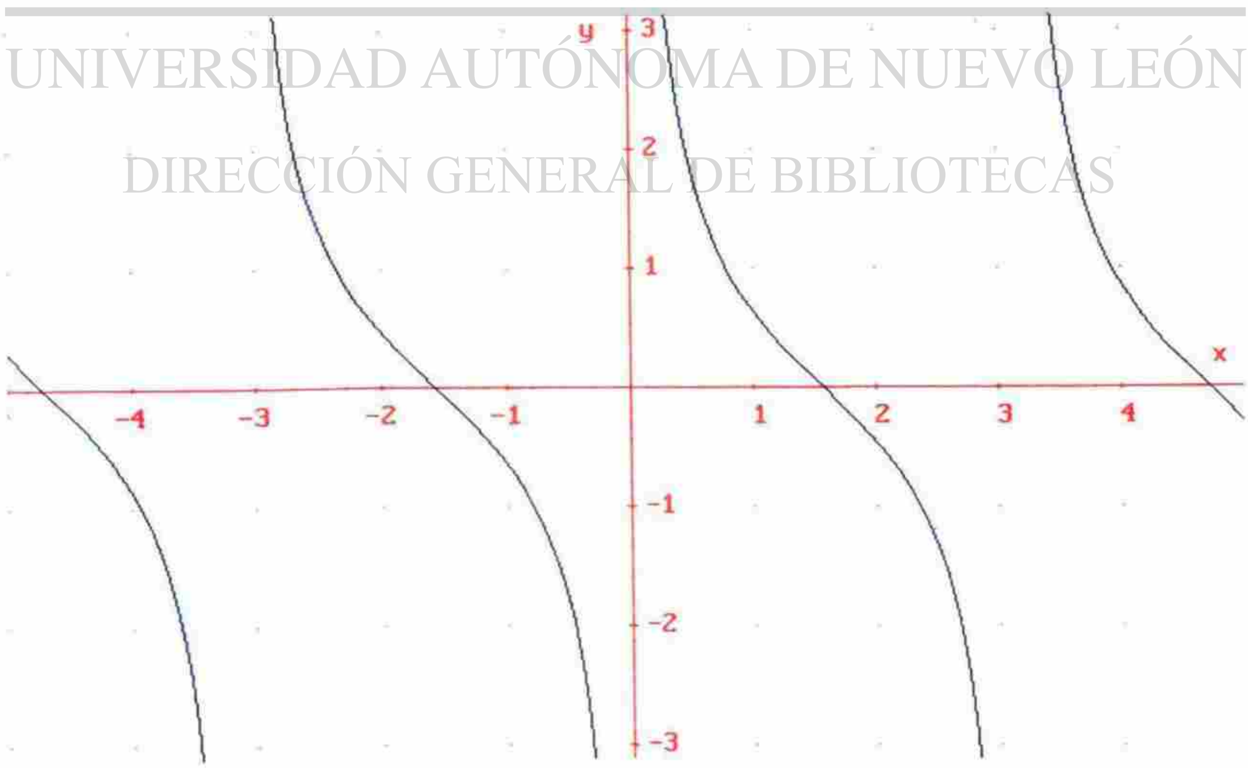


COS(x)
y
3
2
1
-1
-2
-3
x
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

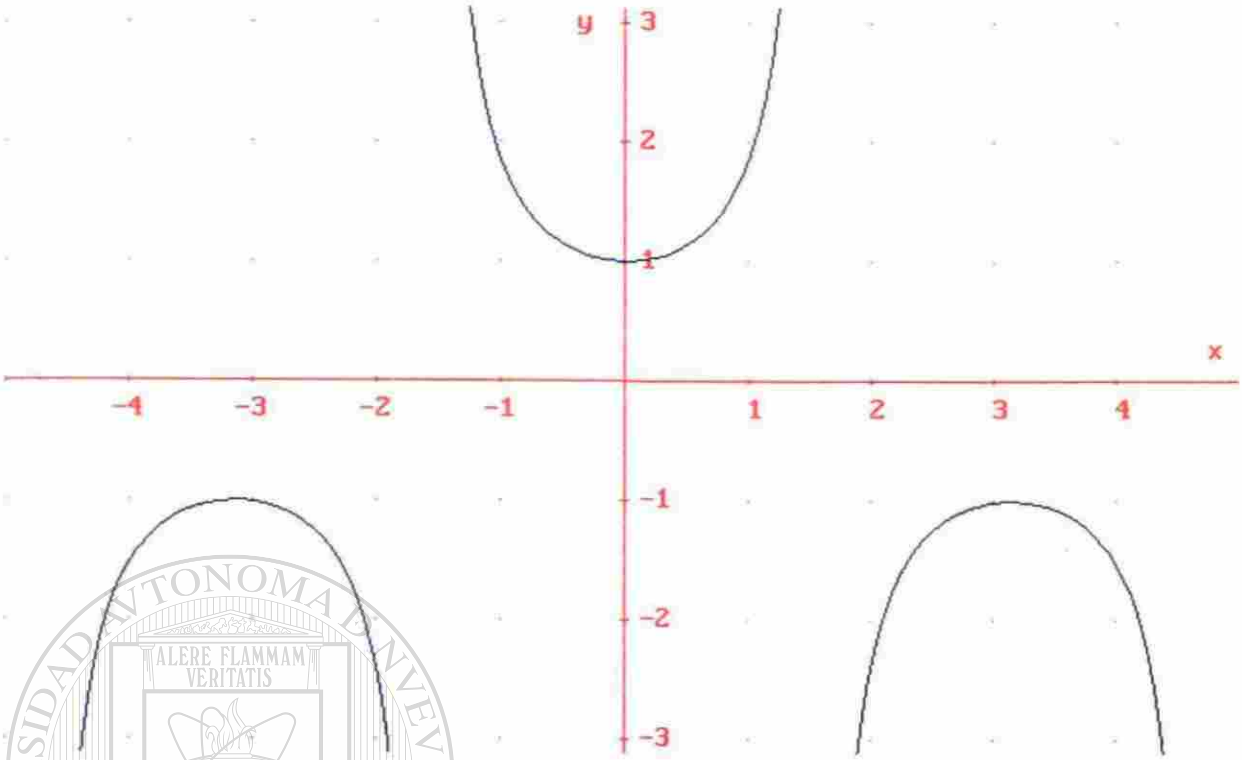
TAN(x)



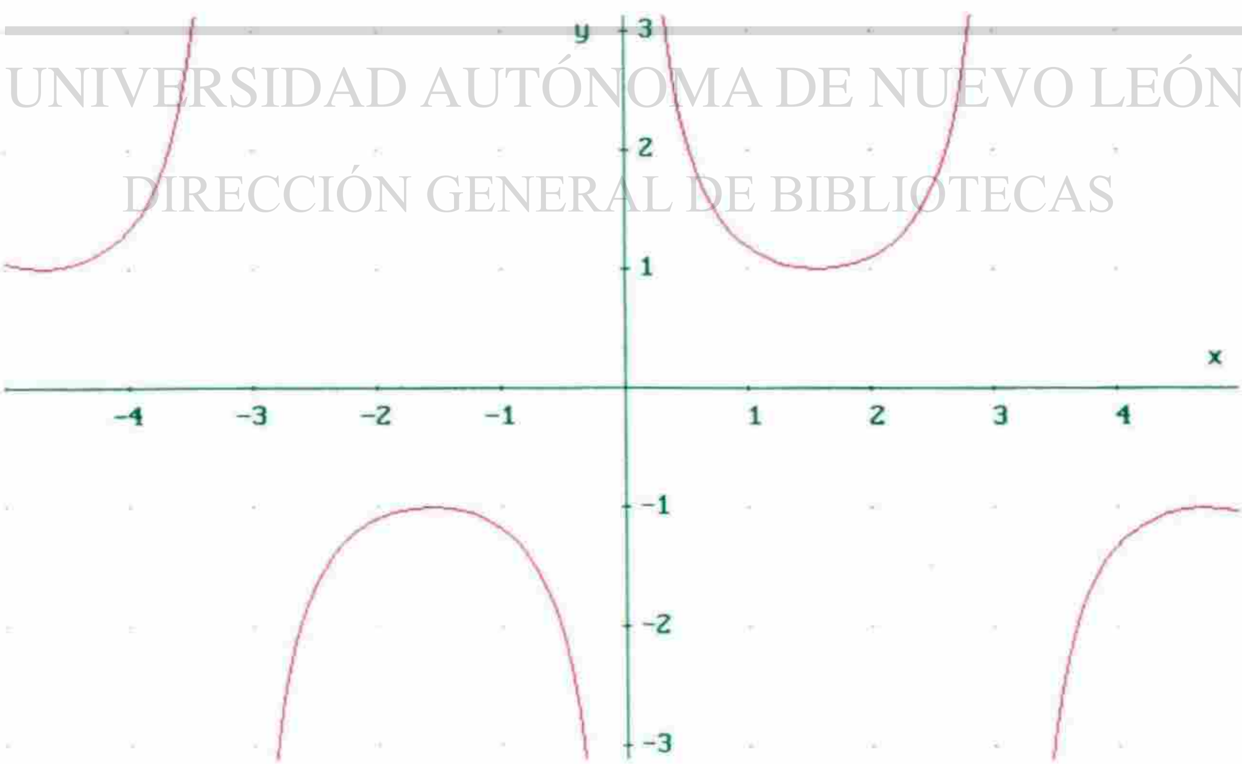
COT(x)

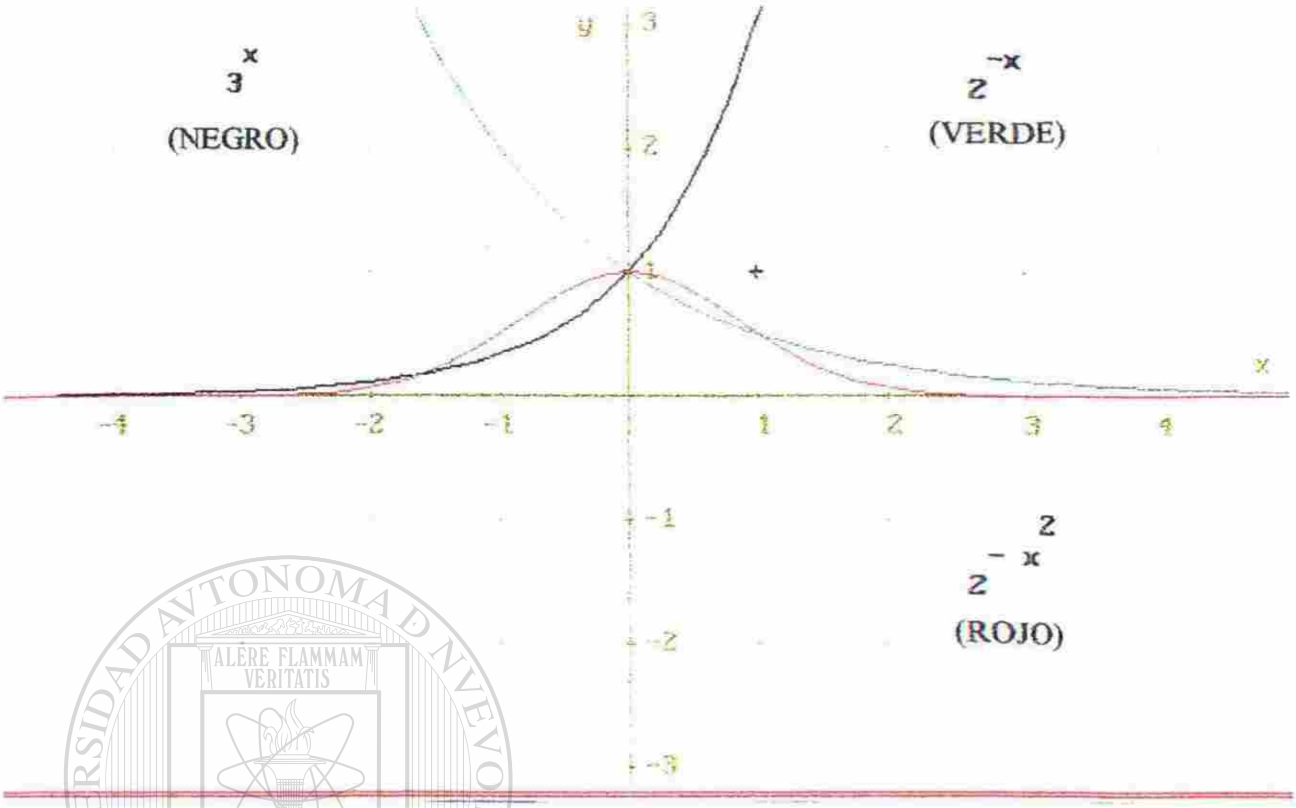


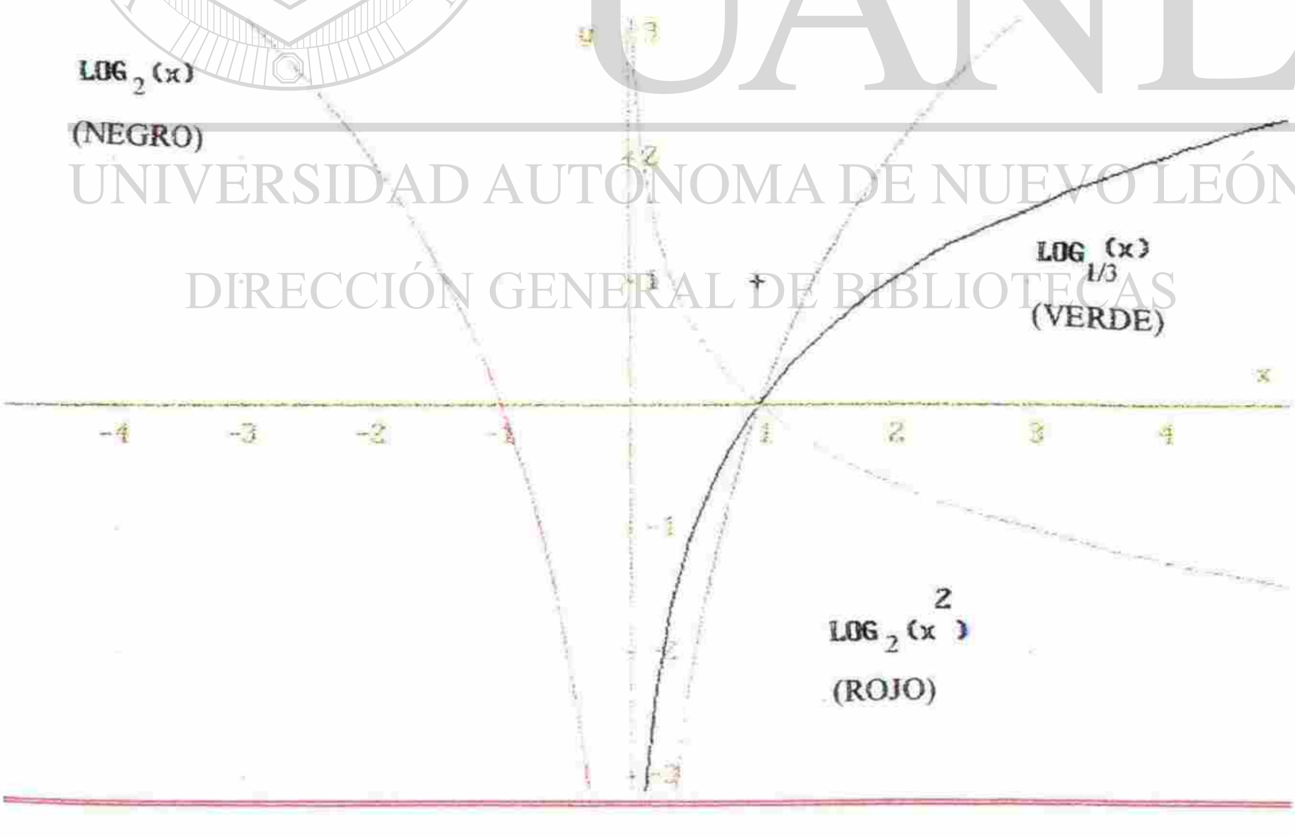
SEC(x)

