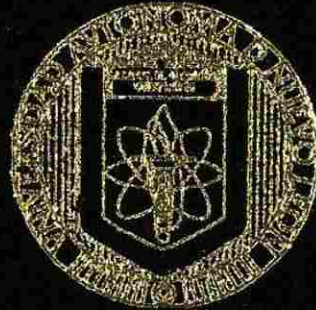


UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES Y DE  
OBSERVADORES DISCRETOS PARA SISTEMAS  
NO LINEALES

EN OPCION AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON  
ESPECIALIDAD EN CONTROL

PRESENTA:  
ING. CESAR GUERRA TORRES

CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DEL 2001

TM

Z5853

.M2

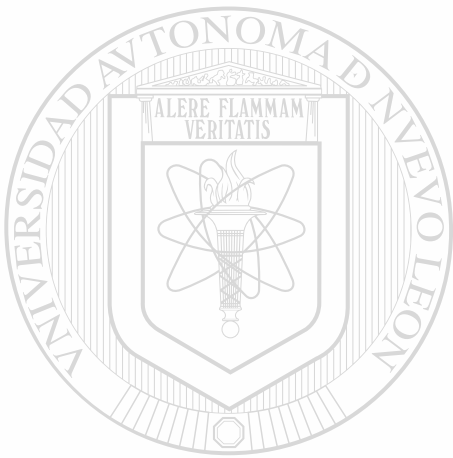
FIME

2001

.G93



1020146400



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA  
Y ELECTRICA

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



DISEÑO DE CONTROLADORES Y DE  
OBSERVADORES DISCRETOS PARA SISTEMAS  
NO LINEALES

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS <sup>®</sup>  
DE LA INGENIERIA ELECTRICA CON ECAS  
ESPECIALIDAD EN CONTROL

PRESENTA:  
ING. CESAR GUERRA TORRES

CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DEL 2001

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**DISEÑO DE CONTROLADORES Y DE OBSERVADORES DISCRETOS  
PARA SISTEMAS NO LINEALES**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

**TESIS**

**DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS**  
**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA**  
**ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**POR**

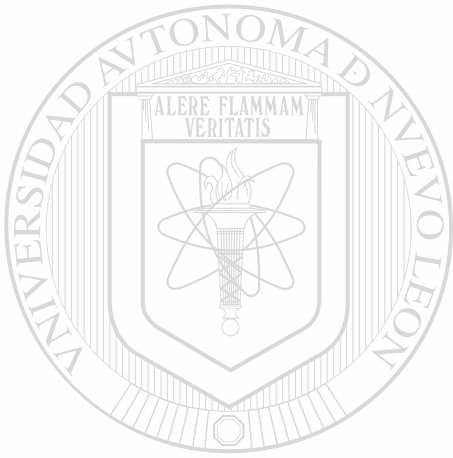
**ING. CESAR GUERRA TORRES**

**CD. UNIVERSITARIA**

**NOVIEMBRE DEL 2001**

312039

TH  
Z 5853  
• M2  
FIME  
2001  
• G93



# UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

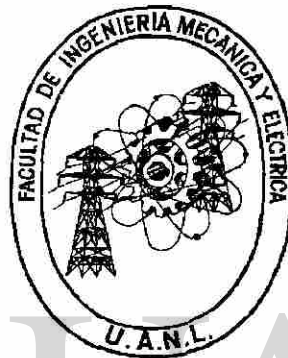
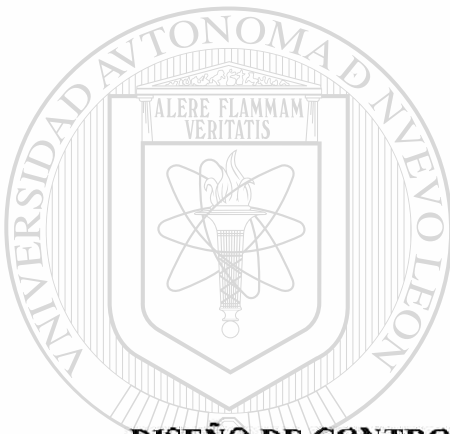


DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FONDO  
TESIS

®

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POST-GRADO**



**DISEÑO DE CONTROLADORES Y DE OBSERVADORES DISCRETOS  
PARA SISTEMAS NO LINEALES**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

**TESIS**  
**DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS**  
**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA  
ELÉCTRICA CON ESPECIALIDAD EN CONTROL**

**POR**

**ING. CESAR GUERRA TORRES**

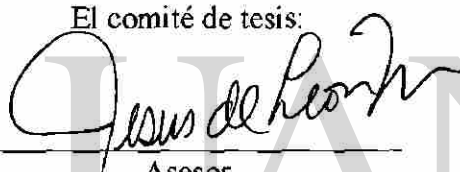
**CD. UNIVERSITARIA**

**NOVIEMBRE DEL 2001**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis **“DISEÑO DE CONTROLADORES Y OBSERVADORES DISCRETOS PARA SISTEMAS NO LINEALES”** realizada por el Ing. César Guerra Torres sea aceptada para su defensa como opción al Grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con especialidad en Control.

El comité de tesis:



Asesor

Dr. Jesús de León Morales



Coasesor

Dr. René Galindo Orozco



Coasesor

Dr. Aarón Sariñana Toledo



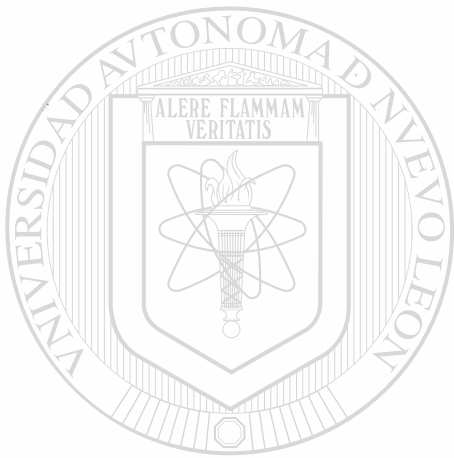
Vó. Bo.

M. C. Roberto Villarreal Garza  
División de Estudios de Postgrado

San Nicolás de los Garza, N. L.

Noviembre, 2001.





# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

**FONDO  
TESIS**

# Dedicatoria

A mi padre Dios por la alegría de vivir, y por la dicha de dar este importante paso en mi carrera; y por los muchos logros que han de venir. Como siempre he dicho:

Todo lo puedo en Cristo que me fortalece (Fil. 4:13).

A mis padres Ma. de Jesús y Gonzalo Guerra por su incondicional apoyo, gracias Mamá por demostrarme tu amor, gracias Papá por darme lo mejor de ti.

A mis Hermanos Jesús, Minerva, Javier, Patricia, Rosalia, Norma y Carlos. Que Dios siga conservando esa unidad que siempre nos ha caracterizado.

Al Dr. Jesús de León por su apoyo, paciencia y confianza; pero sobre todo por sus consejos que mucho me han ayudado.

Al Pastor Juan José Guzmán porque en un momento muy difícil de mi vida, me supo aconsejar y orientar, gracias.

A mi esposa con quien comparto todos mis logros, gracias por comprenderme y por soportar grandes sacrificios, con todo mi amor para Katty

Noviembre, 2001

# Agradecimientos

Al CONACYT por su apoyo economico en la beca crédito y el proyecto 26498-A titulado “Control de generadores sincronos mediante técnicas de control no-lineal”

Al Dr. René Galindo y al Dr. Aarón Saiñana por sus valiosos comentarios que enriquecieron el contenido final de esta tesis, así como, por la amabilidad con la que me ayudaron y me orientaron en diferentes aspectos académicos.

A todos los profesores del Programa Doctoral por compartir abiertamente sus conocimientos durante la realización de mis estudios, especialmente al Dr. Joaquín Collado Moctezuma, al Dr. Jesús de León Morales, al Dr. Krishna K. Busawon, al Dr. Juan M. Ramírez Arredondo y al Dr. Mikhail V. Basin.

A todos los compañeros del Doctorado de Eléctrica, Irma R. Valadez Guzmán, Ma. de los Angeles Carrera González, Gustavo Pérez Hernández, David A. Díaz Romero, Oscar F. Huerta Guevara, Francisco H. Florenzano Lara, siempre los recordare.

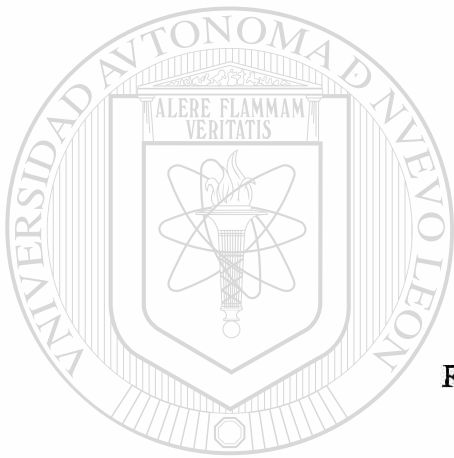
A todos los compañeros del Depto. de Dinámica, por darme la oportunidad y el privilegio de pertenecer a este departamento. En especial al Ing. Sergio Ramirez quien me habrio las puertas, al Ing. Fernando Elizondo quien me ha impulsado a hacer bien y mejor las cosas, al Ing. Valderrabano quien siempre estuvo a mi lado y al Ing. Carrola por su amistad.

Al Director de la FIME Ing. Cástulo E. Vela por su apoyo incondicional como maestro y como amigo. Al Subdirector de la FIME Ing. Rogelio Garza por darme ánimos y por su percepción hacia mi persona.

Al Ing. Manuel Amarante y al Ing. Juan A. Garza por su apoyo y por sus consejos, y a quienes considero grandes personas y amigos.

A la Universidad Autónoma de Nuevo León y a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por su apoyo económico.

Noviembre, 2001



© Copyright 2001  
por César Guerra Torres,  
Reservados Todos los Derechos.

UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

®

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Resumen

## Diseño de controladores y observadores discretos para sistemas no lineales

Publicación No. \_\_\_\_\_

César Guerra Torres

Universidad Autónoma de Nuevo León  
Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
Profesor Asesor: Dr. Jesús de León Morales  
Noviembre, 2001.

En este trabajo se presenta un estudio relacionado con el diseño de controladores y observadores para una clase de sistemas no lineales en tiempo discreto. Esto es motivado gracias a los avances alcanzados tanto en electrónica digital como computacional. Mientras que por el lado teórico, éste es un tema de investigación actual.

Existen en la literatura varios resultados para sistemas no lineales de tiempo discreto y la mayoría de estos modelos discretos se obtienen mediante el proceso de discretización de un modelo continuo.

Aunque son diversas las técnicas para discretizar un sistema continuo, en este trabajo se hará énfasis a la discretización tipo Euler hacia adelante (Euler forward).

Por otro lado, existen diversas técnicas de diseño de controladores y observadores para sistemas no lineales en tiempo continuo. Sin embargo, éstas técnicas no se pueden extender de la misma manera para el caso discreto. Por tal motivo, es importante desarrollar nuevas estrategias de control y observación para la clase de sistemas discretos. En esta tesis se proponen estrategias de control y de observación para la clase de sistemas no lineales discretizados mediante la aproximación de Euler.

Además, los esquemas de control y observación propuestos son aplicados a un modelo de un generador síncrono conectado a una barra (bus) infinita, para ilustrar su eficiencia mediante resultados en simulación.

# Notación

$\in$	Pertenece a
$\exists$	Existe
$\forall$	Para todo
$\Rightarrow$	Implica que
$\rightarrow$	Tiende a
$\ \cdot\ _p$	norma $p$
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio vectorial de dimensión $n$ con componentes reales
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Campo de las matrices de dimensión $n \times m$ con componentes reales
$A^T$	Matriz transpuesta $A$
$A^{-1}$	Matriz inversa de $A$
$I_n$	Matriz identidad de dimensión $n \times n$
$\text{diag}(A)$	Elementos de la diagonal principal de la matriz $A$
$\text{col}(X)$	Vector columna
$\Delta$	Operador en diferencias
$\mathbb{Z}_+$	Conjunto de los números enteros positivos
$\lambda$	valor característico
$\ \arg\ _A$	Norma ponderada en $A$
$\mathcal{B}_{r,\tau}$	Bola de radio $r$ alrededor de $\tau$

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Índice

## CAPITULO 1. INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes	1
1.2 Motivación	2
1.3 Planteamiento del problema de estudio	3
1.4 Organización del trabajo	3

## CAPITULO 2. PRELIMINARES

2.1 Preliminares matemáticos	5
2.2.1 Funciones, función composición	5
2.2.2 Espacio Euclidiano y Espacio vectorial	5
2.2.3 Espacio lineal normado	6
2.2.4 Normas inducidas	7
2.2 Discretización	7
2.3.1 Método de Euler hacia adelante	8
2.2.3 Método de Euler hacia atrás	9
2.2.3 Método trapezoidal	9
2.3 Ecuaciones en diferencias	9
2.4 Conclusiones	10

## CAPITULO 3. ESTABILIDAD EN SISTEMAS DISCRETOS NO LINEALES

3.1 Introducción	11
3.2 Sistemas discretos no lineales	11
3.3 Estabilidad en sistemas no autónomos	12
3.4 Estabilidad en el sentido de Lyapunov	14
3.5 Conclusiones	18

# Índice (continuación)

## **CAPITULO 4. DISEÑO DE CONTROLADORES DISCRETOS PARA SISTEMAS NO LINEALES**

4.1 Introducción	19
4.2 Planteamiento del problema	20
4.3 Preliminares y definiciones	22
4.3.1 Grado relativo	22
4.3.2 Definición de las matrices de transformación	24
4.4 Diseño de controladores	29
4.4.1 Control de alta ganancia aplicado a una clase de sistemas parcialmente lineales	29
4.4.2 Control basado en un procedimiento con transformación de similitud	33
4.5 Conclusiones	36

## **CAPITULO 5. DISEÑO DE OBSERVADORES DISCRETOS PARA SISTEMAS NO LINEALES**

5.1 Introducción	37
5.2 Planteamiento del problema	38
5.3 Observador de estado para una clase de sistemas	38
5.4 Observador basado en un procedimiento con transformación de similitud	41
5.6 Conclusiones	44



# Índice (continuación)

## **CAPITULO 6. APLICACIÓN: GENERADOR SÍNCRONO**

6.1 Introducción	46
6.2 Modelo matemático y planteamiento del problema	47
6.3 Diseño de los controladores	50
6.3.1 Control de alta ganancia aplicado a una clase de sistemas parcialmente lineal	50
6.3.2 Control basado en un procedimiento con transformación de similitud	51
6.4 Diseño de los observadores	52
6.4.1 Observador de alta ganancia para una clase de sistemas parcialmente lineal	52
6.4.2 Observador basado en un procedimiento con transformación de similitud	52
6.5 Resultados de simulación	53
6.6 Conclusiones	59

## **CAPITULO 7. CONCLUSIONES Y PROBLEMAS ABIERTOS**

---

7.1 Conclusiones	60
7.2 Problemas abiertos	60

<b>Referencias</b>	61
--------------------	----

<b>Anexos</b>	
---------------	--

# Índice de Figuras

Figura 2.1: Aproximación usando (a) Euler hacia adelante, (b) Euler hacia atrás y (c) Trapezoidal	8
Figura 3.1: Definición de $V(k, x(k))$ y $\alpha \ x(k)\ $	16
Figura 4.1: Planteamiento del problema de control	20
Figura 4.2: Esquema de la acción de control	32
Figura 5.1: Implementación del controlador y del observador	37
Figura 6.1: Generador Síncrono conectado a una barra infinita	46
Figura 6.2: Comportamiento de las variables usando $u_1(k)$	54
Figura 6.3: Comportamiento de las variables usando $u_2(k)$	55
Figura 6.4: Comportamiento de las variables usando $u_1(k)$ con perturbación en $T_m$	56
Figura 6.5: Comportamiento de las variables usando $u_2(k)$ con perturbación en $T_m$	56
Figura 6.6: Comportamiento de las variables usando $u_1(k)$ con perturbación en $X'_d$	58
Figura 6.7: Comportamiento de las variables usando $u_2(k)$ con perturbación en $X'_d$	58

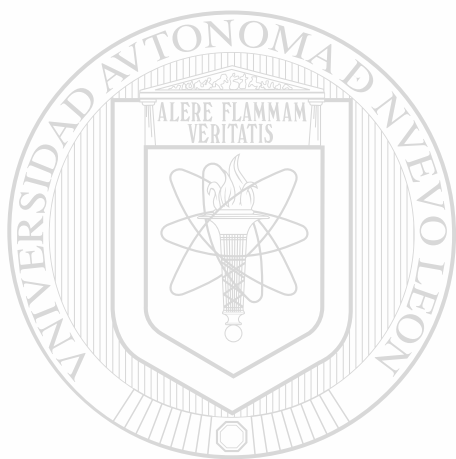
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Índice de Tablas

Tabla 6.1: Lista de símbolos del Generador	46
Tabla 6.2: Constantes $m_i$ del modelo del Generador	47
Tabla 6.3: Valor de los parámetros del Generador	53
Tabla 6.4: Nomenclatura para las simulaciones	53



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes

El uso de herramientas que faciliten el trabajo en la industria ha sido desde hace tiempo una de las preocupaciones principales, tal es el caso de los sistemas de control en donde el interés por diseñar controles más eficientes con el fin de facilitar más los procesos industriales y mejorar la calidad del producto aumenta considerablemente.

El modelado de un sistema dinámico es una herramienta de suma importancia en el estudio y análisis de sistemas de control, ya que permite comprender el comportamiento de un sistema a través de simulaciones, que permitirán posteriormente el diseño de prototipos.

Las primeras aportaciones en el estudio de sistemas de control fueron aplicadas en el análisis de sistemas lineales en tiempo continuo, dentro de los que destacan: a) métodos de la respuesta a la frecuencia desarrollados a principios del siglo XX; y b) el método del lugar geométrico de las raíces desarrollado por Evans en la década de los cuarenta.

A mediados del siglo XIX se desarrolló un procedimiento matemático que permite descomponer una ecuación diferencial de orden  $n$ , en un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, lo cual facilitaba la solución, dando lugar al concepto de variables de estado.

Los métodos de análisis y diseño para sistemas no lineales han adquirido un interés especial puesto que la mayoría de los sistemas físicos tienen un comportamiento no lineal.

Por otra parte, el estudio de la estabilidad para sistemas no lineales ha sido un problema que continúa abierto, ya que no existe una metodología general que se pueda aplicar a todos los sistemas no-lineales. En 1892, A.M. Lyapunov, Ingeniero y Matemático Ruso, propuso un nuevo enfoque para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales.

Con esta nueva herramienta, se desarrollaron nuevos métodos y técnicas tanto para el diseño de controladores como para el de observadores no lineales, que hoy en día se siguen explorando.

## 1.2 Motivación

En los años recientes y gracias al desarrollo tecnológico, se ha incrementado el uso de controladores digitales en sistemas de control para mejorar el desempeño de los procesos.

Diversos métodos han sido empleados para el diseño de controles y observadores para sistemas no lineales en tiempo continuo. Sin embargo, al implementar estas técnicas de control con la tecnología digital, es necesario trabajar con una representación de dicho sistema en tiempo discreto.

Por tal motivo, es necesario desarrollar nuevas estrategias para el diseño de controladores y observadores para sistemas no lineales discretos.

Existen en la literatura varios resultados sobre el diseño de controladores y observadores para sistemas no lineales discretos, por ejemplo, en [4] se presenta una técnica de control por retroalimentación de estado, en [2] se presenta el problema de linealización por retroalimentación de estado en sistemas discretos, [12] presenta una técnica de observación para una clase de sistemas no lineales discretos.

En este trabajo se presentan las herramientas y condiciones necesarias para transformar un sistema no lineal discreto en otro parcialmente lineal, posteriormente, basado en este modelo se propone una técnica de control y otra de observador para estabilizar el sistema.

Con el fin de hacer un análisis comparativo, además, se muestran las técnicas de control y de observación propuestas en [11].

Diversos temas relacionados con el control de sistemas no lineales discretos son considerados, tales como la discretización de modelos, período de muestreo, análisis de estabilidad, los cuales requieren de un tratamiento diferente al caso continuo.

### 1.3 Planteamiento del problema de estudio

En este trabajo se considerará una aproximación tipo Euler de un sistema no lineal continuo para obtener un modelo discreto del mismo ya que es comúnmente empleado como un primer intento en la modelación de sistemas no lineales discretos.

A partir de los modelos no lineales discretizados se desarrollarán algunas estrategias de diseño y construcción de controladores y observadores.

En lo que respecta al diseño de controladores, se propone una técnica de control basada en una transformación de coordenadas y un diseño de un control de retroalimentación y estabilización. Además se muestran los resultados de [11], basado en transformaciones de similitud, la cuál permite construir un controlador simple para la clase de sistemas no lineales discretos considerados.

Puesto que todos estos algoritmos de control requieren de toda la información de las componentes del vector de estado para poderse implementar, es necesario diseñar observadores para estimar las componentes del vector que no son medibles. En este trabajo se presenta el diseño de observadores no lineales discretos. Además, se presenta un análisis de la convergencia de dichos observadores.

Para ilustrar la eficiencia de los esquemas de control y de observación, se empleará un modelo de un generador síncrono conectado a una barra (bus) infinita(o) representado en un circuito equivalente de Thevenin, cuyo objetivo será controlar el ángulo del rotor.

Resultados en simulación serán presentados para mostrar la eficiencia de los controladores y de los observadores.

### 1.4 Organización y alcances del trabajo

El contenido de este trabajo está organizado de la siguiente forma:

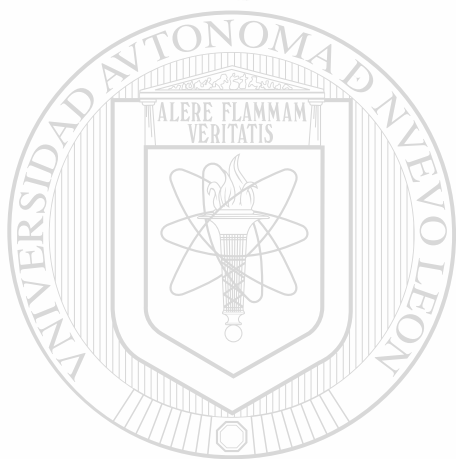
En el capítulo 2 se introducen una serie de conceptos básicos para la formulación de los diferentes problemas que serán planteados en este trabajo. En el capítulo 3 se dan algunos conceptos y resultados relacionados con la estabilidad de los sistemas no lineales discretos.

En el capítulo 4 se dan los esquemas de control para una clase de sistemas no lineales discretizados mediante la aproximación de Euler.

En el capítulo 5 se dan los algoritmos para el diseño de observadores para una clase de sistemas no lineales discretizados mediante la aproximación de Euler.

Posteriormente, en el capítulo 6, se emplearán las técnicas de control y de observación vistas en los capítulos 4 y 5 para estabilizar el ángulo del rotor de un generador síncrono conectado a una barra infinita.

Por último, en el capítulo 7, se darán las conclusiones de este trabajo, las recomendaciones, así como los trabajos futuros.



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Preliminares matemáticos

En este capítulo se introducen una serie de conceptos básicos necesarios para la formulación teórica de los sistemas no lineales en tiempo discreto que se emplearán en este trabajo. Además, se presentará un panorama de los métodos más usados para la discretización: Euler hacia adelante, Euler hacia atrás así como el trapezoidal (Euler's forward, Euler's backward y Trapezoidal).

#### 2.1.1 Funciones, función composición [9]

Sean  $S$  y  $T$ , dos conjuntos cualesquiera, una **función** o **aplicación**  $f : S \rightarrow T$  es una regla que asigna cada elemento de  $s \in S$  un único elemento  $t \in T$ . Una función  $f$  se dice que es **suprayectiva**, o **sobre** si para todo  $t \in T$  es imagen bajo  $f$  de algún  $s \in S$ ; y es **inyectiva** o **uno a uno** si para  $s_1 \neq s_2$  en  $S$ ,  $f(s_1) \neq f(s_2)$  en  $T$ . Si  $f : S \rightarrow T$  es suprayectiva e inyectiva entonces se dice que es **biyectiva**.

**Definición 2.1** Si  $g : S \rightarrow T$  y  $f : T \rightarrow U$ , entonces la **función composición** (o **función compuesta**) denotada por  $f \circ g$  es la aplicación  $f \circ g : S \rightarrow U$  definida mediante  $(f \circ g)(s) = f(g(s))$  para todo  $s \in S$ .

Algunas propiedades importantes de la función composición son:

- (1) Si  $h : S \rightarrow T$ ,  $g : T \rightarrow U$  y  $f : U \rightarrow V$ , entonces  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ .
- (2) Si  $g : S \rightarrow T$ ,  $f : T \rightarrow U$  son biyectivas, entonces  $f \circ g : S \rightarrow U$  también es biyectiva.
- (3) Si  $f : S \rightarrow T$  es una biyección, entonces  $f \circ f^{-1} = i_t$  y  $f^{-1} \circ f = i_s$ , donde  $i_s$  y  $i_t$  son las aplicaciones identidad de  $S$  y  $T$ , respectivamente.

#### 2.1.2 Espacio Euclidiano y Espacio Vectorial

**Definición 2.2** ([8], pp. 58). Un **Espacio Euclidiano**, denotado por  $\mathbb{R}^n$ , consiste en un conjunto de vectores de dimensión  $n$ ,  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$  donde  $x_1, \dots, x_n$  son números reales. Un Espacio



Euclidiano de dimensión 1 está compuesto por todos los números reales y se denota por  $\mathbb{R}$ .

**Definición 2.3** ([14], pp. 7). Un espacio vectorial  $\mathbb{X}$  es un conjunto de elementos llamados vectores junto con dos operaciones fundamentales

- $\forall x, y \in \mathbb{X} \quad x + y \in \mathbb{X},$
- $\forall x \in \mathbb{X} \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha x \in \mathbb{X},$

además, cumple con los siguientes axiomas:

- (1)  $x + y = y + x,$
- (2)  $(x + y) + z = x + (y + z),$
- (3) Existe un elemento nulo  $\theta$  en  $\mathbb{X}$  tal que  $x + \theta = x, \forall x \in \mathbb{X}$
- (4)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x, y \in \mathbb{X}, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$
- (5)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in \mathbb{X}, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$
- (6)  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall x \in \mathbb{X}, (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$
- (7)  $\theta x = \theta, \quad 1x = x.$

El conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  es un Espacio Vectorial ya que cumple con las dos propiedades fundamentales y los axiomas. Una extensión del ejemplo anterior es el conjunto  $\mathbb{R}^n$ . Sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , donde,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y  $y = (y_1, \dots, y_n)$  y sea el vector nulo  $\theta = (0, \dots, 0)$ . La operación  $x + y$  define un vector en  $\mathbb{R}^n$ , es evidente que si  $\alpha$  es un escalar  $\alpha x$  también pertenece a  $\mathbb{R}^n$ . Los axiomas en la definición se cumplen para  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1.3 Espacio lineal normado

**Definición 2.4** ([14], pp. 7). Un Espacio lineal normado en  $\mathbb{R}^n$  es un par ordenado  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  donde  $\mathbb{X}$  es un espacio vectorial lineal, y  $\|\arg\| : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es una funcional que cumple con los siguientes axiomas:

- (a)  $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0.$
- (b)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{X}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
- (c)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{X}.$

En un espacio Euclidiano  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  la norma  $\|\arg\|$  es una generalización de la longitud de un vector. Es bien conocido que si  $x \in \mathbb{R}^n$ , la norma más usada es precisamente la norma Euclidiana definida por:

$$\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2} = (x^T x)^{1/2}$$

Todas las *normas*  $-p$  ( $p = 1, 2, \dots, \infty$ ) son equivalentes en el sentido de que si  $\|\cdot\|_\alpha$  y  $\|\cdot\|_\beta$  son dos *normas*  $-p$  diferentes, entonces existen unas constantes positivas  $c_1$  y  $c_2$  tales que

$$c_1 \|\cdot\|_\alpha \leq \|\cdot\|_\beta \leq c_2 \|\cdot\|_\alpha \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

### 2.1.4 Normas inducidas [8]

Sean  $x \in \mathbb{R}^m$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  una matriz que define el mapeo lineal  $y = Ax$ , desde  $\mathbb{R}^m$  a  $\mathbb{R}^n$ , la *norma*  $p$  **inducida** de  $A$  es definida como

$$\|A\|_p = \sup \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

donde  $\sup$  y  $\max$  significan el supremo y el máximo, respectivamente. Para  $p = 1, 2, \infty$  la *norma* inducida de  $A$  es

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|, \quad \|A\|_2 = [\lambda_{\max}(A^T A)]^{1/2}, \quad \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$$

Algunas propiedades de las *normas*  $-p$  inducidas para  $p = 1, 2, \infty$  son:

- $\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $\|AB\|_p = \sup_{\|x\|=1} (\|ABx\|)$
- $\|Ay\|_p \leq \|A\|_p \|y\|, \quad \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$
- $\|ABx\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p \|x\|, \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

## 2.2 Discretización [15]

El proceso de discretización consiste en la aproximación numérica de una ecuación diferencial, dando lugar a una **ecuación en diferencias**.

