

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CARACTERIZACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA EN NIÑOS EN  
EDADES DE ENTRE 9 Y 16 AÑOS MEDIANTE CONJUNTOS  
APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

POR

JOSÉ ALEJANDRO CID MEDINA

EN OPCIÓN AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

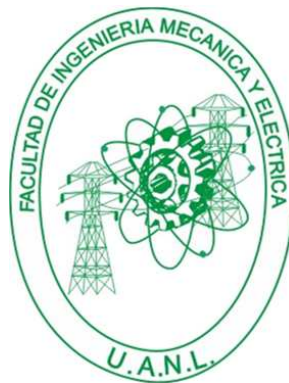
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



CARACTERIZACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA EN NIÑOS EN  
EIDADES DE ENTRE 9 Y 16 AÑOS MEDIANTE CONJUNTOS  
APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

POR

JOSÉ ALEJANDRO CID MEDINA

EN OPCIÓN AL GRADO DE  
MAESTRÍA EN CIENCIAS  
EN INGENIERÍA DE SISTEMAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

JUNIO 2012

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**División de Estudios de Posgrado**

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «caracterización de la maduración ósea en niños en edades de entre 9 y 16 años mediante conjuntos aproximados y conjuntos difusos», realizada por el alumno José Alejandro Cid Medina, con número de matrícula 1541915, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

---

Dr. Fernando López Irarragorri

Director

---

Dr. Romeo Sánchez Nigenda

Revisor

---

Dr. Gregorio Toscano Pulido

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. Moisés Hinojosa Rivera

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, junio 2012

*Dedico este trabajo a mis queridos sobrinos, Juan Daniel y Victor Alejandro.:D*

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>xvii</b>
<b>Resumen</b>	<b>xviii</b>
<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción. . . . .	1
1.2. Contexto. . . . .	1
1.3. Antecedentes. . . . .	2
1.4. Definición del Problema. . . . .	7
1.5. Hipótesis. . . . .	8
1.6. Objetivos. . . . .	8
1.6.1. General. . . . .	8
1.6.2. Específicos. . . . .	9
1.7. Justificación de la Pertinencia y Vigencia de la Investigación. . . . .	9
1.8. Metodología Propuesta. . . . .	9
1.9. Contribución Esperada. . . . .	10
1.10. Conclusiones. . . . .	10

---

<b>2. Marco Teórico.</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción a la Teoría de la Decisión Multicriterio. . . . .	11
2.2. Apoyo a la Decisión. . . . .	12
2.3. Ciencias de la Decisión. . . . .	14
2.4. Problemas de Decisión. . . . .	15
2.4.1. Metodologías MCDA (Multicriteria Decision Aid). . . . .	16
2.4.2. Problemas de Clasificación. . . . .	18
2.5. Teoría de Conjuntos Aproximados (Rough Sets). . . . .	19
2.5.1. Sistema de Información. . . . .	20
2.5.2. Tabla de Decisión. . . . .	20
2.5.3. Conjunto Elemental. . . . .	22
2.5.4. Relación de Indiscernibilidad. . . . .	22
2.5.5. Aproximaciones por Defecto y por Exceso. . . . .	24
2.5.6. Reducto y Núcleo. . . . .	25
2.5.7. Dependencia de Atributos. . . . .	25
2.6. Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets). . . . .	26
2.6.1. Introducción. . . . .	26
2.6.2. Conceptos Básicos. . . . .	27
2.6.3. Números Difusos. . . . .	29
2.6.4. Intervalos de Confianza y Números Difusos. . . . .	30
2.6.5. Funciones de Pertenencia. . . . .	31

---

2.6.6. Operaciones con Conjuntos Difusos. . . . .	34
2.6.7. Reglas Difusas. . . . .	36
2.6.8. Sistema Difuso. . . . .	36
2.7. Conclusiones. . . . .	39
<b>3. Descripción del Problema.</b>	<b>41</b>
3.1. Introducción. . . . .	41
3.2. Descripción de Aspectos Relevantes del Problema de la Estimación de la Maduración Ósea. . . . .	42
3.3. Estudios Realizados Estimar la Maduración Ósea Según la Anatomía del Cuerpo. . . . .	43
3.4. Metodología con Radiografías de Mano-Muñeca. . . . .	44
3.5. Metodología con Radiografías Laterales de las Vértebras Cervicales. .	57
3.6. Radiografías Mano-muñeca vs Laterales de las Vértebras Cervicales. .	64
3.7. Conclusiones. . . . .	65
<b>4. Metodología.</b>	<b>66</b>
4.1. Introducción. . . . .	66
4.2. Descripción de la Metodología Propuesta. . . . .	66
4.3. Tabla de Decisión. . . . .	68
4.4. Generación de Reglas para la Caracterización de las Etapas de la Maduración Ósea. . . . .	72
4.5. Convertir Cada Categoría de Cada Atributo de Condición de la Tabla de Decisión en Categorías Difusas. . . . .	74

---

4.6. Fuzzificar Categorías de Decisión. . . . .	75
4.7. Conclusiones. . . . .	79
<b>5. Resultados</b>	<b>80</b>
5.1. Introducción. . . . .	80
5.2. Los Datos y la Creación de la Tabla de Decisión. . . . .	80
5.3. Generación de Reglas Empleando Conjuntos Aproximados (Rough Sets). . . . .	82
5.4. Fuzzificación de Categorías. . . . .	83
5.5. Análisis de Resultados. . . . .	89
5.6. Conclusiones. . . . .	91
<b>6. Conclusiones, Recomendaciones y Trabajo Futuro.</b>	<b>92</b>
6.1. Conclusiones. . . . .	92
6.2. Recomendaciones y Trabajo Futuro. . . . .	94
<b>A. Tablas de Distribución Por Etapa.</b>	<b>95</b>
A.1. Niñas. . . . .	95
A.2. Niños. . . . .	106
<b>B. Variación en el Factor de Reducción</b>	<b>117</b>
B.1. Niñas. . . . .	118
B.2. Niños. . . . .	123
<b>C. Tablas de Exactitud de Conjuntos Aproximados y Conjuntos Difuso-</b>	



---

<b>sos.</b>	<b>128</b>
C.1. Niñas. . . . .	128
C.2. Niños. . . . .	131
<b>Bibliografía</b>	<b>134</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

2.1. Proceso de la Toma de Decisiones [36] . . . . .	13
2.2. Funciones de Pertenencia Más Comunes [1] . . . . .	32
2.3. Métodos Defuzzificación [30] . . . . .	38
2.4. Proceso Sistema Difuso [2] . . . . .	39
3.1. Radiografía Mano . . . . .	46
3.2. Radiografía Mano [3]. . . . .	47
3.3. Radiografía Mano [4]. . . . .	48
3.4. Primer Estadío . . . . .	49
3.5. Segundo Estadío . . . . .	49
3.6. Tercer Estadío . . . . .	50
3.7. Cuarto Estadío . . . . .	51
3.8. Quinto Estadío . . . . .	52
3.9. Sexto Estadío . . . . .	52
3.10. Séptimo Estadío . . . . .	53
3.11. Octavo Estadío . . . . .	53

---

3.12. Noveno Estadio . . . . .	54
3.13. Vértebras Cervicales [5] . . . . .	57
3.14. Estados de Maduración . . . . .	59
4.1. Categorías Difusas Variable 2angmc . . . . .	75
4.2. Puntos que Determinan los Niveles de Desarrollo para la Interpretación de los Valores Defuzzificados . . . . .	76
4.3. Categorías Variable de Salida Madurez . . . . .	78
5.1. Ejemplo Atributo AngMC . . . . .	84
5.2. Ejemplo Atributo ABP . . . . .	85
5.3. Ejemplo Atributo Ancho . . . . .	86
5.4. Ejemplo Atributo ABA . . . . .	87
5.5. Ejemplo Atributo Forma1 . . . . .	88
5.6. Ejemplo Atributo Forma2 . . . . .	89

# ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1. Sistema de Información . . . . .	20
2.2. Tabla de Decisión . . . . .	21
3.1. Métodos de evaluación de la maduración ósea [36, 58] . . . . .	44
3.2. Etapas de Transición Propuestas por López&Prado[36]. . . . .	61
4.1. Datos Obtenidos por Medio de Mediciones Longitudinales Aplicadas a las Radiografías de los Pacientes Incluidos en la Muestra. . . . .	69
4.2. Valores Típicos de las Vértebras Cervicales Respecto a los Atributos Forma, Ángulo de Maduración, Altura del Borde Anterior y Posterior	71
4.3. Extracto de una Tabla de Decisión que Representa las Características de la Muestra Poblacional . . . . .	71
5.1. Composición de los Conjuntos de Datos Según Sexo, y Tipo de Oclusión	81
5.2. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niñas . . . . .	82
5.3. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niñas . . . . .	82
5.4. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niños . . . . .	83
5.5. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niños . . . . .	83

---

A.1. Distribución por Etapas Según Tabla de Decisión de 270 Niñas. . . .	95
A.2. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo I. . . . .	96
A.3. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo I. . . . .	97
A.4. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.1. . . . .	98
A.5. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.1. . . . .	99
A.6. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Total1. . . . .	100
A.7. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo Total1. . . . .	101
A.8. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.2. . . . .	102
A.9. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.2. . . . .	103
A.10. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Completo. . . . .	104
A.11. Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo completo. . . . .	105
A.12. Distribución por Etapa de Niños Según la Tabla de Decisión de 260 Niños. . . . .	106
A.13. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo I. . . . .	107

---

A.14. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo I. . . . .	108
A.15. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.1. . . . .	109
A.16. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.1. . . . .	110
A.17. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Total1. . . . .	111
A.18. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo Total1. . . . .	112
A.19. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.2. . . . .	113
A.20. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.2. . . . .	114
A.21. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Completo. . . . .	115
A.22. Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo Completo. . . . .	116
B.1. Factor de Reducción del Grupo I de Niñas. . . . .	118
B.2. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niñas . . . . .	118
B.3. Factor de Reducción del Grupo II.1 de Niñas. . . . .	119
B.4. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.1 de Niñas . . . . .	119
B.5. Factor de Reducción del Grupo Total1 de Niñas. . . . .	120
B.6. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Total1 de Niñas . . . . .	120

---

B.7. Factor de Reducción del Grupo II.2 de Niñas. . . . .	121
B.8. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niñas . . . . .	121
B.9. Factor de Reducción del Grupo Completo de Niñas. . . . .	122
B.10. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Completo de Niñas . . . . .	122
B.11. Factor de Reducción del Grupo I de Niños. . . . .	123
B.12. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niños . . . . .	123
B.13. Factor de Reducción del Grupo II.1 de Niños. . . . .	124
B.14. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.1 de Niños . . . . .	124
B.15. Factor de Reducción del Grupo Total1 de Niños. . . . .	125
B.16. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Total1 de Niños . . . . .	125
B.17. Factor de Reducción del Grupo II.2 de Niños. . . . .	126
B.18. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niños . . . . .	126
B.19. Factor de Reducción del Grupo Completo de Niños. . . . .	127
B.20. Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Completo de Niños . . . . .	127
C.1. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo I de Niñas. .	128
C.2. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo II.1 de Niñas.	129
C.3. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo Total1 de Niñas. . . . .	129
C.4. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo II.2 de Niñas.	130
C.5. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo Completo de Niñas. . . . .	130
C.6. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo I de Niños. .	131

---

C.7. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo II.1 de Niños.	131
C.8. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo Total1 de Niños. . . . .	132
C.9. Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas ,Originales y Reducidas, del Grupo II.2 de Niños. . . . .	132
C.10.Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas ,Originales y Reducidas, del Grupo Completo de Niños. . . . .	133



# AGRADECIMIENTOS

---

Gracias a Dios por permitirme terminar una etapa más en mi vida. Agradezco a mis padres, Ma. De Jesús Medina Frausto y Juan Antonio Cid Pérez, a mis hermanos Daniel Antonio, Jesús Víctor Manuel, Elías Enrique y Juan, por su paciencia y apoyo incondicional. A mis amigos, por acompañarme en momentos difíciles y de alegría. Un agradecimiento muy especial a Vanesa Ávalos, Nelly Monserrat Hernández, Alexis Omar Figueroa y a Paulina Alejandra Ávila, por su compañerismo, amistad y solidaridad. A mis profesores del posgrado de Ingeniería en Sistemas por sus enseñanzas y por su paciencia, en especial al Dr. Fernando López Irarragorri por su disposición, trabajo y sus consejos. A mis revisores Dr. Romeo Sánchez Nigenda y Dr. Gregorio Toscano Pulido por sus valiosos comentarios y aportaciones. También agradezco a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica por el apoyo económico. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca de manutención que se me otorgó.

# RESUMEN

---

José Alejandro Cid Medina.

Candidato para el grado de Maestro en Ingeniería  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Título del estudio:

CARACTERIZACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA  
EN NIÑOS EN EDADES DE ENTRE 9 Y 16 AÑOS  
MEDIANTE CONJUNTOS APROXIMADOS Y  
CONJUNTOS DIFUSOS

Número de páginas: 142.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** Conocer el nivel de desarrollo en el que se encuentra un niño resulta útil cuando se requiere iniciar, modificar o retirar un tratamiento, en este sentido es deseable contar un indicador de crecimiento que sea confiable y que además sea simple de interpretar por los especialistas.

Para estimar de manera adecuada el nivel de desarrollo se han investigado diferentes indicadores, tales como: La edad cronológica, el sexo, algunas partes del cuerpo como mano, muñeca, rodilla, cadera, mandíbula y vértebras cervicales. El

indicador de madurez más popular, por sus buenos resultados, es el que se basa en el estudio de radiografías de mano-muñeca, aunque, ha recibido numerosas críticas debido a que requiere más de una radiografía lo que implica exposición adicional del paciente a rayos x, por otra parte se requiere observar los cambios en un número elevado de huesos para estimar la maduración, por lo que es difícil por dos razones principalmente: La primera, cuando hay huesos que se transponen se complica observar el crecimiento y la segunda, los cambios son tan pequeños que resulta casi imposible percibirlos. Por otro lado, cuando se estudian las radiografías laterales cefalométricas solo se estudian 3 vértebras y se requiere solo una radiografía para realizar la estimación de la maduración ósea.

En este trabajo de investigación se trata el problema de caracterización de la maduración ósea, a partir de radiografías de las vértebras cervicales, como un problema multicriterio. y es abordado con Conjuntos Aproximados (Rough Sets) y con Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets).

#### CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES:

- La metodología presentada para la estimación de la maduración ósea puede considerarse como promisoría por los buenos resultados arrojados en los experimentos realizados en la presente investigación. Mismos que superan en calidad a los obtenidos por Lopez&Prado que mostraron eran superiores a otros métodos reconocidos de clasificación.
- Se han considerado datos de niños con maloclusiones, dando atención a un reclamo constante en varias publicaciones sobre el tema, y aunque no fueron excelentes los resultados de la estimación de la maduración ósea en niños con maloclusiones a partir de reglas generadas de datos de niños con oclusión normal si pueden calificarse de buenos los resultados lo que demuestra la robustez de la metodología de clasificación, también se evidencia en los buenos resultados obtenidos al aplicarse a un conjunto de datos con mucho ruido.