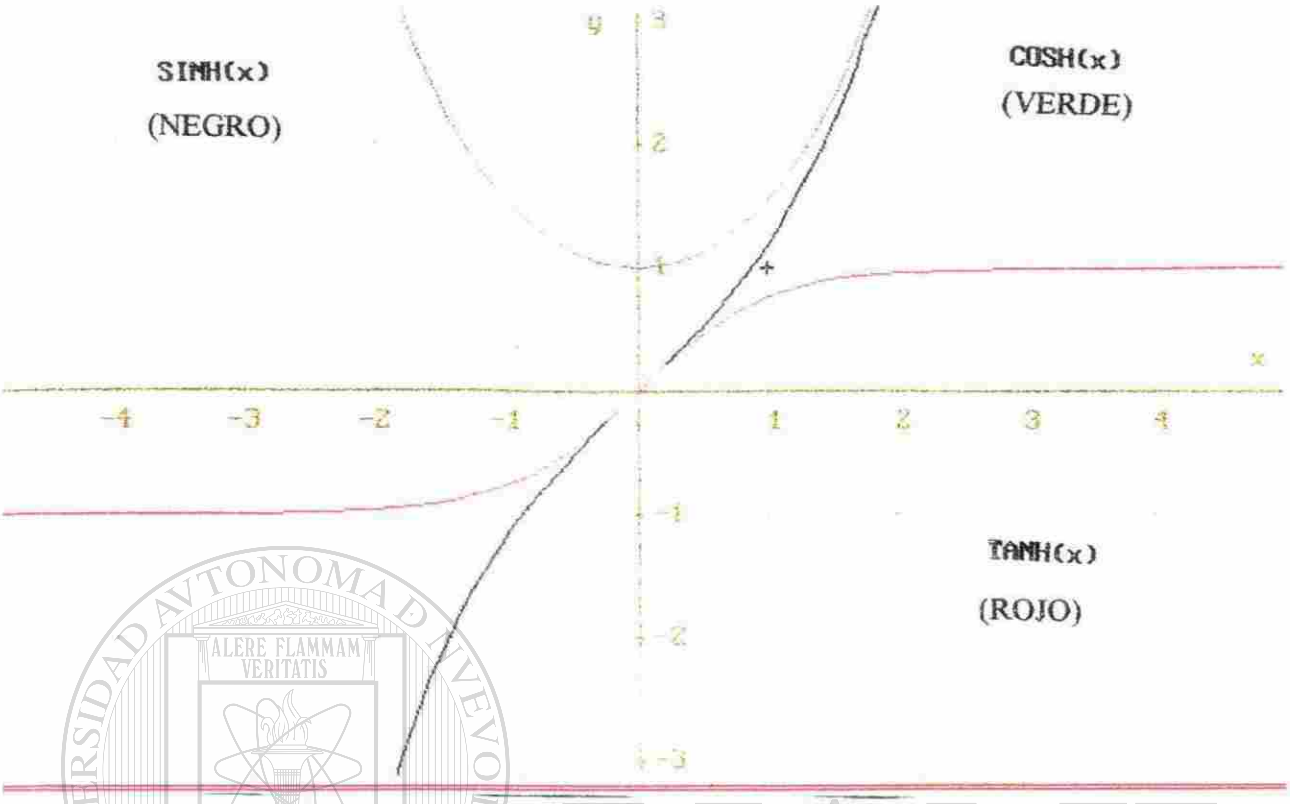


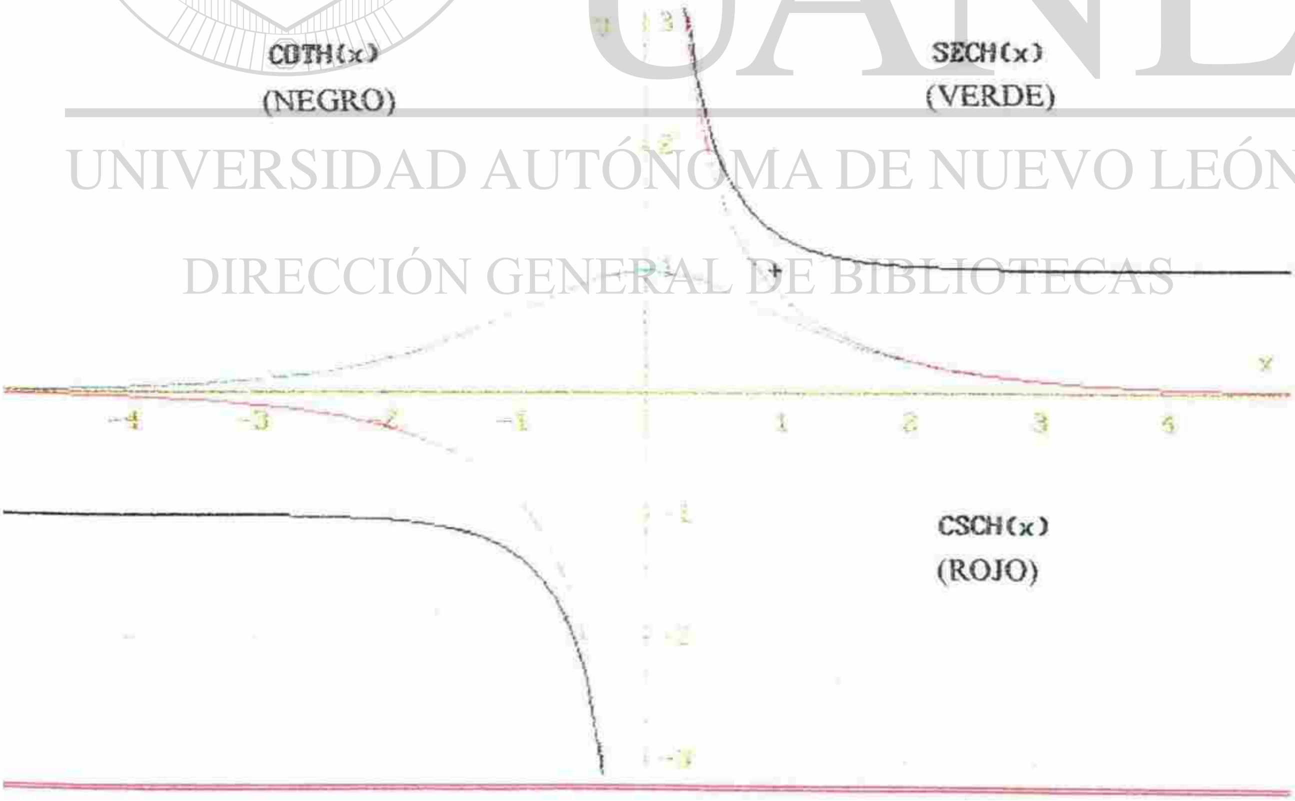
CSC(x)

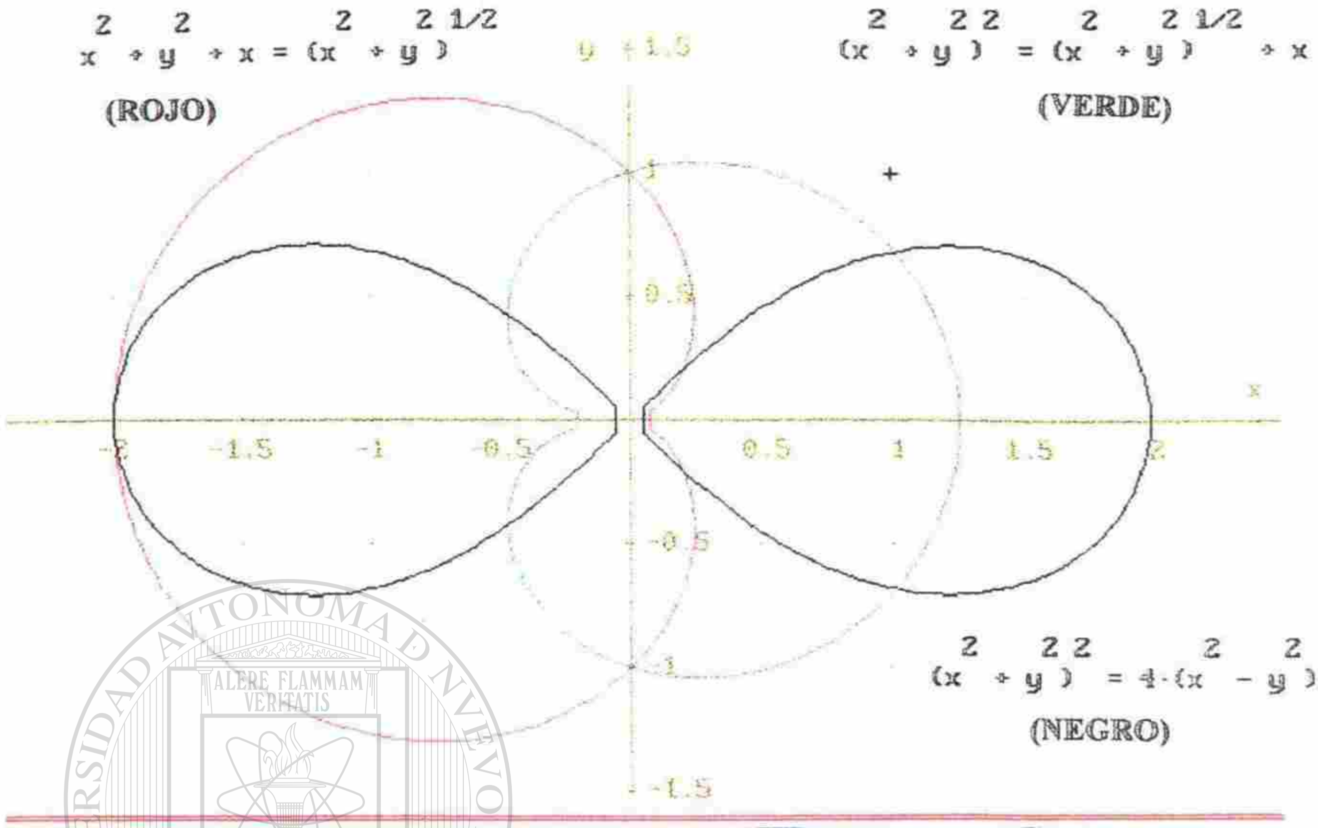



3^x
(NEGRO)
2^{-x}
(VERDE)
2^{-x^2}
(ROJO)


$LOG_2(x)$
(NEGRO)
$LOG_{1/3}(x)$
(VERDE)
$LOG_2(x^2)$
(ROJO)

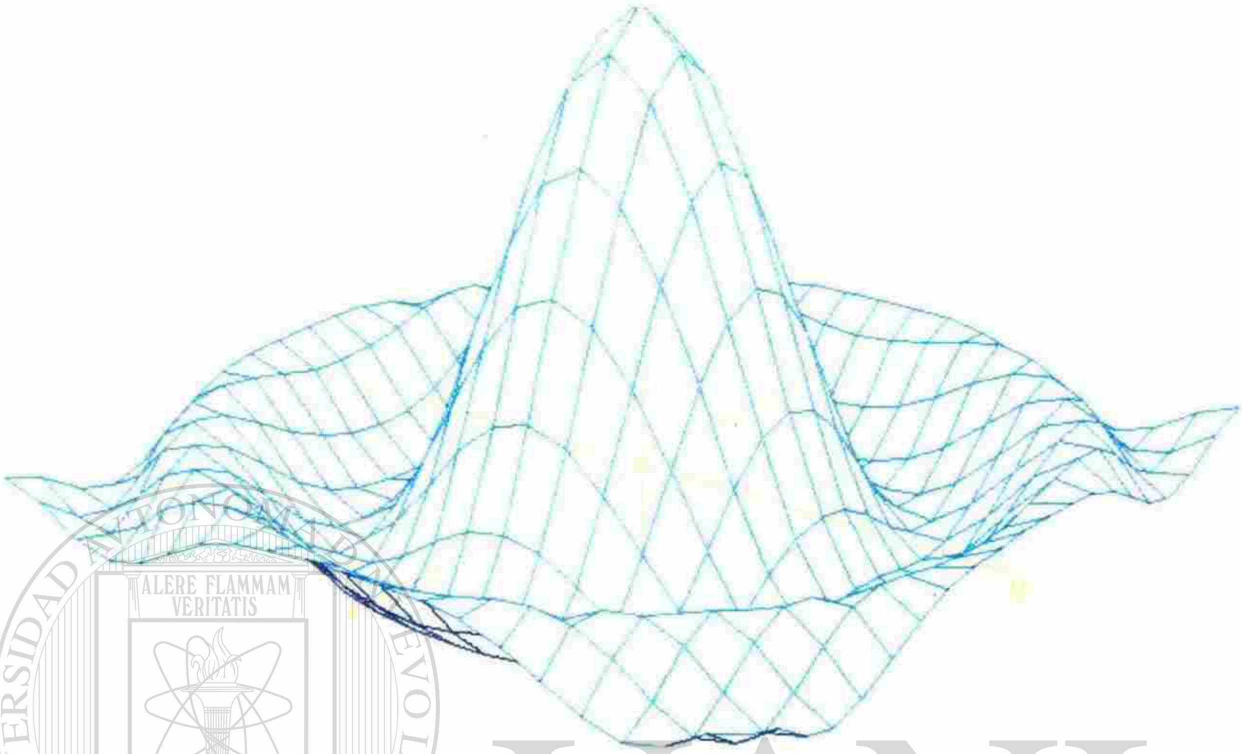

SINH(x)
(NEGRO)
COSH(x)
(VERDE)
TANH(x)
(ROJO)
y
x


COTH(x)
(NEGRO)
SECH(x)
(VERDE)
CSCH(x)
(ROJO)
x

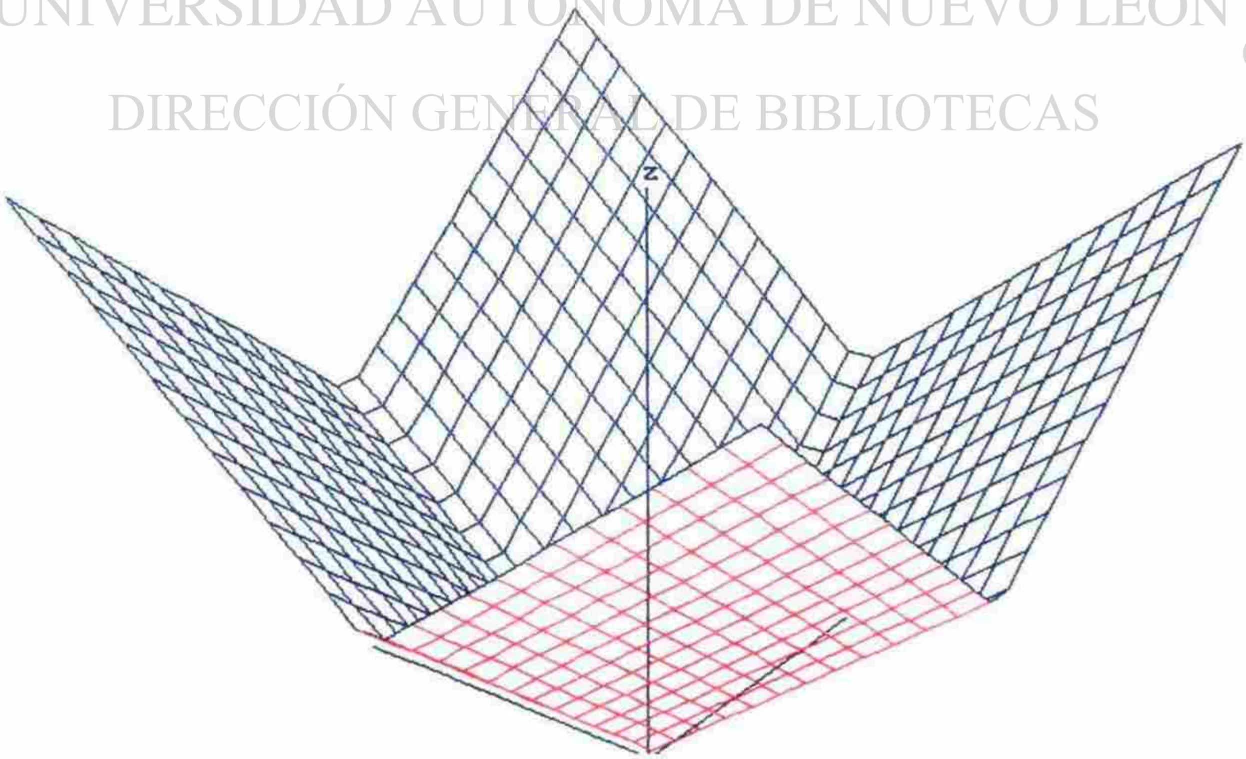

$x^2 + y^2 + x = (x^2 + y^2)^{1/2}$
(ROJO)
$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2)^{1/2} + x$
(VERDE)
$(x^2 + y^2)^2 = 4\cdot(x^2 - y^2)$
(NEGRO)
y 1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
x
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2