Existen básicamente dos métodos de aproximación: integración numérica y diferenciación numérica.

El método más empleado es la diferenciación numérica, debido a que los errores que se cometen durante el intervalo de muestreo tienden a desaparecer. Este método consiste en dividir el intervalo

de integración en varios subintervalos de amplitud  $\tau$  de tal manera que la contribución de cada “rectángulo” se aproxima a la evaluación de la integral (figura 2.1).

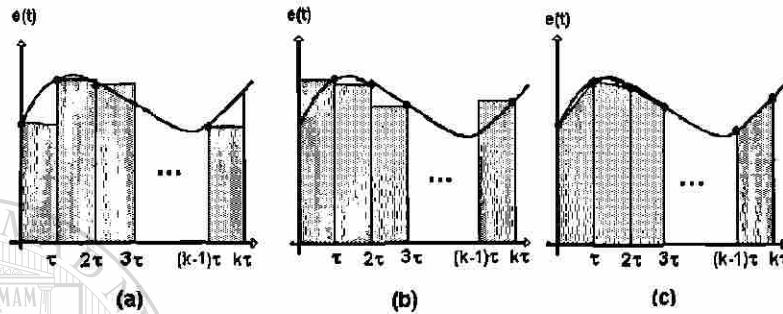


Figura 2.1. Aproximación usando (a) Euler hacia adelante, (b) Euler hacia atrás y (c) Trapezoidal

Considere la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{df}{dt} = e(t) \quad (2.1)$$

Integrando ambos lados de la ecuación se tiene

$$f(t) = f(t_0) + \int_{t_0}^t e(t) dt \quad (2.2)$$

Para cada muestra de tamaño  $t = k\tau$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , y durante un intervalo  $t_0 = k\tau$  a  $t = k\tau + \tau$ , la solución de (2.2) está dada por

$$f(k\tau + \tau) = f(k\tau) + \int_{k\tau}^{k\tau + \tau} e(t) dt \quad (2.3)$$

Ahora bien, existen diferentes métodos para aproximar la integral para cada intervalo  $\tau$ , los cuales se mencionan a continuación.

### 2.2.1 Método de Euler hacia adelante

Una aproximación de la integral en la ecuación (2.3) es una constante que se obtiene al determinar el valor del área de cada subintervalo tomando el punto izquierdo del “rectángulo” multiplicado por el período de muestreo, esto es

$$f(k\tau + \tau) = f(k\tau) + \tau e(k\tau) \quad (2.4)$$

## 2.2.2 Método de Euler hacia atrás

Ahora bien, este método se procede de igual manera que en el método anterior, solo que el valor de la integral se obtiene tomando del punto del lado derecho del rectángulo. A este método se le conoce como Euler hacia atrás, cuya ecuación está definida por

$$f(k\tau + \tau) = f(k\tau) + \tau e(k\tau + \tau) \quad (2.5)$$

## 2.2.3 Método Trapezoidal

Los métodos anteriores son conocidos como métodos rectangulares, debido a que durante el intervalo de muestreo, el área bajo la curva equivale a una aproximación rectangular, a estos métodos también se les conoce como métodos de primer orden.

Por otra parte, una mejor aproximación es aquella que toma en cuenta la regla trapezoidal en la integración, cuya expresión está dada por

$$f(k\tau + \tau) = f(k\tau) + \frac{\tau}{2} [e(k\tau) + e(k\tau + \tau)]$$

Este método es conocido como de segundo orden.

Sin pérdida de generalidad, en este trabajo se empleará la siguiente notación para describir el tiempo entre muestras,  $k = k\tau$  y  $k + 1 = (k + 1)\tau$ , para  $\tau$  fijo.

## 2.3 Ecuaciones en diferencias [9]

Una ecuación que relaciona una función  $u(k)$  con sus evaluaciones  $u(k+1), u(k+2), \dots, u(k+n)$  se le conoce como **ecuación en diferencias**. Una ecuación en diferencias es análoga a una ecuación diferencial, solo que la primera es utilizada para describir el comportamiento dinámico de sistemas discretos.

De manera similar al caso continuo, se define el operador análogo a la derivada (vea [3], p. 36, 37 y [16]), el cual llamaremos la diferencia  $D$  (o diferencia finita) y que se define como

$$Du(k) = u(k + 1) \quad (2.6)$$

En cambio, el operador en diferencias  $\Delta$  se define como

$$\Delta u(k) = u(k+1) - u(k) \quad (2.7)$$

Supongamos que una función  $u(k)$  está definida para todos los enteros no negativos. Si los valores de  $u(k)$   $k = 0, 2, \dots$  se ordenan de la forma  $u(0), u(1), u(2), \dots$ , entonces a este ordenamiento se le llama sucesión. En términos generales, si la sucesión  $\{u(k)\}$  aumenta progresivamente, es decir,  $u(k+1) > u(k)$ , para toda  $k$ , entonces se llama **sucesión monótona estrictamente creciente**. Si los términos disminuyen, es decir,  $u(k+1) < u(k)$ , entonces se le llama **sucesión monótona estrictamente decreciente**.

Por otro lado, en algunos casos es posible resolver una ecuación en diferencias. Un ejemplo de una ecuación en diferencias cuya solución será usada posteriormente es

$$u(k+1) = au(k) \quad (2.8)$$

donde  $a$  es una constante, si  $k_0 = 0$ , entonces una solución de esta ecuación en diferencias es

$$u(k) = ca^k, \quad c = u(0). \quad (2.9)$$

Es fácil probar que (2.9) es una solución de (2.8). Sea  $u(k+1) = ca^{k+1}$ , por lo tanto

$$u(k+1) = ca^k a = au(k).$$

si  $k_0 \neq 0$  entonces, una solución es

$$u(k_0 + k) = u(k_0)a^k, \quad u(k_0) = ca^{k_0}.$$

## 2.4 Conclusiones

En este capítulo se introdujeron una serie de conceptos matemáticos necesarios para la comprensión de los capítulos posteriores.

Se presentaron algunos métodos de discretización frecuentemente empleados, entre los cuales destaca la discretización tipo Euler hacia adelante, el cual será empleado en la discretización de los sistemas no lineales continuos que serán considerados en este trabajo. Esto se debe a que este método ofrece una buena aproximación y la facilidad de uso.

# Capítulo 3

## Estabilidad en sistemas discretos no lineales

### 3.1 Introducción

En este capítulo se presentan los conceptos fundamentales del análisis de estabilidad de sistemas dinámicos no lineales discretos, los cuales serán aplicados en capítulos posteriores.

Uno de los métodos más empleados para el análisis de estabilidad es conocido como el método de Lyapunov expuesto en 1892 por A.M. Lyapunov. La estabilidad en el sentido de Lyapunov está relacionada con el comportamiento de las trayectorias de un sistema cuando su estado inicial se encuentra cerca del equilibrio. Desde un punto de vista práctico esto es de gran importancia ya que el efecto de las perturbaciones externas e incertidumbres, tales como ruido, errores en los componentes, etc., las cuales siempre se encuentran presentes, mueven al sistema del equilibrio.

### 3.2 Sistemas discretos no lineales [4]

Considere primero el sistema no lineal en tiempo discreto representado por:

$$x(k+1) = f(k, x(k), u(k)) \quad (3.1)$$

donde  $k \in Z_+$  indica el tiempo discreto,  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  representa la entrada y  $f : Z_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función analítica.

Sea  $U = \{u : Z_+ \rightarrow \mathbb{R}^m\}$  y  $u_{k_0}^k$  la restricción de  $u$  al intervalo  $[k_0, k]$ . Una función  $p(k, k_0, x_0, u) : Z_+ \times Z_+ \times \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  se dice que es la solución de (3.1) si  $x(k) = p(k, k_0, x_0, u_{k_0}^k)$  satisface esta ecuación y si  $x(k_0) = p(k_0, k_0, x_0, u(k_0))$ ; es decir,  $p(k+1, k_0, x_0, u_{k_0}^k) = f(k, p(k, k_0, x_0, u_{k_0}^k), u(k))$ .

A continuación se introducen las siguientes definiciones.

**Definición 3.1** El sistema (3.1) se dice que es **autónomo** si la función  $f(k, x(k), u(k))$  no depende explícitamente de  $k$ , y es **no autónomo** en caso contrario.

**Definición 3.2** El sistema mostrado en (3.1) se conoce como **forzado**, es decir, que tiene una entrada. Por el contrario, el sistema definido por

$$x(k+1) = f(k, x(k)) \quad (3.2)$$

se le conoce como **no forzado**.

**Definición 3.3** . Un vector  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es un **punto de equilibrio** en el tiempo  $k_0 \in Z_+$  del sistema (3.2) si

$$f(k, x_0) = x_0 \quad \forall k \geq k_0$$

es decir, si  $x_0$  es un punto fijo del mapeo  $f$  para toda  $k \geq 0$ .

**Definición 3.4** . Un punto de equilibrio  $x_0$  del sistema (3.2) en el tiempo  $k_0$  se dice que es **aislado** si existe una vecindad  $B$  de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $B$  no tiene otro punto de equilibrio de (3.2) en el tiempo  $k_0$ .

### 3.3 Estabilidad en sistemas no autónomos [14]

Ahora se presentan conceptos relacionados sobre la estabilidad de sistemas no lineales discretos no autónomos.

Considere el siguiente sistema discreto no lineal no autónomo

$$x(k+1) = f(k, x(k)). \quad (3.3)$$

**Definición 3.5** El equilibrio  $x(k) = 0$  del sistema (3.3) es **estable** si para cada  $\epsilon > 0$  y para cada  $k_0 \geq 0$ , existe un  $\delta(\epsilon, k_0)$  tal que

$$\|x(k_0)\| < \delta(\epsilon, k_0) \implies \|p(k, k_0, x_0)\| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

y es **uniformemente estable** si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta(\epsilon)$  tal que

$$\|x(k_0)\| < \delta(\epsilon), \quad k_0 \geq 0 \implies \|p(k, k_0, x_0)\| < \epsilon, \quad \forall k \geq k_0. \quad (3.4)$$

De acuerdo con esta definición, el equilibrio  $x(k) = 0$  es estable si al determinar *a priori* una cota  $\delta(\epsilon, k_0)$  para la norma de la condición inicial  $x(k_0)$ , toda solución partiendo en el instante dado  $k_0$  desde un estado inicial dentro de la bola de radio  $\delta(\epsilon, k_0)$ , permanecerá siempre dentro de la bola de radio  $\epsilon$  en todo tiempo discreto  $k \geq k_0$ .

**Definición 3.6** El equilibrio  $x(k) = 0$  del sistema (3.3) es **atractor** si para cada  $k_0 \geq 0$ , existe un  $\eta(k_0)$  tal que

$$\|x(k_0)\| < \eta(k_0) \implies \|p(k_0 + k, k_0, x_0)\| \rightarrow 0 \text{ a medida que } k \rightarrow \infty,$$

y es **uniformemente atractor** si existe un  $\eta > 0$  tal que

$$\|x(k_0)\| < \eta \implies \|p(k_0 + k, k_0, x_0)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

o bien, si existe un  $\eta > 0$  tal que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $m = m(\epsilon)$  tal que

$$\|x(k_0)\| < \eta, \quad k_0 \geq 0 \implies \|p(k_0 + k, k_0, x_0)\| < \epsilon, \quad \forall k \geq m(\epsilon).$$

Vale la pena mencionar que la atractividad y la estabilidad de un equilibrio son propiedades independientes; es decir, un punto puede ser atractor sin ser estable ya que existen puntos de equilibrio inestables.

**Definición 3.7** El equilibrio  $x(k) = 0$  del sistema (3.3) es **asintóticamente estable** si es estable y atractor; es **uniformemente asintóticamente estable** si es uniformemente estable y uniformemente atractor.

**Definición 3.8** El equilibrio  $x(k) = 0$  del sistema (3.3) es **exponencialmente estable** si existen constantes  $\eta, a > 0$  y  $\rho < 1$  tal que

$$\|x(k_0)\| < \eta, \quad k_0 \geq 0 \implies \|p(k_0 + k, k_0, x_0)\| < a \|x(k_0)\| \rho^k, \quad \forall k \geq 0.$$

La estabilidad exponencial es una propiedad más fuerte que la estabilidad asintótica uniforme.



Los conceptos de estabilidad arriba establecidos pueden ser definidos en términos de unas funciones llamadas funciones de clase  $\mathcal{K}$  y clase  $\mathcal{L}$ .

**Definición 3.9** Una función  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  es de **clase  $\mathcal{K}$**  si  $\phi(0) = 0$ , es analítica y estrictamente creciente. Es de **clase  $\mathcal{L}$**  si  $\phi(0) < \infty$ ,  $\phi(s) \rightarrow 0$  a medida que  $s \rightarrow \infty$ , es analítica y estrictamente decreciente.

**Nota 3.1** Si  $\phi(r)$  es una función no decreciente y positiva entonces existe una función  $\alpha(r)$  de clase  $\mathcal{K}$  tal que  $\alpha(r) \leq \phi(r) \forall r$  ([14], p.147). Además, si  $\alpha(r)$  es una función de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\alpha^{-1}(r)$  también es de clase  $\mathcal{K}$  ([8], p.136).

**Teorema 3.1** ([4], pp.16 – 17) El punto de equilibrio  $x(k) = 0$  del sistema (3.3) es **uniformemente estable** si y solo si existe una función  $\varphi$  de clase  $\mathcal{K}$  y una constante  $c > 0$  independiende de  $k_0$  tales que

$$\|x(k)\| \leq \varphi(\|x(k_0)\|), \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad \forall \|x(k_0)\| < c. \quad (3.5)$$

$x(k) = 0$  es **uniforme y asintóticamente estable** si existe una función  $\varphi$  de clase  $\mathcal{K}$  y una función  $\sigma$  de clase  $\mathcal{L}$  y una constante  $c$  independiende de  $k_0$  tales que

$$\|x(k)\| \leq \varphi(\|x(k_0)\|) \sigma(k - k_0), \quad \forall k \geq k_0 \geq 0, \quad \forall \|x(k_0)\| < c.$$

### 3.4 Estabilidad en el sentido de Lyapunov.

El análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov se puede llevar a cabo mediante dos métodos conocidos como *el primer método* y *segundo método*; ambos se aplican para determinar la estabilidad de los sistemas dinámicos descritos por ecuaciones diferenciales o en diferencias, que es nuestro caso.

El primer método, se basa en las formas explícitas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales o en diferencias. Por otra parte, en el segundo método, no requiere de las soluciones de las ecuaciones diferenciales o en diferencias, por lo que resulta más útil en la práctica, por lo

tanto, en esta sección se hablará exclusivamente de este método.

El segundo método de Lyapunov, también conocido como método directo está basado en que la estabilidad del punto de equilibrio está relacionada con la energía del sistema.

Puesto que el concepto energía está muy relacionado con ciertos sistemas para los cuales es posible determinarla, entonces, una forma de extender este concepto de energía para sistemas no lineales generales, fue introducida por Lyapunov, quien propuso el concepto que ahora se conoce como **función de Lyapunov**. Sin embargo, no existe una forma simple de determinar esta función para cualesquier sistema no lineal.

A continuación, se presenta un resumen del método directo de Lyapunov para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales en tiempo discreto, las pruebas de los siguientes teoremas se hicieron partiendo de una analogía con el caso continuo.

Considere nuevamente el sistema no lineal discreto y no autónomo.

$$x(k+1) = f(k, x(k)) \quad (3.6)$$

Además, considere que el sistema (3.6) cumple con las siguientes suposiciones:

- (1) El origen  $x(k) = 0$  es un punto de equilibrio; es decir,  $f(k, 0) = 0$  para toda  $k \geq k_0$ .
- (2) Existe una constante  $r > 0$  y para  $\tau > 0$  tal que, para toda condición inicial  $(k_0, x_0) \in \mathcal{B}_{r,\tau}$ , existe una solución  $p(k, k_0, x_0, u_{k_0}^k)$  para toda  $k \geq k_0$ .
- (3)  $f(k, \cdot)$  es analítica para toda  $k$  en el dominio de interés.

Ahora se introducen las siguientes definiciones.

**Definición 3.10** Una función  $V : Z_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada **localmente definida positiva (fldp)** si  $V(k, 0) = 0 \forall k \geq k_0$  y si existe una constante  $r > 0$  y una función  $\alpha$  de clase  $\mathcal{K}$  tal que

$$V(k, x(k)) \geq \alpha(\|x(k)\|), \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x(k) \in \mathcal{B}_r \quad (3.7)$$

$V$  es **decreciente** si existe una función  $\beta$  de clase  $\mathcal{K}$  y una constante  $r > 0$  tal que

$$V(k, x(k)) \leq \beta(\|x(k)\|), \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x(k) \in \mathcal{B}_r \quad (3.8)$$

en donde el operador en diferencias  $\Delta V(k, x(k))$  es

$$\Delta V(k, x(k)) = V(k+1, x(k+1)) - V(k, x(k)) \quad (3.9)$$

Auxiliándose de estas definiciones a continuación se presentan algunos Teoremas relacionados con la estabilidad en el sentido de Lyapunov.

**Teorema 3.2** El equilibrio  $x = 0$  del sistema (3.6) es estable si existe una función  $V : Z_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y una constante  $r > 0$  tal que

$V(k, x(k))$  es una fdp

- $\Delta V(k, x(k)) \leq 0, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x(k) \in B_r$

Y es asintóticamente estable si además

- $\Delta V(k, x(k)) < 0, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x(k) \in B_r$

**Prueba ( Estabilidad simple)**

Si  $V(k, x(k))$  es una fdp entonces por la definición 3.10, existe una función  $\alpha$  de clase  $\mathcal{K}$  y una constante  $s > 0$  tal que

$$\alpha(\|x(k)\|) \leq V(k, x(k)), \quad \forall x(k) \in B_s$$

Para probar que el equilibrio es estable es necesario demostrar que para todo  $\epsilon > 0$  podemos encontrar un  $\delta = \delta(\epsilon, k_0)$  tal que (3.4) se cumpla. Dado un  $\epsilon$  y un  $k_0$  se elije  $\epsilon_1 = \min\{\epsilon, r, s\}$  y un  $\delta > 0$  tal que

$$\sup_{\|x(k)\| \leq \delta} V(k, x(k)) \triangleq \beta(k_0, \delta) < \alpha(\epsilon_1)$$

$\delta$  siempre puede ser encontrado ya que  $\alpha(\epsilon_1) > 0$  y  $\beta(k_0, \delta) \rightarrow 0$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ .

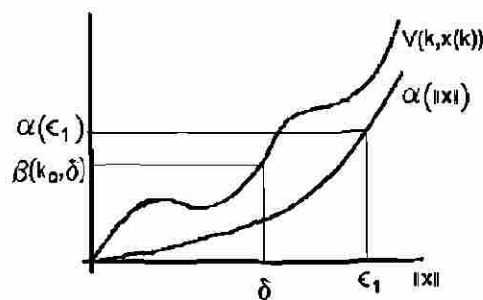


Figura 3.1 Definición de  $V(k, x(k))$  y  $\alpha(\|x\|)$

Para demostrar que lo anterior cumple con (3.4) suponga  $\|x(k_0)\| < \delta$ , entonces  $V(k, x(k_0)) < \beta(k_0, \delta) < \alpha(\epsilon_1)$  (ver figura 3.1), como  $\Delta V(k, x(k)) \leq 0$  entonces  $\|x(k)\| < \delta$  y

$$V(k, x(k)) \leq V(k, x(k_0)) < \alpha(\epsilon_1), \quad k \geq k_0$$

por la definición

$$V(k, x(k)) \geq \alpha(\|x(k)\|)$$

De lo anterior resulta que  $\alpha(\|x(k)\|) < \alpha(\epsilon_1)$ , entonces  $\alpha(\cdot)$  es estrictamente creciente. Además, esto implica que  $\|x(k)\| < \epsilon_1$ . De la figura 3.1 se observa que  $\delta \leq \epsilon_1 \leq \epsilon$ , por lo tanto

$$\|x(k)\| < \epsilon$$

□

**Teorema 3.3** *El equilibrio  $x = 0$  del sistema (3.6) es exponencialmente estable si existe una función  $V : Z_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y constantes positivas  $c_1, c_2, c_3, p$  y  $r$  tales que*

- $c_1 \|x(k)\|^p \leq V(k, x(k)) \leq c_2 \|x(k)\|^p$
- $\Delta V(k, x(k)) \leq -c_3 \|x(k)\|^p, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall x(k) \in \mathcal{B}_r.$

**Prueba**

Defina:

$$\eta = r \left( \frac{a}{b} \right)^r \leq r$$

Suponga que  $x_0 \in \mathcal{B}_r$ . Sea  $x(t)$  la solución de (3.6), por lo tanto, si  $V(k, x(k)) \leq c_2 \|x(k)\|^p$ , se tiene que  $-c_3 V(k, x(k)) \geq -c_2 c_3 \|x(k)\|^p$ . Además, como  $\Delta V(k, x(k)) \leq -c_3 \|x(k)\|^p$ , entonces,

$$\begin{aligned} -c_3 V(k, x(k)) &\geq -c_2 c_3 \|x(k)\|^p \geq c_2 \Delta V(k, x(k)) \\ \Delta V(k, x(k)) &\leq -\frac{c_3}{c_2} V(k, x(k)) \\ V(k+1, x(k+1)) &\leq \left( 1 - \frac{c_3}{c_2} \right) V(k, x(k)) \end{aligned}$$

Esta última ecuación, representa una ecuación en diferencias de la forma (2.8), la cual tiene

como solución

$$V(k_0 + k, x(k_0 + k)) \leq V(k_0, x(k_0)) \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^k$$

como  $V(k_0, x(k_0)) \leq c_2 \|x(k_0)\|^p$  y  $c_1 \|x(k_0 + k)\|^p \leq V(k_0 + k, x(k_0 + k))$ , se tiene

$$c_1 \|x(k_0 + k)\|^p \leq c_2 \|x(k_0)\|^p \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^k$$

de donde

$$\|x(k_0 + k)\| \leq \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{1/p} \|x(k_0)\| \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^k$$

Por lo tanto, si se tiene que  $a \triangleq \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right)^{1/p} > 0$ ,  $\rho \triangleq \left(1 - \frac{c_3}{c_2}\right) < 1$  y  $c_3 < c_2$ , finalmente se obtiene

$$\|x(k_0 + k)\| \leq a \|x(k_0)\| \rho^k, \quad a > 0, \rho < 1$$

que es precisamente la definición de estabilidad exponencial. □

### 3.5 Conclusiones

En este capítulo se introdujeron conceptos básicos sobre los sistemas no lineales en tiempo discreto, además se presentaron algunos conceptos sobre la estabilidad de dichos sistemas y que posteriormente serán usados en el diseño de controladores y observadores

Un análisis de estabilidad en el sentido de Lyapunov para sistemas no lineales discretos fue dado, se demostraron los teoremas de estabilidad simple y estabilidad exponencial basandose en la metodología expuesta en [14] para el caso de sistemas continuos.

## Capítulo 4

# Diseño de controladores discretos para sistemas no lineales

### 4.1 Introducción

En este capítulo se presentarán algoritmos de control para una clase de sistemas no lineales discretos mediante la aproximación de Euler.

Existen resultados bien establecidos para sistemas discretos lineales [19], [10], sin embargo el diseño de controladores discretos para sistemas no lineales es un problema abierto, algunos resultados ya han sido expuestos, por ejemplo, en [4] se plantea el problema de linealización vía retroalimentación de estado, en donde bajo ciertas hipótesis una clase de sistemas no lineales discretos puede ser transformados a una forma parcialmente lineal llamada forma controlador de Brunovsky, además, demuestra la existencia de un control no lineal discreto capaz de linealizar y estabilizar el sistema.

Por otro lado, en [2] se plantea el problema de linealización desde un enfoque algebraico basado en la introducción de un conjunto finito de campos vectoriales canónicos independientes de las variables de control.

En [12] se presentan algunos algoritmos para el diseño de un control y de un observador basado en transformaciones de similitud y aplicado a una clase de sistemas no lineales.

A diferencia de los sistemas continuos, en el diseño de controladores y observadores discretos hay que considerar el período de muestreo, ya que este influye en el diseño de estos y en sus propiedades de convergencia.

En este capítulo se presentan técnicas de control de alta ganancia aplicadas a una clase de sistemas no lineales discretos. En una de estas técnicas se considera el modelo discretizado mediante la aproximación de Euler de un sistema en la forma controlador de Brunovsky. Además, un control de alta ganancia que linealiza y estabiliza al sistema es propuesto.

Por otra parte, se presenta un control aplicado a una clase de sistemas no lineales discretos y se obtiene mediante un procedimiento basado en transformaciones de similitud.

## 4.2 Planteamiento del problema

La metodología a seguir para el diseño de controladores que serán vistos en este capítulo se puede analizar en la figura 4.1

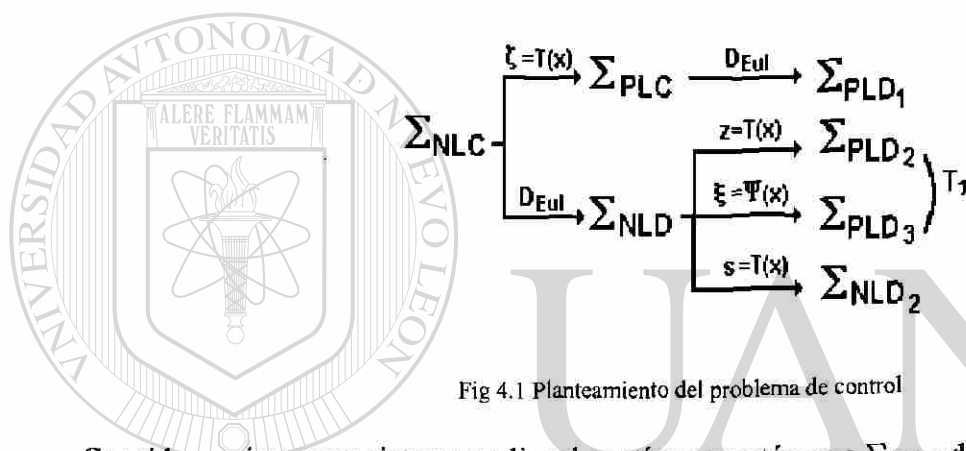


Fig 4.1 Planteamiento del problema de control

Considere primero un sistema no lineal continuo y autónomo  $\Sigma_{NLC}$  definido por las ecuaciones

$$\Sigma_{NLC} : \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) = Cx \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados;  $u \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  representan la entrada y salida, respectivamente;  $f$  y  $g$ , son campos vectoriales cuyas componentes son funciones analíticas.