- Comparando la metodología con otros métodos reportados en la literatura se puede afirmar que los resultados obtenidos son muy satisfactorios y cumplen con los objetivos trazados en esta investigación, pues las reglas para la estimación se presentan en términos lingüístico que son del dominio de los especialistas por lo que no presenta dificultad alguna su interpretación por parte de estos. Por otra parte el esfuerzo que se requiere para establecer los parámetros del sistema de clasificación no es muy grande siempre y cuando se pueda reunir un panel de expertos calificados en la materia.
- La metodología puede ser aplicada tal cual a diversos grupos étnicos, sin detrimento de la calidad de los resultados lo que la posiciona como una potente herramienta para convertirse en un estándar a nivel mundial. En este sentido también tributa el hecho de que su implementación computacional no resulta complicada y que su base de clasificación puede ser actualizada a un costo razonable.
- La contribución principal de esta investigación es la metodología que permite estimar la maduración ósea con una mayor precisión que métodos anteriores. La descripción de las etapas se realiza mediante reglas que usan términos lingüísticos.

Firma del asesor: \_\_\_\_\_

Dr. Fernando López Irarragorri

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN.

---

### 1.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se presenta el problema de la estimación del potencial de crecimiento de niños y adolescentes con edades entre 9 y 16 años a partir de la estimación de la maduración ósea; se presenta, además, el diseño de la investigación que comprende: Contexto, los antecedentes, el problema como un problema científico, la hipótesis de partida, la declaración de objetivos generales y específicos, justificación de la pertinencia y vigencia de la investigación, las tareas científicas, la metodología que se planea seguir para abordar el problema, y la contribución o novedad científica. También se incluye una breve descripción del resto de los capítulos de la tesis y finalmente las conclusiones del capítulo.

### 1.2 CONTEXTO.

En los tratamientos de ortodoncia, ortopédicos, cirugía maxilofacial, endocrinológicos, y por lo general en tratamientos pediátricos el momento ideal para iniciarlos o modificarlos es cuando el paciente está cerca de su estado potencial de crecimiento ya que se estimula aún más la respuesta biológica para lograr resultados óptimos que son afectados por el crecimiento [50, 6]. Mientras que el proceso de crecimiento del ser humano está correlacionado con la maduración ósea, no lo está con la edad cronológica [10]. Según Hernández[28]: “El conocimiento de este da-

to (maduración ósea) es fundamental para realizar una estimación de la talla final, para valorar las posibilidades terapéuticas de un niño con patología del crecimiento, y para controlar los efectos del tratamiento. Incluso en otras especialidades distintas de la pediatría y endocrinología pediátrica, como la traumatología y ortodoncia, el conocimiento de la maduración ósea es también de gran utilidad para decidir el momento de iniciar algunos tratamientos”. Esto también aplica para el potencial de crecimiento.

El potencial de crecimiento se relaciona estrechamente con la madurez esquelética [52], ambos son influidos por factores tales como: Alimentación, calidad de vida, zona geográfica y etnicidad de la muestra.

El proceso de crecimiento es continuo y no uniforme, con periodos de aceleración y desaceleración (San Román et al [52]). Según Quintana [50], “el inicio, intensidad y duración del pico puberal de crecimiento facial presentan variaciones considerables entre individuos”. Esto aplica también para el crecimiento de huesos en general, por ello cualquier clasificación no es más que una aproximación que será tan fina como etapas se identifiquen. Para algunos tratamientos basta con considerar periodos (etapas) de entre 3 y 6 meses, por ejemplo ciertos tratamientos ortodóncicos. Sin embargo, otros requieren de mayor precisión como cirugías maxilofaciales u ortopédicas.

### 1.3 ANTECEDENTES.

Sobradillo-Ruiz [58] dice “El único indicador del desarrollo que es válido, desde el nacimiento hasta la madurez, es la edad ósea. Es un parámetro de gran importancia en el estudio de las alteraciones del crecimiento. Y además es la base para el cálculo del pronóstico de talla final”. Greulich&Pyle [22] indican “Un factor que dificulta determinar el nivel de desarrollo en los niños es la existencia de maduración temprana o tardía”, por eso la estimación de la madurez ósea es una tarea difícil. Varios investigadores han utilizado diferentes indicadores de madurez que se consi-

deran poco confiables como: La edad cronológica, desarrollo dental, peso, estatura, cambios de voz, menarquia, características sexuales secundarias, crecimiento facial y madurez de mano-muñeca [50, 22]. Los estudios efectuados tomando información de cefalogramas craneofaciales pueden considerarse como buenos indicadores de madurez [36, 6].

Otros indicadores como la raza y el sexo, se estudiaron ampliamente en otras investigaciones, pero ninguno de los autores reportó utilidad de estos parámetros para la estimación de la maduración ósea [46].

Durante años el indicador de madurez ósea considerado el mejor y más confiable se deriva de las radiografías mano-muñeca [52]. Este indicador se utiliza para tratamientos ortopédicos funcionales de mandíbula, ortodoncia y en tratamientos pediátricos en general [36, 6]. Entre los inconvenientes que presenta este método se pueden nombrar los siguientes:

- Se usa más de una radiografía [10], se expone al individuo a radiaciones adicionales.
- Los huesos mostrados en las radiografías deben ser nítidos y el paciente no debe de haber padecido alguna enfermedad sistémica (diabetes, sida, artritis reumatoidea, etc.) que pueda afectar el desarrollo [6, 7, 52].

Respecto a lo anterior, Quintana [50] menciona que un buen indicador de madurez debe de:

1. Evitar exposiciones adicionales a rayos “X”.
2. Ser de fácil aplicación e interpretación.
3. Tener consistencia en la interpretación de los datos (inter-examinadores).
4. Tener utilidad diagnóstica al anticipar la ocurrencia del crecimiento máximo.

5. Ser eficaz al determinar el máximo crecimiento mandibular (aplica también al pico de los huesos en general).

En la búsqueda de un indicador de la maduración ósea que arroje caracterizaciones al menos tan buenas y exactas como las obtenidas por los métodos basados en la evaluación de la mano-muñeca, Lamparski, y otros autores determinaron una nueva forma de evaluar la madurez del esqueleto empleando vértebras cervicales como referencia [52].

Los nuevos métodos están basados en radiografías laterales cefalométricas, que son usadas de manera rutinaria en diagnósticos ortodóncicos [10, 6], en las que se estudian las vértebras cervicales. Un gran número de estos nuevos métodos están basados en el método de Lamparski [12].

Varios investigadores han demostrado que las estimaciones de la maduración ósea basadas en la radiografías de las vértebras cervicales dan resultados tan precisos como los que se obtienen con radiografías de mano-muñeca [6], y a diferencia de este último solo se necesita una radiografía [6, 50]. Lamparski [34] y Baccetti et al. [8] estudiaron de la segunda a la sexta vértebra, mientras Hassel y Farman [27] estudiaron de la segunda a la cuarta vértebra, simplificando el estudio. Estos estudios concluyen que evaluar la madurez ósea trabajando con las vértebras cervicales es más sencillo, más económico, y evita exposición adicional a radiaciones [6]. Incluso, esta manera de estimar la madurez ósea ha demostrado ser más fiable que los realizados con radiografías de mano-muñeca [52]. Townsend y Grave [46] sugieren que la evaluación de la maduración vertebral se puede aplicar de manera general a la práctica de ortodoncia.