$x^2 y^2 = (y + 1)^2 \cdot (4 - y^2)$
(ROJO)
$y^2 = x^2 \cdot \frac{2 + x}{2 - x}$
(VERDE)
$3\cdot(x^2 + y^2)^2 = 100\cdot x\cdot y$
(NEGRO)
x
-4
-3
-1
1
2
3
4

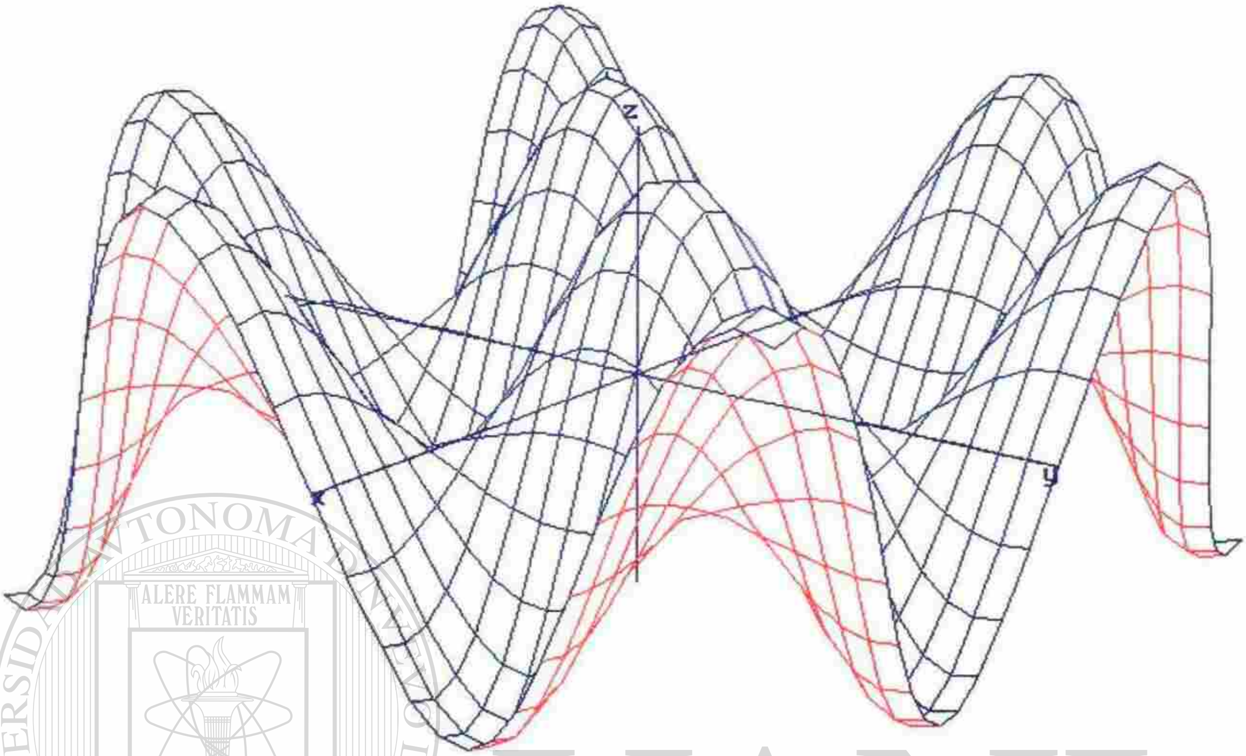
$\dfrac{}{3 + x^2 + y^2}$



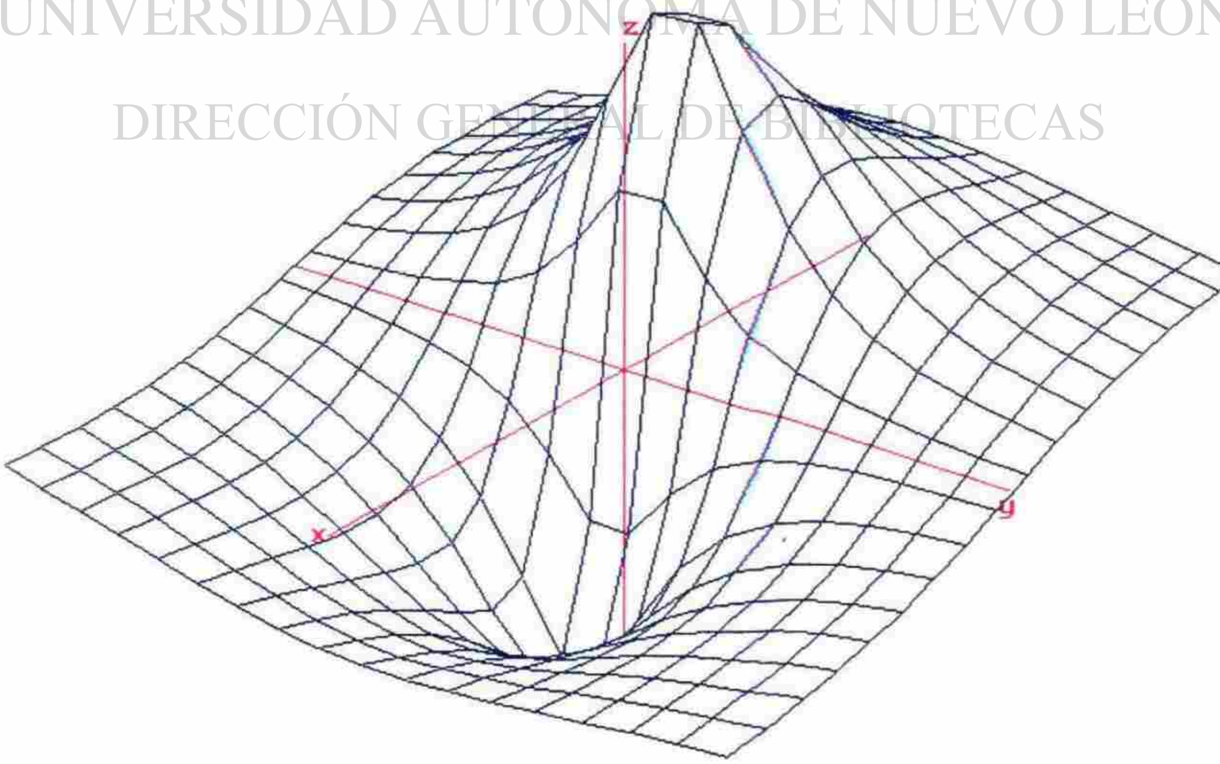
$|x| + |y|$



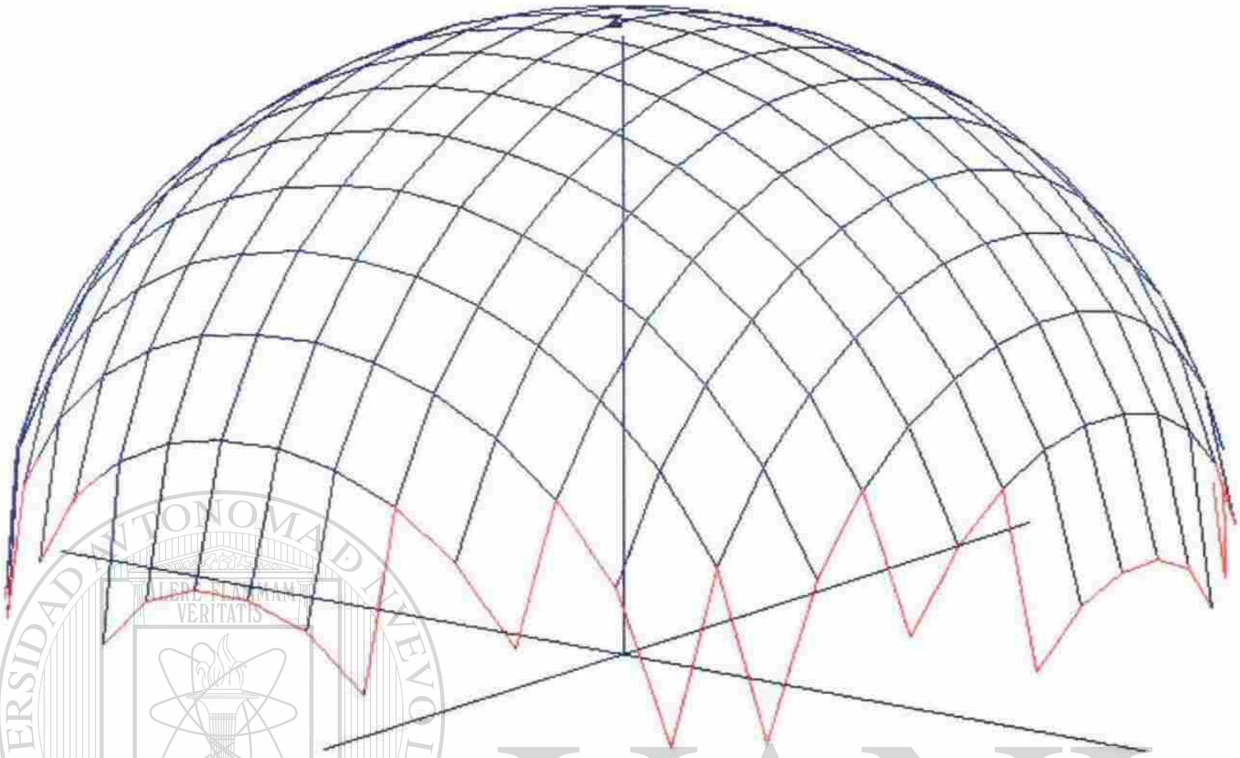
SIN(x) SIN(y)