Usando la discretización tipo Euler hacia adelante, con un período de muestreo  $\tau$ , el sistema (4.1) puede ser discretizado de la siguiente forma.

$$\Sigma_{NLD} : \begin{cases} x(k+1) = x(k) + \tau [f(x(k)) + g(x(k))u(k)] \\ y(k) = h(x(k)) = Cx(k) \end{cases} \quad (4.2)$$

En [4] se presenta una transformación  $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de manera que  $z = T(x(k))$  define un cambio de coordenadas alrededor del punto de equilibrio, de tal forma que el sistema (4.2) puede

ser representado en nuevas coordenadas  $z(k)$  como

$$\Sigma_{PLD2} : \begin{cases} z(k+1) = Az(k) + B[\alpha(z(k), \tau) + \beta(z(k), \tau)u(k)] \\ y(k) = h(z(k)) = Cz(k) \end{cases} \quad (4.3)$$

donde las matrices  $A$  y  $B$  están en la forma controlador de Brunovsky.

Por otro lado, en [17] se define un cambio de coordenadas  $\varsigma = T(x)$  con  $T : U_0 \rightarrow R^n$ , tal que el sistema no lineal y continuo (4.1) puede ser transformado en uno parcialmente lineal y continuo definido por las ecuaciones

$$\Sigma_{PLC} : \begin{cases} \dot{\varsigma} = A\varsigma + B(\gamma(\varsigma) + \varphi(\varsigma)u) \\ y = h(\varsigma) = C\varsigma \end{cases} \quad (4.4)$$

donde las matrices  $A$  y  $B$  están en la forma controlador de Brunovsky.

Usando la discretización tipo Euler hacia adelante, con un período de muestreo  $\tau$ , el sistema (4.4) puede ser representado por un conjunto de ecuaciones discretas de la forma

$$\Sigma_{PLD1} : \begin{cases} \varsigma(k+1) = A_\tau \varsigma(k) + B[\gamma(\varsigma(k), \tau) + \varphi(\varsigma(k), \tau)u(k)] \\ y = h(\varsigma(k)) = C\varsigma(k) \end{cases} \quad (4.5)$$

donde  $A_\tau = I_n + \tau A$ .

Aunque en [17] para el caso continuo y en [4] para el caso discreto se definen transformaciones que convierten un sistema no lineal en uno de la forma controlador de Brunovsky, al analizar las ecuaciones (4.2) y (4.5) se pueden observar resultados diferentes al discretizar y luego transformar con respecto a transformar y luego discretizar.

En este capítulo se propone un difeomorfismo  $\Upsilon : U \rightarrow R^n$  tal que  $\xi = \Upsilon(x)$  defina un cambio de coordenadas alrededor del origen de modo el que sistema no lineal discreto (4.2) puede ser representado como

$$\Sigma_{PLD3} : \begin{cases} \xi(k+1) = A_\tau \xi(k) + B[\alpha(\xi(k), \tau) + \beta(\xi(k), \tau)u(k)] \\ y(k) = h(\xi(k)) \end{cases} \quad (4.6)$$

Es importante señalar que el sistema (4.6) es un modelo aproximado al sistema (4.5), esto se demostrará durante el desarrollo del capítulo.

Por otro lado, se propone una transformación que convierte el sistema (4.3) en (4.6).



El estudio anterior se debe a que el algoritmo de control propuesto se aplica a la clase de sistemas de la forma (4.6)

### 4.3 Preliminares y definiciones

#### 4.3.1 Grado relativo [4]

Considere el sistema discreto no lineal autónomo

$$\begin{aligned}x(k+1) &= f(x(k), u(k)) \\ y(k) &= h(x(k))\end{aligned}\tag{4.7}$$

donde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  es el estado;  $u(k) \in U \subset \mathbb{R}$  e  $y(k) \in Y \subset \mathbb{R}$  representan la entrada y salida, respectivamente;  $f : X \times U \rightarrow X$  es una función analítica,  $h : X \rightarrow Y$  también es analítica.

Sea  $x^0$  el punto de equilibrio del sistema (4.7), cuando  $u = 0$ , es decir,  $f(x^0, 0) = x^0$ . Sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $x^0 = 0$  y que  $h(x^0) = 0$ . Se denotará por  $f_0$  al mapeo  $f(\cdot, 0) : X \rightarrow X$  y por  $f_0^j$  la  $j$ -ésima composición de  $f_0$  consigo misma.

**Definición 4.1 (Grado relativo).** Se dice que el sistema (4.7) es de grado relativo  $d_0$  si  $\forall (x, u) \in O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  un conjunto abierto y denso de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y que contiene al punto de equilibrio, si para todo  $(x, u) \in O$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} [h \circ f_0^k \circ f(x, u)] &\equiv 0 \quad 0 \leq k < d_0 \\ \frac{\partial}{\partial u} [h \circ f_0^{d_0} \circ f(x, u)] &\neq 0\end{aligned}$$

donde  $h \circ f(\cdot)$  denota la composición, es decir,  $h \circ f(\cdot) = h(f(\cdot))$  y  $f_0^k$  denota la  $k$ -ésima iteración consigo misma.

Si el número  $(d_0 + 1)$  existe, éste determina el retraso inherente entre la entrada y la salida, esto significa que dado un estado inicial arbitrario  $x(0)$ , no se puede apreciar la entrada  $u(0)$  en la salida hasta después de  $d_0$  iteraciones, o de manera equivalente, se dice que  $(d_0 + 1)$  es el primer instante de tiempo en que la salida se encuentra afectada por la entrada  $u(0)$ . Como  $f$  y  $h$  son funciones analíticas, se tiene que  $d_0 < n$  ó  $d_0 = \infty$ .

Por lo tanto, de la definición de grado relativo, se tiene

$$y(k+l) = h(x(k+l)) = h \circ x(k+l)$$

$$y(k+l) = h \circ f_0^l(x(k)) \circ f(x, u)$$

para  $0 \leq l \leq d_0$  y

$$y(k+d_0+1) = h \circ f_0^{d_0}(x(k))$$

$$y(k+d_0+1) = h \circ f_0^{d_0+1}(x(k)) + S(x(k), u(k))$$

donde  $S(x(k), u(k)) = h \circ f_0^{d_0}(x(k)) - h \circ f_0^{d_0+1}(x(k))$  con  $S(\cdot, u(k)) = 0$  y

$$\frac{\partial S(x, u)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} y(k+d_0+1) \neq 0.$$

A partir de la definición de grado relativo se tiene que  $\{h(x), h(x) \circ f(x, u), \dots, h \circ f_0^{d_0}(x)\}$  forman un conjunto de funciones independientes alrededor del punto de equilibrio y pueden seleccionarse como parte de nuevas coordenadas; es decir, si el sistema (4.7) es de grado relativo  $d_0 = n - 1$ , entonces:

$$z(k) = T(x(k)) = \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ \vdots \\ z_{d_0+1}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x(k)) \\ h(x(k)) \circ f_0 \\ \vdots \\ h(x(k)) \circ f_0^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

es una transformación local de coordenadas alrededor del punto de equilibrio  $x^0$ . Por otro lado, si (4.7) es de grado relativo  $d_0 < n - 1$ , el conjunto puede completarse con  $n - (d_0 + 1)$  funciones linealmente independientes representadas por  $\zeta(x(k)) = \tilde{T}(x(k)) = (\zeta_1(x(k)), \dots, \zeta_{n-(d_0+1)}(x(k)))$ .

Con este cambio de coordenadas el sistema (4.7) es transformado a un sistema parcialmente lineal descrito por las ecuaciones

$$z(k+1) = Az(k) + B\gamma(z(k), u(k))$$

$$\zeta(x+1) = F(\phi(k), u(k)) \quad (4.9)$$

$$y(k) = Cz(k)$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d_0+1) \times (d_0+1)}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_0+1} \quad (4.10)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times (d_0+1)},$$

se dice que son de la forma controlador de Brunovsky, además,

$$\gamma(z(k), u(k)) = h(z(k)) \circ f_0^{d_0} \circ f(x(k), u(k))|_{x(k)=T^{-1}(z(k))}$$

Se puede observar que si  $d_0 = n - 1$  entonces, el sistema es completamente observable y está descrito por

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + B\gamma(z(k), u(k)) \\ y(k) &= Cz(k) \end{aligned} \quad (4.11)$$

### 4.3.2 Definición de las matrices de transformación

En el apartado anterior se estudió la forma de transformar un sistema no lineal discreto  $\Sigma_{NLD}$  (4.2) en otro parcialmente lineal discreto  $\Sigma_{PLD2}$  (4.6).

Puesto que el algoritmo de control propuesto se basa en un modelo de la forma (4.6) en este apartado se propone: a) Una transformación  $T_\tau$  que pueda convertir el sistema (4.3) en (4.6) y b) Una transformación  $\Upsilon$  que pueda convertir el sistema (4.2) en (4.6)

**Lema 4.1** *Considere el sistema lineal y discreto de la forma*

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= A_\tau \eta(k) \\ y(k) &= h(\eta(k)) = C\eta(k) \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde  $\eta(k) \in \mathbb{R}^n$  y  $A_\tau = I_n + \tau A$ ,  $A$  está definida en (4.10). Sea la matriz de transformación  $T_\tau$

$$T_\tau \in \mathbb{R}^{n \times n} = \text{col} \begin{pmatrix} C & CA_\tau & \dots & CA_\tau^{n-1} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

con  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ . Por lo tanto,  $\tilde{\eta}(k) = T_\tau \eta(k)$  define un cambio de coordenadas tal que

el sistema (4.12) puede ser representado en las nuevas coordenadas  $\tilde{\eta}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(k+1) &= A\tilde{\eta}(k) + B(\alpha(\tilde{\eta}(k))) \\ y(k) &= h(\tilde{\eta}(k)) = C\tilde{\eta}(k)\end{aligned}$$

**Prueba:**

Primero defina una transformación de la forma  $\tilde{\eta}(k) = T(\eta(k))$  donde  $T(\eta(k)) = \text{col}(h(\eta(k)), h^1(\eta(k)), \dots, h^{n-1}(\eta(k)))$ ,  $h^j(\eta(k))$  denota la  $j$ -ésima iteración. Por lo tanto, el conjunto de  $n$  ecuaciones  $\tilde{\eta}(k+1)$  está definido por

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_1(k+1) &= h(\eta(k+1)) = h^1(\eta(k)) = \tilde{\eta}_2(k) \\ \tilde{\eta}_2(k+1) &= h^1(\eta(k+1)) = h^2(\eta(k)) = \tilde{\eta}_3(k) \\ &\vdots \\ \tilde{\eta}_{n-1}(k+1) &= h^{n-1}(\eta(k+1)) = h^n(\eta(k)) = \tilde{\eta}_n(k) \\ \tilde{\eta}_n(k+1) &= h^n(\eta(k+1))\end{aligned}$$

Puesto que  $h(\eta(k)) = C\eta(k)$ ,  $h^1(\eta(k)) = h(\eta(k+1)) = C\eta(k+1) = CA_\tau\eta(k)$  y así sucesivamente para cada término, se puede comprobar que la matriz  $T(\eta(k)) = T_\tau\eta(k)$  es de la forma

$$T(\eta(k)) = \begin{pmatrix} h(\eta(k)) \\ h^1(\eta(k)) \\ \vdots \\ h^{n-1}(\eta(k)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\eta(k) \\ C\eta(k+1) \\ \vdots \\ C\eta(k+n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\eta(k) \\ CA_\tau\eta(k) \\ \vdots \\ CA_\tau^{n-1}\eta(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA_\tau \\ \vdots \\ CA_\tau^{n-1} \end{pmatrix} \eta(k)$$

Por lo tanto  $T_\tau = \text{col} \left( C \quad CA_\tau \quad \dots \quad CA_\tau^{n-1} \right)$ , note que la matriz  $T_\tau$  tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \tau & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & c_{i,j}\tau & \dots & \tau^{n-1} \end{pmatrix}$$

donde  $c_{i,j} = \frac{(i-1)!}{(i-j)!(j-1)!}$ ,  $i, j$  denotan la fila y columna, respectivamente. Además para todo  $\tau \neq 0$

el  $\det(A_\tau) \neq 0$ . Por lo tanto, para todo  $\tau \neq 0$ , siempre existe  $T_\tau^{-1}$ .

□

Por el Lema anterior es posible usar la matriz  $T_\tau$  como una matriz de transformación para convertir el sistema (4.3) en (4.6), para demostrarlo se usa el proceso inverso, es decir, sea  $z(k) = T_\tau \xi(k)$  una transformación que convierte el sistema (4.6) en (4.3), esto es válido ya que como se mencionó en la nota anterior para todo  $\tau \neq 0$  existe  $T_\tau^{-1}$ .

Defina la siguiente transformación

$$z(k) = T_\tau \xi(k). \quad (4.14)$$

Por lo tanto, el sistema transformado es de la forma

$$\begin{aligned} z(k+1) &= T_\tau \xi(k+1) = T_\tau A_\tau \xi(k) + T_\tau B [\gamma(\xi(k), \tau) + \varphi(\xi(k), \tau)u(k)] \\ &= T_\tau A_\tau T_\tau^{-1} z(k) + B \tau^{n-1} [\gamma(\xi(k), \tau) + \varphi(\xi(k), \tau)u(k)]. \end{aligned}$$

Puesto que  $T_\tau A_\tau T_\tau^{-1} z(k) = Az(k) + BC A_\tau^n T_\tau^{-1} z(k)$ , se tiene finalmente

$$\begin{aligned} z(k+1) &= Az(k) + B(\alpha(z(k), \tau) + \beta(z(k), \tau)u(k)) \\ y(k) &= Cz(k) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(z(k), \tau) &= CA_\tau^n T_\tau^{-1} z(k) + \tau^{n-1} \gamma(T_\tau^{-1} z(k), \tau) \\ \beta(z(k), \tau) &= \tau^{n-1} \varphi(T_\tau^{-1} z(k), \tau) \end{aligned}$$

Lo anterior nos muestra que la matriz definida en (4.13) es apropiada para convertir el sistema (4.3) en (4.6) y viceversa.

Ahora se propone una matriz  $\Upsilon : U \rightarrow R^n$  tal que  $\xi = \Upsilon(x)$  defina un cambio de coordenadas alrededor del origen, tal que el sistema no lineal discreto sea de la forma deseada (4.6)

Primero se introduce la siguiente definición.

**Definición 4.2** Sean  $f(x_k)$  y  $h(x_k)$  dos funciones analíticas y sea  $h \circ f(x_k)$  la composición  $h(f(x_k))$ . Además, sea  $\tau$  el periodo de muestreo. Definiendo el operador  $D_f h$  como

$$D_f h = \frac{h \circ f(x_k) - h(x_k)}{\tau} \quad (4.15)$$

donde  $D_f^2 h = D_f(D_f h) = \frac{D_f h \circ f - D_f h}{\tau}$ . Entonces, para la  $i$ -ésima iteración el operador queda definido como

$$D_f^i h = D_f(D_f^{i-1} h) = \frac{D_f^{i-1} h \circ f - D_f^{i-1} h}{\tau} \quad (4.16)$$

Ahora considere el sistema no lineal discreto de la forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= x(k) + \tau [f(x(k)) + g(x(k))u] \\ y &= h(x(k)) \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde  $x(k)$  representa el vector de estados,  $u(k)$  y  $y(k)$  representan la entrada y la salida, respectivamente;  $f(x(k))$ ,  $g(x(k))$  y  $h(x(k))$  son analíticas en todo el dominio de trabajo.

Asuma que el sistema (4.17) cumple con las siguientes suposiciones:

- A1)  $(x_e, u_e) = (0, 0)$  es el punto de equilibrio de (4.17)
- A2)  $f_0^j$  es analítica para toda  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .
- A3) El sistema (4.17) de grado relativo  $d_0 = n - 1$ .

Ahora defina la transformación  $z = \Upsilon(x(k))$  como

$$\xi = \Upsilon(x(k)) = \begin{pmatrix} h \\ D_f h \\ \vdots \\ D_f^{n-1} h \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Por lo tanto, con esta transformación el sistema (4.17) puede ser transformado en las nuevas coordenadas como

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_\tau \xi(k) + B(\alpha(\xi(k), \tau) + \beta(\xi(k), \tau)u(k)) \\ y(k) &= h(\xi(k)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Se puede demostrar lo anterior al considerar los términos  $\xi_i(k)$  como sigue:

$$\begin{aligned}\xi_1(k) &= h(x(k)) \\ \xi_2(k) &= D_f h = \frac{h \circ f(x(k)) - h(x(k))}{\tau} \\ \xi_3(k) &= D_f^2 h = D_f(D_f h) = \frac{D_f h \circ f - D_f h}{\tau} \\ \xi_4(k) &= D_f^3 h = D_f(D_f^2 h) = \frac{D_f^2 h \circ f - D_f^2 h}{\tau} \\ &\vdots \\ \xi_j(k) &= D_f^{j-1} h = D_f(D_f^{j-2} h) = \frac{D_f^{j-2} h \circ f - D_f^{j-2} h}{\tau}\end{aligned}$$

Al analizar la ecuación (4.16) se tiene que  $D_f^i h \circ f = D_f^i h + \tau D_f^{i+1} h$ . Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones  $z_i(k+1)$  resultan ser

$$\begin{aligned}\xi_1(k+1) &= h(x(k+1)) = h \circ f = D_f^0 h \circ f = h + \tau D_f h = \xi_1(k) + \tau \xi_2(k) \\ \xi_2(k+1) &= D_f h \circ f = D_f h + \tau D_f^2 h = \xi_2(k) + \tau \xi_3(k) \\ &\vdots \\ \xi_i(k+1) &= D_f^{i-1} h \circ f = D_f^{i-1} h + \tau D_f^i h = \xi_i(k) + \tau \xi_{i+1}(k)\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que (4.18) es una transformación adecuada para representar el sistema no lineal discreto (4.17) en otro parcialmente lineal discreto de la forma (4.19). ®

Es claro que esta transformación puede resultar laboriosa a medida que aumenta el grado del sistema; pero, por otro lado recordando que el sistema (4.17) se obtuvo de la aproximación tipo Euler, es decir

$$\dot{x} = \frac{x(k+1) - x(k)}{\tau}.$$

De modo que, si el sistema no lineal discreto se obtuvo a partir de un modelo continuo, es interesante notar que

$$D_f h = \frac{h \circ f - h}{\tau} \simeq \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = L_f h$$

donde  $L_f h$  denota la derivada de Lie, Por lo tanto, una aproximación de la transformación (4.18), puede ser obtenida usando la transformación utilizada para linealizar un sistema no lineal continuo

usando la derivada de Lie (ver [17], pag. 44).

Es claro que lo anterior se cumple para el caso en donde el período de muestreo es pequeño.

## 4.4 Diseño de controladores

### 4.4.1 Control de alta ganancia aplicado a una clase de sistemas parcialmente lineal

En esta sección se presentará el diseño de un control aplicado a una clase de sistemas parcialmente lineal, de la forma (4.6). Considere nuevamente el sistema discreto no lineal autónomo cuya dinámica está representada por (4.2), donde  $x(k)$  representa el vector de estados,  $u(k)$  y  $y(k)$  representan la entrada y salida respectivamente. Suponga que el sistema (4.2) cumple con las suposiciones vistas en sección 4.3.2

Considere una transformación  $\Upsilon : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\xi = \Upsilon(x)$  siendo  $\Upsilon$  una transformación definida en (4.18), el cual define un cambio de coordenadas alrededor del origen del sistema no lineal discreto (4.2) pueda ser representado en la forma (4.6).

Considere ahora la siguiente ley de control

$$u(k) = \beta^{-1}(\xi(k), \tau) [v(\xi(k)) - \alpha(\xi(k), \tau)] \quad (4.20)$$

Si  $\beta(\xi(k), \tau)$  es no singular para todo  $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$ , entonces, el control auxiliar  $v(\xi(k))$  puede ser seleccionado como

$$v(\xi(k)) = -\tau F \Omega_\rho \xi(k) \quad (4.21)$$

donde las matrices  $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  y  $\Omega_\rho \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se eligen de acuerdo con las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \Omega_\rho &= \text{diag}(\rho^n, \dots, \rho) & \rho &\geq 1 \\ F &= \begin{pmatrix} C_n^0 & \dots & C_n^{n-1} \end{pmatrix} & C_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \end{aligned} \quad (4.22)$$

tal que el sistema en lazo cerrado

$$\xi(k+1) = (A_\tau - \tau BF \Omega_\rho) \xi(k) \quad (4.23)$$

es exponencialmente estable. Este análisis corresponde al problema de linealización local entrada-



salida, el cual se establece en el siguiente Teorema.

**Teorema 4.2** . Considere el sistema no lineal discreto (4.2) el cual puede ser transformado en (4.6), mediante la transformación (4.18). Entonces existe un control estático linealizante y estabilizante dado por

$$u(k) = \beta^{-1}(\xi(k), \tau) [v(\xi(k)) - \alpha(\xi(k), \tau)]$$

donde el control auxiliar  $v(\xi(k))$  es definido como (4.21),  $\tau$  es el período de muestreo y  $\rho$  es una constante positivo, las cuales se eligen tal que  $0 \leq \tau_0 \rho_0 \leq 1$  para todo  $0 < \tau < \tau_0$  y para todo  $\rho > \rho_0$ , tal que el origen del sistema en lazo cerrado (4.23), es exponencialmente estable.

Para demostrar el teorema anterior se introduce el siguiente resultado.

**Proposición 1** [11]. Sea  $A_c = I + \gamma_c(A - BF)$  donde  $A$  y  $B$  son matrices de la forma (4.10), y la matriz  $F$  es definida como  $F = (C_n^0 \dots C_n^{n-1})$  donde  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . Entonces, para todo  $\gamma > 0$ ;  $0 < \gamma_c < 1$ , la única matriz simétrica definida positiva  $P_c$  que satisface la ecuación algebraica

$$A_c^T P_c A_c - P_c = -\gamma_c P_c - \gamma_c (1 - \gamma_c)^n F^T F \quad (4.24)$$

es dada por  $P_c = N^T N$  donde  $N = \Lambda_c E_c$ ,  $\Lambda_c$  es una matriz diagonal dada por  $\Lambda_c = \text{diag} [1, (1 - \gamma_c)^{1/2}, \dots, (1 - \gamma_c)^{(n-1)/2}]$  y  $E_c$  es una matriz constante independiente de  $\gamma_c$  dada por  $E_c(i, j) = C_{j-1}^{i-1}$ , si  $i \leq j$  y  $E_c(i, j) = 0$  si  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i$  y  $j$  representan la fila y la columna de la matriz, respectivamente.

Esta proposición puede ser demostrada por simple verificación. Por ejemplo, considere el caso para  $n = 2$ , donde

$$\Lambda_c = \text{diag}(1, (1 - \gamma_c)^{1/2})$$

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \Lambda_c E_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & (1 - \gamma_c)^{1/2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto las matrices  $P_c = N^T N$  y  $A_c = I + \gamma_c(A - BF)$  resultan ser de la forma:

$$P_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (2 - \gamma_c) \end{pmatrix}, \quad A_c = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_c \\ -\gamma_c & (1 - 2\gamma_c) \end{pmatrix}$$

donde  $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces, la expresión del lado izquierdo de la ecuación (4.24) está dada por

$$\begin{aligned} A_c^T P_c A_c - P_c &= \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_c \\ \gamma_c & 1 - 2\gamma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (2 - \gamma_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \gamma_c \\ -\gamma_c & (1 - 2\gamma_c) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (2 - \gamma_c) \end{pmatrix} \\ A_c^T P_c A_c - P_c &= \begin{pmatrix} -2\gamma_c + 2\gamma_c^2 - \gamma_c^3 & -3\gamma_c + 4\gamma_c^2 - 2\gamma_c^3 \\ -3\gamma_c + 4\gamma_c^2 - 2\gamma_c^3 & -6\gamma_c + 9\gamma_c^2 - 4\gamma_c^3 \end{pmatrix} \\ A_c^T P_c A_c - P_c &= \begin{pmatrix} -\gamma_c - \gamma_c(1 - \gamma_c)^2 & -\gamma_c - 2\gamma_c(1 - \gamma_c)^2 \\ -\gamma_c - 2\gamma_c(1 - \gamma_c)^2 & -\gamma_c(2 - \gamma_c) - 4\gamma_c(1 - \gamma_c)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, analizando la expresión del lado derecho de la ecuación (4.24), se tiene que

$$\begin{aligned} -\gamma_c P_c - \gamma_c(1 - \gamma_c)^2 F^T F &= -\gamma_c \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & (2 - \gamma_c) \end{pmatrix} - \gamma_c(1 - \gamma_c)^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ -\gamma_c P_c - \gamma_c(1 - \gamma_c)^2 F^T F &= \begin{pmatrix} -\gamma_c - \gamma_c(1 - \gamma_c)^2 & -\gamma_c - 2\gamma_c(1 - \gamma_c)^2 \\ -\gamma_c - 2\gamma_c(1 - \gamma_c)^2 & -\gamma_c(2 - \gamma_c) - 4\gamma_c(1 - \gamma_c)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

la cuál satisface la igualdad.

### Prueba del Teorema 4.2

Considere la ley de control (4.20) la cual es aplicada al sistema (4.6), de modo que el sistema en lazo cerrado resulta ser de la forma (4.23)

Para analizar la estabilidad en lazo cerrado, primero se introduce el cambio de coordenadas de la forma  $\eta(k) = \Omega_\rho \xi(k)$ . Entonces, la dinámica del sistema representada en estas nuevas coordenadas queda expresada como

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= \Omega_\rho (A_\tau - \tau BF \Omega_\rho) \Omega_\rho^{-1} \eta(k) \\ &= \Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} \eta(k) - \tau \Omega_\rho BF \eta(k) \end{aligned}$$

Puesto que las siguientes igualdades se cumplen,  $\Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} = I_n + \tau \rho A$ , y  $\Omega_\rho B = \rho B$ , se tiene

$$\eta(k+1) = [I_n + \tau \rho (A - BF)] \eta(k) = A_c \eta(k). \quad (4.25)$$

Ahora, considere  $V_{\eta_k} = \eta^T(k) P_c \eta(k)$  como una función candidata de Lyapunov, por lo tanto

$$\Delta V_{\eta_k} = V_{\eta_{k+1}} - V_{\eta_k}$$

$$= \eta^T(k+1)P_c\eta(k+1) - \eta^T(k)P_c\eta(k) = \eta^T(k) (A_c^T P_c A_c - P_c) \eta(k)$$

A partir de la Proposición 1, si  $\gamma_c = \tau\rho < 1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &= -\tau\rho\eta^T(k)P_c\eta(k) - \tau\rho(1-\tau\rho)^n\eta^T(k)F^T F\eta(k) \\ &\leq -\tau\rho\|\eta(k)\|_{P_c}^2 \leq -\tau\rho V_{\eta_k} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V_{\eta_{k+1}} \leq -\tau\rho V_{\eta_k} - V_{\eta_k}$$

$$V_{\eta_{k+1}} \leq (1-\tau\rho)V_{\eta_k}$$

De modo que si  $(1-\tau\rho) < 1$ , resulta que

$$V_{\eta_{k+1}} < (1-\tau\rho)^{k+1} V_{\eta_k}$$

De lo anterior resulta que el sistema es exponencialmente estable □

La implementación del control puede verse en la figura 4.1

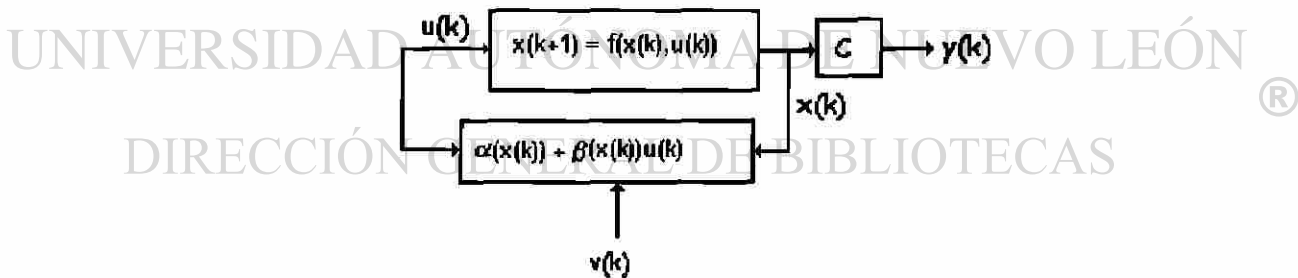


Fig. 4.1 . Esquema de la acción de control.