Lamparski [34] establece un patrón donde estudia la morfología de los cuerpos vertebrales, tomando en cuenta las siguientes características: Concavidad del borde inferior, cambios en el crecimiento de la altura y forma de las vértebras; para estimar la maduración ósea. Lamparski examina desde la segunda hasta la sexta vértebra, pues considera que es ahí es donde se presentan los cambios que sirven para estimar la



madurez ósea. Estandarizó 6 etapas de la maduración ósea, en las cuales se producen los cambios morfológicos de las vértebras cervicales, y comprobó estadísticamente que usar esta forma de estimación de madurez ósea es tan válida y confiable como la que se realiza con radiografías de mano-muñeca, teniendo como ventaja el uso de una sola radiografía para este estudio [10]. Los indicadores de madurez son los mismos para hombres y mujeres, la diferencia radica en que los hombres tardan más en madurar que las mujeres [46, 36].

Con base en la metodología propuesta por Lamparski, Hassel y Farman [27] realizaron su propia investigación, y concluyeron que bastaba con estudiar, en las radiografías cefalométricas, la segunda, tercera y cuarta vértebras para estimar la maduración ósea. La aportación de este estudio resultó en la clasificación de 6 estadios o etapas de maduración: 1. Iniciación, 2. Aceleración, 3. Transición, 4. Desaceleración, 5. Maduración, 6. Finalización [36, 46]. Cada etapa tiene características diferentes. Características relacionadas a la forma de la vértebra que indican madurez y si hay un potencial de crecimiento.

Hassel y Farman observaron los cuerpos de la segunda (C2), tercera (C3) y cuarta (C4) vértebra en una radiografía cefalométrica lateral, y evaluaron la madurez ósea a través de la correlación con el método de Fishman que evalúa la maduración ósea de la radiografía de mano-muñeca izquierda con un indicador de madurez desarrollado por él. Su objetivo principal fue crear un método que evaluara la maduración ósea usando una radiografía rutinaria en los tratamientos odontológicos [46].

Según San Román [52], al considerar el estudio de la concavidad inferior, la altura y la morfología de las vértebras para estimar la madurez ósea, queda demostrado que el mejor indicador es la concavidad inferior de las vértebras.

Los estudios realizados tienen un único objetivo, evaluar la edad ósea de un paciente y establecer si el crecimiento máximo ha sucedido, está sucediendo o sucederá [46, 6], Quintana 2008 dice “*El beneficio de conocer la etapa de madurez esquelética permite adoptar medidas respecto a las terapias ortopédicas que se indiquen en*

---

*pacientes con anomalías esqueléticas*".

Los métodos creados hasta la actualidad investigan como estimar la maduración ósea, se avanza y se mejora en este campo a través de los años recientes, aún así falta una metodología que sea un estándar que permita obtener resultados más exactos y precisos utilizando un método que la describa en términos simples [36]. Por ejemplo, se puede establecer que un estado de madurez de un individuo puede estar en la etapa 3 de maduración ósea, pero no se sabe si está por ingresar, en transición o está por finalizar. Este dato resulta de interés a los especialistas en la toma de decisiones del comienzo o modificación de algún tratamiento específico que esté relacionado con el crecimiento.

Recientemente, en un estudio realizado por López&Prado [36], se incorporan 13 características que están basadas en la forma y crecimiento de la segunda, tercera y cuarta vértebras. En su estudio López&Prado desarrollaron una metodología para la estimación de la maduración ósea de forma simple, para ello emplearon Conjuntos Aproximados (Rough Set) y derivaron reglas de clasificación atendiendo a las 13 características mencionadas anteriormente. Estas reglas contienen términos lingüísticos que son de uso común por los especialistas, de ahí la facilidad en la interpretación de las mismas. Pero quizás el logro más importante de López&Prado [36] fue el establecer etapas de transición entre cada etapa de Hassel&Farman [27] para de esta manera aumentar la calidad y cobertura de la clasificación, a la par que la hace más realista, ya que el crecimiento es un proceso continuo.

Sin embargo, la estimación de la maduración ósea o el potencial de crecimiento empleando el método de López&Prado no es suficientemente preciso para algunas aplicaciones de la medicina pediátrica [8], como por ejemplo estimar en qué momento de la etapa se encuentra: Al inicio, en el pico de desarrollo o saliendo de la etapa. Este es precisamente el objetivo principal de este trabajo de investigación.

## 1.4 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.

Cuando el individuo está creciendo los huesos sufren una serie de cambios que pueden observarse a través de radiografías [36]. El crecimiento se da de manera constante, es continuo [52]. Sin embargo, el crecimiento de los huesos o maduración ósea no se da en el mismo periodo o edad cronológica en todos los seres humanos, hay factores sociales, económicos y antropológicos entre otros que son responsables de estas diferencias en general, aunque también se encuentran las anomalías que aceleran o retardan el proceso de crecimiento.

Aunque existen métodos usados ampliamente, como los que se basan en la estimación de la maduración ósea empleando radiografías de la mano-muñeca, también existen numerosas críticas a estos métodos. Sin embargo, estudios recientes han demostrado que el empleo de radiografías de la segunda, tercera y cuarta vértebra cervical dan resultados tan exactos como los arrojados por los métodos basados en las radiografías de la mano-muñeca. Se ha demostrado la utilidad de varios métodos inspirados en estudios longitudinales [10, 8, 27].

En esta investigación se desarrollará una metodología que arroje una clasificación suficientemente precisa para cualquier tratamiento o estudio pediátrico que se le aplique a un niño o adolescente con edad entre 9 y 16 años. La idea es retomar los resultados obtenidos por López&Prado [36] e interpretar los resultados y especificar una clasificación más detallada para lograr una estimación de la maduración ósea dentro de una etapa (de las propuestas por López&Prado), y por ende una estimación más fina o aproximada que otros métodos desarrollados. Se pretende lograr esto manteniendo la facilidad en la interpretación de los resultados lograda en López&Prado, en forma de reglas simples que empleen términos lingüísticos que son usados por los especialistas.

EL uso de los Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets) en la estimación de la maduración ósea no es nueva. Se han implementado en trabajos previos [40, 66], y desarrollado

---

para métodos basados en radiografías de la mano-muñeca, pero no se basan en caracterizaciones lingüísticas. Sus resultados no son fáciles de interpretar por los especialistas y no han tenido un gran impacto.

En esta investigación se propone combinar Conjuntos Aproximados (Rough Sets) y Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets) para derivar reglas que empleen términos lingüísticos y que resulten de fácil interpretación por parte de los especialistas. Para ello se realizan estudios longitudinales de los que con ayuda de expertos se derivan caracterizaciones lingüísticas

Una recomendación que se hace en varios estudios previos es la de la inclusión de no solo niños sanos, sino de niños con maloclusiones detectadas. Es por ello que en esta investigación se incluyen también niños con maloclusiones de forma tal que los resultados se apliquen para estimar la maduración ósea de forma generalizada a niños pertenecientes a un grupo poblacional homogéneo desde un punto de vista étnico. En este trabajo se emplearán los datos de niños y niñas de entre 9 y 16 años originarios de Matanzas, Cuba.

## 1.5 HIPÓTESIS.

Es posible obtener una clasificación suficientemente fina de la maduración ósea de forma tal que sirva a cualquier tratamiento o estudio pediátrico empleando una metodología de clasificación multicriterio basada en la teoría del apoyo a la decisión.

## 1.6 OBJETIVOS.

### 1.6.1 GENERAL.

Contribuir al estado del arte desarrollando una metodología para el apoyo de decisión en la estimación del potencial de crecimiento a partir de la estimación de la maduración ósea en niños y adolescentes entre 9 y 16 años que sea fácil de interpretar

---

por los especialistas y cuyos resultados no requieran, para su interpretación, de conocimientos especiales de matemáticas u otra ciencia exacta.