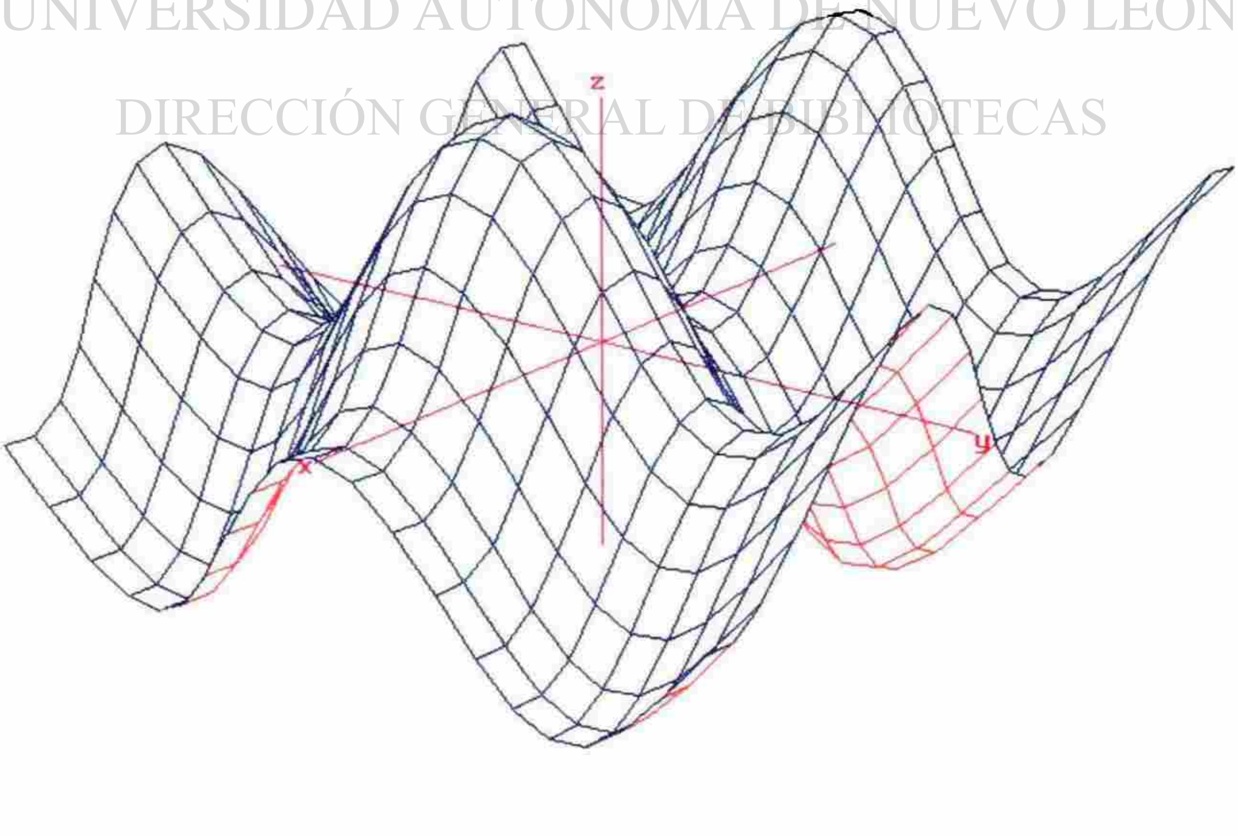
$$\frac{-4 \cdot x}{x^2 + y^2 + 1}$$



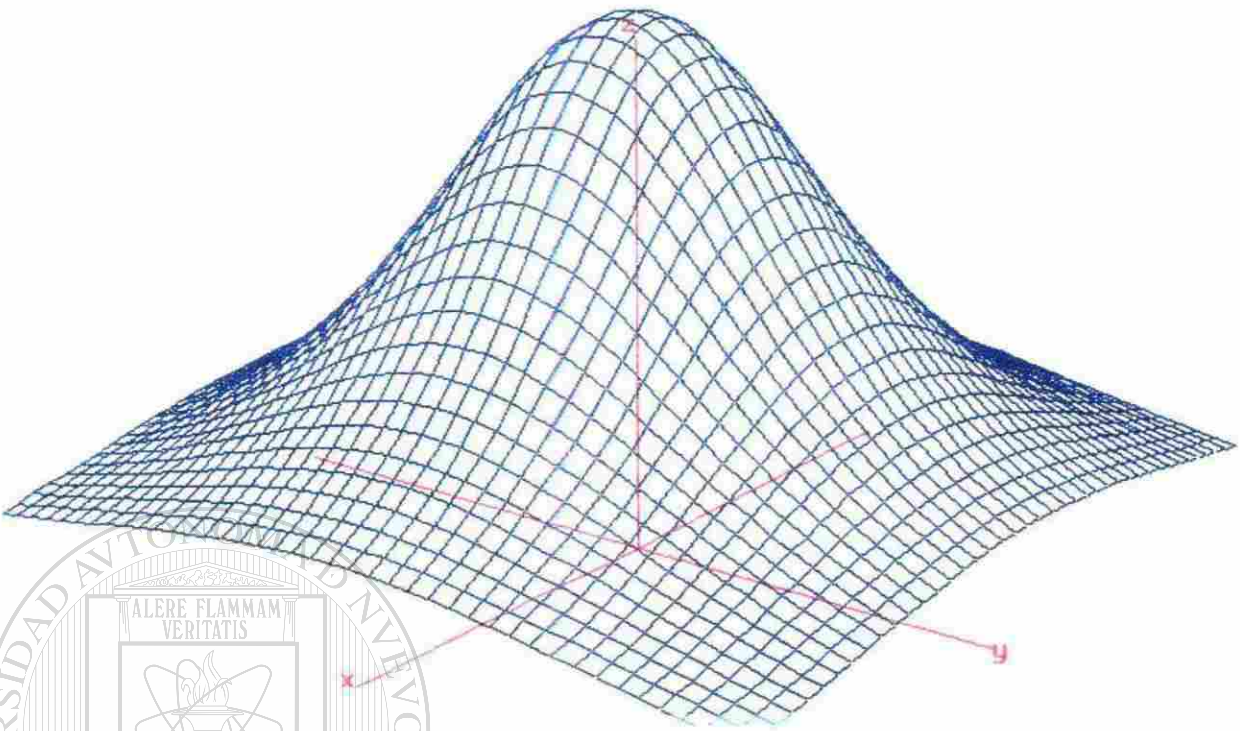
$\sqrt{(16 - x^2 - y^2)}$



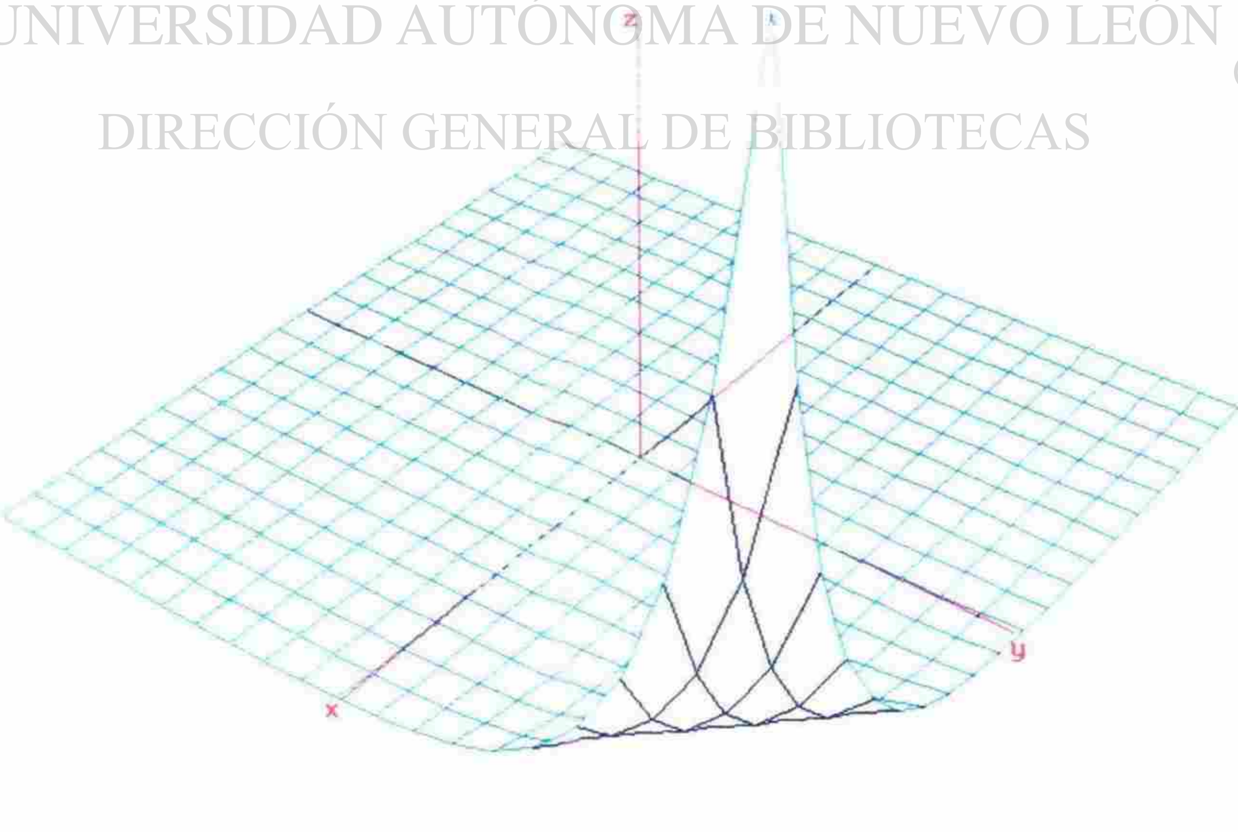
SIN(x) + COS(y)