Para poder implementar este algoritmo de control se requiere del conocimiento de todas las componentes del vector de estado, lo cual no es siempre posible. Para evitar este obstáculo en el siguiente capítulo se presentará el diseño de un observador.

#### 4.4.2 Control basado en un procedimiento con transformación de similitud [11]

En el apartado anterior se presentó una técnica de control aplicada a la una clase de sistemas no lineales.

A continuación se presenta una técnica de diseño de un control basada en transformaciones de similitud, la cual es aplicada a una clase de sistemas no lineales discretos obtenidos mediante la discretización tipo Euler hacia adelante de la siguiente clase de sistemas

$$\dot{x} = Ax + g(u, x) \quad (4.26)$$

$$y = Cx$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , y  $y \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, g(u, x) = \begin{pmatrix} g_1(x_1) \\ g_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ g_n(u, x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_0+1}$$

$$C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$$

El objetivo de este apartado es dar un algoritmo basado en cálculo matricial que permita el diseño de un control estabilizante.

Ahora bien, puesto que la matriz  $g(u, x)$  se puede expresar como  $g(u, x) = g(x) + B(\alpha(x) + \beta(x)u)$  y usando la discretización tipo Euler, el sistema (4.26) puede ser representado por las ecuaciones

$$x(k+1) = A_\tau x(k) + \tau g(x(k)) + \tau B [\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k)] \quad (4.27)$$

donde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estados,  $g(x(k))$  es una función suave y continuamente diferenciable con  $g(0) = 0$ , asuma que  $\beta(x(k)) \neq 0$  para todo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , además  $A_\tau = I + \tau A$  es de la forma

$$A_\tau = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para el diseño del control es necesario la definición y evaluación de algunas matrices y que a continuación presentan a manera de un procedimiento algorítmico.

- Obtenga el Jacobiano  $\bar{G}(\xi(k))$  y la matriz  $\bar{F}(\xi(k), \tau)$

$$\bar{G}(\xi(k)) = \frac{\partial g}{\partial x(k)}(\xi(k)), \quad \bar{F}(\xi(k), \tau) = I + \tau A + \tau \bar{G}(\xi(k))$$

- Calcule la matriz  $V_\tau = [B, A_\tau B, \dots, A_\tau^{n-1} B]$ . Note que  $V_\tau$  es de rango completo ya que el par  $(A_\tau, B)$  es controlable
- Ahora calcule la matriz  $U(\xi(k), \tau)$  como sigue:

$$U(\xi(k), \tau) = [B, \bar{F}(\xi(k), \tau)B, \dots, \bar{F}(\xi(k), \tau)^{n-1}B]$$

Es fácil verificar que  $U(\xi(k), \tau) = S(\xi(k))V_\tau$ , donde  $S(\xi(k))$  es una matriz triangular inferior y cuyos elementos en la diagonal principal son iguales a 1. Por lo tanto, la matriz  $U(\xi(k), \tau)$  es una matriz no singular para todo  $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$ . Además  $S(\xi(k))$  no depende del período de muestreo  $\tau$ .

- Construya las matrices  $\bar{M}_o(\xi(k))$  y  $\bar{Q}(\xi(k), \tau)$ .

$$\begin{aligned} \bar{M}_o(\xi(k)) &= V_\tau U^{-1}(\xi(k), \tau) \\ \bar{Q}(\xi(k), \tau) &= \bar{M}_o(\xi(k)) \bar{F}(\xi(k), \tau) \bar{M}_o^{-1}(\xi(k)) - A_\tau \end{aligned}$$

Note que la matriz  $\bar{Q}(\xi(k), \tau)$  es de la forma

$$\bar{Q}(\xi(k), \tau) = \begin{pmatrix} \bar{q}_1(\xi(k), \tau) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{q}_2(\xi(k), \tau) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{q}_n(\xi(k), \tau) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

- Ahora defina la matriz  $\tilde{A}(\xi(k), \tau) = A_\tau + B\bar{L}(\xi(k), \tau)$ , donde

$$\bar{L}(\xi(k), \tau) = [\bar{q}_n(\xi(k), \tau) \quad \cdots \quad \bar{q}_1(\xi(k), \tau)]$$

donde los  $\bar{q}_i$  son elementos de la matriz  $\bar{Q}(\xi(k), \tau)$ . Se puede verificar que  $\tilde{A}(\xi(k), \tau)$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \tau & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \tau \\ \bar{q}_n(\xi(k), \tau) & \dots & \dots & \bar{q}_2(\xi(k), \tau) & \bar{q}_1(\xi(k), \tau) + 1 \end{pmatrix}$$

- Por último, calcule las matrices  $\tilde{U}(\xi(k), \tau)$  y  $\bar{M}(\xi(k))$

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\xi(k), \tau) &= [B, \tilde{A}(\xi(k), \tau)B, \dots, \tilde{A}(\xi(k), \tau)^{n-1}B] \\ \bar{M}(\xi(k)) &= \tilde{U}(\xi(k), \tau)U^{-1}(\xi(k), \tau) \end{aligned}$$

Se puede verificar que  $\tilde{U}(\xi(k), \tau) = \tilde{S}(\xi(k))V_\tau$ , donde  $\tilde{S}(\xi(k))$  es una matriz triangular superior con elementos en la diagonal iguales a 1, por lo tanto  $\bar{M}(\xi(k)) = \tilde{S}(\xi(k))S^{-1}(\xi(k))$ .

- i) La matriz  $\bar{M}(\xi(k))$  cumple con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \bar{M}(\xi(k))\bar{F}(\xi(k), \tau)\bar{M}^{-1}(\xi(k)) &= A_\tau + B\bar{L}(\xi(k), \tau) \\ \bar{M}(\xi(k))B &= \bar{M}^{-1}(\xi(k))B = B \end{aligned}$$

para toda  $k \geq 0$

- ii) Puesto que los elementos de la diagonal de  $\bar{M}(\xi(k))$  y  $\bar{M}^{-1}(\xi(k))$  son iguales a 1, se tiene que

$$\bar{M}(\xi(k+1))\bar{M}^{-1}(\xi(k)) = I + \bar{R}_0(\xi(k))$$

donde  $\bar{R}_0(\xi(k))$  es una matriz triangular inferior elementos de la diagonal son iguales a 0.

Ahora considere la siguiente ley de control

$$u(x(k)) = -\frac{1}{\tau\psi(x(k))} [\bar{L}(x(k))\bar{M}(x(k))x(k) + \tau\bar{K}\Omega_\beta\bar{M}(x(k))x(k) + \tau\varphi(x(k))] \quad (4.28)$$

donde

- $\bar{K} = (C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^{n-1})$  con  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ ,
- $\Omega_\beta = \text{diag}(\beta^n, \dots, \beta)$  para  $\beta \geq 1$ ,
- $\bar{L}(x(k))$  y  $\bar{M}(x(k))$  son matrices calculadas en el algoritmo matricial presentado

Ahora se establece el siguiente resultado.

**Teorema 4.3** *Considere el sistema (4.26) el cual puede ser llevado en la forma discreta (4.27). Suponga que las no linealidades  $g(x(k))$ ,  $\alpha(x(k))$  y  $\beta(x(k))$  y que sus derivadas parciales con respecto a  $x(k)$  están acotadas para todo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , si  $\beta(x(k)) \neq 0$  para todo  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , entonces, existe un  $\tau_0$  y  $\beta_0$  con  $0 < \tau_0\beta_0 < 1$  tal que para todo  $0 < \tau < \tau_0$  y para todo  $\beta \geq \beta_0$ , el sistema en lazo cerrado,*

$$x(k+1) = x(k) + \tau Ax(k) + \tau g(x(k)) + \tau B [\alpha(x(k)) + \beta(x(k))u(k)] \quad (4.29)$$

*es asintóticamente estable.*

## 4.5 Conclusiones

En este capítulo se usó el método de Euler hacia adelante para discretizar un sistema no lineal en tiempo continuo, partiendo de este modelo, se propusieron unas matrices de transformación para convertir este modelo no lineal discreto en otro parcialmente lineal.

Basándose de este modelo parcialmente lineal se propone una técnica de control linealizante, estabilizante y de alta ganancia.

Por otro lado, si un sistema no lineal discreto es de la forma (4.27), entonces un procedimiento algorítmico que permite diseñar este controlador para la clase de sistemas transformados mediante la transformación de similitud ha sido expuesto.

# Capítulo 5

## Diseño de observadores discretos para sistemas no lineales

### 5.1 Introducción

Puesto que los algoritmos vistos en el capítulo anterior para el diseño de controladores requieren de la información del vector de estados y por lo general, esta información no es accesible por razones físicas y/o económicas, resulta necesario resolver el problema mediante la implementación de un algoritmo capaz de estimar los estados no medibles del sistema. Esta tarea la realizan precisamente los observadores de estado.

Un observador es un sistema dinámico que utiliza la información de la variable de salida  $y(k)$  y del control  $u(x(k))$  del sistema original para poder estimar los estados del sistema. La implementación del observador y del control en un sistema se puede ver en la siguiente figura

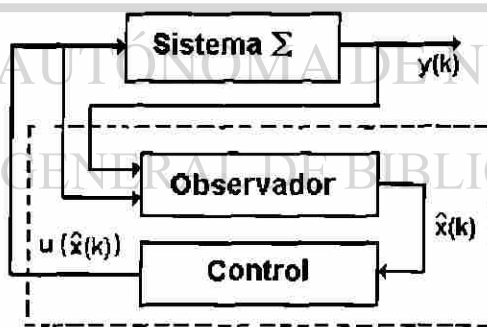


Fig 5.1 Implementación del control y del observador

En la figura 5.1 se muestra el esquema de control basado en el observador. Se puede apreciar de la figura 5.1 como el observador toma los valores de salida y de la señal de control para poder estimar los estados, posteriormente el control usa los valores de los estimados  $\hat{x}(k)$  para desarrollar la acción de control  $u(\hat{x}(k))$ .

En este capítulo se presenta el diseño de observadores para las clases de sistemas estudiadas en



el capítulo anterior.

## 5.2 Planteamiento del problema

Los problemas que se abordaran en este capítulo serán los siguientes:

- (1) Diseñar un observador para la clase de sistemas parcialmente lineales discretos discretizados por la aproximación de Euler de la forma controlador de Brunovsky propuesto en el capítulo anterior.
- (2) Diseñar un observador de alta ganancia para la clase de sistemas no lineales discretos obtenidos mediante el procedimiento algorítmico visto en el capítulo anterior.

## 5.3 Observador de estado para una clase de sistemas.

En esta sección se propone un algoritmo para el diseño de un observador para sistemas discretizados de la forma (4.6) dado por:

$$\hat{z}(k+1) = A_\tau \hat{z}(k) + B[\alpha(\hat{z}(k), \tau) + \beta(\hat{z}(k), \tau)u(k)] - \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)] \quad (5.1)$$

donde  $\Delta_\theta = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta} \dots \frac{1}{\theta^n} \right)$  y  $\theta$  es una constante positiva.

Definiendo el error de estimación como  $e(k) = \hat{z}(k) - z(k)$ , cuya dinámica está dada por

$$e(k+1) = (A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} K C) e(k) + B \Psi(e, u) \quad (5.2)$$

donde  $\Psi(e, u) = \alpha(\hat{z}(k), \tau) - \alpha(z(k), \tau) + [\beta(\hat{z}(k), \tau) - \beta(z(k), \tau)]u(k)$ . Si  $\Psi(e, u)$  está acotada, es decir, existe una constante positiva  $l_1$  tal que,

$$\mathbf{A1) } \quad \|B\Psi(e, u)\| \leq l_1 \|e(k)\|$$

Entonces, es posible encontrar una matriz  $K$  y constantes  $\tau$  y  $\theta$  tal, que el sistema (5.2) sea exponencialmente estable.

A continuación se introduce el siguiente teorema.

**Teorema 5.1** *Considere el sistema (4.6) y asuma que (A1) se cumple. Sean  $\Delta_\theta = \text{diag} \left( \frac{1}{\theta} \dots \frac{1}{\theta^n} \right)$  para  $\theta \geq 1$ ,  $K = \text{col} \left( C_n^1 \dots C_n^n \right)$  con  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . Entonces, existe  $\tau_0, \theta_0$  con  $0 < \tau_0 \theta_0 < 1$  tal que para todo  $\theta \geq \theta_0$  y  $0 < \tau \leq \tau_0$  el sistema (5.1) es un observador exponencial de (4.6).*

La prueba de este Teorema se basa en la siguiente proposición:

**Proposición 2** [11]. Sea  $A_o = [I_n + \gamma_o(A - KC)]$  donde  $K = \begin{pmatrix} C_n^1 & \dots & C_n^n \end{pmatrix}$  con  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ , entonces para todo  $\gamma_o > 0$ ;  $0 < \gamma_o < 1$ , la única matriz simétrica definida positiva  $P_o$  que satisface la ecuación

$$A_o^T P_o A_o - P_o = -\gamma_o P_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^n C^T C \quad (5.3)$$

está dada por  $P_o = M^T M$  donde  $M = \Lambda_o E_o$ , las matrices  $\Lambda_o$  y  $E_o$  están definidas como  $\Lambda_o = \text{diag} \left[ 1, (1 - \gamma_o)^{1/2}, \dots, (1 - \gamma_o)^{\frac{n-1}{2}} \right]$  y  $E_o(i, j) = (-1)^{i+j} C_{n-i}^{j-i}$  si  $i \leq j \leq n$  y  $\bar{E}(i, j) = 0$  en caso contrario.

Esta proposición puede demostrarse por verificación directa. Por ejemplo, considere el caso  $n = 2$ , entonces

$$\Lambda_o = \text{diag}(1, (1 - \gamma_o)^{1/2})$$

$$E_o = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \Lambda_o E_o = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & (1 - \gamma_o)^{1/2} \end{pmatrix}$$

Puesto que la matriz  $P_o = M^T M$  y  $A_o = I + \gamma_o(A - KC)$ , resulta que

$$P_o = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & (2 - \gamma_o) \end{pmatrix}, \quad A_o = \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma_o & \gamma_o \\ -\gamma_o & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $K = \text{col} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Entonces la expresión del lado izquierdo de la ecuación (5.3) está dada por

$$\begin{aligned} A_o^T P_o A_o - P_o &= \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma_o & -\gamma_o \\ \gamma_o & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & (2 - \gamma_o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\gamma_o & \gamma_o \\ -\gamma_o & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & (2 - \gamma_o) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2\gamma_o + 2\gamma_o^2 - \gamma_o^3 & \gamma_o \\ \gamma_o & \gamma_o^2 - 2\gamma_o \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\gamma_o - \gamma_o(1 - \gamma_o)^2 & \gamma_o \\ \gamma_o & -\gamma_o(2 - \gamma_o) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, analizando la expresión del lado derecho de la ecuación (5.3), se tiene que

$$-\gamma_o P_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^2 C^T C = -\gamma_o \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 - \gamma_o \end{pmatrix} - \gamma_o (1 - \gamma_o)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\gamma_o P_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^2 C^T C = \begin{pmatrix} -\gamma_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^2 & \gamma_o \\ \gamma_o & -\gamma_o (2 - \gamma_o) \end{pmatrix}$$

lo cual demuestra que la igualdad se cumple.

### Prueba del Teorema 5.1

Considere el siguiente cambio de coordenadas  $\varepsilon(k) = \Delta_\theta e(k)$ , entonces la dinámica del error en estas nuevas coordenadas se expresa como

$$\varepsilon(k+1) = \Delta_\theta (A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} K C) \Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k) + \Delta_\theta B \Psi(e, u)$$

Puesto que  $\Delta_\theta A_\tau \Delta_\theta^{-1} = \Delta_\theta (I_n + \tau A) \Delta_\theta^{-1} = I_n + \tau \theta A$ , y  $C \Delta_\theta^{-1} = \theta C$ , se tiene

$$\varepsilon(k+1) = (I_n + \tau \theta (A - K C)) \varepsilon(k) + \frac{1}{\theta^n} B \Psi(e, u) \quad (5.4)$$

Apartir de la proposición 2, y seleccionando  $\gamma_o = \tau \theta$ . Además, considerando  $V_{\eta_k} = \varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k)$  como una función candidata de Lyapunov, la ecuación de diferencias resulta de la forma

$$\Delta V_{\eta_k} = V_{\eta_{k+1}} - V_{\eta_k}$$

$$= \varepsilon^T(k+1) P_o \varepsilon(k+1) - \varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k)$$

$$= \varepsilon^T(k) (A_o^T P_o A_o - P_o) \varepsilon(k) + \frac{\tau^2}{\theta^n} \|\Delta_\theta \varepsilon(k)\|_{P_o} \|B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k), u)\|_{P_o}$$

donde  $\varepsilon^T(k) P_o \varepsilon(k) = \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2$ . Puesto que  $\|e(k)\| = \|\Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k)\| \leq \|\Delta_\theta^{-1}\| \|\varepsilon(k)\| \leq \theta^n \|\varepsilon(k)\|$  y de la suposición A1, se tiene

$$\|B \Psi_o(\Delta_\theta^{-1} \varepsilon(k), u)\|_{P_o} \leq \theta^n \|\varepsilon(k)\|_{P_o}$$

por lo tanto, de la proposición 2

$$A_o^T P_o A_o - P_o = (1 - \gamma_o) P_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^n C^T C$$

$$\|A_o \varepsilon(k)\|_{P_o}^2 = (1 - \gamma_o) \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 - \gamma_o (1 - \gamma_o)^n \varepsilon^T(k) C^T C \varepsilon(k)$$

$$\|A_o \varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \leq (1 - \gamma_o) \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 \leq \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2$$

En consecuencia,  $\|A_o \varepsilon(k)\|_{P_o} \leq \|\varepsilon(k)\|_{P_o}$ . Finalmente, reemplazando las expresiones

apropiadas y usando las suposiciones A1, se tiene que:

$$\begin{aligned}\Delta V_{\eta_k} &= -\tau\theta \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + \frac{\tau^2}{\theta^n} \|B\Psi_o(A_o^{-1}\varepsilon(k), u)\|_{P_o}^2 + \frac{2\tau}{\theta^n} \|A_o\varepsilon(k)\|_{P_o} \|B\Psi_o(A_o^{-1}\varepsilon(k), u)\|_{P_o} \\ &\leq -\tau\theta \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + \frac{\tau^2}{\theta^n} \theta^{2n} l_1 \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2 + \frac{2\tau}{\theta^n} \|\varepsilon(k)\|_{P_o} \theta^n l_1 \|\varepsilon(k)\|_{P_o} \\ &\leq -\tau(\theta - 2l_1 - \tau l_1^2) \|\varepsilon(k)\|_{P_o}^2\end{aligned}$$

Ahora, para un  $\theta$  suficientemente grande, tal que  $\delta = (\theta - 2l_1 - \tau l_1^2) > 0$ , se obtiene que

$$\begin{aligned}V_{\varepsilon_{k+1}} &< (1 - \tau\delta) V_{\varepsilon_k} \\ &< (1 - \tau\delta)^{k+1} V_{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

De lo anterior resulta que el error es exponencialmente estable.  $\square$

## 5.4 Observador basado en un procedimiento con transformación de similitud [12]

Ahora considere el siguiente sistema discreto

$$x(k+1) = x(k) + \tau Ax(k) + \tau g(x(k), u(k)) \quad (5.5)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

donde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\tau$  es el período de muestreo. Asuma que  $g(x(k), u(k))$  es una función continuamente diferenciable.

Para el diseño del observador es necesario la definición y evaluación de algunas matrices que a continuación se explican:

- Obtenga el Jacobiano  $G(\xi(k))$  y la matriz  $F(\xi(k), \tau)$

$$G(\xi(k)) = \frac{\partial g}{\partial x(k)}(\xi(k)) \quad F(\xi(k), \tau) = I + \tau A + \tau G(\xi(k))$$

- Calcule la matriz  $H_\tau = \text{col}[C, CA_\tau, \dots, CA_\tau^{n-1}]$ . Observe que  $H_\tau$  es de rango completo ya que el par  $(C, A_\tau)$  es observable

- Ahora calcule las matrices  $W(\xi(k), u(k), \tau)$

$$W(\xi(k), u(k), \tau) = \begin{pmatrix} C \\ CF(\xi(k), u(k), \tau) \\ \vdots \\ CF^{n-1}(\xi(k), u(k), \tau) \end{pmatrix}$$

Es fácil verificar que  $W(\xi(k), u(k), \tau) = H_\tau M_o(\xi(k))$ , donde  $M_o(\xi(k))$  es una matriz triangular inferior con elementos en la diagonal son igual a 1. Entonces, la matriz  $M_o(\xi(k), \tau)$  es una matriz no singular para todo  $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$ , además  $M_o(\xi(k))$  no depende del período de muestreo  $\tau$ .

- Construya la matriz  $Q(\xi(k), \tau) = M_o(\xi(k), u(k))F(\xi(k), u(k), \tau)M_o^{-1}(\xi(k)) - A_\tau$ . Note que  $Q(\xi(k), \tau)$  tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ q_1(\xi(k), u(k), \tau) & \cdots & q_n(\xi(k), u(k), \tau) \end{pmatrix}$$

- Defina  $\bar{A}(\xi(k), u(k), \tau) = A_\tau + L(\xi(k), u(k), \tau)C$ , donde

$$L(\xi(k), \tau) = \text{col} \left( q_n(\xi(k), u(k), \tau) \quad \cdots \quad q_1(\xi(k), u(k), \tau) \right)$$

Se puede verificar que  $\bar{A}(\xi(k), u(k), \tau)$  tiene la siguiente forma

$$\bar{A}(\xi(k), u(k), \tau) = \begin{pmatrix} q_n(\xi(k), u(k), \tau) + \mathbf{1} & \tau & \cdots & 0 \\ q_{n-1}(\xi(k), u(k), \tau) & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \tau \\ q_1(\xi(k), u(k), \tau) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Por último, calcule las matrices  $\widetilde{W}(\xi(k), u(k), \tau)$  y  $M(\xi(k), u(k))$

$$\widetilde{W}(\xi(k), u(k), \tau) = \begin{pmatrix} C \\ C \bar{A}(\xi(k), u(k), \tau) \\ \vdots \\ \bar{A}^{n-1}(\xi(k), u(k), \tau) \end{pmatrix}$$

$$M(\xi(k), u(k)) = \widetilde{W}(\xi(k), u(k), \tau) W^{-1}(\xi(k), u(k), \tau)$$

**Nota 5.1** Las matrices antes descritas cumplen con algunas propiedades

- $W(\xi(k), \tau)$  y  $\widetilde{W}(\xi(k), \tau)$  son matrices no singulares ya que  $W(\xi(k), \tau) = H_\tau M_0(\xi(k))$  y  $\widetilde{W}(\xi(k), \tau) = H_\tau \widetilde{M}_0(\xi(k))$ , donde  $M_0(\xi(k))$  y  $\widetilde{M}_0(\xi(k))$  son matrices triangulares inferiores con elementos en la diagonal igual a 1.
- $M(\xi(k), u(k)) F(\xi(k), u(k), \tau) M^{-1}(\xi(k), u(k)) = A_\tau + L(x(k), u(k), \tau) C$
- Puesto que los elementos de la diagonal de  $M(\xi(k), u(k))$  y  $M(\xi(k-1), u(k-1))$  son igual a 1, se tiene que  $M(\xi(k), u(k)) M(\xi(k-1), u(k-1)) = I + R_o(\xi(k), u(k))$ , donde  $R_o(\xi(k), u(k))$  es una matriz triangular inferior con elementos en la diagonal igual a 0.
- Puesto que  $M(\xi(k), u(k))$  no depende de  $\tau$ , por lo tanto, si los elementos de  $M(\xi(k), u(k))$  son acotados para toda  $\xi(k) \in \mathbb{R}^n$  entonces existe una constante  $\alpha_o > 0$  tal que  $M(\xi(k), u(k)) \leq \alpha_o$ .

Ahora, considere el siguiente observador:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(k+1) &= \widehat{x}(k) + \tau A \widehat{x}(k) + \tau g(\widehat{x}(k), u(k)) \\ &\quad + M^{-1}(\widehat{x}(k), u(k)) [\tau \Delta_\alpha^{-1} K + L(\widehat{x}(k), u(k), \tau)] (y(k) - C \widehat{x}(k)) \\ y(k) &= C \widehat{x}(k) \end{aligned} \tag{5.6}$$

donde

$$K = \text{col}(C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n)$$

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

$$\Delta_\alpha = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha}, \dots, \frac{1}{\alpha^n}\right) \quad \alpha > 1.$$

**Teorema 5.2** *Asuma que las derivadas parciales con respecto a  $x(k)$  de las componentes de la matriz  $g(x(k), u(k))$  del sistema (5.5) son acotadas para toda  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  y para toda  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ . Entonces, existen  $\tau_0, \alpha_0 > 0$  con  $0 < \tau_0 \alpha_0 < 1$ , tal que para toda  $\alpha > \alpha_0$  y  $0 < \tau \leq \tau_0$ , el sistema (5.6) es un observador exponencial del sistema (5.5)*

## 5.5 Conclusiones

La implementación de un observador es de suma importancia ya que la mayoría de los estados no son medibles, y gran parte del diseño de controladores requieren de éstos.

En este capítulo se mostraron esquemas para el diseño de observadores discretos aplicados a la clase de sistemas vistos en el capítulo anterior.

Por un lado, uno de estos algoritmos de diseño ha sido propuesto para la clase de sistemas de la forma (4.6)

Por otro lado, un procedimiento algorítmico basado en transformaciones de similitud fue usado para el diseño de un observador para una clase de sistemas no lineales discreto de la forma (5.5).

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



# Capítulo 6

## Aplicación: Generador Síncrono

### 6.1 Introducción

En los últimos años el estudio de los sistemas eléctricos de potencia ha sido de suma importancia, esto es debido al aumento en la demanda de energía, a la necesidad de mantener la estabilidad en los sistemas eléctricos, así como en mejorar la calidad de la energía suministrada a los consumidores. Dentro del estudio de estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia, el control de generadores síncronos juega un papel importante en la generación de energía eléctrica.

Existen diferentes esquemas de control para generadores síncronos. En general, los esquemas de control que se encuentran en la literatura para estos sistemas están basados en modelos lineales. En este capítulo se aplicarán los esquemas de control y de observación propuestos en los capítulos anteriores a un modelo discreto no lineal reducido del generador síncrono.

El objetivo principal será usar las técnicas para el diseño de un control basado en un observador con el fin de estabilizar el ángulo del rotor de un generador síncrono.

En la literatura se manejan diversos modelos que dependen, entre otras cosas, de las características del generador, reducción de modelo, condiciones especiales, etc. En este trabajo se considera un modelo dinámico presentado en [18] con las siguientes características:

- (1) Generador síncrono conectado a una barra (bus) infinita(o).
- (2) Representado en circuito equivalente Thevenin.
- (3) Modelo de tercer orden, reducido de uno de quinto orden por medio de técnicas de variedad integral.

Resultados en simulación serán presentados para mostrar la eficiencia de los esquemas de control y de observación presentados.