### 1.6.2 ESPECÍFICOS.

- Ganar conocimiento profundo en el estudio del problema de la estimación del potencial de crecimiento aplicando la metodología de la investigación de operaciones para derivar metodologías y métodos que resulten fáciles de interpretar por los especialistas, a la vez que sea viable de implementar computacionalmente.
- Validar el método desarrollado comprobándolo mediante un caso de estudio concreto con datos reales.

## 1.7 JUSTIFICACIÓN DE LA PERTINENCIA Y VIGENCIA DE LA INVESTIGACIÓN.

Estimación del potencial de crecimiento en términos simples para facilitar la interpretación por parte de los especialistas, con precisión aceptable para los diferentes tratamientos en los que se requiere de este indicador. El método de estimación debe ser tal que su implementación en un paquete de software resulte lo más eficiente posible.

## 1.8 METODOLOGÍA PROPUESTA.

- Se emplea el análisis multicriterio de la decisión como recurso metodológico y formal para implementar el procedimiento de apoyo a la decisión.
- Las teorías de Conjuntos Aproximados (Rough Sets) y Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets) se emplean para establecer los métodos y algoritmos para el pro-

---

cesamiento de la información y la generación de recomendaciones para los tomadores de decisión.

## 1.9 CONTRIBUCIÓN ESPERADA.

Desarrollo de una metodología de estimación del potencial de crecimiento a partir del Apoyo a la Decisión Multicriterio, que permita:

1. La estimación suficientemente fina de las etapas de la maduración ósea de forma tal que sirva a cualquier tratamiento o estudio pediátrico.
2. Implementar computacionalmente la metodología desarrollada, tal que los resultados sean fácilmente interpretables por los especialistas.

## 1.10 CONCLUSIONES.

En este capítulo se han aportado elementos que evidencian la importancia que tiene el problema de la estimación del potencial de crecimiento en niños y adolescentes. Asimismo se ha justificado que tal problema es un problema científico.

Se han brindado elementos que permiten establecer que este es un problema difícil, ya que la maduración ósea (indicador principal para estimar el potencial de crecimiento) no está correlacionada con la edad sexual o cronológica del paciente.

Se desarrolla una metodología de apoyo a la decisión basada en el análisis multicriterio de la decisión para resolver este problema.

## CAPÍTULO 2

# MARCO TEÓRICO.

---

En este capítulo se presentan las teorías en las que se fundamenta este trabajo. En la primera sección (2.2) se hace una descripción de la teoría multicriterio, en la sección siguiente (2.3) se describen conceptos básicos fundamentales de la teoría de Conjuntos Aproximados (Rough Sets), posteriormente se presentan elementos de la teoría de los conjuntos difusos (2.4) y finalmente se presentan las conclusiones del capítulo.

## 2.1 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA DECISIÓN MULTICRITERIO.

La capacidad de clasificación en los seres humanos y otras especies está basada en la profundidad de los conocimientos que se tengan sobre la situación en la que se encuentren. Dicha capacidad ayuda a clasificar los eventos o situaciones que son conjuntos de información que se extrae del mundo real [41]. Pawlak [41] menciona que “La clasificación es clave en el razonamiento, el aprendizaje y toma de decisiones”. “El conocimiento es una serie de patrones de clasificación de un dominio de interés, que proporciona datos explícitos de la realidad, junto con la capacidad de razonamiento capaz de entregar datos explícitos derivables de conocimiento”. “El conocimiento se basa en la capacidad de clasificar objetos, por objeto se entiende que es cualquier cosa que se piense, por ejemplo cosas reales, estados, procesos, momentos en el tiempo. El conocimiento está conectado con una variedad de clasificaciones

relacionadas con partes específicas del mundo real o abstracto, que es llamado universo”. Puesto que el problema de clasificación es también un problema de toma de decisiones [53], en lo que resta de esta sección se presentará una breve introducción a la disciplina de apoyo a la toma de decisión.

## 2.2 APOYO A LA DECISIÓN.

El acto de tomar decisión puede definirse como “la elección de una alternativa de entre varias que producen un futuro incierto” [9]. La experiencia del tomador de decisiones es primordial para realizar una decisión. La decisión es una parte del proceso de la toma de decisiones, es decir el proceso que se sigue hasta llegar a la elección de la alternativa [9, 53].

**La Toma de Decisiones** es un proceso que está definido por ciertas características como: Determinar el problema, recolectar y verificar la información, identificar alternativas, anticipar consecuencias de las decisiones, tomar opciones usando un juicio lógico basado en la información disponible, informar a todos los participantes de la toma de decisión y evaluar las decisiones [36]. El proceso de la Toma de Decisiones se divide en 4 etapas [19]:

- **Inteligencia (Inferencia o Inducción):** En esta etapa es donde se estructura el problema, se analizan los puntos de oportunidad, se hace un análisis y una exploración profunda de todos los elementos con los que se cuentan. Al final se tiene el problema bien definido, se aprende de los datos y se obtienen estadísticas [9, 19].
- **Diseño (Pronóstico o Predicción):** Se formulan soluciones, se hace el modelado, se generan alternativas y simulaciones [36] que permiten observar las posibles consecuencias de las acciones [19].
- **Elección:** Se hace la selección de alternativas, se busca maximizar los objetivos, y se toma la decisión [36].



- Implementación: La o las alternativas elegidas como las mejores se utilizan en la vida real, si los resultados no son los esperados se regresa a la etapa que se considera pertinente para la mejora de la alternativa sugerida [36].

En la Figura 2.1 se describe como se lleva a cabo el proceso de Toma de Decisiones.

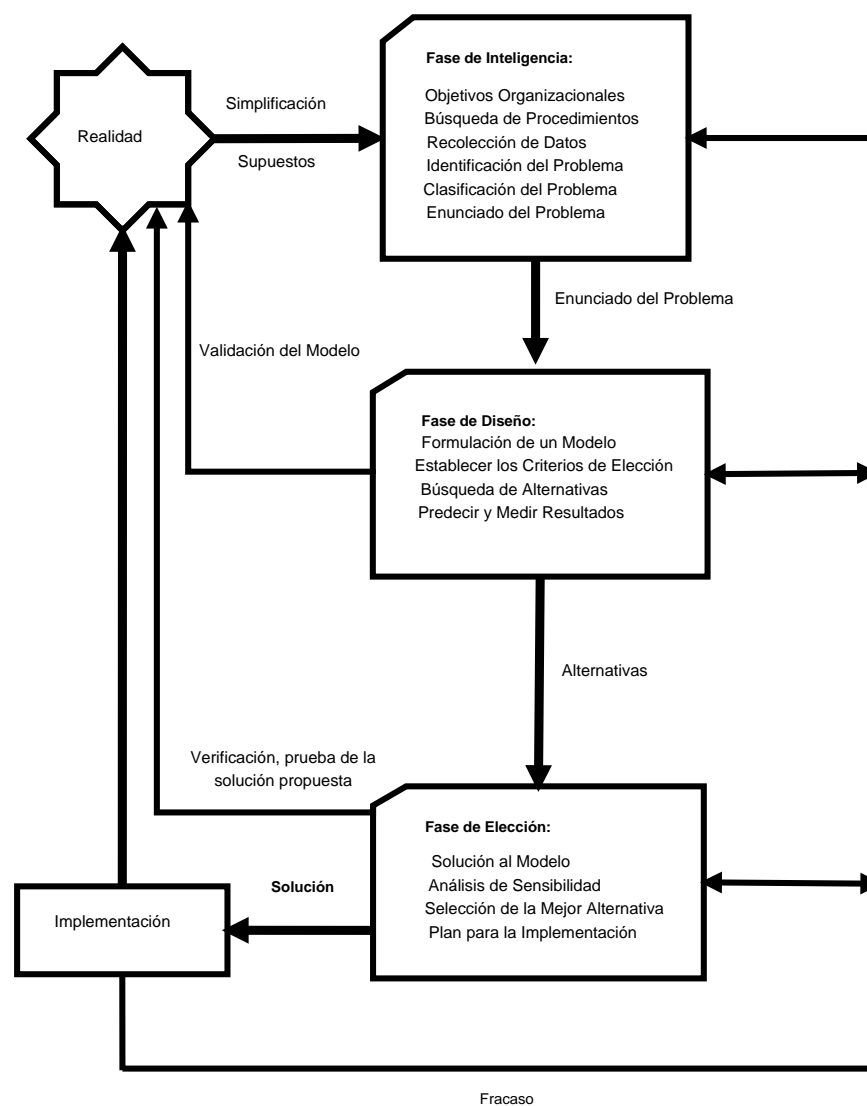


Figura 2.1: Proceso de la Toma de Decisiones [36]