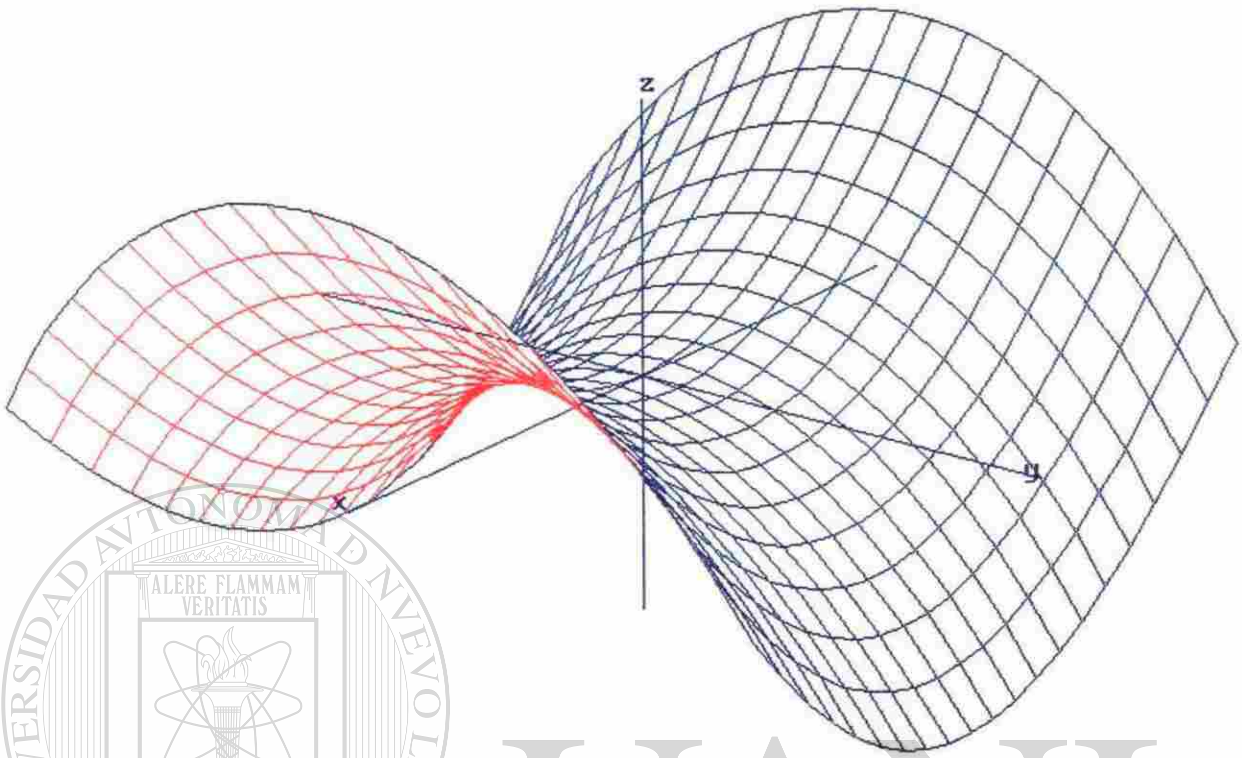
$$\frac{}{x^{2} + y^{2} + 9}$$



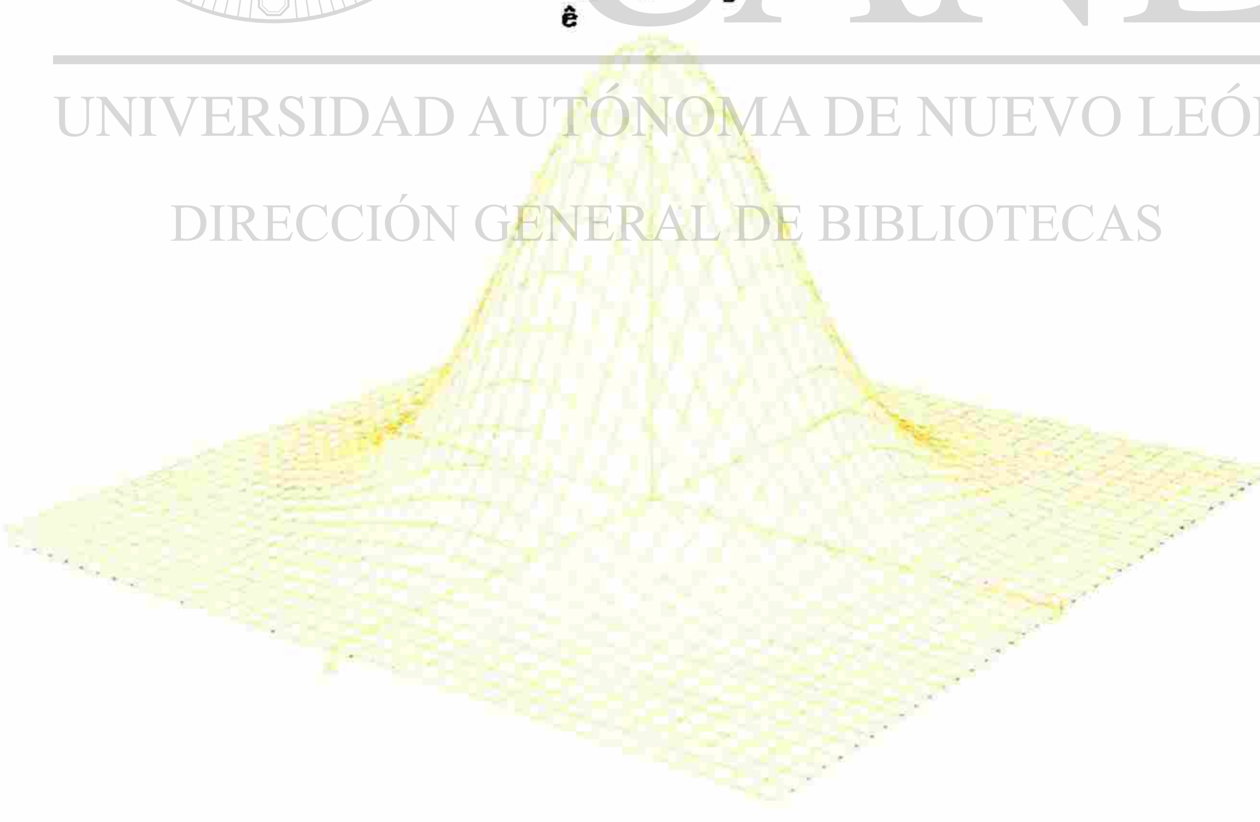
$$\hat{e}^{x + y}$$



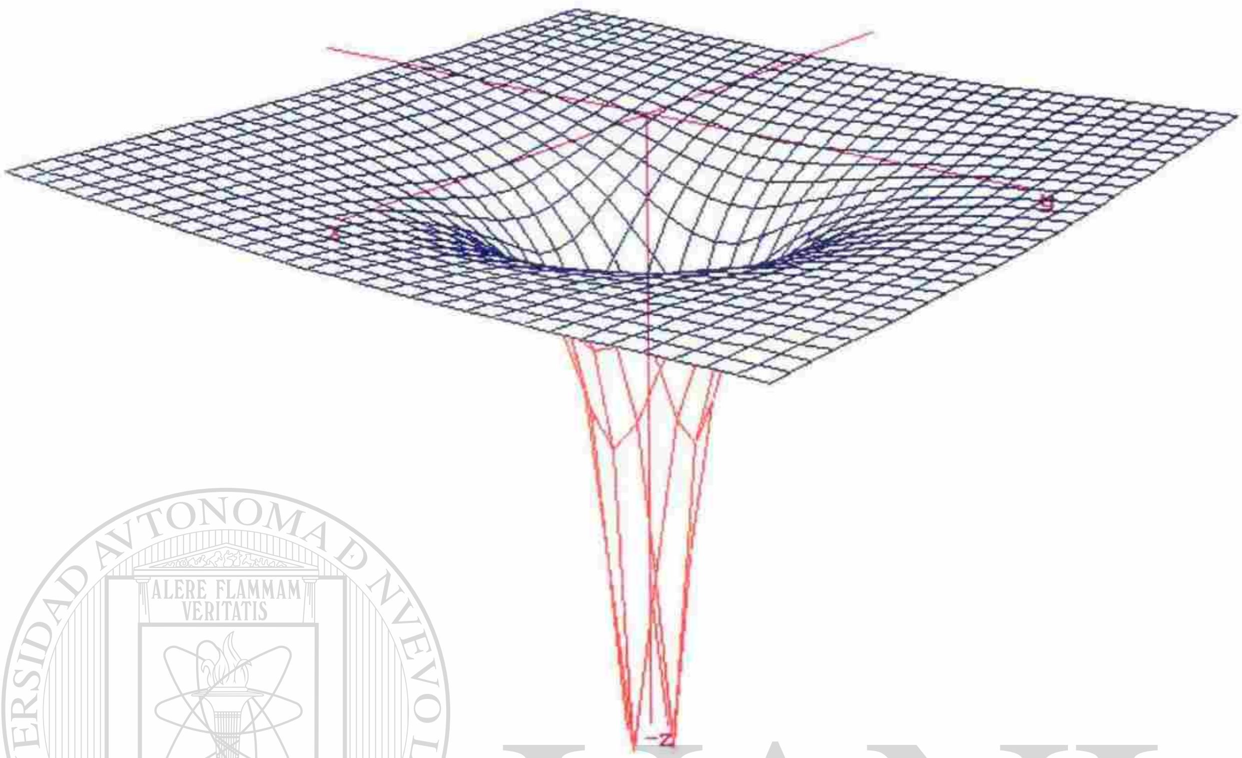
$x^2 - y^2$



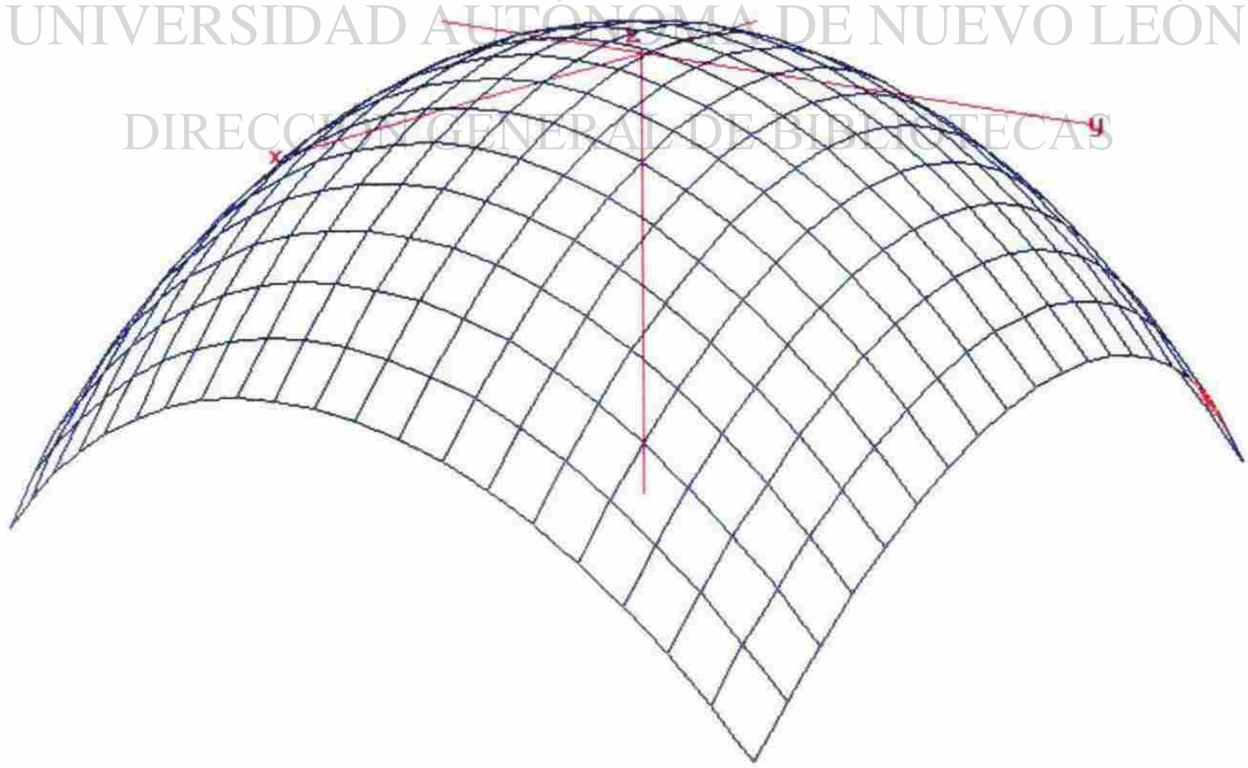
$e^{1 - x^2 - y^2}$



$$-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$$



$$2 - x^2 - y^2$$



ANEXO 2

$$x^3 - 3\cdot x^2 + 21\cdot x - 19$$

$$x = 1$$

$$x = 1 + 3\cdot\sqrt{2}\cdot\hat{\imath}$$

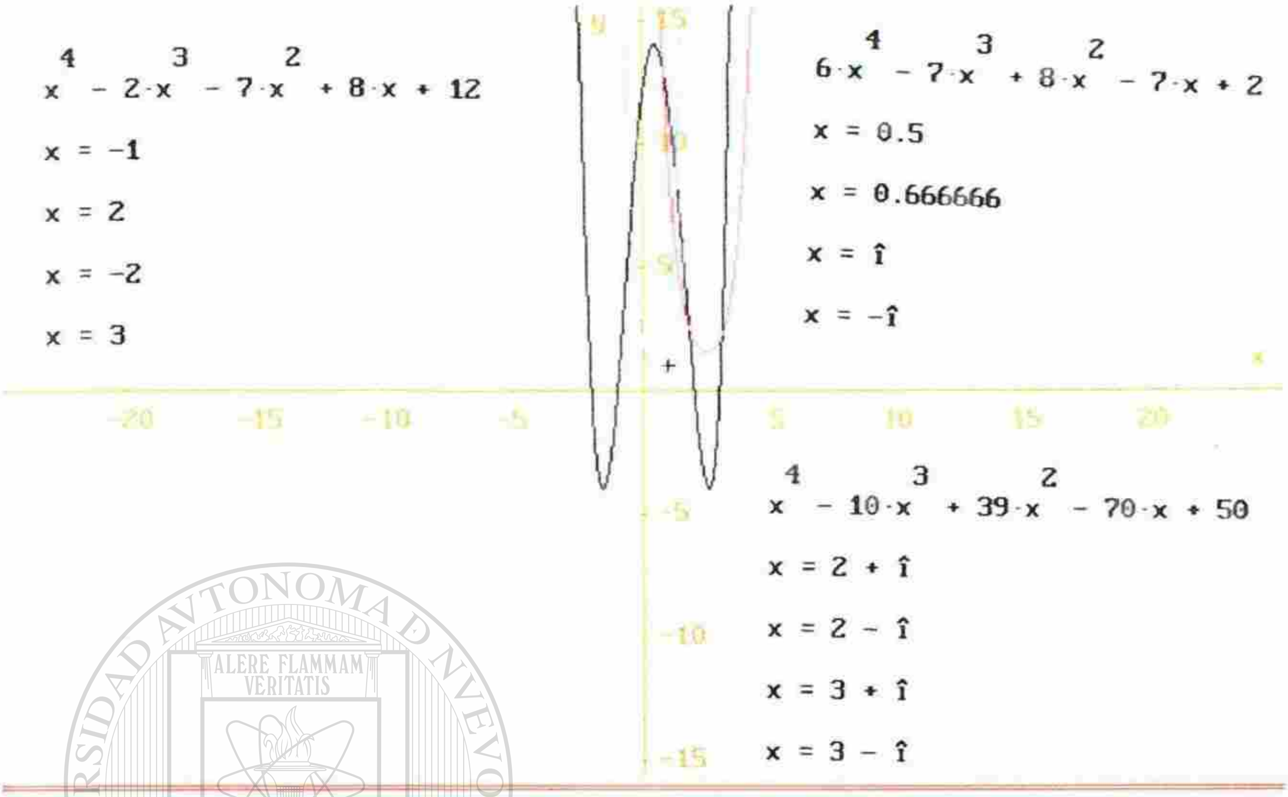
$$x = 1 - 3\cdot\sqrt{2}\cdot\hat{\imath}$$

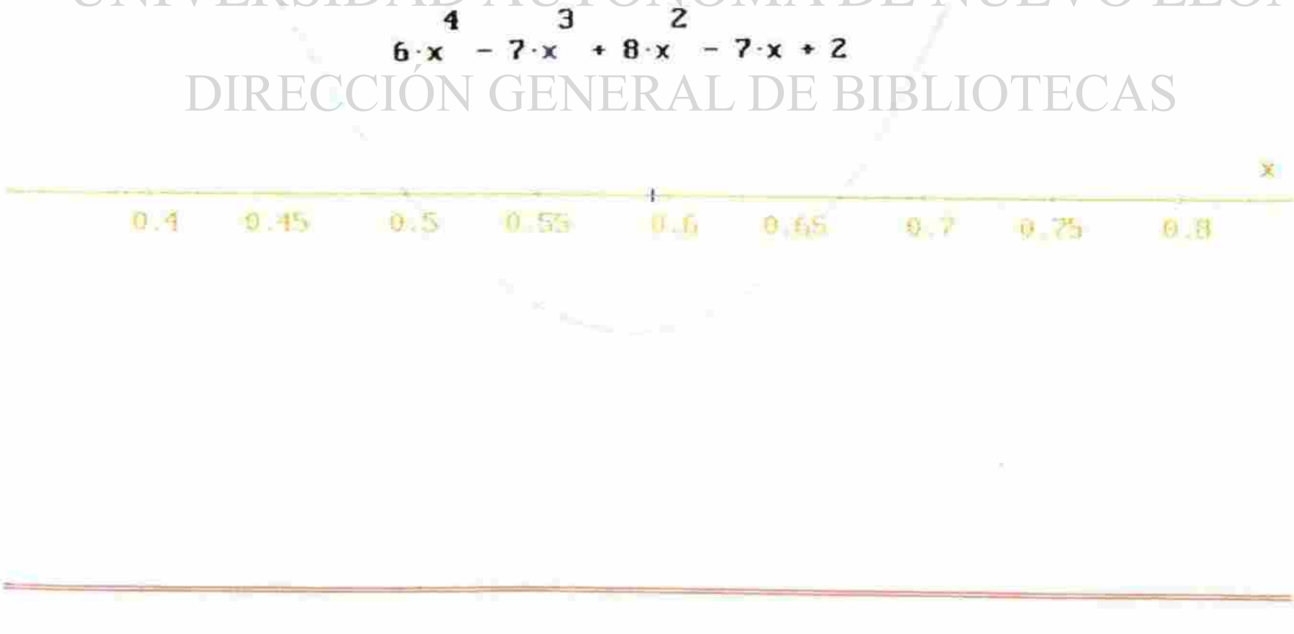
$$x^3 - 3\cdot x^2 - 4\cdot x + 12$$

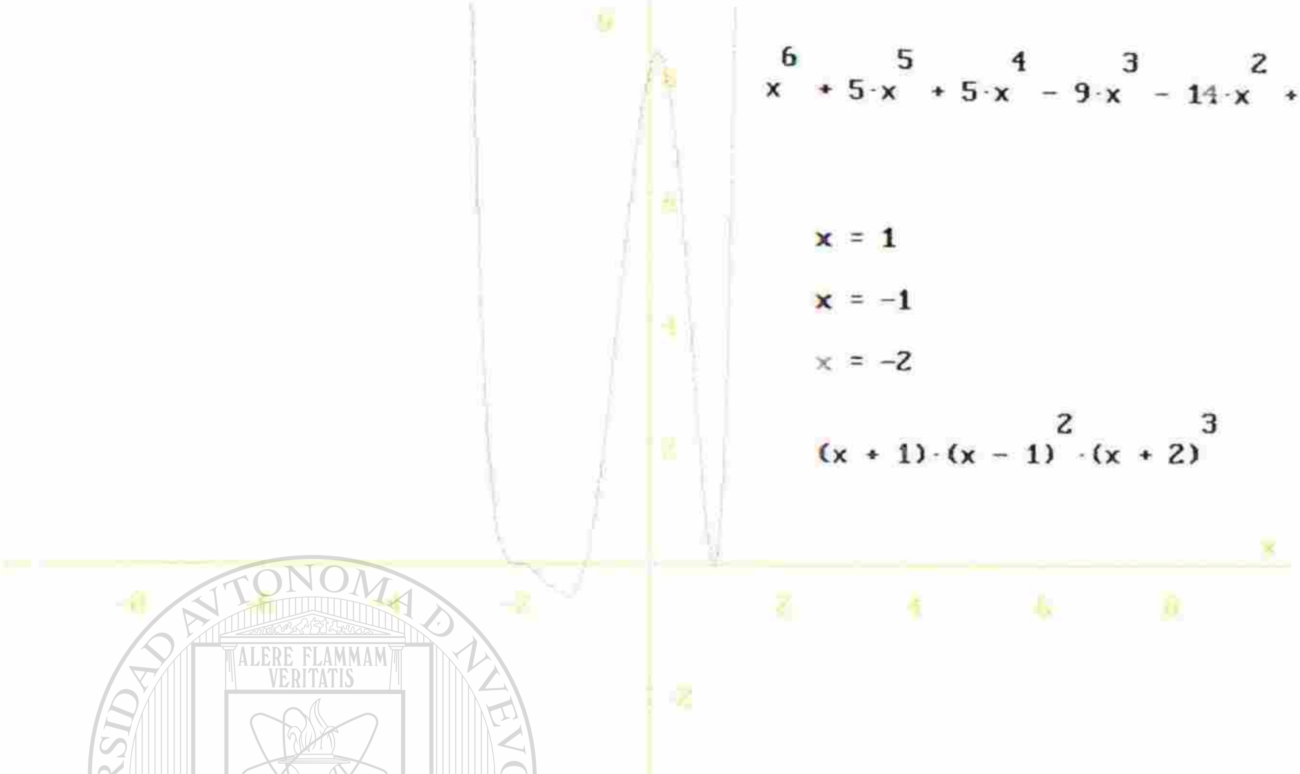
$$x = 2$$

$$x = -2$$

$$x = 3$$


$x^4 - 2\cdot x^3 - 7\cdot x^2 + 8\cdot x + 12$
$x = -1$
$x = 2$
$x = -2$
$x = 3$
$6\cdot x^4 - 7\cdot x^3 + 8\cdot x^2 - 7\cdot x + 2$
$x = 0.5$
$x = 0.666666$
$x = \hat{\imath}$
$x = -\hat{\imath}$
$x^4 - 10\cdot x^3 + 39\cdot x^2 - 70\cdot x + 50$
$x = 2 + \hat{\imath}$
$x = 2 - \hat{\imath}$
$x = 3 + \hat{\imath}$
$x = 3 - \hat{\imath}$
y
x
15
10
5
-5
-10
-15
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20


$6\cdot x^4 - 7\cdot x^3 + 8\cdot x^2 - 7\cdot x + 2$
x
0.4
0.45
0.5
0.55
0.6
0.65
0.7
0.75
0.8



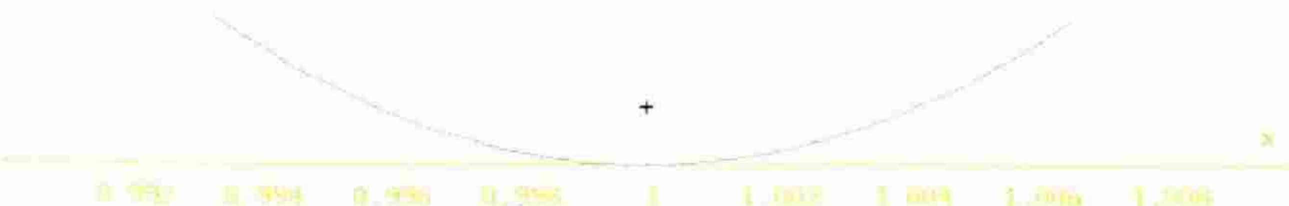
$$x^6 + 5\cdot x^5 + 5\cdot x^4 - 9\cdot x^3 - 14\cdot x^2 + 4\cdot x + 8$$

$x = 1$

$x = -1$

$x = -2$

$$(x + 1)\cdot(x - 1)^2\cdot(x + 2)^3$$



ANEXO 3

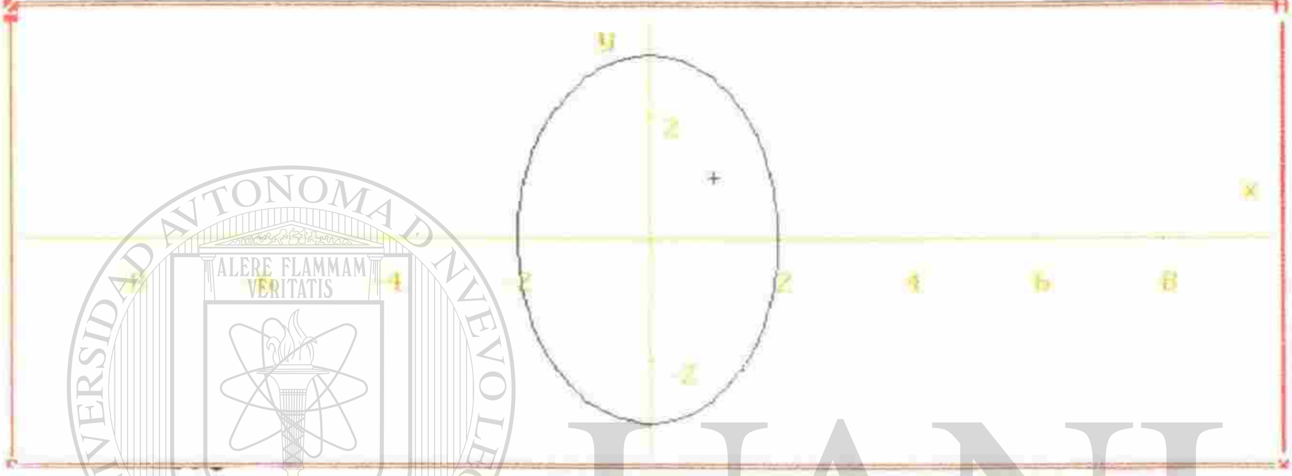
Aqui se concluye gráficamente. que el valor minimo de la funcion es $y=50$ cuando x 9

ANEXO 4

CASO PARTICULAR a=2 , b=3 , h m=1

#1: $$z = -\cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right]^{1/2}\right]$$

#2: $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$



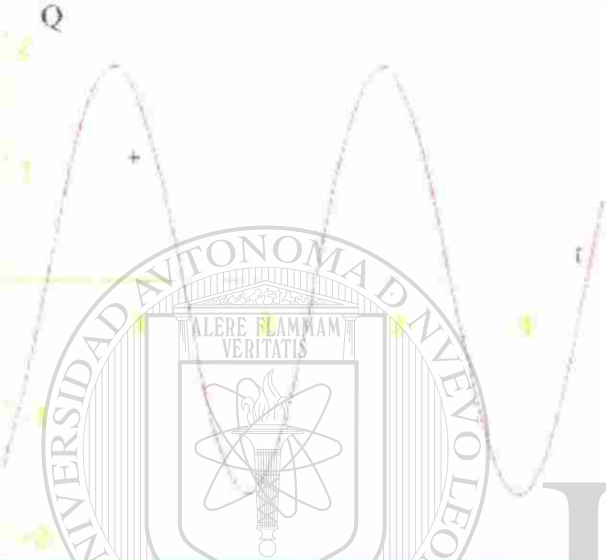
ANEXO 5

INTERPRETACION GRAFICA DE LA SOLUCION

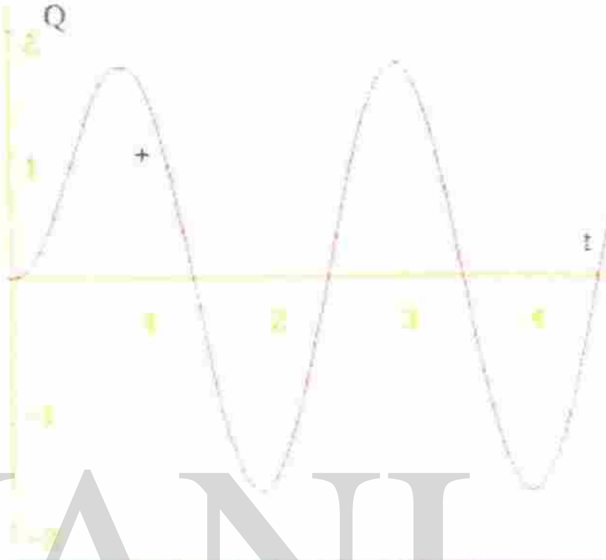
$$Q = \frac{25}{52}\cdot[2\cdot SIN(3\cdot t) - 3\cdot COS(3\cdot t)] + \frac{25}{52}\cdot \hat{e}^{-4\cdot t}\cdot[3\cdot COS(3\cdot t) + 2\cdot SIN(3\cdot t)]$$