## 6.2 Modelo matemático y planteamiento del problema

Considere el modelo de un generador síncrono en representación Thevenin conectado a una barra infinita a través de una línea de transmisión con una resistencia  $R_e$  y una reactancia  $X_e$  como se muestra en la figura 6.1

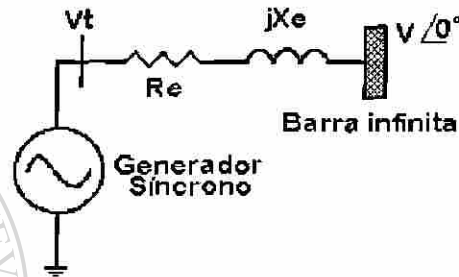


Figura 6.1. Generador síncrono conectado a una barra infinita

**Nomenclatura.** Las variables a utilizar son expresadas en la siguiente tabla

Variable	Significado
$\delta$	Angulo del rotor
$\omega$	Velocidad síncrona
$E_{fd}$	Voltaje de excitación
$E'_q$	Voltaje transitorio en el eje de cuadratura
$V_t, V$	Voltaje en las terminales y del bus infinito respectivamente
$H$	Constante de inercia
$x_d$	Reactancia en el eje directo
$x_q$	Reactancia en el eje de cuadratura
$x'_d$	Reactancia transitoria en el eje directo
$T_m$	Par mecánico
$T'_{do}$	Constante de tiempo de corto circuito en el transitorio

Tabla 6.1. Lista de símbolos del generador

**Modelo matemático.** El modelo matemático que representa la dinámica del generador síncrono, en tiempo continuo en una representación conocida como modelo reducido [18] está dada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \delta &= \omega - \omega_s \\ M \dot{\omega} &= T_m + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x'_q} \right) V^2 \sin(2\delta) - \frac{V E'_q}{x_d} \sin(\delta) \\ T'_{do} E'_q &= -\frac{x_d}{x'_d} E'_q + \left( \frac{x_d - x'_d}{x'_d} \right) V \cos(\delta) + E_{fd} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Sean  $\delta^*$ ,  $E'_q$ ,  $E'_{fd}$  los puntos de equilibrio del sistema (6.1) para un valor dado de  $E_{fd}$ . De modo que definiendo el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} x_1 &= \Delta\delta = \delta - \delta^*, & x_2 &= \Delta\omega = \omega - \omega_s, \\ x_3 &= \Delta E'_q = E'_q - E'_q, & u &= E_{fd} - E'_{fd}, \end{aligned}$$

se tiene el siguiente modelo continuo representado en variables de desviación

$$\Sigma_{NLC} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = m_1 + m_2 \sin(\delta^* + x_1) \cos(\delta^* + x_1) + m_3 (x_3 + E'_q) \sin(\delta^* + x_1) \\ \dot{x}_3 = m_4 (x_3 + E'_q) + m_5 \cos(\delta^* + x_1) + m_6 (u + E'_{fd}) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (6.2)$$

en donde las constantes constantes  $m_i$  están dadas en la siguiente tabla

$m_1 = \frac{T_m}{M}$	$m_2 = \frac{V^2}{M} \left( \frac{1}{x'_d} - \frac{1}{x'_q} \right)$	$m_3 = -\frac{ V }{M x_d}$
$m_4 = -\frac{x_d}{T'_{do} x'_d}$	$m_5 = \frac{ V }{T'_{do}} \left( \frac{x_d - x'_d}{x'_d} \right)$	$m_6 = \frac{1}{T'_{do}}$

**Tabla 6.2.** Constantes  $m_i$  del generador síncrono

Discretizando el sistema (6.2) mediante la aproximación tipo Euler con un período de muestreo  $\tau$ , se tiene el siguiente modelo discreto

$$\Sigma_{NLD} : \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \tau x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \tau \{m_1 + m_2 \sin(\delta^* + x_1(k)) \cos(\delta^* + x_1(k)) \\ + m_3 (x_3(k) + E_q^*) \sin(\delta^* + x_1(k))\} \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \tau [m_4(x_3(k) + E_q^*) + m_5 \cos(\delta^* + x_1(k)) + m_6(u(k) + E_{fd}^*)] \\ y(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (6.3)$$

Analizando el sistema (6.3), se puede notar que los puntos de equilibrio se obtienen a partir de la solución de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \omega^* - \omega_s &= 0 \\ m_1 + m_2 \sin \delta^* \cos \delta^* + m_3 E_q^* \sin \delta^* &= 0 \\ m_4 E_q^* + m_5 \cos \delta^* + m_6 E_{fd}^* &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el modelo (6.3) puede escribirse como

$$\Sigma_{NLD} \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + \tau x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + \tau \{m_1 + m_2 \sin(\delta^* + x_1(k)) \cos(\delta^* + x_1(k)) \\ + m_3 (x_3(k) + E_q^*) \sin(\delta^* + x_1(k))\} \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \tau (m_4 x_3(k) + m_5 \cos(\delta^* + x_1(k)) - m_3 \cos \delta^* + m_6 u(k)) \\ y(k) = x_1(k) \end{cases} \quad (6.4)$$

Basandose en este modelo se procede al diseño de controladores y de observadores usando las técnicas vistas en los capítulos anteriores.

Se usará  $u_1(k)$  para hacer referencia al control propuesto en 4.4.1 y,  $u_2(k)$  para el control presentado en el apartado 4.4.2. Se mostrarán sólo los pasos principales y necesarios para las matrices de transformación, cálculo de controles y de observadores.

## 6.3 Diseño de los controladores

### 6.3.1 Control de alta ganancia aplicado a una clase de sistemas parcialmente lineales.

Partiendo del modelo no lineal discreto (6.4) y usando la transformación  $z(k) = \Upsilon^{-1}\xi(k)$ , donde  $\Upsilon$  esta definida por (4.18), ésto es,

$$\begin{aligned} z_1(k) &= h(x) = x_1(k) \\ z_2(k) &= D_f h(k) = x_2(k) \\ z_3(k) &= D_f^2 h(k) = m_1 + m_3 x_3(k) \sin(x_1(k) + \delta^*) + m_2 \sin(x_1(k) + \delta^*) \cos(x_1(k) + \delta^*) \\ &\quad + m_3 E_q^* \sin(x_1(k) + \delta^*) \end{aligned} \quad (6.5)$$

Entonces, el sistema dinámico parcialmente lineal  $\Sigma_{PLD}$  (6.4) es representado como

$$\Sigma_{PLD} : \begin{cases} z_1(k+1) = z_1(k) + \tau z_2(k) \\ z_2(k+1) = z_2(k) + \tau z_3(k) \\ z_3(k+1) = z_3(k) + B[\alpha(z(k), \tau) + \beta(z(k), \tau)u] \\ y(k) = z_1(k) \end{cases} \quad (6.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(z(k)) &= m_1 + \{m_2 \cos(\phi_2(k)) + m_3 E_q^* \\ &\quad + [(m_3 + \tau m_3 m_4) x_3(k) + \tau m_3 m_5 \cos(\phi_1(k)) \\ &\quad + \tau m_3 m_5 \cos(\delta^*)]\} \sin(\phi_2(k)) - z_3(k) \end{aligned}$$

$$\beta(z(k)) = \tau m_3 m_6 \sin(\phi_2(k))$$

donde  $\phi_1(k) = \delta^* + z_1(k)$  y  $\phi_2(k) = z_1(k) + \tau z_2(k) + \delta^*$  y

$$x_3(k) = \frac{z_3 - m_1 - m_2 \sin(z_1(k) + \delta^*) \cos(z_1(k) + \delta^*) - m_3 E_q^* \sin(z_1(k) + \delta^*)}{m_3 \sin(z_1(k) + \delta^*)}$$

Puesto que el sistema (6.6) tiene la forma de la ecuación (4.6) se propone un control linealizante y estabilizante de la forma (4.22) donde el control auxiliar  $v(z(k))$  se elige según la ecuación (4.21), como  $v(z(k)) = -\tau F \Omega_\rho z(k)$ , siendo la matriz  $\bar{F} = \begin{pmatrix} C_1^0 & C_2^1 & C_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$y \Omega_\rho = \text{diag}(\rho^3, \rho^2, \rho)$$

$$\begin{aligned} v(z(k)) &= -\tau F \Omega_\rho z(k) = -\tau \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho^3 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \\ z_3(k) \end{pmatrix} \\ &= -\tau (\tau \rho^3 z_1(k) + 3\rho^2 z_2(k) + 3\rho z_3(k)) \end{aligned}$$

### 6.3.2 Control basado en un procedimiento con transformación de similitud

Para usar el control presentado en 4.4.2, se propone el siguiente cambio de coordenadas para llevar el sistema (6.4) a la forma (4.27)

$$\begin{aligned} \xi_1(k) &= x_1(k) \\ \xi_2(k) &= x_2(k) \\ \xi_3(k) &= m_3 x_3(k) \sin(x_1(k) + \delta^*) \end{aligned}$$

Con este cambio de coordenadas, el sistema (6.4) esta representado en nuevas coordenadas en la forma

$$\Sigma_{NLD} : \begin{cases} \xi_1(k+1) = \xi_1(k) + \tau \xi_2(k) \\ \xi_2(k+1) = \xi_2(k) + \tau \xi_3(k) + \tau g_2(\xi_1(k)) \\ \xi_3(k+1) = \xi_3(k) + \tau [\varphi(\xi(k)) + \psi(\xi(k)u(k))] \\ y(k) = \xi_1(k) \end{cases} \quad (6.7)$$

donde

$$\begin{aligned} g_2(\xi_1(k)) &= m_1 + m_3 E_q^* \sin(\xi_1(k) + \delta^*) + m_2 \sin(\xi_1(k) + \delta^*) \cos(\xi_1(k) + \delta^*) \\ \varphi(\xi(k)) &= \frac{(1 + \tau m_4) \xi_3(k) \sin(\xi_1(k) + \delta^* + \tau \xi_2(k))}{\tau \sin(\xi_1(k) + \delta^*)} - \frac{\xi_3(k)}{\tau} \\ &\quad - m_3 m_5 \cos(\delta^*) \sin(\xi_1(k) + \delta^* + \tau \xi_2(k)) \\ &\quad + m_3 m_5 \cos(\xi_1(k) + \delta^*) \sin(\xi_1(k) + \delta^* + \tau \xi_2(k)) \\ \psi(\xi(k)) &= m_3 m_6 \sin(\xi_1(k) + \delta^* + \tau \xi_2(k)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

el cual resulta ser de la forma (4.27). Usando el algoritmo de cálculo matricial visto en la sección 4.4.2 para el diseño del control, y haciendo uso de la ecuación (4.28), el control estabilizante

resultante está dado por:

$$u_2(k) = -\frac{1}{\psi(\xi(k))} [(\rho^3 + 3\rho g_2(\xi_1(k))) \xi_1(k) + (3\rho^2 + g_2(\xi_1(k))) \xi_2(k)] - \frac{1}{\psi(\xi(k))} [3\rho \xi_3(k)] \quad (6.9)$$

## 6.4 Diseño del observadores

### 6.4.1 Observador de alta ganancia para una clase de sistemas parcialmente lineales.

Ahora considere un observador de estado para el sistema (6.6) de la forma (5.1), en donde

$$K = \text{col} \begin{pmatrix} C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \end{pmatrix} = \text{col} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y la ganancia del observador está dada por}$$

$$\tau \Delta_\theta^{-1} K = \tau \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & \theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \theta^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \tau \begin{pmatrix} 3\theta \\ 3\theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix}$$

De modo que el observador para el sistema (6.6) en las nuevas coordenadas resulta ser

$$\widehat{\Sigma}_{PLD} : \begin{cases} \widehat{z}_1(k+1) = \widehat{z}_1(k) + \tau \widehat{z}_2(k) + 3\tau\theta [z_1(k) - \widehat{z}_1(k)] \\ \widehat{z}_2(k+1) = \widehat{z}_2(k) + \tau \widehat{z}_3(k) + 3\tau\theta^2 [z_1(k) - \widehat{z}_1(k)] \\ \widehat{z}_3(k+1) = \widehat{z}_3(k) + (\widetilde{\alpha}(\widehat{z}(k)) + \widetilde{\beta}(\widehat{z}(k))u(k)) + \tau\theta^3 [z_1(k) - \widehat{z}_1(k)] \end{cases}$$

### 6.4.2 Observador basado en un procedimiento con transformaciones de similitud

Ahora, un observador de estado para el sistema (6.7) y que está definido como (5.6), donde  $g(\widehat{\xi}(k), u(k)) = \text{col}(0 \quad g_2(\widehat{\xi}(k)) \quad g_3(\widehat{\xi}(k)))$  con  $g_2(\widehat{\xi}(k)) = g_2(\widehat{\xi}_1(k))$  y  $g_3(\widehat{\xi}(k)) = \alpha(\widehat{\xi}(k)) + \beta(\widehat{\xi}(k))u(k)$ , (ver (6.8)).

Haciendo uso del algoritmo visto en la sección 5.4, las matrices  $M(\widehat{\xi}(k), u(k))$  y

$L(\hat{\xi}(k), u(k), \tau)$ , están dadas por

$$M(\hat{\xi}(k), u(k)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -g_{33} & 1 & 0 \\ -g_{33}^2 & -g_{33} & 1 \end{pmatrix} \text{ y } L(\hat{\xi}(k), u(k), \tau) = \begin{pmatrix} \tau(g_{31} - g_{33}g_{21}) \\ \tau(g_{21} + g_{32}) \\ \tau g_{33} \end{pmatrix}$$

donde los términos  $g_{ij}$  son elementos del jacobiano  $G(\hat{\xi}(k), u(k))$ , es decir,

$$g_{21} = \frac{\partial g_2(\hat{\xi}(k))}{\partial \xi_1}, \quad g_{31} = \frac{\partial g_3(\hat{\xi}(k))}{\partial \xi_1}, \quad g_{32} = \frac{\partial g_3(\hat{\xi}(k))}{\partial \xi_2}, \quad \text{y} \quad g_{33} = \frac{\partial g_3(\hat{\xi}(k))}{\partial \xi_3},$$

Puesto que  $K = \text{col} \begin{pmatrix} C_3^1 & C_3^2 C_3^3 \end{pmatrix} = \text{col} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , se obtiene finalmente la estructura del observador,

$$\begin{cases} \hat{\xi}_1(k+1) = \hat{\xi}_1(k) + \tau \hat{\xi}_2(k) + C_{o1}(\hat{\xi}(k), \tau) (\xi(k) - \hat{\xi}(k)) \\ \hat{\xi}_2(k+1) = \hat{\xi}_2(k) + \tau \hat{\xi}_3(k) + \tau g_2(\hat{\xi}(k)) + C_{o2}(\hat{\xi}(k), \tau) (\xi(k) - \hat{\xi}(k)) \\ \hat{\xi}_3(k+1) = \hat{\xi}_3(k) + \tau g_3(\hat{\xi}(k)) + C_{o3}(\hat{\xi}(k), \tau) (\xi(k) - \hat{\xi}(k)) \end{cases}$$

donde los términos de  $C_{o1}$ ,  $C_{o2}$  y  $C_{o3}$  están definidos como

$$C_{o1}(\hat{\xi}(k), \tau) = \tau (3\theta + g_{33}(\hat{\xi}(k)))$$

$$C_{o2}(\hat{\xi}(k), \tau) = \tau g_{33}(\hat{\xi}(k)) (3\alpha + g_{33}(\hat{\xi}(k))) + \tau (3\theta^2 + g_{21}(\hat{\xi}(k)) + g_{32}(\hat{\xi}(k)))$$

$$C_{o3}(\hat{\xi}(k), \tau) = \tau (3\theta + g_{33}(\hat{\xi}(k))) (g_{33}(\hat{\xi}(k))^2 + g_{32}(\hat{\xi}(k)))$$

$$+ \tau (3\theta^2 + g_{21}(\hat{\xi}(k)) + g_{32}(\hat{\xi}(k))) g_{33}(\hat{\xi}(k))$$

$$+ \tau (\theta^3 + g_{31}(\hat{\xi}(k)) - g_{33}(\hat{\xi}(k))g_{21}(\hat{\xi}(k)))$$

$$g_{21} = m_2 [\cos^2(\theta_{\hat{\xi}_1}) - \sin^2(\theta_{\hat{\xi}_1})] + m_3 E_q^* \sin(\theta_{\hat{\xi}_1})$$

$$g_{31} = \frac{(1 - \tau m_4) \hat{\xi}_3 [\sin(\theta_{\hat{\xi}_1}) \cos(\theta_{\hat{\xi}_1}) - \sin(\theta_{\hat{\xi}_1}) \cos(\theta_{\hat{\xi}_1})]}{\tau \sin^2(\theta_{\hat{\xi}_1})}$$

$$+ m_3 m_5 [\cos^2(\theta_{\hat{\xi}_1}) - \sin^2(\theta_{\hat{\xi}_1}) - \cos(\delta^*) \cos(\theta_{\hat{\xi}_2})] + m_3 m_6 \cos(\theta_{\hat{\xi}_2}) u(\hat{\xi})$$

$$g_{32} = \frac{[1 - \tau m_4] \hat{\xi}_3 \cos(\theta_{\hat{\xi}_2})}{\sin(\theta_{\hat{\xi}_1})} + \tau m_3 m_5 \cos(\theta_{\hat{\xi}_1}) \cos(\theta_{\hat{\xi}_2})$$

$$g_{33} = \frac{-\tau m_3 m_5 \cos(\delta^*) \cos(\theta_{\hat{\xi}_2}) + \tau m_3 m_6 \cos(\theta_{\hat{\xi}_2}) u(\hat{\xi})}{\tau \sin(\theta_{\hat{\xi}_1}) - (1/\tau)}, \quad \text{con } \theta_{\hat{\xi}_1} = \delta + \hat{\xi}_1 \text{ y } \theta_{\hat{\xi}_2} = \delta + \hat{\xi}_1 + \tau \hat{\xi}_2$$

## 6.5 Resultados de simulación

A continuación, se presentan los resultados en simulación obtenidos a partir del modelo del generador.

Antes de mostrar las gráficas de dichos resultados se presentará un esquema de la metodología usada en la experimentación.

### Implementación del control basado en un observador:

La implementación del control basado en un observador se puede apreciar en la figura 5.1.

### Parámetros del generador

Los valores de los parámetros que se utilizaron para efectuar la simulación son los que se muestran en la tabla 6.3.

$x_d$	$x'_d$	$x_q$	$T'_{do}$	$M$	$T_m$	$\omega_s$
(pu)	(pu)	(pu)	seg	(pu)	(pu)	(pu)
0.9	0.3	0.9	4	1	1	1

Tabla 6.3. Valor de los parámetros del generador

### Puntos de equilibrio

Puesto que el modelo del generador presenta un conjunto de puntos de equilibrio, se tiene que para  $E_{fd}^* = 1.1773$ , los puntos de equilibrio del sistema (6.4) son  $\delta^* = 0.870204 \text{ rad}$ ,  $E_q^* = 0.822213$  y  $\omega^* = \omega_s$ .

### Nomenclatura a usar en las simulaciones

$u_1(k)$	Control de alta ganancia aplicado a una clase de sistemas parcialmente lineal
$u_2(k)$	Control basado en un procedimiento basado en transformaciones de similitud
*	Valor de equilibrio
$\hat{\cdot}$	Valor estimado

Tabla 6.4. Nomenclatura en las simulaciones



El primer conjunto de figuras consiste en demostrar la eficiencia de los controladores con su observador correspondiente. Se probaron los controles  $u_1(k)$  y  $u_2(k)$  (6.9) con las siguientes características

- i) Condiciones iniciales del sistema:  $x(0) = \text{col} \begin{pmatrix} -0.04 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$
- ii) Condiciones iniciales del observador  $\hat{x}(0) = \text{col} \begin{pmatrix} -0.02 & 0.15 & 0.15 \end{pmatrix}$
- iii) Período de muestreo:  $\tau = 0.01$
- iv) Ganancia del control:  $\rho = 1.5$
- v) Ganancia del observador:  $\theta = 0.65$

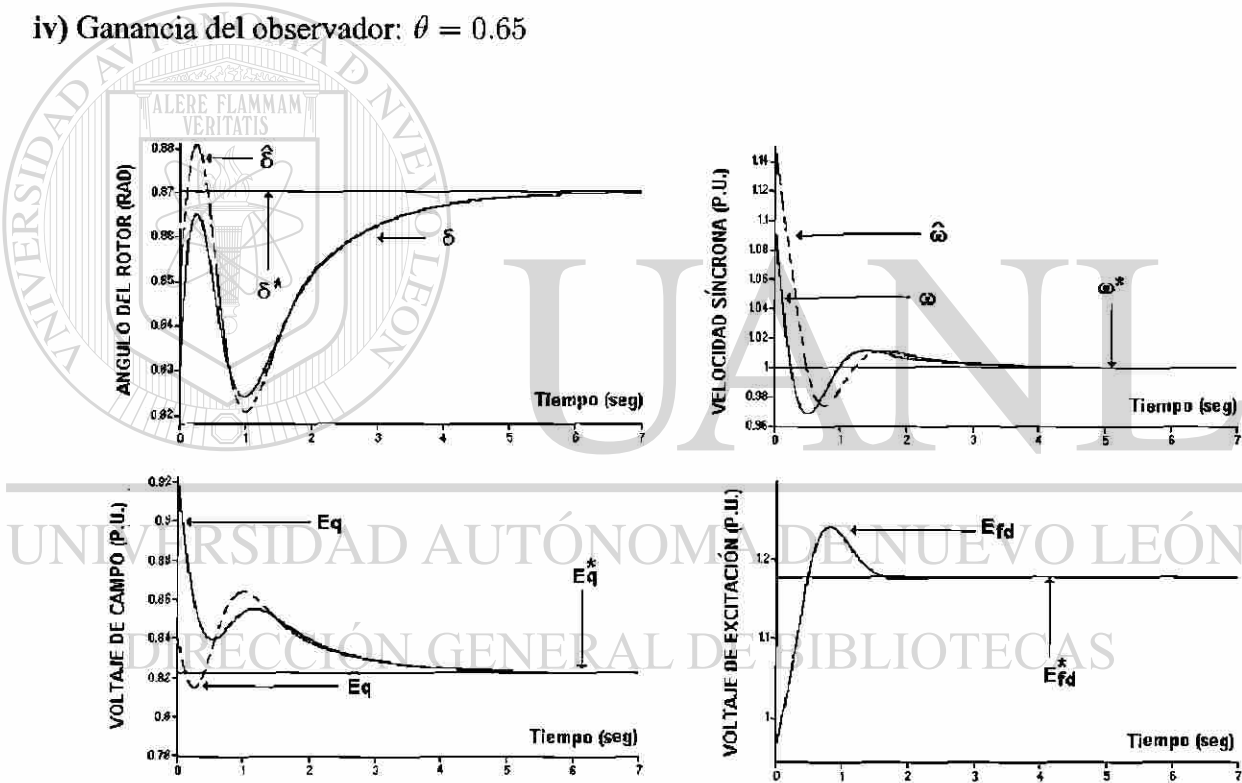
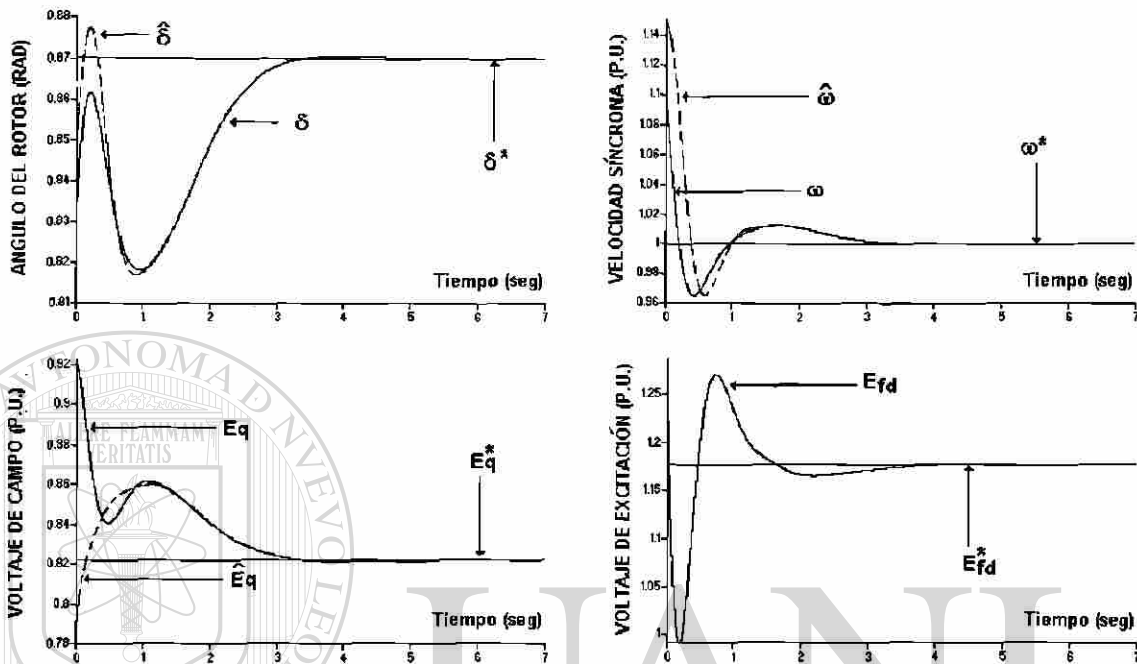


Figura 6.2. Comportamiento de las variables usando el control  $u_1(k)$



**Figura 6.3.** Comportamiento de las variables usando el control  $u_2(k)$

Las figuras 6.3 a 6.10 muestran los resultados en simulaciones; cada una de ellas muestra lo siguiente.