## 2.3 CIENCIAS DE LA DECISIÓN.

El término “apoyo a la decisión (decision support)” hace referencia a apoyar a las personas en la toma de decisiones [9]. Existen dos disciplinas que tienen una relación estrecha con la toma de decisiones, la primera se enfoca a la toma de decisiones realizadas por máquinas (Decision Systems): Programas de computación, robots, circuitos eléctricos, sistemas expertos autónomos, entre otros. Estos programas intentan realizar tomar decisiones de rutina, monitoreo y control de procesos. La segunda (Decision Sciences) es una ciencia interdisciplinaria que se basa en economía, pronóstico, teoría de decisión estadística y psicología cognitiva [9]; hay tres cuestiones que se interrelacionan y que son importantes para la toma de decisión humana, mismas a las que intentan dar respuesta las ciencias de la decisión [9]:

1. ¿Cómo debe una persona racional tomar la decisión?
2. ¿Realmente cómo las personas toman decisiones?
3. ¿Cómo se puede ayudar a las personas a mejorar sus decisiones?

Las respuestas a cada una de estas preguntas han dado lugar a tres enfoques o paradigmas dentro de las ciencias de la decisión:

1. Normativos: Sugieren cómo tomar las decisiones [19]; La Teoría de la decisión, Teoría de la utilidad multiatributo, Teoría de juegos, Teoría de la selección.
2. Descriptivos: Describen cómo se hacen las cosas [19]; La Psicología cognitiva, Ciencias Sociales y Conductuales
3. Análisis Prescriptivo: Trata de ayudar al tomador de decisiones a resolver un problema real generalmente mal definido mediante el enfoque normativo teniendo en cuenta las capacidades cognitivas, algunas son [19]; Filosofía, Psicología, Economía, Estadística, Ciencias de la Computación.

Las disciplinas de apoyo a la decisión más importantes son:

Investigación de operaciones, análisis de la decisión, sistemas de apoyo a la decisión, almacenamiento de datos y grupo de apoyo a las decisiones. En la actualidad existen nuevas herramientas y técnicas para la toma de decisiones: Tecnología de comunicación, multimedia, minería de datos, sistemas de gestión de conocimientos, entre otros [9]

Estas herramientas y técnicas ayudan a clasificar la información para realizar una acción o dicho de otra manera tomar una decisión con una visión amplia del problema que se esté tratando.

## 2.4 PROBLEMAS DE DECISIÓN.

El origen de los problemas tiene una gran diversidad en términos de su complejidad y las investigaciones para solucionarlos, así como la metodología que hay que seguir para resolverlos. Es por ello que resulta importante clasificar estos problemas para facilitar la selección o desarrollo de una metodología de solución eficaz [15]. Usualmente se clasifican los problemas de decisión atendiendo a:

1. El conjunto de alternativas: Si es finito, con un número no muy grande de alternativas se consideran problemas discretos, de forma tal que todas puedan ser evaluadas en un tiempo razonable por un tomador de decisiones. Si el conjunto de alternativas es infinito o finito pero con un número muy grande de alternativas se consideran problemas continuos [36].
2. El conocimiento y nivel de control sobre la ocurrencia de consecuencias asociadas a las alternativas: Certeza, incertidumbre o riesgo, incertidumbre total o completa [19].
3. La operación que se desea realizar sobre el conjunto de alternativas para generar las recomendaciones, para apoyar al tomador de decisiones: jerarquización, selección, clasificación [15].

**Problemas Discretos:** Implica examinar un conjunto discreto de alternativas, donde cada alternativa es descrita junto con algunos atributos. Dentro del contexto de toma de decisiones estos atributos tienen la forma de criterios de evaluación (problemas de clasificación multicriterio) [15].

**Problemas Continuos:** Implica casos donde el número posible de alternativas es infinito, en tales casos, solo se puede tener una idea general de dónde se encuentra la solución factible, cada punto en esta región corresponde a una alternativa específica (problemas de optimización) [15].

La problemática de la decisión según las diferentes operaciones que pueden realizarse sobre el conjunto de las alternativas son [15]:

1. Jerarquización: Hay un número de alternativas, se ordenan de mayor a menor según las preferencias (asociadas a problemas de optimización).
2. Selección: Se toman las alternativas más preferidas del conjunto.
3. Clasificación: Hay categorías o grupos definidos en los cuales se desean agregar las alternativas según la preferencia, los grupos son nominales u ordinales.
4. Descripción: Se identifican las características más representativas de las alternativas y se realiza una descripción con base en estos rasgos [36].

#### 2.4.1 METODOLOGÍAS MCDA (MULTICRITERIA DECISION AID).

Diversos problemas cotidianos son difíciles de formular como problemas unidimensionales, por ello los modelos MCDA son útiles cuando se involucran los modelos y representaciones de las preferencias de los tomadores de decisiones. Según Doumpus&Zopounidis Doumpus [15] las metodologías MCDA son clasificadas según las características del modelo de la siguiente manera:

1. Programación matemática multiobjetivo.
2. Teoría de la utilidad multiatributo (MAUT-MultiAttribute Utility Theory).

3. Teoría de relaciones de sobreclasificación (ORT-Outranking Relation Theory).
4. Análisis de desglose de preferencias (PDA-Preference Disaggregation Analysis).

La programación matemática multiobjetivo se utiliza cuando múltiples funciones objetivo necesitan ser optimizadas, su formulación original es:

$$\text{Max o Min } \{f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)\} \text{ s.a. } x \in B.$$

Donde  $\{f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)\}$  son las funciones objetivo a optimizar,  $B$  es un conjunto de soluciones factibles, y  $x$  es un vector de variables de decisión. La teoría de utilidad multiatributo amplía la teoría de utilidad clásica al caso multidimensional, su objetivo es a través de una función de utilidad  $U(g)$  representar las preferencias del tomador de decisiones,  $g$  es un vector de criterios [15].

$$U(g) > U(g') \Leftrightarrow x \text{ es Preferido a } x'$$

$$U(g) = U(g') \Leftrightarrow x = x' \text{ (la alternativa } x \text{ es indiferente a } x').$$

La función de utilidad se representa por:  $U(g) = p_1u_1(g_1) + p_2u_2(g_2) + \dots + p_nu_n(g_n)$ ;  $u_1, u_2, \dots, u_n$  son las funciones de utilidad marginal según el criterio evaluado, cada función de utilidad marginal  $u_i(g_i)$  especifica la utilidad de la alternativa para cada criterio. Las constantes  $p_1, p_2, \dots, p_n$  son a menudo consideradas como los pesos de los criterios, deben de cumplir la siguiente restricción [15]:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

La relación de sobreclasificación (Outranking Relation Theory) modela y reproduce las preferencias del tomador de decisiones, sus diferencias con la teoría de utilidad multiatributo son dos [36]:

- No es transitiva.