TERMINO PERMANENTE (ROJO)

TERMINO TRANSITORIO (VERDE)



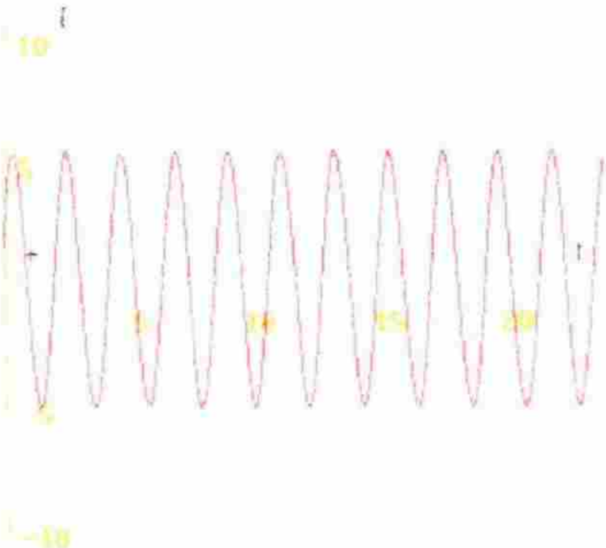
SOLUCION



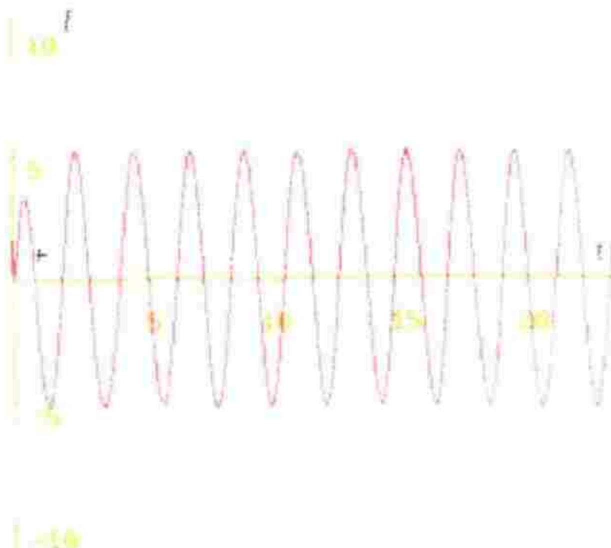
$$I = \frac{75}{52}\cdot[2\cdot COS(3\cdot t) + 3\cdot SIN(3\cdot t)] - \frac{25}{52}\cdot \hat{e}^{-4\cdot t}\cdot[17\cdot SIN(3\cdot t) + 6\cdot COS(3\cdot t)]$$

TERMINO PERMANENTE (ROJO)

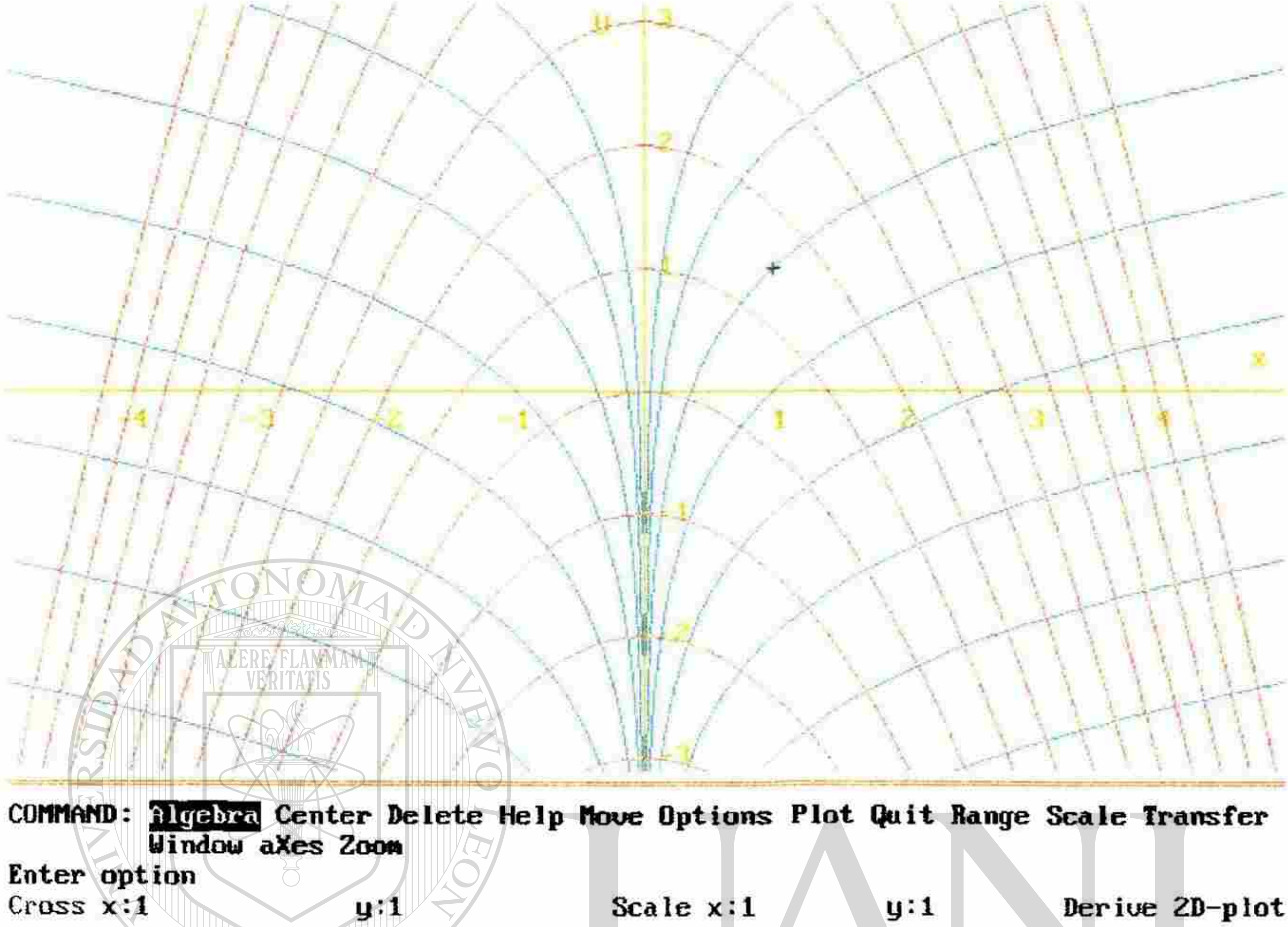
TERMINO TRANSITORIO (VERDE)



SOLUCION

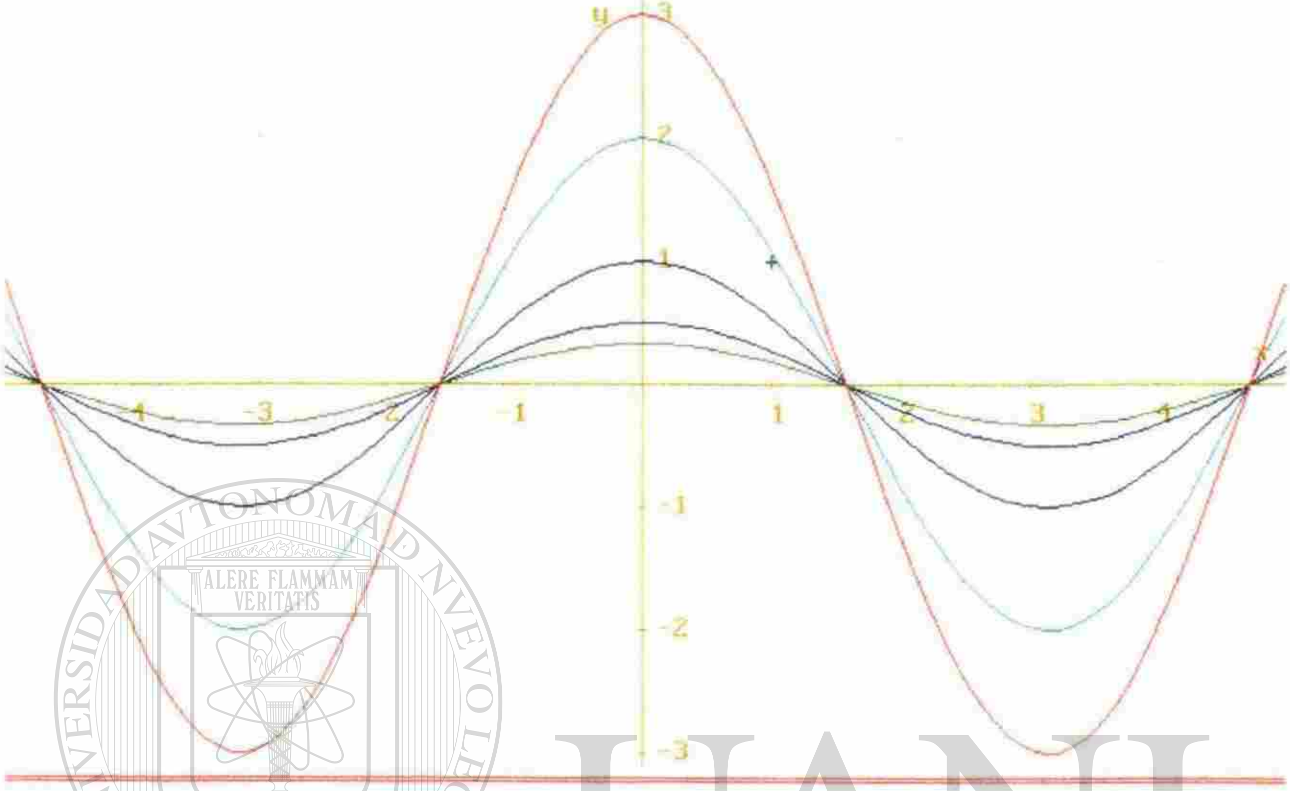


ANEXO 6

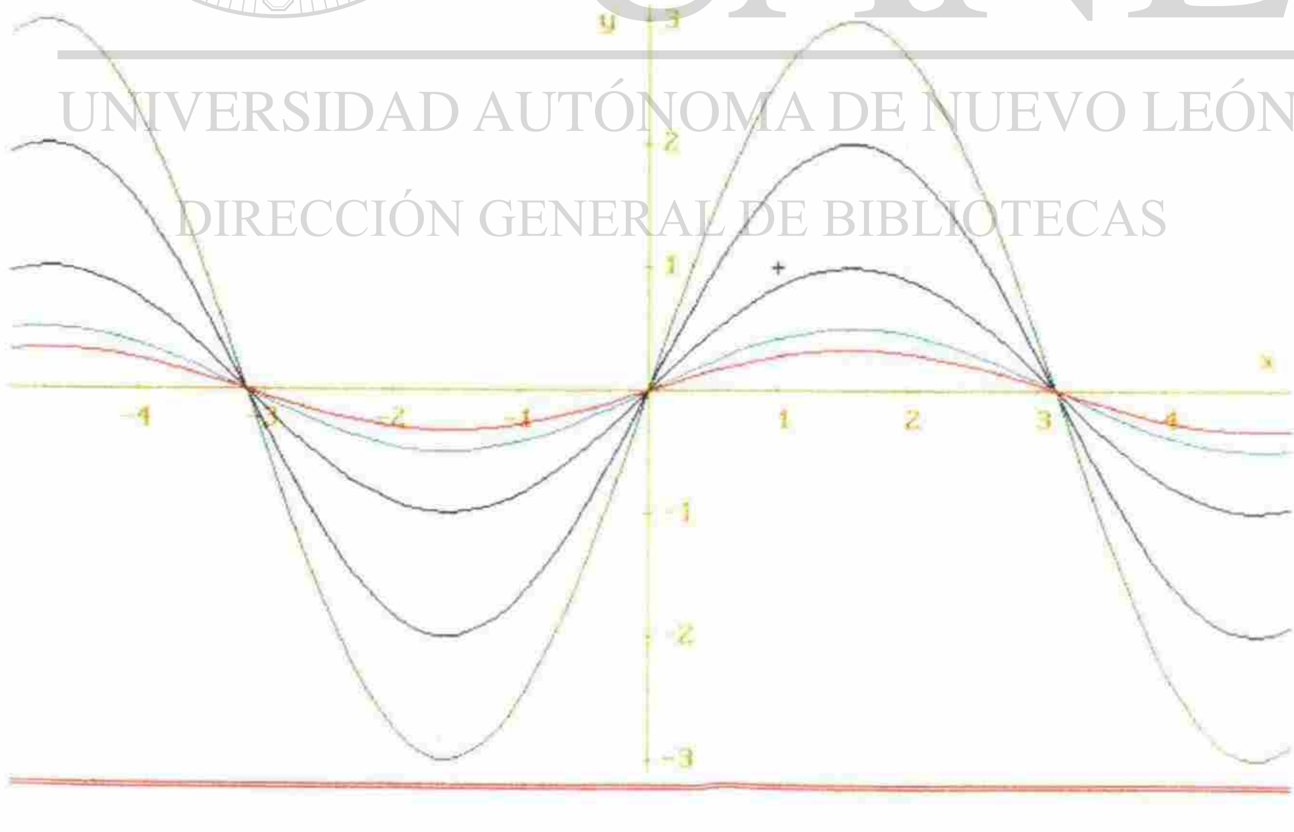

COMMAND: Algebra Center Delete Help Move Options Plot Quit Range Scale Transfer
Window aXes Zoom
Enter option
Cross x:1 y:1 Scale x:1 y:1 Derive 2D-plot