El siguiente conjunto de figuras 6.5 y 6.6 muestra el comportamiento de las variables cuando existe una perturbación en el par  $T_m$ , es decir

$$T_m = \begin{cases} 1 & 0 \leq t_s \leq 5 \\ 0.9 & 5 < t_s \leq 15 \\ 1 & t_s > 15 \end{cases}$$

en donde se usaron las siguientes condiciones

- i) Condiciones iniciales:  $x(0) = \text{col} \begin{pmatrix} -0.04 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$
- ii) Período de muestreo:  $\tau = 0.01$
- iii) Ganancia del control:  $\rho = .54$
- iv) Ganancia del observador:  $\theta = 2.5$

Las figuras 6.5(a-d) y 6.6(a-d) muestran las variables del generador bajo esta perturbación

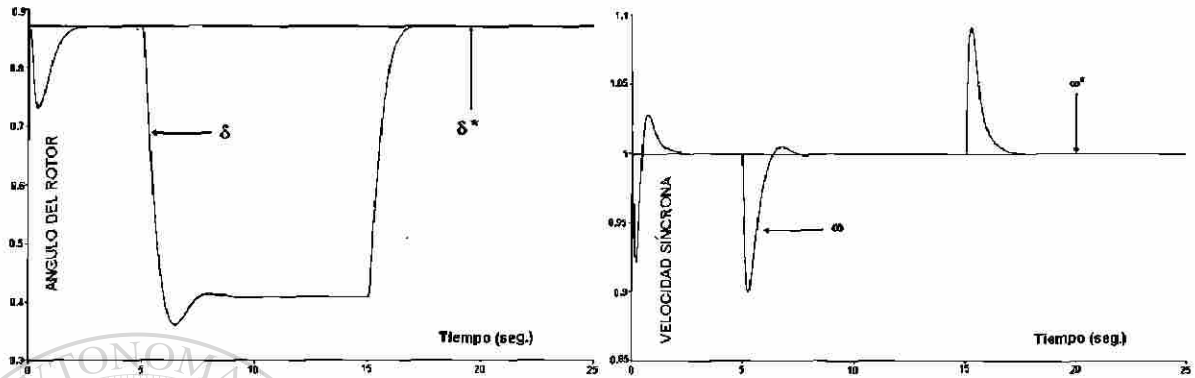


Figura 6.4 (a y b). Respuestas de las variables usando el control  $u_1(k)$  con la perturbación en  $T_m$

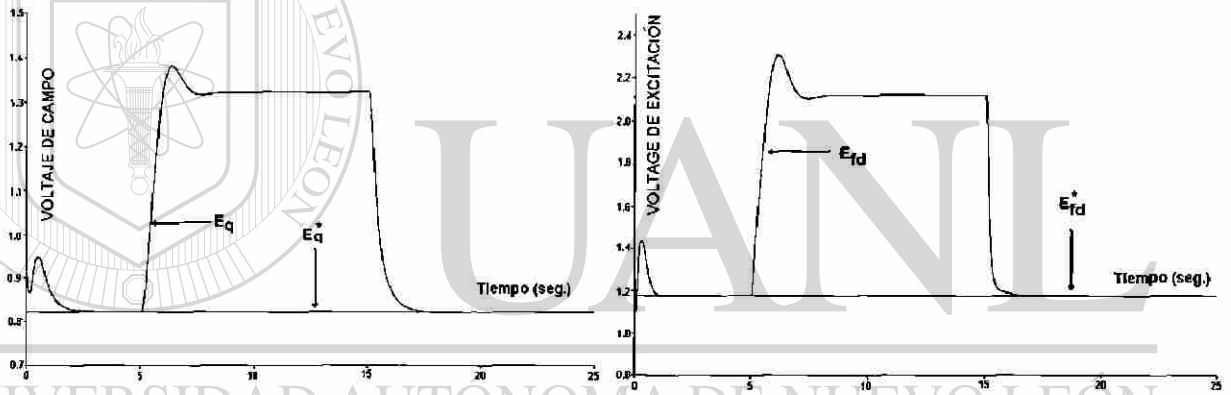


Figura 6.4 (c y d). Respuestas de las variables usando el control  $u_1(k)$  con la perturbación en  $T_m$

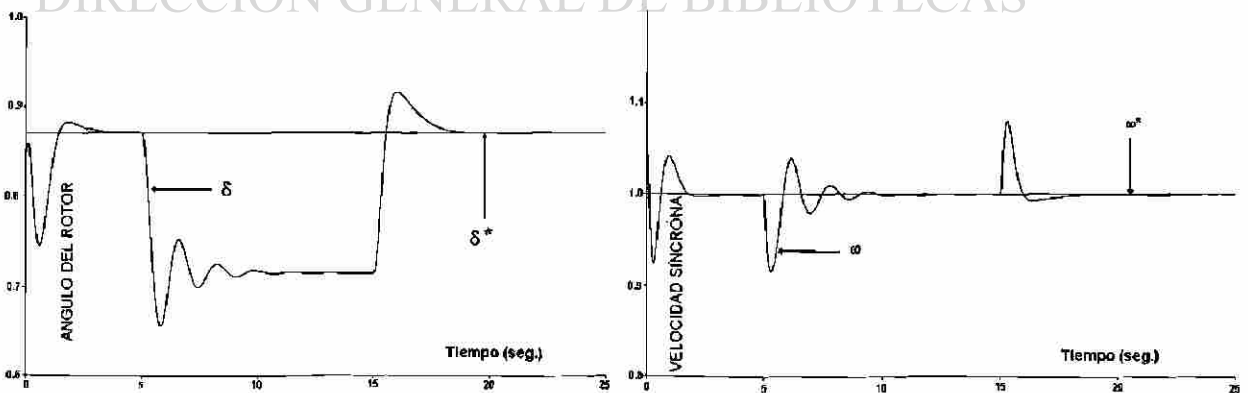
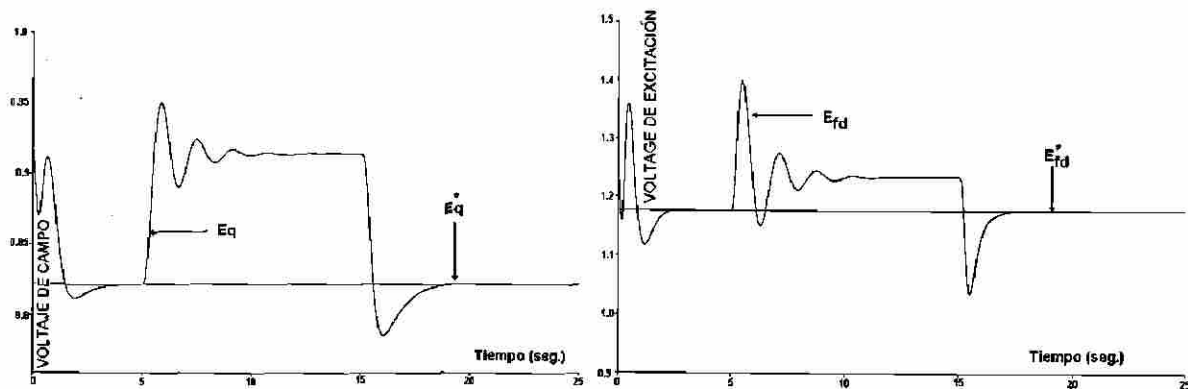


Figura 6.5 (a y b). Respuestas de las variables usando el control  $u_2(k)$  con la perturbación en  $T_m$



**Figura 6.5 (c y d).** Respuestas de las variables usando el control  $u_2(k)$  con la perturbación en  $T_m$

En las **Figura 6.7 y 6.8.** se muestran los resultados cuando una perturbación en  $X'_d$  ha sido introducida. Los valores que se consideraron son como sigue

$$X'_d = \begin{cases} 0.3 & 0 \leq t_s \leq 5 \\ 0.2 & 5 < t_s \leq 10 \\ 0.3 & t_s > 10 \end{cases}$$

las siguientes condiciones fueron utilizadas

i) Condiciones iniciales:  $x(0) = \text{col} \begin{pmatrix} -0.04 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix}$

ii) Período de muestreo:  $\tau = 0.01$

iii) Ganancia del control:  $\rho = .65$

iv) Ganancia del observador:  $\theta = 1.5$

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

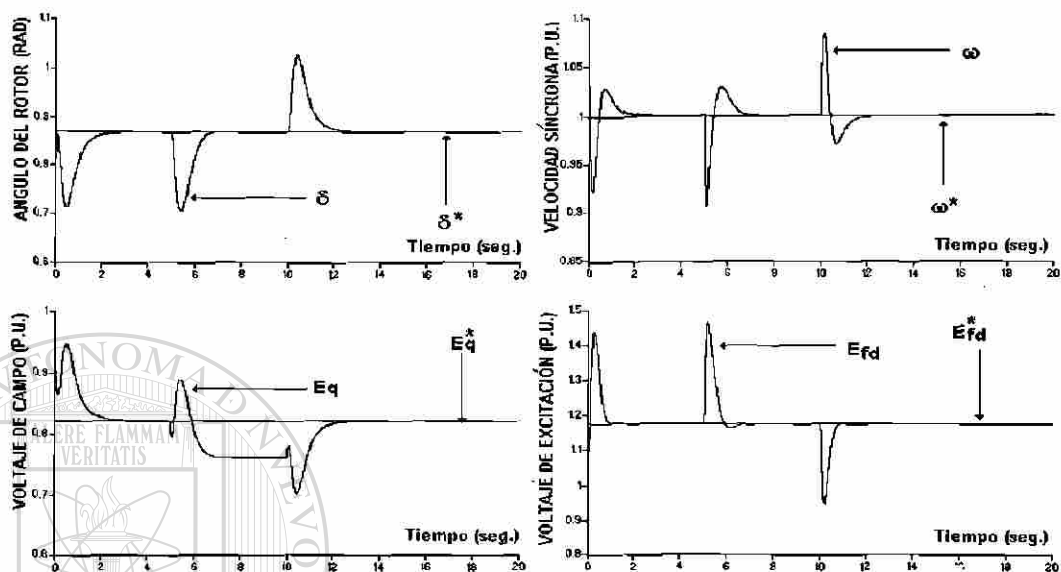


Figura 6.6.. Respuestas de las variables usando el control  $u_1(k)$  con perturbación en  $X'_d$

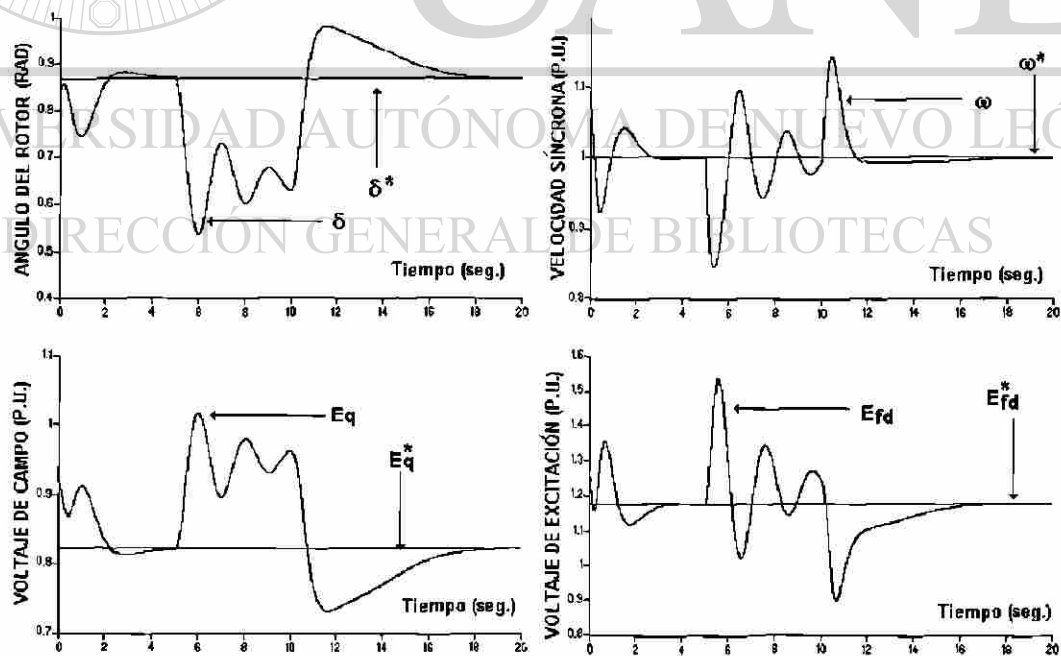


Figura 6.7.. Respuestas de las variables usando el control  $u_2(k)$  con perturbación en  $X'_d$

## 6.6 Conclusiones

En este capítulo, se usó un modelo de un generador síncrono conectado a una barra infinita de 3er. orden cuya representación es de la forma de Thevenin para comprobar la eficiencia de los esquemas de control y de observación vistos en los capítulos 4 y 5, respectivamente.

Se puede notar que las figuras 6.3 y 6.4 muestran la eficiencia de ambos controladores, en donde se muestra también la eficiencia de los observadores, los cuales convergen a sus verdaderos estados satisfactoriamente.

Las figuras 6.5 y 6.6 muestran las respuestas dinámicas de las variables del sistema ante la presencia de una perturbación. Se consideró una variación del par del -10% durante el intervalo de tiempo de 5 a 15 seg.

Las figuras 6.7 y 6.8 muestran las respuestas dinámicas de las variables del sistema ante la presencia de una perturbación. Se consideró una variación en la reactancia transitoria en el eje directo del -33% durante el intervalo de tiempo de 5 a 10 seg.

En la figura 6.6 se muestra la acción del control  $u_1(k)$  ante variaciones de la reactancia transitoria en el eje directo  $X'_d$ , así mismo se muestra en la figura 6.7 la acción del control  $u_2(k)$ . Se puede apreciar que la acción del control  $u_2(k)$  presenta grandes transitorios retardando la convergencia del sistema hacia los puntos de equilibrio. Sin embargo, esto se puede mejorar variando tanto la ganancia del control como la del observador, o bien, modificando del período de integración para un paso de muestreo  $\tau$  fijo.

De las figuras se puede apreciar que utilizando ambas metodologías, los resultados son muy similares sin la presencia de perturbaciones. En cambio ante la presencia de perturbaciones paramétricas en el modelo la acción de control  $u_1(k)$  resulto menos sensible que la acción de control  $u_2(k)$ .

El comportamiento de estos controles se basa en la naturaleza de su diseño. El control  $u_1(k)$  linealiza el sistema alrededor de su punto de equilibrio, mientras que el control  $u_2(k)$  va acotando durante su funcionamiento la no linealidad de la matriz  $g(x(k), u(k))$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones y problemas abiertos

### 7.1 Conclusiones

En esta tesis se propuso un esquema de control y de observación y otro fue dado para sistemas no lineales discretizados mediante la aproximación de Euler. Uno basado en transformaciones de similitud y otro mediante cambio de coordenadas y una retroalimentación de estado dinámico. Ambos controladores utilizan un observador de alta ganancia.

Se realizó un análisis de estabilidad de los sistemas discretizados bajo la acción del control obteniéndose condiciones suficientes para garantizar la estabilidad exponencial del sistema en lazo cerrado. Además, se dieron condiciones suficientes para garantizar la convergencia del observador propuesto para la clase de sistemas discretizados considerados.

Se presentaron resultados en simulación cuando estos esquemas de control y observación se aplicaron a un modelo de tercer orden de un generador síncrono conectado a una barra infinita.

---

### 7.2 Problemas abiertos

El diseño de estrategias de control y de observación para sistemas no lineales discretos sigue siendo un problema abierto. Mucho queda por hacer al respecto. Además, un problema que resta por resolver, del trabajo presentado, es efectuar un análisis de estabilidad del sistema en lazo cerrado mediante un esquema de control basado en un observador.

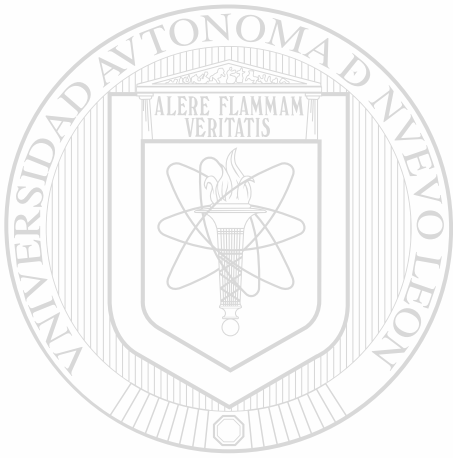
Claro está que la aproximación de Euler es, en general, un primer intento para la discretización de un sistema no lineal continuo. Una de sus desventajas es que algunas dinámicas pueden ser eliminadas, generando con ello, pérdida de información y problemas al diseñar controles u observadores. Por tal motivo, un problema interesante es considerar otro tipo de discretización de sistemas no lineales continuos, y proponer esquemas de control y de observación para el sistema no lineal discretizado resultante.

## Referencias

- [1] Bazanella, Silva & Peter V. Kokotovic, "Lyapunov Desig of Excitation Control for Synchronous Machines", IEEE, CDC, 1997, San Diego
- [2] Califano, S. Monao, D.Normand, "On the problem of feedback linearization", System & Controls letters 1999, p 61,67
- [3] Carl. M. Bender, S. A. Orszag, "Advanced Mathematical Methods for Scientits and engineering", Mc. Graw Hill, 1978
- [4] César Cruz Hdz. , "Estabilidad en sistemas no lineales discretos en el tiempo sometidos a perturbaciones regulares", Tesis de doctorado, CINVESTAV-IPN, México, 1995
- [5] César Cruz, Joaquín Alvarez, Rafael Castro, "Stability Robustness of linearizing Controllers with State Estimation for Discrete-Time Nonlinear System", ACC 1999
- [6] César Cruz, Joaquin Alvarez, Rafael Castro, "Stability of discrete nonlinear system under nonvanishing perturbations: application to a nonlinear model-matching problem", IMA Journal of Mathematical Control & Information, 16, p. 23-41, 1999
- [7] De Leon Morales, J. K. Busawon and G. Acosta-Villarreal, "Digital implementation of an observer-based controller for rigid robot", accepted in the IEEE CDC, Tampa, Florida, 1998
- [8] Hassan K. Khalil , "Nonlinear System", 2d. ed., PHH, 1996
- [9] I.N. Herstein, "Algebra Abstracta", Grupo Ed. Iberoamérica, 1988
- [10] Katsuhilo Ogata, "Sistemas de Control en Tiempo discreto" 2da. ed, Prentice Hall, 1996
- [11] K. Busawon, M. Saif and J. De León Morales, "Estimation and control for a class of Euler discretized nonlinear system", Automatic Control Confrence, June 1999, San Diego Calif, p. 3579-3583
- [12] K. Busawon, M. Saif and M. Farza, "A discrete-time observer for a class of nonlinear system", Proc. of the 36th IEEE CDC, Dec. 1997
- [13] K. Busawon , A. Ellassoudi and H. hammouri, "A discrete time observer for a class of nonlinear system", Proc. of the 36th IEEE CDC, Dec. 1997
- [14] M. Vidyasagar, "Non Linear System Analisis", 2d. ed., PHH, 1993
- [15] Mohammed S., Allen R. & Gene H., "Discrete-Time Equivalentts to Continuos-Time System", The control handbook, 1996



- [16] Mohammed S., "Ordinary Linear Differential and Difference Equations", The control handbook, 1996
- [17] Riccardo Marino, Patrizio Tomei, "Nonlinear Control Design", Prentice Hall, 1995
- [18] S. Ahmed-Zaid, L. Xu and S.S. Jang, "Effects of stator transients on steady-state stability region of electronic power system", Electric Machines and Power System. No.25 p. 153 - 167, 1997.
- [19] Wilson J. Rugh, "Linear System Theory", 2d. ed., PHH, 1996



# UANL

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

## **ANEXO**

En este anexo se agregan artículos aceptados y/o publicados en congresos Internacionales por parte del autor, estos fueron realizados durante los estudios de maestría e influyeron como parte de la investigación de esta tesis.

---

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



Artículo aceptado para su publicación

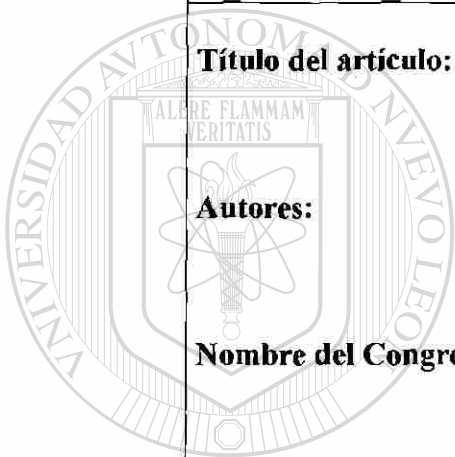
**Título del artículo:** Discretizaton Scheme for a Synchronous Generator

**Autores:** A.E. Sanchez-Orta, C. Guerra-Torres and J. De León Morales

**Nombre del Congreso:** 40th IEEE Conference on Decision and Control

**Lugar:** Orlando Florida, USA

**Fecha:** Diciembre del 2001



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Discretization Scheme for a Synchronous Generator\*

A. E. Sanchez-Orta, C. Guerra-Torres and J. De León Morales<sup>†</sup>

Universidad Autónoma de Nuevo León, Department of Electrical Engineering

P. O. Box 148-F, 66450, San Nicolas de Los Garza; Nuevo Leon, Mexico.

e-mail: anandso@yahoo.com, jleon@ccr.dsi.uanl.mx, cguerra@ccr.dsi.uanl.mx

## ABSTRACT

In this paper, we present a control-observer scheme for discrete-time nonlinear systems. A controller and an observer are proposed for a class of discrete-time nonlinear systems. The results obtained are applied to synchronous generator in order to illustrate the proposed scheme.

**Keywords:** Discrete controller, Euler discretization, Nonlinear Observer, Synchronous generator.

## 1. Introduction

The increasing complexity of electric power systems demands more efficient and powerful methods to ensure the control and operation of such systems. Several approaches have been proposed to deal with these systems (see [1, 6, 10, 11]). Usually these methods are developed for continuous time representation. However, the recent advances in digital technology, which are implemented in power systems, requires the strategies capable to replace the analog strategies. For this reason it is necessary to develop strategies of control and observation for discrete-time nonlinear systems.

In this paper, a simple but constructive method to design a control algorithm guaranteeing the stability of the system is presented. The key idea adopted was to extend the continuous-time ideas into the discrete-time nonlinear systems. In this paper, taking a continuous nonlinear system is discretized using the Euler approximation. Next, by a change of coordinates the discretized system is transformed into a feedback linearizing one for which a control law is designed. Furthermore, we assume that the nonlinear terms appearing in the system are known exactly. In the case the system presents some disturbances or uncertain terms, they are assumed satisfy the matching condition and they are bounded. Then, an analysis of the stability of the perturbed system is considered.

On the other hand, the theory of state observers is one of essential topics for discrete-time systems. In the nonlinear continuous-time case, several results have been

proposed (see [9]). For nonlinear discrete-time systems this problem remains open, and some results have been proposed. Then, in this paper, we present an observer for a class of nonlinear discrete-time systems which, in some sense, constitutes the discrete-time version of the observer presented in [3, 4].

In this paper, we present a design procedure to design an observer and a controller for a class of discrete-time nonlinear systems which includes synchronous generator's model.

The outline of the paper is as follows. In Section 2, we introduce the discrete control design for a class of nonlinear systems considered in this paper. Moreover, an analysis of the perturbed closed-loop system is given. In Section 3, an observer for the class of nonlinear systems considered is proposed. In Section 4, the proposed scheme is applied to a synchronous generator. In Section 5, simulations are carried out to show the performance of the controller and the observer proposed. Finally, conclusions are drawn.

## 2. Discrete Control Design

In this section, we derive an approximate model of high fidelity and proceed with the observer and control design using the Euler approximation of the following class of continuous time nonlinear systems

$$\Sigma_{NLC} : \begin{cases} \dot{\xi} = f(\xi) + g(\xi)u \\ y = h(\xi) \end{cases}$$

This approximation is viable if the sampling period is very small. The Euler approximation is simply a straight line approximation of the derivative, that is for  $t = (k + 1)\tau$

$$\dot{\xi} \approx \frac{\xi(t) - \xi(\tau k)}{t - \tau k}$$

Then, the system  $\Sigma_{NLC}$  can be discretized using the Euler approximation into the system

$$\Sigma_{NLD} : \begin{cases} \xi(k+1) = \xi(k) + \tau (f(\xi(k)) + g(\xi(k))u(k)) \\ y(k) = h(\xi(k)) \end{cases} \quad (1)$$

where for simplicity we denote  $\xi(k) = \xi(k\tau)$ , for  $\tau$  fixed. Furthermore, there exists a diffeomorphism  $\Upsilon : U \rightarrow R^n$

\*This work was supported by CONACYT, MEXICO, 26498-A and Comisión Federal de Electricidad.

<sup>†</sup>Corresponding Author

such that  $\Omega = \Upsilon(U)$  contains the origin and the change of coordinates  $x = \Upsilon(\xi)$  define a state-space local coordinates transformation. Then in the new coordinates, the system  $\Sigma_{NLD}$  can be transformed into the system

$$\tilde{\Sigma}_{NLD} : \begin{cases} x(k+1) = (I_n + \tau A)x(k) \\ \quad + B\{\alpha(x(k), \tau) + \beta(x(k), \tau)u(k)\} \\ y = Cx = x_1 \end{cases} \quad (2)$$

where  $A$  and  $B$  are in the usual Brunouvsky controllable form and  $\tau$  is the sampling period (see [8]).

Now, we consider the following a static feedback of the form

$$u(k) = \beta^{-1}(x(k), \tau) [v(x(k)) - \alpha(x(k), \tau)] \quad (3)$$

where  $\alpha(x(k), \tau)$  and  $\beta(x(k), \tau)$  are assumed to be known,  $\beta(x(k), \tau) \neq 0$  for all  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , and choosing the external control  $v(x(k))$  as

$$v(x(k)) = -\tau F \Omega_\rho x(k) \quad (4)$$

where the matrices  $F \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  and  $\Omega_\rho \in \mathbb{R}^{n \times n}$  are given by

$$\begin{aligned} \Omega_\rho &= \text{diag}(\rho^n, \dots, \rho), & \rho &\geq 1, \\ F &= (C_n^0 \ \dots \ C_n^{n-1}), & C_n^p &= \frac{n!}{(n-p)!p!}. \end{aligned} \quad (5)$$

such that the resulting closed-loop system

$$x(k+1) = (A_c - \tau BF \Omega_\rho) x(k) \quad (6)$$

is exponentially stable.

This problem is referred as the local input-output linearization, while  $n$  is known as the relative degree associated to the output  $y$ .

From the above discussion we can establish the following result.

**Theorem 1.** *Assume that system (1) can be transformed into the system (2) by means of a change of coordinates and Euler discretization. Then, there exists a static linearizing state feedback*

$$u(k) = \beta^{-1}(x(k), \tau) [v(x(k)) - \alpha(x(k), \tau)]$$

with  $v(x(k))$  defined as in (4) and the sampling period  $\tau$  and the constant  $\rho$  which are choosing such that  $0 \leq \tau_0 \rho_0 \leq 1$ , for all  $0 < \tau < \tau_0$  and for all  $\rho > \rho_0$ , such that the origin of the closed-loop system is exponentially stable.

The proof of this theorem is based on the following claim (see [3, 4]).

**Claim 1.** *Let  $A_c = I + \gamma_c(A - BF)$  where the matrices  $A$  and  $B$  are in the usual Brunouvsky controllable form, and  $F$  is defined as  $F = (C_n^0 \ \dots \ C_n^{n-1})$ ,*

where  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . Then, for every  $\gamma_c > 0$ ;  $0 < \gamma_c < 1$ , the unique symmetric positive definite matrix  $P_c$  satisfying the algebraic equation:

$$A_c^T P_c A_c - P_c = -\gamma_c P_c - \gamma_c (1 - \gamma_c)^n F^T F \quad (7)$$

is given by  $P_c = N^T N$ , where  $N = \Lambda_c E_c$  with  $\Lambda_c = \text{diag}(1, (1 - \gamma_c)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_c)^{\frac{n-1}{2}})$  and  $E_c = E_c(i, j) = C_{n-i}^{j-i}$  if  $j \geq i$  else  $E_c(i, j) = 0$ ;  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i$  and  $j$  represent the row and column of the matrix, respectively.

This claim can be proved by simple verification.

## 2.1 Control design with uncertainties

Assume that for system

$$\tilde{\Sigma}_{NLD} : \begin{cases} x(k+1) = (I_n + \tau A)x(k) \\ \quad + B\{\alpha(x(k), \tau) + \beta(x(k), \tau)u(k)\}, \\ y = Cx = x_1. \end{cases}$$

the terms  $\alpha(x(k), \tau)$  and  $\beta(x(k), \tau)$  are not known perfectly. Then the control law given in (3) can be designed around the nominal system, *i.e.*

$$u(k) = \beta_{nom}^{-1}(x(k), \tau) [v(x(k)) - \alpha_{nom}(x(k), \tau)]$$

where  $\beta_{nom}(x(k), \tau) \neq 0$  for all  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , and the control  $v(x(k))$  as

$$v(x(k)) = -\tau F \Omega_\rho x(k).$$

Then the application of the above control to the system (2) results in the closed-loop perturbed system

$$\tilde{\Sigma}_{NLD} : \begin{cases} x(k+1) = (I_n - \tau A - BF \Omega_\rho) x(k) \\ \quad + B \Phi(x(k), \tau, v(x(k))) \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(x(k), \tau, v(x(k))) &= \alpha(x(k), \tau) \\ &\quad - \beta(x(k), \tau) \beta_{nom}^{-1}(x(k), \tau) \alpha_{nom}(x(k), \tau) \\ &\quad + (\beta(x(k), \tau) \beta_{nom}^{-1}(x(k), \tau) - 1) v(x(k)). \end{aligned}$$

The following notion of ultimate bound for the solutions of (2) will be used to study the stability properties of perturbed system.

**Definition 1.** *The solutions of system are said to be uniformly ultimately bounded if there exist positive constants  $b_1$  and  $b_2$  and for every  $\alpha \in (0, b_2)$  there is a constant  $T = T(\alpha)$ , such that*

$$\|x(k_0)\| < \alpha \Rightarrow \|x(k)\| < b_1, \quad \forall k > k_0 + T$$

The constant  $b_1$  is known the ultimate bound.

We make the following assumption concerning the uncertain term.