- La relación de sobreclasificación no está completa: En las teorías multiatributo se consideran las relaciones de preferencia e inferencia, y en la sobreclasificación se introduce la relación de incompatibilidad.

El análisis de desglose de preferencias se enfoca en analizar las decisiones actuales realizadas por los tomadores de decisiones, su enfoque es opuesto al del MAUT y ORT [36].

## 2.4.2 PROBLEMAS DE CLASIFICACIÓN.

La clasificación es la asignación a un grupo o clase predefinido de un elemento o varios según sus características [36]. Los grupos nominales son utilizados para clasificación o discriminación, y describen a los elementos que lo forman pero no proporcionan información extra. Los grupos definidos de manera ordinal son conocidos como *sorting* (ordenamiento) y proporcionan información extra. Usualmente el método que se utilizaba para obtener una clasificación era basado en la regresión, que consiste en determinar la concordancia de la variable dependiente  $Y$  con un vector de variables  $X$  [36]. La diferencia es que entre estas dos metodologías en el problema de clasificación la variable dependiente no es una variable real y es discreta. Las variables independientes explican los atributos o criterios. Los atributos son explicaciones nominales, las alternativas son explicaciones ordinales [36]. Para realizar una clasificación se requiere un análisis de la muestra de entrenamiento, donde hay  $m$  alternativas  $(x_1, x_2, x_3 \dots x_m)$ ,  $n$  criterios  $(g_1, g_2, g_3 \dots g_n)$ ,  $q$  grupos  $(C_1, C_2, C_3 \dots C_q)$  cada elemento del conjunto de datos que se quiere clasificar se considera como una alternativa  $X_j$  se observa como un compuesto de atributos. Ejemplo:

$$X_j = (g_{j1}, g_{j2}, \dots, g_{jn}).$$

Considerando la notación anterior el modelo se define como  $f(g) \rightarrow \hat{C}$ , de esta manera se puede realizar la clasificación en apoyo de sus características que se explican en el vector de criterios  $g$ . Se pretende que la diferencia entre la clasificación que

se estima  $(\hat{C})$  y la clasificación *a priori*( $C$ ) sea ínfima, perfeccionando la exactitud de muestra de entrenamiento. Si ambos modelos tienen diferencias mínimas la clasificación que se estimó servirá para la clasificación de nuevas alternativas. En años recientes ha tomado fuerza una nueva teoría de clasificación que se fundamenta en reglas de inducción que dan como conclusión un patrón de la forma: *Si (Antecedente) ... Entonces (Consecuente)* [36], han originado nuevos métodos de clasificación como lo son la teoría de Conjuntos Aproximados (Rough Sets) y Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets).

## 2.5 TEORÍA DE CONJUNTOS APROXIMADOS (ROUGH SETS).

Los Conjuntos Aproximados son un nuevo enfoque matemático que trabaja con datos que presentan imprecisión, vaguedad e incertidumbre. Se relaciona con teoría de la evidencia, redes neuronales y conjuntos difusos, entre otras ramas de la inteligencia artificial. Este vínculo es una característica importante que ha contribuido a la rápida y amplia propagación de los Conjuntos Aproximados. Esta teoría resulta de interés para la inteligencia artificial y ciencias cognitivas tales como: aprendizaje automático, la adquisición de conocimientos, análisis de la decisión y descubrimiento de conocimiento en bases de datos, sistemas expertos y patrones de reconocimiento. Asimismo, tiene peculiar importancia para los sistemas de apoyo a la decisión y minería de datos [41, 44, 47, 60].

Se tiene un conjunto de elementos que tienen atributos en común, se seleccionan atributos *a priori* y se agrupan los elementos que tengan valores iguales en sus atributos. A esto se le conoce como relación de indiscernibilidad, que es una relación de equivalencia que agrupa en clases disjuntas a los elementos indiscernibles entre ellos con base en el par atributo-valor. Las inconsistencias que existen son tratadas mediante dos aproximaciones por defecto y por exceso. El primero hace referencia a los elementos que con seguridad pertenece a una clase y los segundos a los que

probablemente pertenezcan a una clase [60]. Se permite que los datos tengan inconsistencias al iniciar el análisis y los resultados ayudan a determinar la importancia de los atributos y observar las relaciones entre ellos [41, 47]

### 2.5.1 SISTEMA DE INFORMACIÓN.

Para definir un sistema de información se asume que cada objeto existente en el universo tiene asociada información (datos e información) que es expresada mediante atributos [47, 60] como se observa en la Tabla 2.1.

Dado un par  $A = (U, A)$  no vacío de conjuntos finitos, donde  $U$  es el conjunto de objetos y  $A$  el conjunto de atributos, se tiene una función  $a : U \rightarrow V_a$ , donde  $V_a$  es el conjunto de valores de los atributos llamado dominio de  $a$ . El par  $A = (U, A)$  es llamado sistema de información, que expresa el conocimiento *a priori* que se tiene sobre un conjunto de objetos [43, 47].

Caso	Atributos			
	Temperatura	Dolor Cabeza	Náuseas	Tos
1	alta	sí	no	sí
2	muy alta	sí	sí	no
3	alta	no	no	no
4	alta	sí	sí	no
5	normal	sí	no	no
6	normal	no	sí	sí

Tabla 2.1: Sistema de Información

### 2.5.2 TABLA DE DECISIÓN.

En muchas aplicaciones o situaciones problemáticas de decisión se conoce *a priori* un conjunto de categorías a cada una de las cuales deben ser asignados subconjuntos disjuntos y complementarios de alternativas (las intersecciones dos a dos de estos conjuntos es el conjunto vacío y la unión de todos los subconjuntos es igual al con-



junto de las alternativas). Básicamente la solución a un problema de clasificación multicriterio consiste en asignar cada alternativa a una de estas categorías. La asignación se representa en un sistema de información como un atributo (atributo de decisión), cuyos valores asociados a cada alternativa, a diferencia del resto de los atributos del sistema, se asignan en la etapa de selección del proceso de decisión [43, 60].

Los sistemas de información que incluyen este tipo de atributo se conocen como Tablas de Decisión, una Tabla de Decisión es un sistema de información con la estructura  $S = (U, A \cup \{d\})$  donde  $d$  no pertenece  $A$  y es el atributo de decisión. Los atributos de  $A$  son llamados condicionales o atributos de condición. Un sistema de decisión puede tener más de un atributo de decisión [43, 60, 44], ver Tabla 2.2. Por convención, los atributos de decisión se colocan en las últimas columnas de la tabla que representa al sistema de decisión. Por ejemplo, en la Tabla 2.2, el caso 1 puede ser definido a través de reglas que son de la forma “Si... Entonces”, si Temperatura = alta & Dolor Cabeza = sí & Náuseas = no & Tos = sí Entonces gripa = sí.

Caso	Atributos				
	Temperatura	Dolor Cabeza	Náuseas	Tos	Gripa
$x_1$	alta	sí	no	sí	sí
$x_2$	muy alta	sí	sí	no	sí
$x_3$	alta	no	no	no	no
$x_4$	alta	sí	sí	sí	no
$x_5$	normal	sí	no	no	no
$x_6$	normal	no	sí	sí	sí

Tabla 2.2: Tabla de Decisión

Los renglones de esta tabla son etiquetados por los nombres de los elementos que la componen y las columnas son etiquetadas por los atributos de sus elementos. Los datos que llenan la tabla son los valores de los atributos de los elementos.

$U$  = Conjunto de todos los casos.

$A$  = Conjunto de todos los atributos.

$B =$  Subconjunto no vacío de  $A$ .

$V =$  Conjunto de todos los valores de los atributos.