ANEXO 7

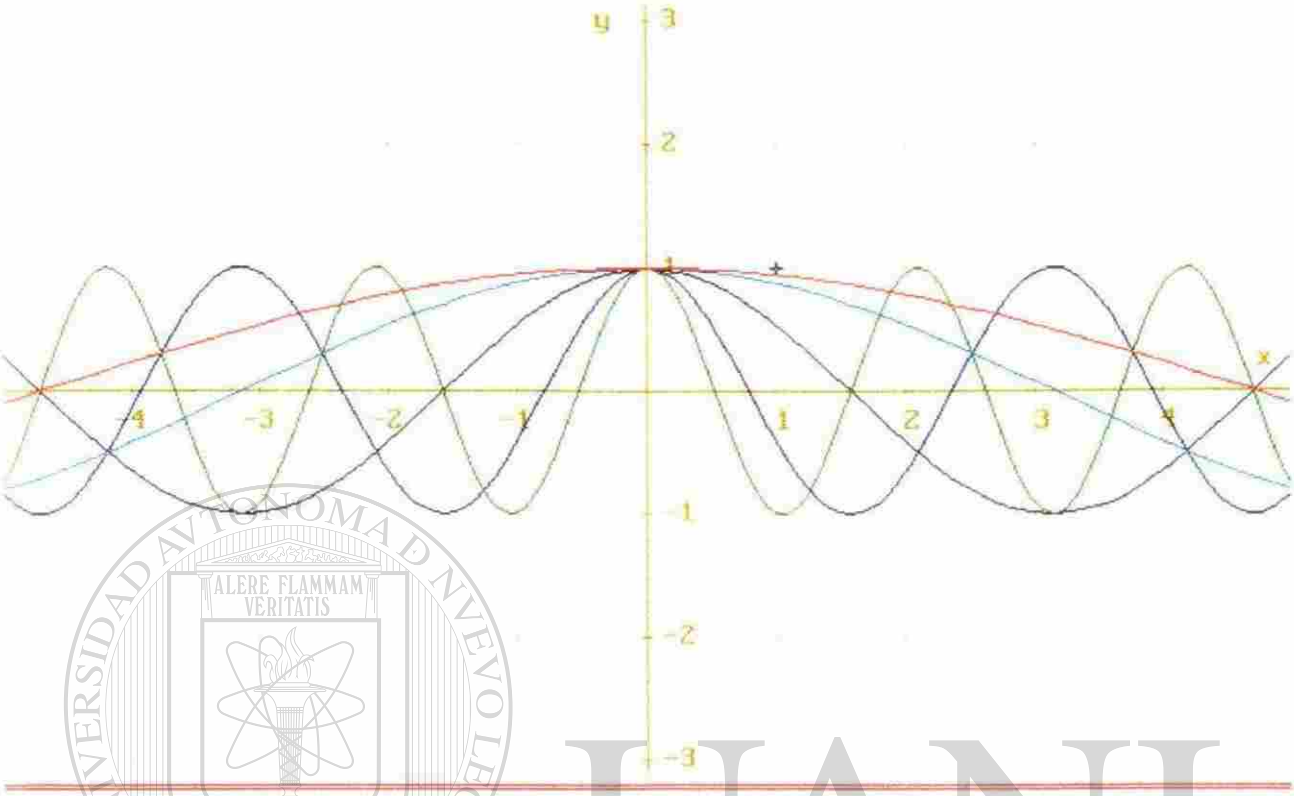
Grafica de la forma acos(t)



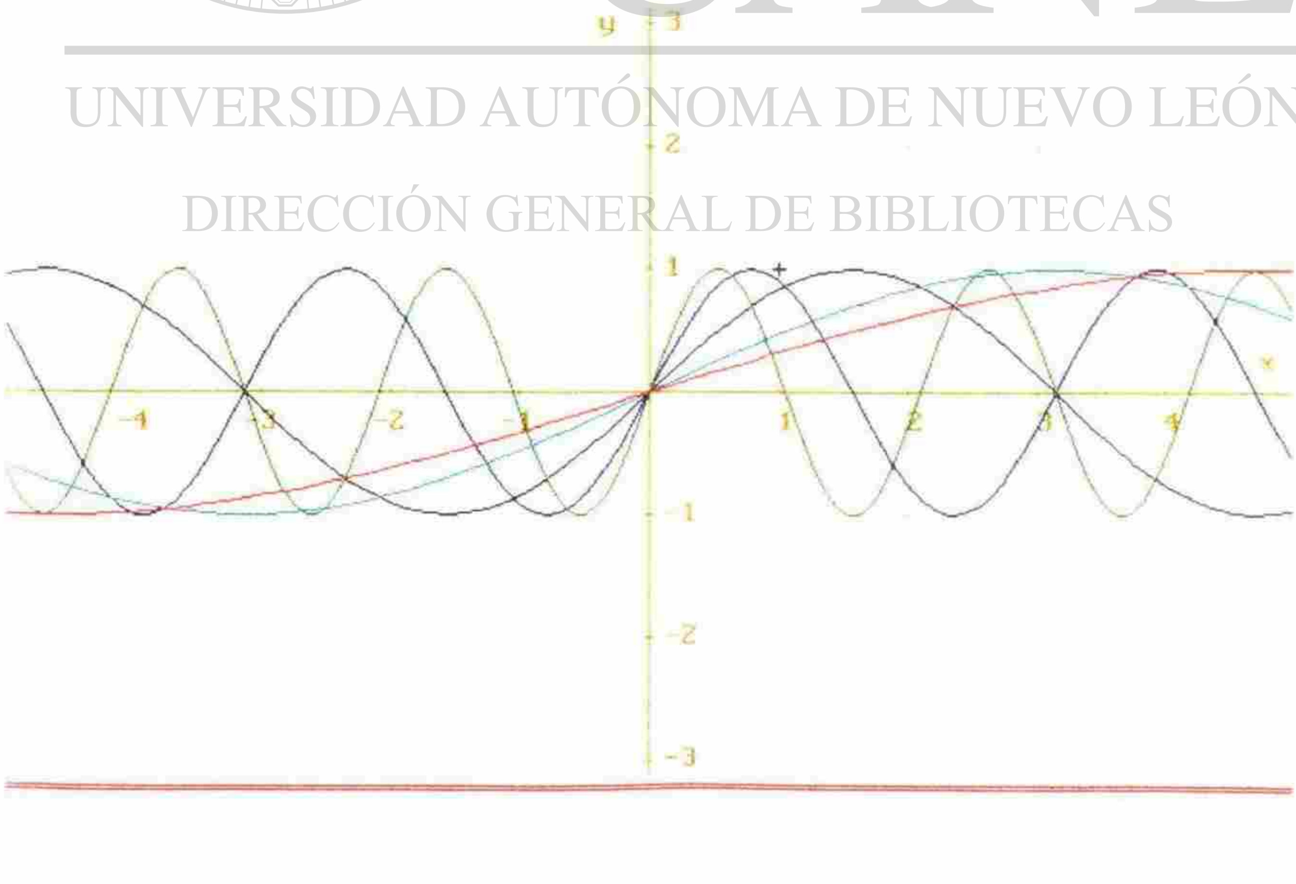
Gráfica de la forma asen(t)



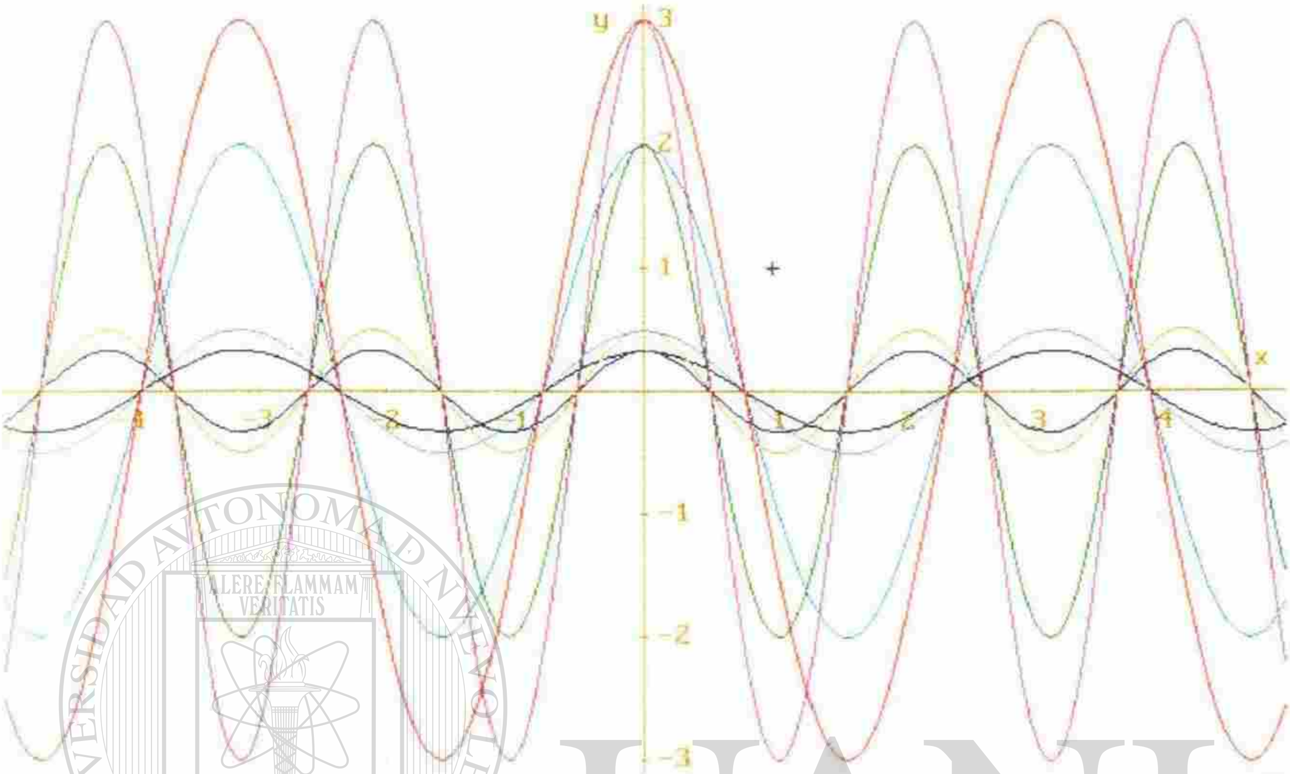
Gráfica de la forma cos (bt)



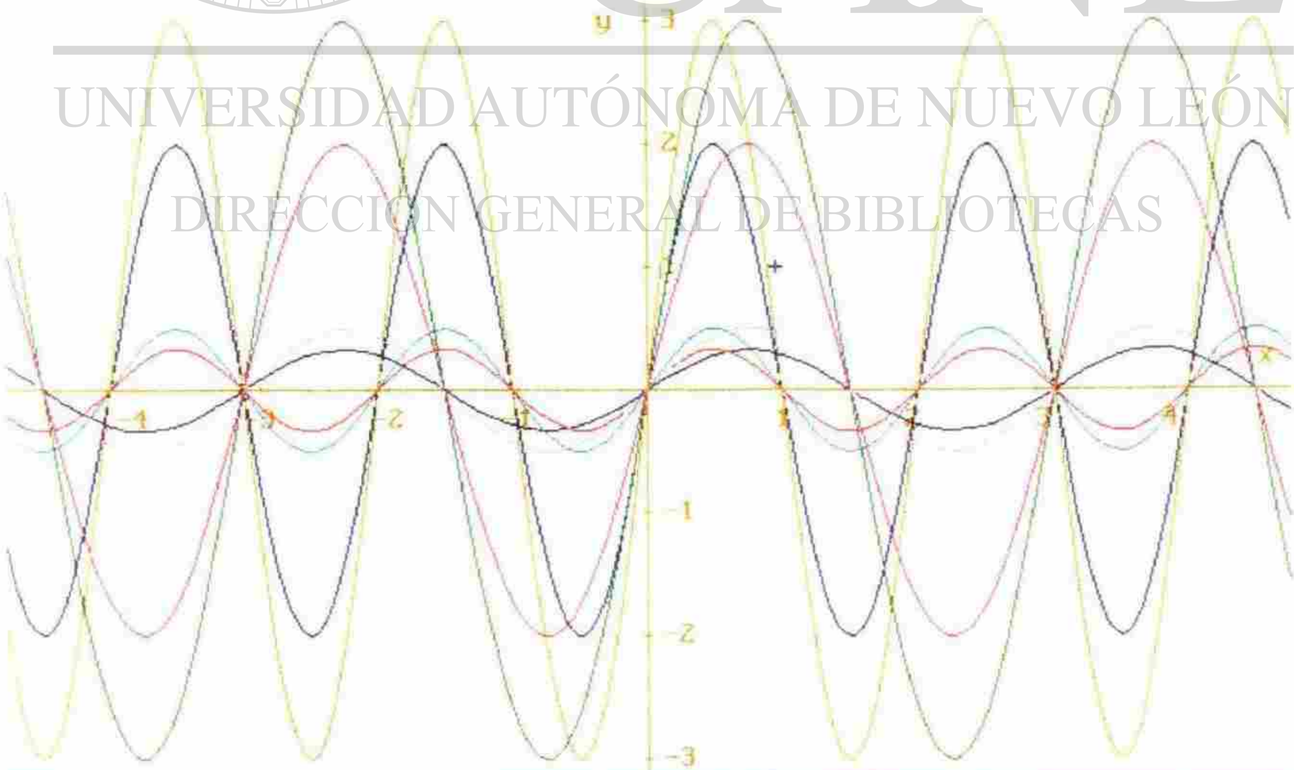
Gráfica de la forma sen(bt)



Grafica de la forma acos(bt)



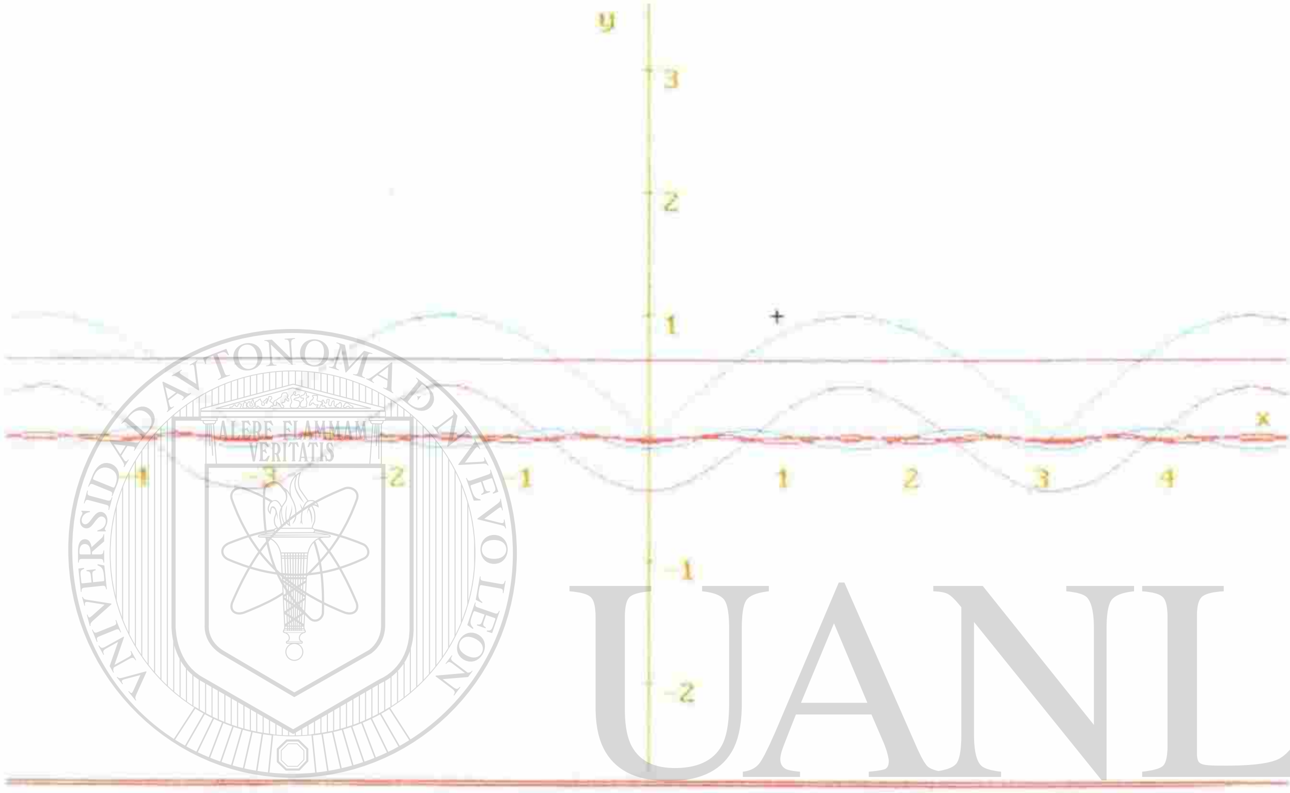
Gráfica de la forma asen(bt)