**Assumption A1:** *For all  $x$  in  $D \subset \mathbb{R}^n$  an open set containing the origin, the term  $\Phi(x(k), \tau, v(x(k)))$  satisfies the following inequality*

$$\|\Phi(x(k), \tau, v(x(k)))\| \leq \tau L_1 + \tau L_2 \|\Omega_\rho x(k)\|,$$

for  $L_1$  and  $L_2$  positive constants. This term is bounded in some compact subset of  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x(k)\| < r\}$ .

Now, consider the change of coordinates of the form  $\eta(k) = \Omega_\rho x(k)$ . Then, the dynamics of the system in the new coordinates is expressed as

$$\begin{aligned} \eta(k+1) &= \Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} \eta(k) - \tau \Omega_\rho B F \eta(k) \\ &\quad + \Omega_\rho B \Phi(x(k), \tau, v(x(k))) \end{aligned}$$

Since the relations  $\Omega_\rho A_\tau \Omega_\rho^{-1} = I_n + \tau \rho A$  and  $\Omega_\rho B = \rho B$  are hold, we obtain

$$\eta(k+1) = A_c \eta(k) + \rho B \Phi(x(k), \tau, v(x(k))). \quad (8)$$

where  $A_c = (I_n + \tau \rho (A - BF))$ . Choosing  $V_{\eta_k} = \eta^T(k) P_c \eta(k)$  as a candidate Lyapunov function which satisfies  $\lambda_{\min}(P_c) \|\eta(k)\|^2 \leq V_{\eta_k} \leq \lambda_{\max}(P_c) \|\eta(k)\|^2$  and  $\Delta V_{\eta_k} \leq -\tau \rho \lambda_{\min}(P_c) \|\eta(k)\|^2$ , for the nominal system, it follows that

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &= \eta^T(k) [A_c^T P_c A_c - P_c] \eta(k) \\ &\quad + 2\rho \eta^T(k) P_c B \Phi(x(k), \tau, v(x(k))) \\ &\quad + \rho^2 \Phi^2(x(k), \tau, v(x(k))) B^T P_c B. \end{aligned}$$

It is easy to see by using Claim 1, that

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &= -\tau \rho \eta^T(k) P_c \eta(k) \\ &\quad - \tau \rho (1 - \tau \rho)^n \eta^T(k) F^T F \eta(k) \\ &\quad + 2\rho \eta^T(k) A_c^T P_c B \Phi(x(k), \tau, v(x(k))) \\ &\quad + \rho^2 \Phi^2(x(k), \tau, v(x(k))) B^T P_c B. \end{aligned}$$

Since  $A_c^T P_c B = (1 - \tau \rho)^n F^T$  and  $B^T P_c B = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - \tau \rho)^i$ , and using  $\sum_{i=0}^{\infty} (1 - \tau \rho)^i = \frac{1}{\tau \rho}$ , it follows that

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &\leq -\tau \rho \eta^T(k) P_c \eta(k) \\ &\quad + 2\rho (1 - \tau \rho)^n \eta^T(k) F^T \Phi(x(k), \tau, v(x(k))) \\ &\quad + \frac{\rho}{\tau} \Phi^2(x(k), \tau, v(x(k))). \end{aligned}$$

Taking the norm and replacing the suitable expressions, we obtain

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &\leq -\tau \rho \lambda_{\min}(P_c) \|\eta(k)\|^2 \\ &\quad + 2\rho (1 - \tau \rho)^n \|\eta(k)\| f \{\tau L_1 + \tau L_2 \|\eta(k)\|\} \\ &\quad + \frac{\rho}{\tau} \{\tau L_1 + L_2 \tau \|\eta(k)\|\}^2 \end{aligned}$$

where  $\|F\| = f$ . Then, we have

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &\leq \tau \rho \{-\lambda_{\min}(P_c) + 2(1 - \tau \rho)^n f L_2 + L_2^2\} \|\eta(k)\|^2 \\ &\quad + \{2\rho (1 - \tau \rho)^n f L_1 + 2\tau \rho L_1 L_2\} \|\eta(k)\| \\ &\quad + \{\tau \rho L_1^2\}. \end{aligned}$$

Given that  $(1 - \tau \rho)^n < 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &\leq \tau \rho \{-\lambda_{\min}(P_c) + 2f L_2 + L_2^2\} \|\eta(k)\|^2 \\ &\quad + 2\tau \rho L_1 \{f + L_2\} \|\eta(k)\| + \{\tau \rho L_1^2\} \end{aligned}$$

Now, to study the stability of the perturbed system we determine bounds for the constants  $L_1$  and  $L_2$ , and consequently a bound for the trajectories of the system as follows (see [2]).

If  $L_2$  satisfies the bound  $L_2 < \tilde{L}_2 = f + \sqrt{f + \lambda_{\min}(P_c)}$ , then

$$\Delta V_{\eta_k} \leq -\tau \rho a_1 \|\eta(k)\|^2 + 2\tau \rho L_1 a_2 \|\eta(k)\| + \tau \rho a_3$$

where  $a_1 = \lambda_{\min}(P_c) - 2f\tilde{L}_2 - \tilde{L}_2^2 > 0$ ,

$$a_2 = \{f + \tilde{L}_2\} > 0, \quad a_3 = \{L_1^2\} > 0.$$

Thus,

$$\begin{aligned} \Delta V_{\eta_k} &\leq -(1 - \kappa) \tau \rho a_1 \|\eta(k)\|^2 - \tau \rho \kappa a_1 \|\eta(k)\|^2 \\ &\quad + 2\tau \rho L_1 a_2 \|\eta(k)\| + \tau \rho a_3 \end{aligned}$$

for some constant  $\kappa$  such that  $0 < \kappa < 1$ . If this inequality holds for all  $\|\eta(k)\| < r$  and  $\|\eta(k)\| > \mu =$

$$\left( \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + \kappa a_1}}{\kappa a_1} \right) L_1.$$

Then  $\Delta V_{\eta_k} \leq -(1 - \kappa) \tau \rho a_1 \|\eta(k)\|^2$ ,  $\forall \|\eta(k)\| > \mu$ ; with a bound for  $L_1$  given by

$$L_1 < \tilde{L}_1 < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_c)}{\lambda_{\max}(P_c)}} \left( \frac{\kappa a_1}{a_2 + \sqrt{a_2^2 + \kappa a_1}} \right) \tau, \text{ where}$$

$\|\eta(k)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_c)}{\lambda_{\max}(P_c)}} \tau$ . Then, the solutions of the perturbed system are uniformly bounded for  $k > k_0$  and uniformly ultimate bounded with an ultimate bound  $b_1$

$$\text{given by } b_1 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_c)}{\lambda_{\min}(P_c)}} \left( \frac{a_2 + \sqrt{a_2^2 + \kappa a_1}}{\kappa a_1} \right) L_1.$$

This can be established in the following theorem.

**Theorem 2:** Consider the equilibrium point is exponentially stable for the nominal system and Assumption A1 holds. Then, for all  $\|\eta(k)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(P_c)}{\lambda_{\max}(P_c)}} \tau$ , there exist positive constants  $\tilde{L}_1$  and  $\tilde{L}_2$  such that the solution  $\eta(k)$  of the perturbed system is uniformly ultimately bounded for  $k > k_0$  with an ultimate bound which is a function of  $\tilde{L}_1$  and  $\tilde{L}_2$  and for all perturbation function satisfying  $\|\Phi(x(k), \tau, v(x(k)))\| \leq \tau L_1 + \tau L_2 \|\eta(k)\|$  with  $L_1 < \tilde{L}_1$  and  $L_2 < \tilde{L}_2$ .

### 3. Discrete Nonlinear Observer

Now, we consider the class of discrete-time nonlinear systems of the form

$$\begin{aligned} z(k+1) &= A_\tau z(k) + B \{\alpha(z(k), \tau) + \beta(z(k), \tau) u(k)\} \\ y(k) &= C z(k) \end{aligned} \quad (9)$$

where  $z(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}$ . The matrices  $A_\tau$ ,  $B$

$$\text{and } C \text{ are given by } A_\tau = I + \tau A = \begin{pmatrix} 1 & \tau & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \tau \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$B = \text{col}(0 \ 0 \ \cdots \ 1)$ ,  $C = (1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ . An observer for the transformed system (9) is given by

$$\begin{aligned} \hat{z}(k+1) &= A_\tau \hat{z}(k) \\ &\quad + B [\alpha(\hat{z}(k), \tau) + \beta(\hat{z}(k), \tau) u(k)] \\ &\quad + \tau \Delta_\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)] \end{aligned} \quad (10)$$

where  $\Delta_\theta = \text{diag}(\frac{1}{\theta} \ \cdots \ \frac{1}{\theta^n})$  and  $\theta$  is a positive constant.

Defining the estimation error as  $e(k) = \hat{z}(k) - z(k)$ , it follows that the dynamics of the estimation error is of the form

$$e(k+1) = (A_\tau - \tau \Delta_\theta^{-1} K C) e(k) + B \Psi(e, u) \quad (11)$$

where  $\Psi(e, u) = \alpha(\hat{z}(k), \tau) - \alpha(z(k), \tau) + (\beta(\hat{z}(k), \tau) - \beta(z(k), \tau)) u(k)$ .

**Assumption A2.** For  $u$  bounded,  $B \Psi(e, u)$  is a vector whose components satisfy the following inequality

$$\|B \Psi(e, u)\| \leq \tau l_1 \|e(k)\|$$

for  $l_1$  a positive constant.

Then, it is possible to find a matrix  $K$  and constants  $\tau$  and  $\theta$  such that system (11) is exponentially stable (see [3, 4]).

**Theorem 3.** Assume that the system (9) satisfies assumption A2. Let  $\Delta_\theta = \text{diag}(\frac{1}{\theta}, \dots, \frac{1}{\theta^n})$  for  $\theta \geq 1$ , and  $K = \text{col}(C_n^1, \dots, C_n^n)$  where  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . Then, there exist  $\tau_0, \theta_0$  with  $0 < \tau_0 \theta_0 < 1$  such that  $\theta \geq \theta_0$  and  $0 < \tau \leq \tau_0$ , system (10) is an exponential observer for system (9).

The proof of this theorem is based on the following claim.

**Claim 2.** Let  $A_o = I + \gamma_o (A - KC)$  where  $K$  is defined as  $K = \text{col}(C_n^1, \dots, C_n^n)$ ,  $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ . Then for every  $\gamma_o > 0$ ;  $0 < \gamma_o < 1$ , the unique symmetric positive definite matrix  $P_o$  satisfying the algebraic equation:

$$A_o^T P_o A_o - P_o = -\gamma_o P_o - \gamma_o (1 - \gamma_o)^n C^T C \quad (12)$$

is given by  $P_o = M^T M$ , where  $M = \Lambda_o E_o$  with  $\Lambda_o = \text{diag}(1, (1 - \gamma_o)^{\frac{1}{2}}, \dots, (1 - \gamma_o)^{\frac{n-1}{2}})$  and  $E_o = E_o(i, j) = (-1)^{i+j} C_{j-1}^{i-1}$  if  $i \leq j \leq n$  else  $E_o(i, j) = 0$ .

#### 4. Application to the synchronous generator

We consider a synchronous generator connected through purely reactive transmission lines to the rest of the network which is represented by an infinite bus, i.e. a machine rotating at a synchronous speed  $\omega_s$  and capable of absorbing or delivering any amount of energy [1, 5, 10]. Such a generator can be modelled by the following differential equations

$$\begin{aligned} M \ddot{\delta}_m + D \dot{\delta}_m + P_g &= P_M \\ T_{do}' \dot{E}_q' &= -\frac{X_d}{X_d'} E_q' - \left( \frac{X_d' - X_d}{X_d'} \right) V \cos(\delta_m) + E_{fd} \end{aligned} \quad (13)$$

where  $\delta_m = \angle E_q' - \angle V$  is the generator rotor angle referred to the infinite bus (also called power angle),  $\omega = \dot{\delta}_m$  is the rotor angular speed and  $E_q'$  is the transient voltage

or called transient electromagnetic force which, in some cases, coincides with the generator terminal voltage at no-load conditions, in parallel or separated operation.  $M$  is the per unit inertia constant,  $D$  is the per unit damping constant,  $P_m$  is the constant mechanical power supplied by the turbine, and  $T_{do}'$  is the open circuit transient time constant.  $X_d = x_d + x_L$  is the augmented reactance, where  $x_d$  is the direct axis reactance and  $x_L$  is the line reactance,  $X_d'$  is the transient augmented reactance and  $V$  is the infinite bus voltage which is fixed.  $P_g$  is the generated power while  $E_{fd}$  is the field excitation voltage given by  $P_g = \frac{1}{X_q'} E_q' V \sin(\delta_m) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d'} \right) V^2 \sin(2\delta_m)$  and  $E_{fd} = \frac{\omega_s M_f}{\sqrt{2} \tau_f} v_f$ , where  $v_f$  is the field excitation voltage,  $x_d'$  is the transient direct axis reactance,  $x_q$  is the quadrature axis reactance and  $X_q$  the quadrature axis augmented reactance,  $M_f$  is the mutual inductance between stator and rotor windings, from phase windings to the field winding and  $\tau_f$  is the field resistance.

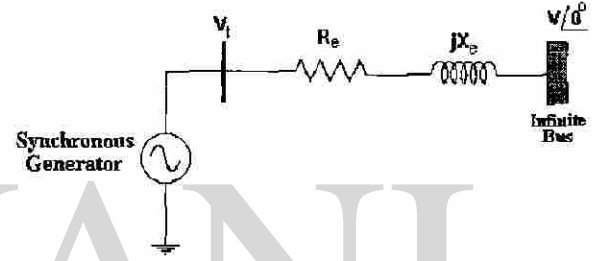


Figure 1. Single-machine connected to infinite-bus.

For a given constant field voltage  $E_{fd} = E_{fd}^*$ , the generator possesses two equilibrium points - one stable and one unstable. Throughout this work, the analysis and design is made around the stable equilibrium point. Setting  $(\delta^*, \omega^*, E_q'^*)$  as the stable equilibrium point of (13), the system in terms of the deviations variables  $\Delta\delta = \delta - \delta^*$ ,  $\Delta\omega = \omega - \omega^*$ ,  $\Delta E_q' = E_q' - E_q'^*$  and  $u = E_{fd} - E_{fd}^*$  are given by

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\delta}{dt} &= \Delta\omega \\ \frac{d\Delta\omega}{dt} &= m_1 + m_2 (\Delta E_q' + E_q'^*) \sin(\bar{\delta}) + m_3 \cos(\bar{\delta}) \sin(\bar{\delta}) \\ \frac{d\Delta E_q'}{dt} &= m_4 (\Delta E_q' + E_q'^*) + m_5 \cos(\bar{\delta}) + m_6 (u + E_{fd}^*) \end{aligned} \quad (14)$$

where  $\bar{\delta} = \Delta\delta + \delta^*$  and the parameters  $m_i$  depend on the machine type, the transmission line parameters, the rotor inertia and the infinite bus constant voltage, and which are constant at only one operating point, i.e.  $m_1 = \frac{T_M}{M}$ ,  $m_2 = \frac{-V}{M X_d'}$ ,  $m_3 = -\frac{V^2}{M} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d'} \right)$ ,  $m_4 = -\frac{X_d}{T_{do}' X_d'}$ ,  $m_5 = -\left( \frac{X_d' - X_d}{T_{do}' X_d'} \right) V$ ,  $m_6 = \frac{1}{T_{do}'}$ .

Discretizing the above system, we obtain

$$\begin{aligned}\Delta\delta(k+1) &= \Delta\delta(k) + \tau\Delta\omega(k) \\ \Delta\omega(k+1) &= \Delta\omega(k) + \tau\{m_1 + m_2(\Delta E'_q(k) + E'_q{}^*) \\ &\quad \times \sin(\tilde{\delta}(k)) + m_3 \cos(\tilde{\delta}(k)) \sin(\tilde{\delta}(k))\} \\ \Delta E'_q(k+1) &= \Delta E'_q(k) + \tau\{m_4\Delta E'_q(k) + m_5 \cos(\tilde{\delta}(k)) \\ &\quad - m_5 \cos(\delta^*) + m_6 u(k)\}\end{aligned}\quad (15)$$

where  $m_4 E'_q{}^* + m_5 \cos(\delta^*) + m_6 E_{fd}^* = 0$  and  $\tilde{\delta}(k) = \Delta\hat{\delta}(k) + \delta^*$ .

## 4.1 Control Design

Now, we consider the following change of coordinates of the form  $x(k) = T(\xi(k))$  is given by

$$\begin{aligned}x_1(k) &= \Delta\delta(k) \\ x_2(k) &= \Delta\omega(k) \\ x_3(k) &= m_1 + m_2(\Delta E'_q(k) + E'_q{}^*) \sin(\tilde{\delta}(k)) \\ &\quad + m_3 \cos(\tilde{\delta}(k)) \sin(\tilde{\delta}(k))\end{aligned}$$

Then, taking the Euler discretization, we obtain

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= x_1(k) + \tau x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) + \tau x_3(k) \\ x_3(k+1) &= x_3(k) + \alpha(x(k), \tau) + \beta(x(k), \tau)u(k)\end{aligned}$$

where  $\alpha = \alpha(x(k), \tau)$  and  $\beta = \beta(x(k), \tau)$ , in the original coordinates, are given by

$$\begin{aligned}\alpha &= m_2 \sin(\tilde{\delta}(k) + \tau\Delta\omega(k)) \{E'_q{}^* + \Delta E'_q(k) \\ &\quad + \tau m_4 \Delta E'_q(k) + \tau m_5 \cos(\tilde{\delta}(k)) - \tau m_5 \cos(\delta^*)\} \\ &\quad + m_3 \cos(\tilde{\delta}(k) + \tau\Delta\omega(k)) \sin(\tilde{\delta}(k) + \tau\Delta\omega(k)) \\ &\quad - m_2(\Delta E'_q(k) + E'_q{}^*) \sin(\tilde{\delta}(k)) \\ &\quad - m_3 \cos(\tilde{\delta}(k)) \sin(\tilde{\delta}(k)) \\ \beta &= \tau m_2 m_6 \sin(\tilde{\delta}(k) + \tau\Delta\omega(k))\end{aligned}$$

Hence, using the theorem 1 the resulting control law is given by

$$u(k) = \beta^{-1}(x(k)) [v(x(k)) - \alpha(x(k))]$$

with the external control given by  $v(x(k)) = -F\Omega_\rho x(k)$ , where the matrices  $F$  and  $\Omega_\rho$  are defined as in (5), i.e.  $F = (C_1^0 \ C_2^1 \ C_3^2) = (1 \ 3 \ 3)$  and  $\Omega_\rho = \text{diag}(\rho^3, \rho^2, \rho)$ .

Then the auxiliary control is given by

$$v(x(k)) = -\rho^3 x_1(k) - 3\rho^2 x_2(k) - 3\rho x_3(k).$$

## 4.2 Observer Design

Now, we construct an observer for the following system

$$\begin{aligned}z(k+1) &= A_\tau z(k) + \tau B \{\alpha(z(k)) + \beta(z(k))u(k)\} \\ &\quad + \tau \Delta\theta^{-1} K [y(k) - \hat{y}(k)]\end{aligned}$$

The above system is an exponential observer for system, where the matrix  $K$  is choosing such that the matrix  $A_\tau - KC$  is stable. Since  $K = \text{col} (C_3^1 \ C_3^2 \ C_3^3) = \text{col} (3 \ 3 \ 1)$ , we have

$$\tau \Delta\theta^{-1} K = \text{col} (\tau 3\theta \ \tau 3\theta^2 \ \tau\theta^3).$$

Finally, the observer for the system (15) in the original coordinates is given by

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\delta}(k+1) &= \Delta\hat{\delta}(k) + \tau\Delta\hat{\omega}(k) \\ &\quad + 3\tau\theta (\Delta\delta(k) - \Delta\hat{\delta}(k)) \Delta\hat{E}'_q(k) \\ \Delta\hat{\omega}(k+1) &= \Delta\hat{\omega}(k) + \tau\{m_1 + m_2(\Delta\hat{E}'_q(k) + E'_q{}^*) \\ &\quad \times \sin(\tilde{\delta}(k)) + m_3 \cos(\tilde{\delta}(k)) \sin(\tilde{\delta}(k))\} \\ &\quad + 3\tau\theta^2 (\Delta\delta(k) - \Delta\hat{\delta}(k)) \\ \Delta\hat{E}'_q(k+1) &= \Delta\hat{E}'_q(k) + \tau\{m_4\Delta\hat{E}'_q(k) + m_5 \cos(\tilde{\delta}(k)) \\ &\quad - m_5 \cos(\delta^*) + m_6 u(k)\} \\ &\quad + T_1 3\tau\theta (\Delta\delta(k) - \Delta\hat{\delta}(k)) \\ &\quad + T_2 \tau\theta^3 (\Delta\delta(k) - \Delta\hat{\delta}(k))\end{aligned}$$

where  $\tilde{\delta}(k) = \Delta\hat{\delta}(k) + \delta^*$ ,  $T_1 = \frac{m_2(\Delta\hat{E}'_q(k) + E'_q{}^*) \cos(\tilde{\delta}(k)) + m_3[\cos^2(\tilde{\delta}(k)) - \sin^2(\tilde{\delta}(k))]}{m_2 \sin(\tilde{\delta}(k))}$  and  $T_2 = \frac{1}{m_2 \sin(\tilde{\delta}(k))}$ .

## 5. Simulation Results

The nominal values of the generator's parameter were chosen as:  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = -3.3333$ ,  $m_3 = 2.2222$ ,  $m_4 = -0.75$ ,  $m_5 = 0.5$ ,  $m_6 = 0.25$ . By setting  $E_{fd} = u^* = 1.1773$ , the *Stable Equilibrium Point*:  $\delta_m^* = 0.870204$ ,  $\omega_s = 1$ ,  $E'_q{}^* = 0.822213$ . The initial conditions were: for the system  $x(0) = \text{col} (-0.1 \ 0.1 \ -0.001)$ , for the observer  $\hat{x}(0) = \text{col} (-0.08 \ 0 \ -0.05)$ . In addition, the sampling time was:  $\tau = 0.01$ . The controller and observer parameters are chosen as:  $\rho = 3$ ,  $\theta = 5$ .

Some simulations were realized when the proposed control-observer scheme was applied to the synchronous generator model. Figures 2-5, shows the performance of the observer-based controller. The equilibrium point and the machine parameters are considered fixed. It can be seen that the state of the observer (dashed line) quickly converges to the state of the system (solid line) and it can be seen as well, that the respective state variables converge to the desired equilibrium point.

## Conclusions

A controller and an observer design for a class of discrete-time nonlinear systems has been proposed. The proposed discrete-time nonlinear controller is simple to implement and exhibits a good behavior. Furthermore, an observer for the class of discrete-time nonlinear systems considered has been proposed which shown a good behavior and fast convergence. The observer-controller scheme has been applied to a model of a synchronous generator in order to illustrate its performance.



## References

- [1] J. H. Chow, P. Kokotovic, R. J. Thomas, Editors, *Systems and Control Theory for Power Systems*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 64, Springer-Verlag, 1995.
- [2] C. Cruz, Jaq. Alvarez and R. Castro, "Stability robustness of linearizing controllers with state estimation for discrete-time nonlinear systems", *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, 1999.
- [3] K. Busawon, M. Saif and J. De León Morales, "Estimation and control for a class of Euler discretized nonlinear system", *Automatic Control Conference*, June 1999, San Diego Calif, pp. 3579-3583.
- [4] J. De Leon Morales, K. Busawon and G. Acosta-Villarreal, "Digital implementation of an observer-based controller for rigid robot", accepted in the *IEEE CDC*, Tampa, Florida, 1998.
- [5] J. De Leon Morales, S Acha-Daza, "Observer-Based Control for a synchronous generator", *Electrical Power and Energy Systems*, Vol. 22, 575-587, 2000.
- [6] F. P. de Mello, C. Concordia, "Concepts of Synchronous Machine Stability as Affected by Excitation Control", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, pp. 316-329, April, 1969.
- [7] S. Monaco and D. Normand-Cyrot, "Minimum-phase nonlinear discrete-time systems and feedback stabilization", *Proc. of the 26th Conference on Decision and Control*, 979-986, Los Angeles, CA. USA. 1987.
- [8] H. Nijmeijer and A van der Schaft, "Nonlinear Dynamical Control Systems", Springer-Verlag, 1990.
- [9] H. Nijmeijer and T.I. Fossen, (Eds) "New Directions in Nonlinear Observer Design", Springer, 1999.
- [10] M.A. Pai, *Energy Function Analysis for Power System Stability*, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [11] P. W. Sauer and M. A. Pai, "Power System Dynamics and Stability", Prentice Hall, 1998.

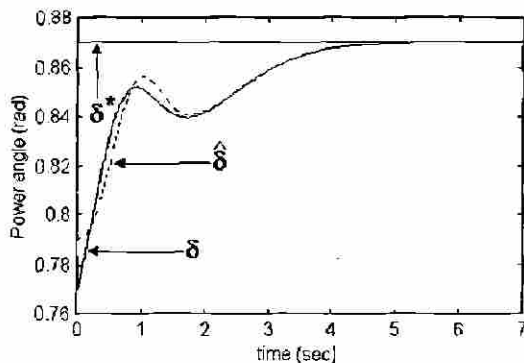


Figure 2.

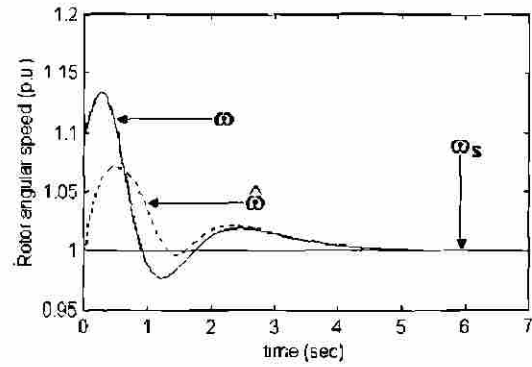


Figure 3.

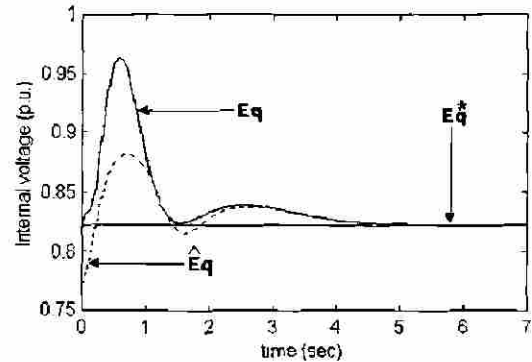


Figure 4.

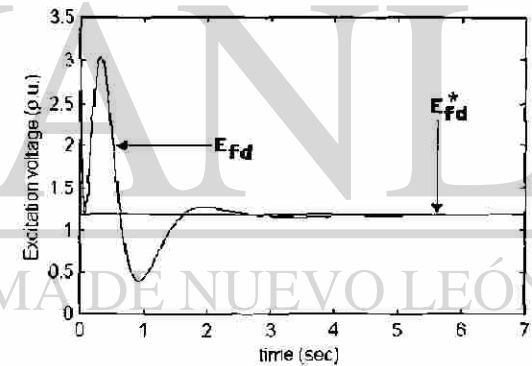


Figure 5.