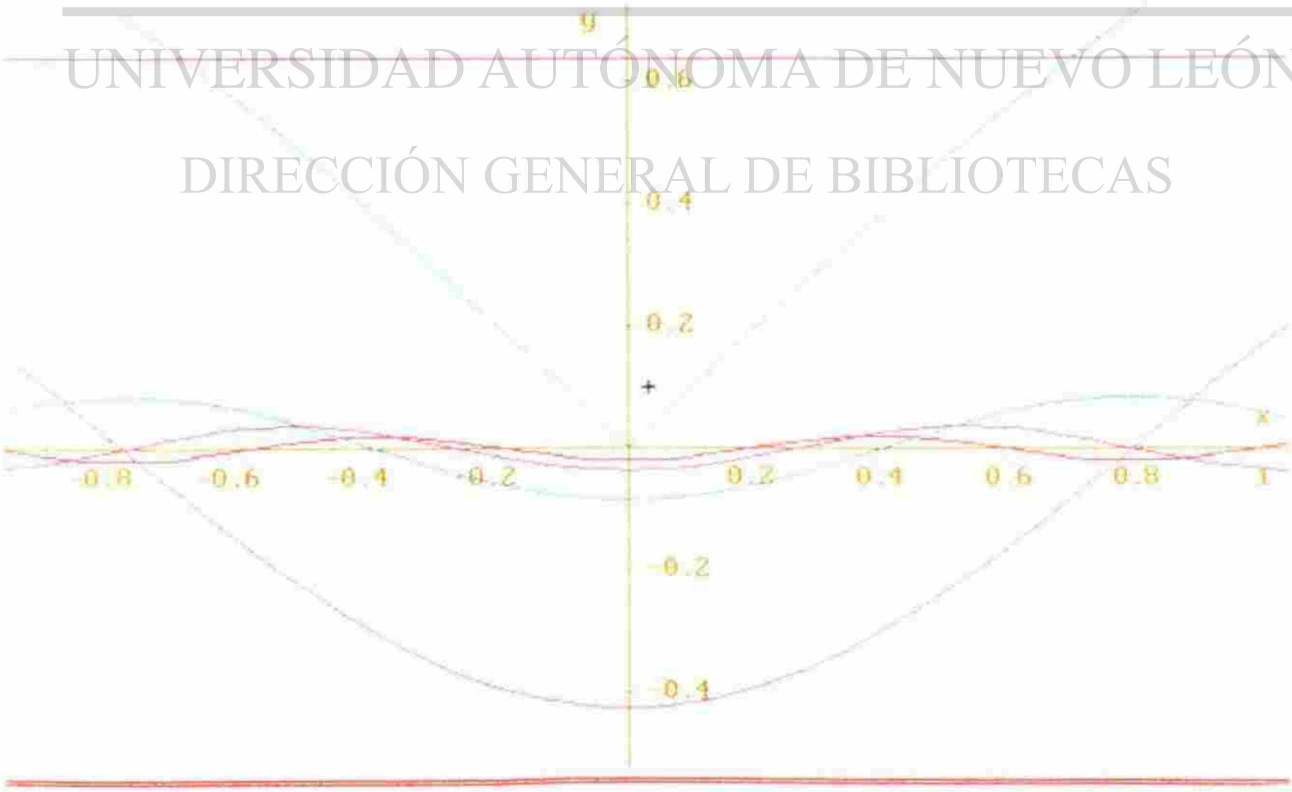


GRAFICA DE LOS TERMINOS DE LA SERIE

#1: $|\mathrm{SIN}(t)|$

#2: $\dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{3\,\pi}\,\mathrm{COS}(2\ t) - \dfrac{4}{15\cdot\pi}\,\mathrm{COS}(4\ t) - \dfrac{4}{35\ \pi}\,\mathrm{COS}(6\ t) - \dfrac{4}{63\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(8\ t)$

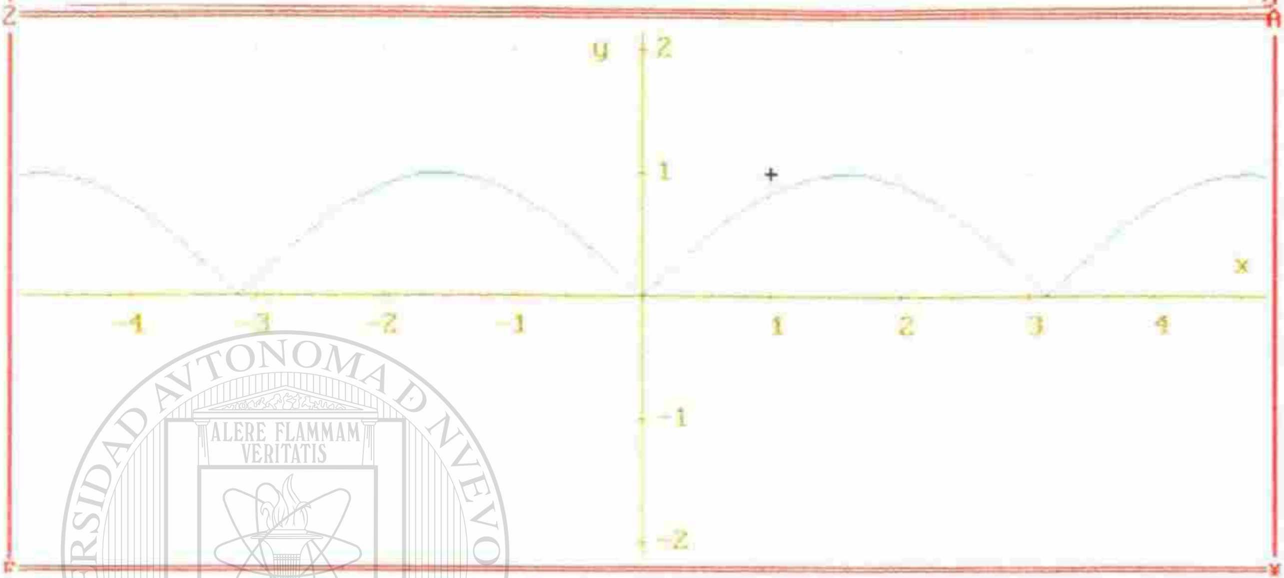




INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA SERIE

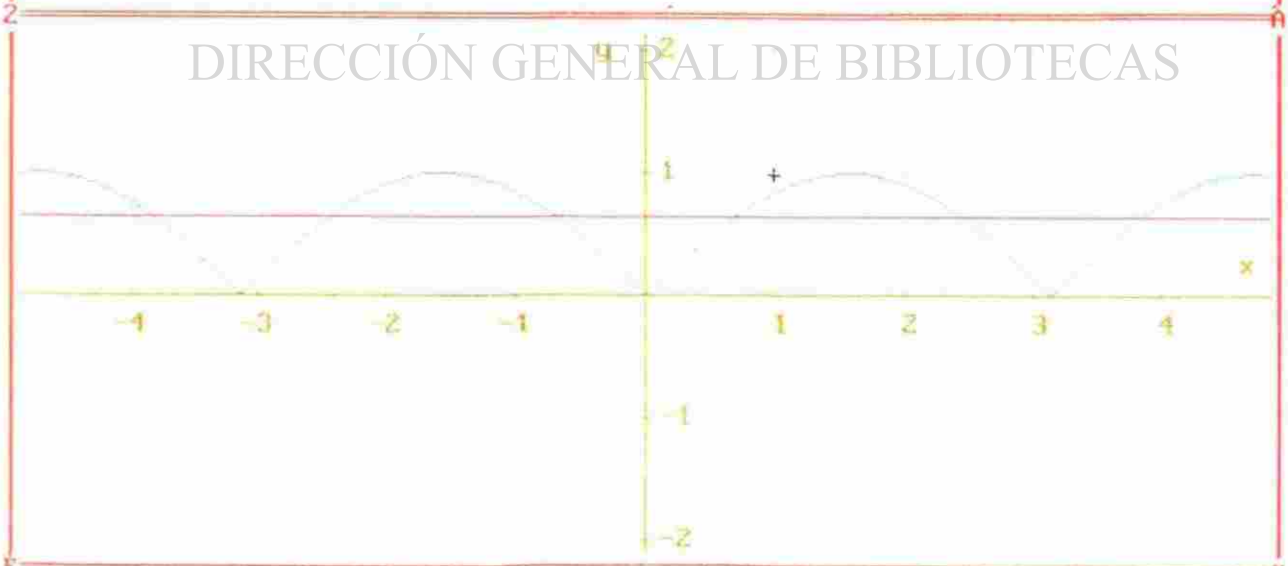
$|SIN(t)|$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot COS(2\cdot t) - \frac{4}{15\cdot\pi}\cdot COS(4\cdot t) - \frac{4}{35\cdot\pi}\cdot COS(6\cdot t) - \frac{4}{63\cdot\pi}\cdot COS(8\cdot t$$



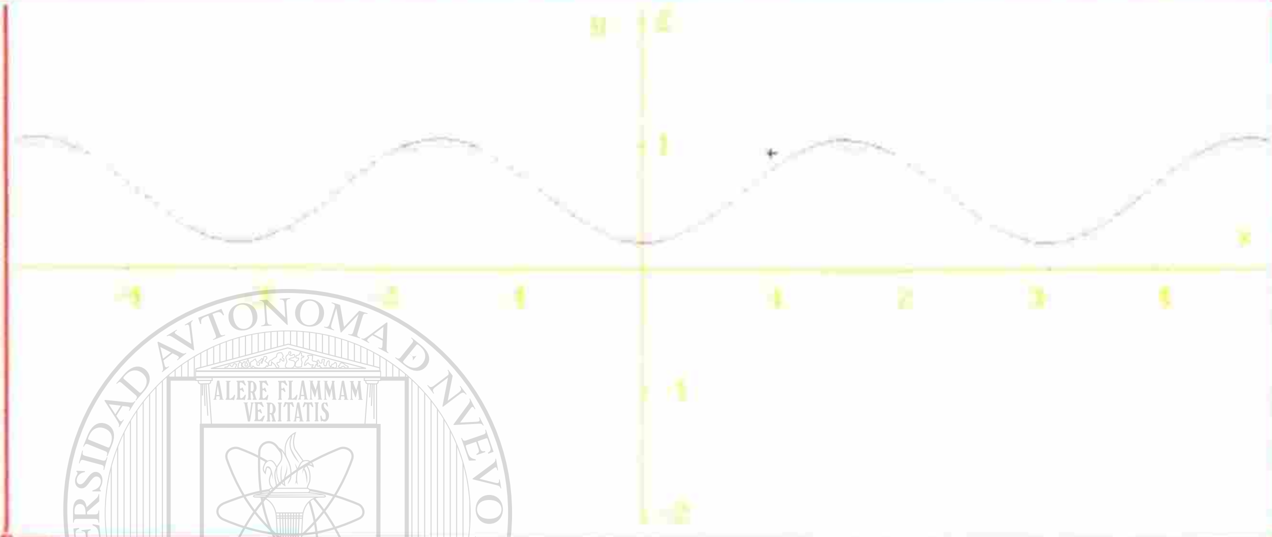
$|SIN(t)|$

$$\frac{2}{\pi}$$



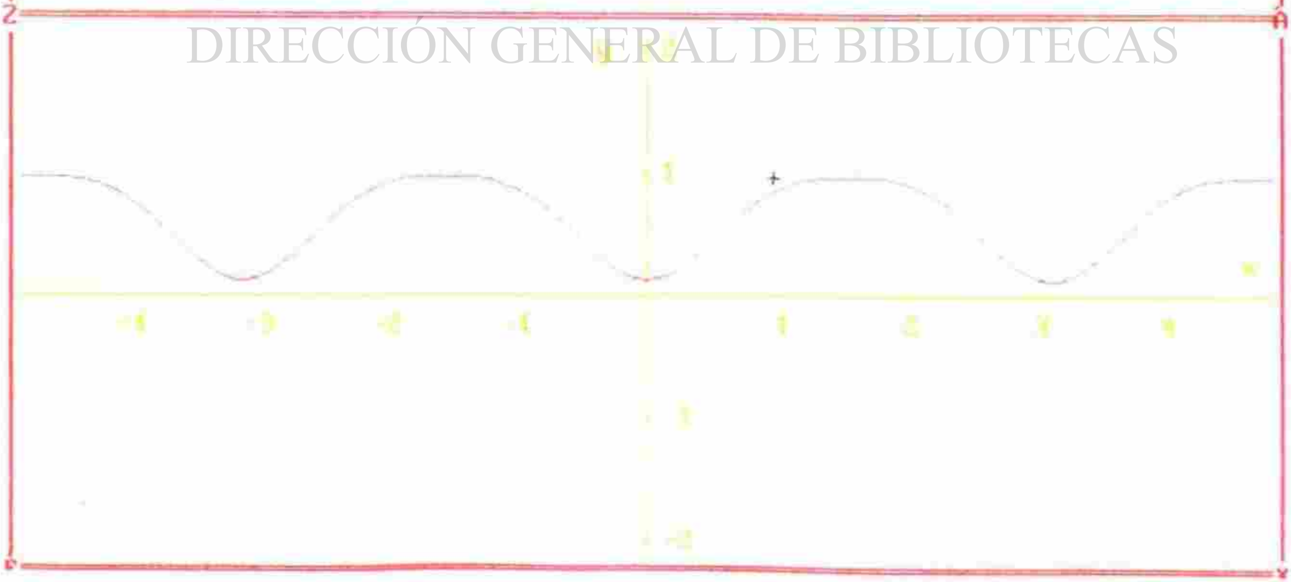
$|\mathrm{SIN}(t)|$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot \mathrm{COS}(2\cdot t)$$



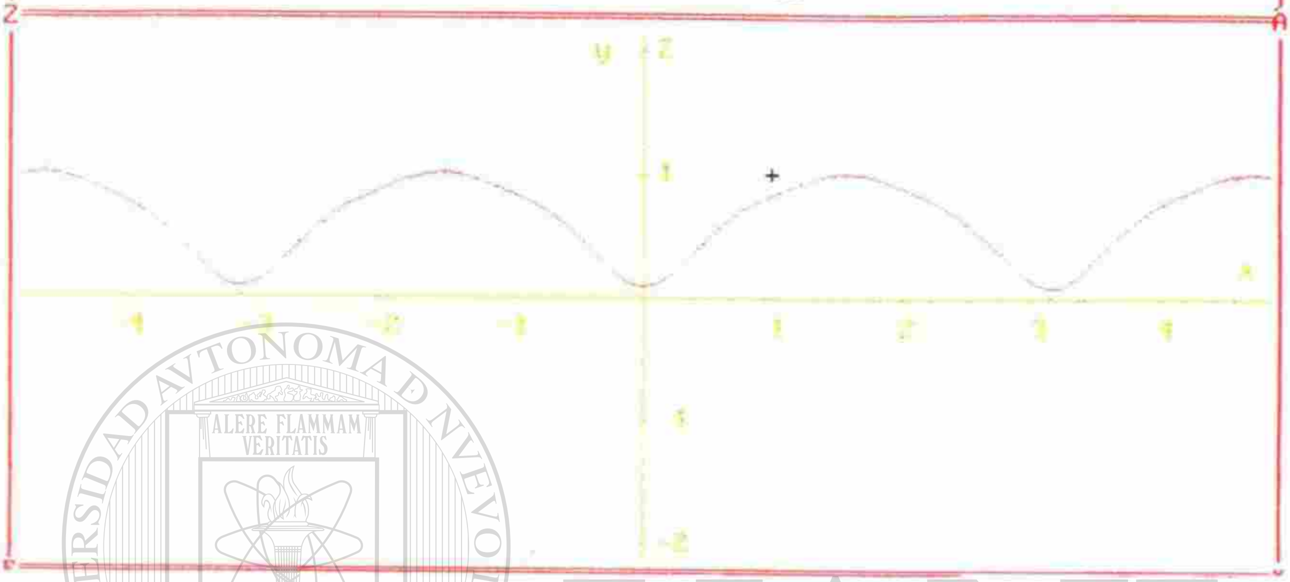
$|\mathrm{SIN}(t)|$

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot \mathrm{COS}(2\cdot t) - \frac{4}{15\cdot\pi}\cdot \mathrm{COS}(4\cdot t)$$



#1: $|\mathrm{SIN}(t)|$

#2: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t) - \frac{4}{15\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(4\cdot t) - \frac{4}{35\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(6\cdot t)$



#1: $|\mathrm{SIN}(t)|$

#2: $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(2\cdot t) - \frac{4}{15\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(4\cdot t) - \frac{4}{35\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(6\cdot t) - \frac{4}{63\cdot\pi}\cdot\mathrm{COS}(8\cdot t$