Artículo publicado

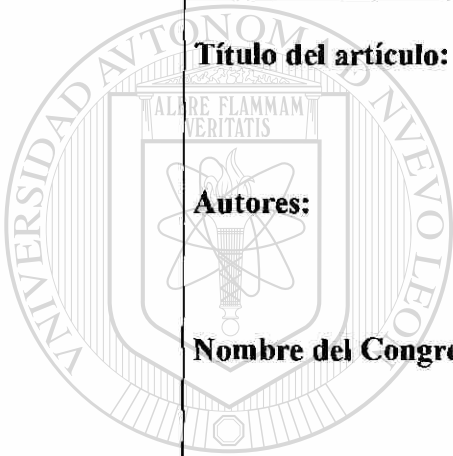
**Título del artículo:** Control and Observation of Induction Motors

**Autores:** J. De León, A. Glumineau, C. Guerra Torres

**Nombre del Congreso:** 2000 American Control Conference

**Lugar:** Chicago, Illinois, USA

**Fecha:** Junio del 2001



UANL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN



DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

# Control and Observation of Induction Motors

J. De Leon<sup>1\*</sup>, A. Glumineau<sup>2</sup>, C. Guerra<sup>1</sup>

<sup>1</sup>University of Nuevo Leon, Department of Electrical Engineering  
P.O. Box 148-F, 66450, San Nicolas de los Garza; Nuevo Leon, Mexico.  
e-mail: jleon@ccr.dsi.uanl.mx

<sup>2</sup>IRCCyN: Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, UMR CNRS 6597.  
Ecole Centrale de Nantes, BP 92101, 1 Rue de la Noe, 44312 Nantes Cedex 3.  
email : glumineau@ircyn.ec-nantes.fr

## Abstract

This paper deals with the observation and control of an induction motor. A cascade observer for a class of nonlinear systems which is state affine is proposed in order to estimate the flux and the torque for the induction motor. A control law regulating the motor speed and rotor flux amplitude is applied. A stability analysis of the resulting closed-loop systems is given. Finally, simulation results are shown.

## 1 Introduction

It is well known that the induction motor has very interesting characteristics because of its squirrel cage rotor and of the absence of brush-collector device. The well-known field oriented controller can be interpreted in [1] as a nonlinear state feedback, where the speed and the rotor flux are only asymptotically decoupled. However, flux estimators are necessary. Moreover, the resistance rotor and the load torque are in general unknown. In this paper we propose a cascade nonlinear observer estimating the flux and the load torque of induction motors. The main contribution of this paper is the design of an observer for nonlinear systems in cascade and an analysis of stability of the closed-loop system when an input-output feedback linearization controller. The paper is organized as follows: in Section 2, the mathematical model of an induction motor is introduced. A multivariable input-output linearizable control law tracking a desired reference signal is given in Section 3. An observer for a class of nonlinear systems in cascade are introduced in Section 4. In Section 5, an analysis of stability of the closed loop system is shown. Simulation results showing the performance of the observer-controller scheme are given.

## 2 The induction motor model

The classical induction diphasic motor model in  $\alpha\beta$  frame (see [1]) is described by

\*Corresponding Author. The work of the first author was supported by CONACYT, Mexico, 26498-A.

$$\Sigma_{NL} : \dot{x} = f(x) + gu \quad \text{where}$$

$$x = \text{col} \{ \Omega, \Phi_{r\alpha}, \Phi_{r\beta}, i_{s\alpha}, i_{s\beta} \}, u = \text{col} \{ u_{s\alpha}, u_{s\beta} \} \quad (1)$$

and  $f(x) =$

$$\begin{bmatrix} (pM_{sr}/JL_r)(\Phi_{r\alpha}i_{s\beta} - \Phi_{r\beta}i_{s\alpha}) - (f_v/J)\Omega - T_l/J \\ -(R_r/L_r)\Phi_{r\alpha} - p\Omega\Phi_{r\beta} + (R_r/L_r)M_{sr}i_{s\alpha} \\ p\Omega\Phi_{r\alpha} - (R_r/L_r)\Phi_{r\beta} + (R_r/L_r)M_{sr}i_{s\beta} \\ (M_{sr}/\sigma L_s L_r)((R_r/L_r)\Phi_{r\alpha} + p\Omega\Phi_{r\beta}) - \gamma i_{s\alpha} \\ (M_{sr}/\sigma L_s L_r)((R_r/L_r)\Phi_{r\beta} - p\Omega\Phi_{r\alpha}) - \gamma i_{s\beta} \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/\sigma L_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sigma L_s \end{bmatrix}^T$$

$R_s$  and  $L_s$ ,  $R_r$  and  $L_r$  are the resistances and inductances of stator and rotor.  $M_{sr}$  is the mutual inductance between the stator and rotor windings.  $J$  is the inertia of the system (motor and load),  $p$  is the number of pole-pair,  $f_v$  the coefficient of viscous damping and  $T_l$  is the disturbance torque. The parameters  $\sigma$  and  $\gamma$  are defined by:  $\sigma := 1 - M_{sr}^2/L_s L_r$ ,  $\gamma := (L_r^2 R_s + M_{sr}^2 R_r)/\sigma L_s L_r^2$ . The inputs are the stator voltages and the angular speed. We assume that the load torque is constant and unknown and the nominal values of the rotor resistance are known.

## 3 Control Law

We consider a multivariable input-output linearizing state feedback designed for the system (1). Consider the following tracking control (see [7])

$$u = \begin{pmatrix} u_{s\alpha} \\ u_{s\beta} \end{pmatrix} = D^{-1}(x) \left\{ \begin{pmatrix} L_f^2 h_1 \\ L_f^2 h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_a \\ v_b \end{pmatrix} \right\}$$

such that the output  $y = \text{col}(h_1, h_2)$  asymptotically tracks a reference signal  $y_r(t)$ , where  $h_1 = \Omega$ ,  $h_2 = (\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2)$  are considered as the outputs to be controlled,  $\Omega_r(t)$  and  $\|\Psi_r(t)\|^2$  are the reference signals to be tracked. We assume that the reference signal and its derivatives up to  $r$  (relative

degree of the system) are bounded for all  $t \geq 0$ . The inverse of decoupling matrix is given by  $D^{-1}(x) = -2(R_r/L_r)(pM_{sr}/JL_r)(\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2)/(\sigma^2 L_s^2)$ . Now, consider the following change of coordinates

$$z = \begin{pmatrix} \lambda \\ \xi_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1(x) - R \\ T_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{where } \lambda &= T_1(x) - R = \text{col}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ &- \text{col}(\Omega_r(t), \dot{\Omega}_r(t), \|\Psi_r(t)\|^2, \|\dot{\Psi}_r(t)\|^2) \\ \xi_1 &= h_1(x) = \Omega, \\ \xi_2 &= L_f h_1(x) = (pM_{sr}/JL_r)(\Phi_{r\alpha} i_{s\beta} - \Phi_{r\beta} i_{s\alpha}) \\ &- (f_v/J)\Omega - T_l/J, \\ \xi_3 &= h_2(x) = (\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2), \\ \xi_4 &= L_f h_2(x) = -2(R_r/L_r)(\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2) \\ &+ 2(R_r/L_r)M_{sr}(\Phi_{r\alpha} i_{s\alpha} + \Phi_{r\beta} i_{s\beta}) \\ \xi_5 &= T_2(x) = \arctan\left(\frac{\Phi_{r\beta}}{\Phi_{r\alpha}}\right) \end{aligned}$$

which is well defined in

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : (\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2) > 0 \right\}.$$

The new control  $v = \text{col}(v_\alpha, v_\beta)$  is given by

$$\begin{aligned} v_\alpha &= -k_{a1} \{\Omega - \Omega_r(t)\} - k_{a2} \{\Gamma_1 - \dot{\Omega}_r(t)\} + \ddot{\Omega}_r(t) \\ v_\beta &= -k_{b1} \left\{ (\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2) - \|\Psi_r(t)\|^2 \right\} \\ &- k_{b2} \left\{ \Gamma_2 - \|\dot{\Psi}_r(t)\|^2 \right\} + \|\ddot{\Psi}_r(t)\|^2 \text{ and} \\ \Gamma_1 &= pM_{sr}/JL_r(\Phi_{r\alpha} i_{s\beta} - \Phi_{r\beta} i_{s\alpha}) - (f_v/J)\Omega - T_l/J; \\ \Gamma_2 &= -2(R_r/L_r)(\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2) + \\ &2(R_r/L_r)M_{sr}(\Phi_{r\alpha} i_{s\alpha} + \Phi_{r\beta} i_{s\beta}). \end{aligned}$$

$(k_{a1}, k_{a2})$  and  $(k_{b1}, k_{b2})$  are constant design parameters, so the system obtained takes the following form

$$\Sigma_\lambda : \begin{cases} \dot{\lambda} = A\lambda, \\ \dot{\xi}_5 = F(\lambda + R, \xi_5) \end{cases} \quad (2)$$

where  $A$  is Hurwitz and  $\dot{\xi}_5 = F(\lambda + R, \xi_5)$  represents the dynamics of the flux angle, which is assumed to be stable. The measured variables are  $(\Omega, i_{s\alpha}, i_{s\beta})$  while  $(\Phi_{r\alpha}, \Phi_{r\beta})$  and the load torque  $T_l$  are estimated.

## 4 Nonlinear Observers

Consider the multi-variable nonlinear system expressed by the equations:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad y = h(x) \quad (3)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$  is the state vector of the system,  $u \in \mathbb{R}^m$  is the control vector and  $y \in \mathbb{R}^p$  is the output vector. Consider the class of state affine systems which are represented as

$$\dot{x} = A(u, y)x + g(u, y), \quad y = Cx \quad (4)$$

where the matrix  $A$  depends on the input and the output and  $g$  represents an input output injection. Results related in how a nonlinear system can be transformed into a state affine systems have been obtained in [2,4]. We present a cascade observer estimating the flux and the unknown load torque, which is considered constant. The rotor speed and the stator currents are measured.

### 4.1 Observer design for Triangular systems.

Consider the following dynamical system

$$\dot{x} = A(u, y)x + g(u, y, x), \quad y = Cx = x_1 \quad (5)$$

where  $A(u, y) =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(u, y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2(u, y) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-1}(u, y) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$g(u, y, x) = \begin{pmatrix} g_1(u, y) \\ g_2(u, y, x_2) \\ \vdots \\ g_n(u, y, x) \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}^T.$$

Now we shall make the following assumptions:

**A1)** There exist positive constants  $c_1, c_2, 0 < c_1 < c_2 < \infty$ , such that for all  $x \in \mathbb{R}^n$ ;

$$0 < c_1 \leq |\alpha_i(u, y)| \leq c_2 \leq \infty, \quad i = 1, \dots, n-1$$

**A2)** The functions  $g_i(u, y, x_1, \dots, x_i), i = 1, \dots, n$ , are globally Lipschitz with respect to  $(x_1, \dots, x_i)$ , and uniformly with respect to  $u$  and  $y$ .

An observer for this system is given by

$$\dot{\hat{z}} = A(u, y)\hat{z} + g(u, y, \hat{z}) - \Gamma^{-1}(u, y)\Delta^{-1}K(\hat{y} - y) \quad (6)$$

where  $\Gamma = \text{diag}\{1, \alpha_1(u, y), \dots, \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i(u, y)\}, \Delta = \text{diag}\{1/\theta, 1/\theta^2, \dots, 1/\theta^n\}$  with  $\theta > 0, K$  is such that the matrix  $(\bar{A} - KC)$  is stable where  $\bar{A} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ From assumption A1, the matrix } \Gamma \text{ is nonsingular.}$$

**A3)** Then assuming that  $\sup_{\theta \geq 1} \|\hat{\Gamma}(u, y)\Gamma^{-1}(u, y)\| \leq L_2$ , where  $L_2$  is a positive constant.

**Theorem 1:** Assume that the system (5) satisfy Assumptions A1 A2 and A3. Then, there exists  $\theta_0$  such that

for all  $\theta > \theta_0$ , system (6) is an exponential observer for system (5). Moreover, the dynamics of this observer can be made arbitrarily fast.

**Proof.** see [6]

## 4.2 Cascade Systems

Now, we propose a cascade observer for a class of multi-output nonlinear systems. Consider the following class of nonlinear systems

$$\dot{x}_i = A_i(u, y)x_i + g_i(u, y, x_1, \dots, x_{i-1}), \quad y_i = C_i x_i; \quad (7)$$

for  $i = 1, \dots, n$ , where  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  the matrices  $A_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; depending on the inputs and outputs and the terms  $g_i = 1, 2, \dots, n$ ; do not modify the observability property of the system and the structure of the observer. Moreover, the functions  $g_i(u, y, x_1, \dots, x_{i-1})$ ,  $i = 2, \dots, n$ ; are assumed Lipschitz with respect to  $(x_1, \dots, x_{i-1})$  and uniformly with respect to  $u$  and  $y$ . We assume that each subsystem is observable, verifies Assumption A1, A2, and

**A4)** Then assuming that  $\sup_{\theta_i \geq 1} \|\Gamma_i(u, y)\Gamma_i^{-1}(u, y)\| \leq L_{ii}$ , for  $i = 1, \dots, n$ ; where  $L_{ii}$  is a positive constant, and admits an observer of the form (6).

An observer for systems in cascade is given by

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_1(u, y)z_1 + g_1(u, y) + M_1(u, y)C_1(z_1 - x_1) \\ \dot{z}_i &= A_i(u, y)z_i + g_i(u, y, z_1, \dots, z_{i-1}) \\ &\quad + M_i(u, y)C_i(z_i - x_i), \quad i = 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (8)$$

where  $M_i(u, y) = \Gamma_i^{-1}(u, y)\Delta_i^{-1}K_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; are the gains of the observer and depend on the input and the output, and  $\Gamma_i(u, y) = \text{diag}\{1, \alpha_{1i}(u, y), \dots, \prod_{j=1}^{n-1} \alpha_{ji}(u, y)\}$ ,  $\Delta_i = \text{diag}\{1/\theta_i, 1/\theta_i^2, \dots, 1/\theta_i^n\}$  with  $\theta_i > 0$ ,  $K_i$  is such that the matrix  $(\bar{A}_i - K_i C_i)$  is stable and

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{From assumption A1, the matrix } \Gamma_i \text{ is nonsingular.}$$

**Theorem 2:** Assume that the system (7) satisfy Assumptions A1, A2 and A4. Then, there exists  $\theta_{0i}$  such that for all  $\theta_i > \theta_{0i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , system (8) is an exponential observer for system (7).

**Proof:** see [6]

## 4.3 Design of the observer for the induction motor

The design of an observer for this class of system is introduced, assuming now the system can be written in the

following form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1(u, y)x_1 + g_1(u, y, x_1), \quad y_1 = C_1 x_1 \\ \dot{x}_2 &= A_2(u, y)x_2 + g_2(u, y, x_1, x_2), \quad y_2 = C_2 x_2 \end{aligned} \quad (9)$$

where the electrical subsystem has the following form (with  $0 := 0_{2 \times 2}$  and  $I := I_{2 \times 2}$ )

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & m_1 N(\Omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_1 \\ &\quad + \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ m_2 I & -N(\Omega) \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} m_3 I \\ 0 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

where  $x_1 = \text{col}(\Phi_{r\alpha}, \Phi_{r\beta}, i_{s\alpha}, i_{s\beta})$ ,

$$\begin{aligned} A_1(u, y) &= \begin{pmatrix} 0 & m_1 N(\Omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ N(\Omega) &= \begin{pmatrix} (R_r/L_r) & p\Omega \\ -p\Omega & (R_r/L_r) \end{pmatrix} \\ g_1(u, y, x_1) &= \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ m_2 I & -N(\Omega) \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} m_3 I \\ 0 \end{pmatrix} u \end{aligned}$$

with  $m_1 = (M_{sr}/\sigma L_s L_r)$ ;  $m_2 = (R_r/L_r) M_{sr}$ ;  $m_3 = (1/\sigma L_s)$ .

The measurable output is  $y_1 = \text{col}(i_{s\alpha}, i_{s\beta})$ .

The electrical subsystem's observer is given by

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & m_1 N(\Omega) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z_1 + \begin{pmatrix} -\gamma I & 0 \\ m_2 I & -N(\Omega) \end{pmatrix} z_1 \\ &\quad + \begin{pmatrix} m_3 I \\ 0 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} \theta_1 k_1 I & 0 \\ \frac{\theta_1^2 k_2}{m_1} N^{-1}(\Omega) & 0 \end{pmatrix} (z_1 - x_1) \end{aligned}$$

The mechanical subsystem is given by

$$\dot{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 & (1/J) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

where  $x_2 = \text{col}(\Omega, T_i)$ ,

$A_2(u, y) = \begin{pmatrix} 0 & (1/J) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $g_2(u, y) = \begin{pmatrix} \psi \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\psi = -(f_v/J)\Omega + (pM_{sr}/JL_r)(\Phi_{r\alpha}i_{s\beta} - \Phi_{r\beta}i_{s\alpha})$  and the measurable output is given by  $y_2 = \Omega$ .

The mechanical subsystem's observer is given by

$$\dot{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 & (1/J) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z_2 + \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_2 l_1 & 0 \\ \theta_2^2 l_2 J & 0 \end{pmatrix} (z_2 - x_2)$$

with  $\hat{\psi} = -(f_v/J)\Omega + (pM_{sr}/JL_r)(\hat{\Phi}_{r\alpha}i_{s\beta} - \hat{\Phi}_{r\beta}i_{s\alpha})$ .

## 5 Analysis of stability of the close-loop system

In this section, we consider the stability of the augmented system when the control law is taken as a function of the state estimate. Let us considered the estimation error equations

$$\dot{e} = (A(u, y) - \Gamma^{-1}(u, y)\Delta^{-1}KC)e + \Upsilon(u, y, z - e)$$

where the measurable outputs are

$$\begin{aligned} y &= Cx = \text{col}(y_1, y_2) = \text{col}(C_1x_1, C_2x_2), \\ e &= \text{col}(e_1, e_2), z = \text{col}(z_1, z_2), A(u, y) = \\ &\text{diag}(A_1 - \Gamma_1^{-1}(u, y)\Delta_1^{-1}K_1C_1, A_2 - \Gamma_2^{-1}(u, y)\Delta_2^{-1}K_2C_2) \\ \Upsilon &= \text{col}(0, g_2(u, y, z_1) - g_2(u, y, z_1 - e_1)). \end{aligned}$$

From stability point of view, the system  $\Sigma_\lambda$  is an equivalent representation of the system  $\Sigma$ , which assumes that the rotor flux angle stability. Note that to show that the origin of  $\lambda$  is asymptotically stable implies the zero tracking error between the reference signals and the outputs to be controlled  $h_1$  and  $h_2$ . Define the augmented system

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(z), \\ \dot{e} = (A(u, y) - \Gamma^{-1}(u, y)\Delta^{-1}KC)e + \Upsilon(u, y, z - e) \end{cases}$$

Now, using the following change of coordinates

$$\begin{aligned} (\lambda, \xi_s) &= \text{col}(T_1(x) - R, T_2(x)), \\ \epsilon &= \text{col}(\epsilon_1, \epsilon_2) = \text{col}(\Gamma_1(u, y)\Delta_1 e_1, \Gamma_2(u, y)\Delta_2 e_2), \end{aligned}$$

and the dynamics of the flux angle, which is assumed to be stable, the above system can be rewritten in the form

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{\lambda} = A\lambda + \frac{\partial T_1(x)}{\partial x}g(x)[u(z) - u(x)], \\ \dot{\epsilon} = \tilde{A}\epsilon + \tilde{\Upsilon}(u, y, \epsilon, \lambda) \end{cases}$$

where  $\tilde{A} = \text{diag}(\theta_1 \tilde{A}_1, \theta_2 \tilde{A}_2)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon} &= \text{col}(\tilde{\Gamma}_1(u, y)\Gamma_1^{-1}(u, y)\epsilon_1, \\ &\{G_2(u, y, z_1) - G_2(u, y, x_1)\} + \tilde{\Gamma}_2(u, y)\Gamma_2^{-1}(u, y)\epsilon_2) \\ &\text{with } \tilde{A}_1 = \{A_1 - K_1C_1\}, \tilde{A}_2 = \{A_2 - K_2C_2\} \\ &\text{and } G_2(u, y, z_1) - G_2(u, y, x_1) = \\ &\Gamma_2(u, y)\Delta_2 \{g_2(u, y, z_1) - g_2(u, y, x_1)\}. \end{aligned}$$

We will study the stability of the above system of  $\Sigma_A$ , for that the following assumptions are introduced:

**H1)** Set  $z, x \in B(0, \rho)$  the ball centered in 0 and radius  $\rho > 0$ . There exist a scalar nonnegative locally Lipschitz constant function  $L(\rho) = L_1(\rho)L_2(\rho)L_3(\rho)$  such that

$$\left\| \frac{\partial T_1(x)}{\partial x}g(x)[u(z) - u(x)] \right\| \leq L(\rho) \|e\| \quad \text{where}$$

$$\|g(x)\| \leq L_1(\rho),$$

$$\left\| \frac{\partial T_1(x)}{\partial x} \right\| \leq L_2(\rho), \|u(z) - u(x)\| \leq L_3(\rho) \|e\|$$

and  $L_i(\rho), i = 1, 2, 3$ , are Lipschitz constants.

**H2)** There exist a Lyapunov function

$$L(\lambda, \epsilon) = W(\lambda) + V(\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (10)$$

where  $W(\lambda) = \lambda^T P \lambda = [T_1(x) - R]^T P [T_1(x) - R]$

$$\text{and } V(\epsilon) = V(\epsilon_1, \epsilon_2) = V_1(\epsilon_1) + V_2(\epsilon_2),$$

which satisfy the following inequalities

$$\beta_1 \|\lambda(t)\|^2 \leq W(\lambda(t)) = \lambda^T P \lambda \leq \beta_2 \|\lambda(t)\|^2, \quad (11)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda} A \lambda \leq -\beta_3 \|\lambda(t)\|^2$$

where  $A^T P + P A = -Q$ . There exist a Lyapunov function  $V(\epsilon)$  such that

$$\alpha_1 \|\epsilon\|^2 \leq V(\epsilon) \leq \alpha_2 \|\epsilon\|^2 \quad (12)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \epsilon} (\tilde{A}\epsilon + \tilde{\Upsilon}(u, y, \epsilon, \lambda)) \leq -\alpha_3 \|\epsilon(t)\|^2$$

where  $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, 3$ , are positive constants. Let be  $\mu_1 = \beta_1/\beta_2, \mu_2 = \alpha_1/\alpha_2$ .

**Theorem 3:** Consider the system  $\Sigma_\lambda$  (2) obtained via change of coordinates and an input-output state feedback linearizing control  $u$  depending on the state estimated given by the observer  $O$ . Under the assumptions H1 and H2, the dynamics of the whole system  $\Sigma_A$  is locally asymptotically stable. More precisely, the dynamics of the tracking error  $\lambda$  and the estimation error  $\epsilon$  converge exponentially to zero and an estimation of the attraction region is given by

$$\left\{ \lambda \in R^3 : \|\lambda(0)\| \leq \sqrt{\mu_1} \frac{\rho}{2} \right\} \times \left\{ \epsilon \in R^6 : \|\epsilon(0)\| \leq \sqrt{\mu_2} \frac{\rho}{2} \right\}.$$

**Proof:** see [5]  $\square$

## 6 Simulation Results: Induction motor

Parameters : Normal rated power: 1,5 kW. Number of pole pairs:  $p = 2$ . Nominal speed :1430 rpm. Nominal voltage: 220V. Nominal intensity: 6,1 A. Stator resistance:  $R_s = 1,47$  Ohm. Rotor resistance:  $R_r = 0,79$  Ohm. Stator self-inductance:  $L_s = 0,105$  H. Rotor self-inductance:  $L_r = 0,094$  H. Mutual inductance:  $M_{sr} = 0,094$  H. Inertia (motor and load) :  $J = 25,6 \times 10^{-3}$  Nm/rad/s<sup>2</sup>. Viscous damping coefficient :  $f_v = 2,9 \times 10^{-3}$  Nm/rad/s. Constant torque friction :  $C_s = 0,38$  Nm. A simulation of the proposed observer was performed for the following numerical values:  $\theta_1 = 40, \theta_2 = 20, K_1 = \text{col}(7, 12), K_2 = \text{col}(5, 6), \Omega_r(t) = 20 + 10 \cos(t), \|\Psi_r(t)\|^2 = 4 + 2 \sin(t)$ .

The initial system and observer initial conditions of the system are  $x_1 = \text{col}(\Phi_{r\alpha}, \Phi_{r\beta}, i_{s\alpha}, i_{s\beta}) = (0,4, -0,4, 0,1, -0,1); z_1 = \text{col}(\hat{\Phi}_{r\alpha}, \hat{\Phi}_{r\beta}, \hat{i}_{s\alpha}, \hat{i}_{s\beta}) = (3, -2, 0,2, -0,2); (k_{a1}, k_{a2}) = (900, 20000)$  and  $(k_{b1}, k_{b2}) = (1800, 800000)$ . Moreover, a change in the nominal value of  $T_l$  was introduced at  $t = 4$  from  $T_l = 2$  to  $T_l = 4$ . The figures 1-3, show the performance

of the observer. The estimated states converge to the state of the system. In Figures 4-5, we show the trajectories of the motor tracking the desired trajectories  $\Omega_r(t)$  and  $\|\Psi_r(t)\|^2$ , respectively. This scheme works well even when initial conditions are different from zero and even when there is a change in the load torque.

## References

- [1] J. Chiasson, Nonlinear controllers for induction motors, IFAC Conference System Structure and Control, pp. 572-583, Nantes, France, Juillet 1995.
- [2] A. Glumineau, V. Lopez, Transformation to state affine systems and observer design, Workshop on New Directions in Nonlinear Observer Design, Geiranger, Norway, 1999, pp 59-71.
- [3] H. Hammouri, J. DeLeon, On systems equivalence and observer synthesis, New Trends in Systems Theory, 1991, pp. 340-347.
- [4] V. Lopez, J. De Leon and A. Glumineau, Transformation of nonlinear systems into state affine systems and Observer synthesis, Proc. IFAC SSC'98 Conference on Systems Structure and Control, 3, Nantes, 1998, pp. 621-626.
- [5] J. De Leon, A. Glumineau and C. Guerra, Control and Observation of Induction Motors, IRCyN report N°00.01, February 2000, 22p.
- [6] J. DeLeon, A. Glumineau and G. Schreier, Nonlinear observer for induction motor: a benchmark test. CSD 2000, IFAC Conference, Bratislava, Slovak Republic, 2000.
- [7] R. Marino, S. Peresada and P. Tomei, "Adaptative partial feedback linearization of induction motors", 29th CDC, News Orleans, USA, 1995. pp 3313-3318.

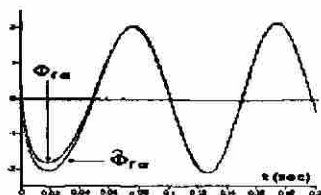


Fig1. Flux estimation  $\hat{\Phi}_{r\alpha}$  and  $\hat{\Phi}_{r\beta}$

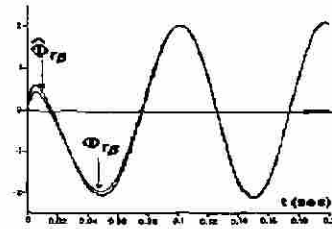


Fig. 2 Flux estimation  $\hat{\Phi}_{r\alpha}$  and  $\hat{\Phi}_{r\beta}$

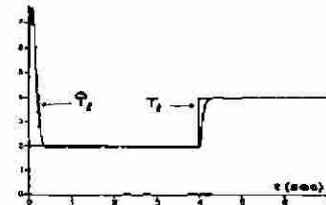


Fig. 3 The load torque estimation  $T_l$  and  $\hat{T}_l$

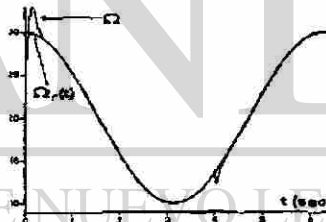


Fig. 4 Rotor speed  $\Omega(t)$  and its reference  $\Omega_r(t)$ .

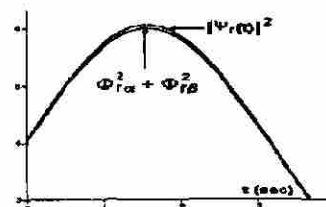


Fig. 5  $(\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2)$  and the reference  $\|\Psi_r(t)\|^2$ .