$P : U \times A \rightarrow V$  Una función de información. Ejemplo:

$$P, (1, Temperatura) = Alta.$$

Dado  $a \in A$

$v \in V$

y  $t = (a, v)$  es un par atributo-valor, un bloque de  $t$ , denotado  $[t]$ , es el conjunto de todos los casos de  $U$  para los cuales el atributo  $a$  tiene un valor  $v$  [43, 60].

### 2.5.3 CONJUNTO ELEMENTAL.

Un conjunto o categoría elemental es aquel que se forma al considerar el valor de dos o más atributos que tengan valores iguales. De esta forma todo subconjunto de atributos de  $A$  genera una familia de conjuntos elementales que constituyen una partición de  $U$  [43, 60, 42].

Ejemplo: Si se consideran los atributos Temperatura y Dolor Cabeza de la Tabla 2.2, el conjunto elemental es igual a la intersección de todos los subconjuntos que tengan los mismos valores en los atributos en este caso tenemos cinco conjuntos elementales, como muestra en seguida.

$$[(Temperatura)] \cap [(DolorCabeza)] = \{\{x_1; x_4\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_5\}, \{x_6\}\}$$

### 2.5.4 RELACIÓN DE INDISCERNIBILIDAD.

Dado  $S = (U, A)$  un sistema de información, entonces para cualquier  $B \subseteq A$  se puede definir una relación de indiscernibilidad  $INDS(B)$  [43, 60, 54]:

$$INDS(B) = \{(x, x') \in U^2 \mid \forall a \in B, a(x) = a(x')\}.$$

se escribe  $IND(B)$  o  $U/B$ , también se conoce como clase o relación de equivalencia. Si  $(x, x')$  están dentro de  $IND(B)$  se dice que  $x$  y  $x'$  son indiscernibles entre sí con respecto a  $B$  [43, 60, 68, 42, 54]. Se consideran 3 conjuntos de atributos de la tabla 2.2:

$K = \{\text{Temperatura}\}$ ,  $K' = \{\text{Tos}\}$ ,  $K'' = \{\text{Temperatura, Tos}\}$ . la relación de indiscernibilidad dada por el atributo  $K$  se muestra a continuación:

$$IND(K) = \{\{x_1, x_3, x_4\}\{x_2\}\{x_5, x_6\}\}$$

Así los elementos que son indiscernibles entre sí, son  $x_1, x_2$  y  $x_3$ . Las clases de equivalencia cambia según los atributos que se consideren, como se muestra cuando tomamos los atributos  $K'$  y  $K''$ :

$$IND(K') = \{\{x_1, x_4, x_6\}\{x_2, x_3, x_5\}\}$$

$$IND(K'') = \{\{x_1, x_4\}\{x_3\}\{x_2\}\{x_5\}\{x_6\}\}$$

En la relación de indiscernibilidad del atributo  $\{\text{Tos}\}$  se crean 2 particiones y en la de  $\{\text{Temperatura, Tos}\}$  se crean 5 particiones.

#### 2.5.4 CATEGORÍAS Y CONCEPTOS.

Las particiones que están dentro de una clase de equivalencia o de indiscernibilidad de  $U/B$  se denominan categorías elementales, conocimiento granular o categorías. Si  $d$  es un atributo de decisión y  $w$  es el valor que toma  $d$ . Un concepto es el conjunto  $[(d, w)]$  de toda la muestra del universo  $U$  [57], por ejemplo la Tabla 2.2 tiene 2 valores de decisión: Si y no. Cada valor es un concepto, un subconjunto de  $U$  de todos los miembros del universo  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ . Los conceptos en este ejemplo son:  $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}\{x_3, x_5\}$ .

Considerando la Tabla 2.2, se quiere saber que casos tienen gripa con base en los atributos Temperatura y Náuseas los elementos  $\{x_1, x_3, x_4\}$  son indiscernibles o iguales entre sí, los casos  $\{x_1, x_4\}$  si tienen gripa pero el caso  $\{x_3\}$  no, por lo que

se dice que este concepto es impreciso con respecto a los atributos Temperatura y Náuseas, para trabajar con estas situaciones se emplean las aproximaciones por defecto y por exceso [43, 60, 42, 54].

### 2.5.5 APROXIMACIONES POR DEFECTO Y POR EXCESO.

La aproximación por defecto se define:

$\underline{B}X = \{x \mid [x]\underline{B} \subseteq X\}$  Los objetos en  $\underline{B}X$  que pueden ser identificados como elementos de  $X$  con certeza. La aproximación por exceso se define:  $\overline{B}X = \{x \mid [x]_B \cap X \neq \emptyset\}$  Los objetos en  $\overline{B}X$  son aquellos que probablemente pertenezcan a  $X$ .

El conjunto  $BN_B(X) = \underline{B}X - \overline{B}X$ , Si  $BN_B(X)$  se conoce como la **región límite** de  $X$ , si  $BN_B(X)$  es vacío  $X$  es un **concepto preciso**, de lo contrario se dice que es un concepto impreciso basado en el conocimiento de  $B$  [43, 60, 42, 68]. El conjunto  $U - \underline{B}X$  se le denomina conjunto **Región exterior** de  $X$ , son los elementos que con base en el conocimiento que se tiene son clasificados como elementos que no pertenecen a  $X$  [43, 60, 68]. Por ejemplo si se considera a los elementos que tienen gripa con los atributos Temperatura, y Náuseas, la aproximación por defecto es:  $\{x_4, x_6\}$  y la aproximación por exceso es:  $\{x_1, x_3, x_4, x_6\}$  y la región límite es:

$$BN_B(X) = \underline{B}(X) - \overline{B}(X)$$

$$BN_B(X) = \{x_4, x_6\} - \{x_1, x_3, x_4, x_6\}$$

$$BN_B(X) = \{x_1, x_3\}$$

si  $BN_B(X) = \emptyset$  el conjunto  $X$  es preciso respecto a  $B$ , de lo contrario se dice que el conjunto es impreciso respecto a  $B$ .

**La imprecisión** se puede representar también a través de la siguiente fórmula:

$$\alpha_B(X) = \frac{|\underline{B}(X)|}{|\overline{B}(X)|}$$

Si  $\alpha_B(X) = 1$  el conjunto es preciso con respecto a  $B$ , si  $\alpha_B(X) \leq 1$  el conjunto es impreciso con respecto a  $B$ ,  $\alpha_B(X)$  esta en el intervalo  $[0,1]$  [43, 60].

### 2.5.6 REDUCTO Y NÚCLEO.

La clasificación de objetos se lleva a cabo mediante patrones o atributos. La cuestión es saber que atributos se pueden remover de la tabla de decisión sin que se modifique la familia de conjuntos elementales, es decir, que se preserve la relación de indiscernibilidad. Un subconjunto mínimo  $A' = A$  tal que  $\cap A = \cap A'$  se le conoce como Reducto de  $A$  [43].

### 2.5.7 DEPENDENCIA DE ATRIBUTOS.

Un conjunto de atributos  $D$  depende totalmente de un conjunto de atributos  $C$ ,  $C \Rightarrow D$ , Si todos los atributos de  $C$  determinan de manera única los valores de  $D$ .  $D$  depende totalmente de  $C$ , si existe una dependencia funcional entre los valores de  $C$  y  $D$ . Dado que  $C$  y  $D$  son subconjuntos de  $A$ ,  $D$  depende de  $C$  en un grado  $k(0 \leq k \leq 1)$ , denotado por  $C \Rightarrow kD$ , Si  $D$  depende de  $C$ , entonces  $IND(D) \subseteq IND(C)$  [43].

Si

$$k = \gamma(C, D) = \frac{|POS_C(D)|}{|U|}$$

Donde la región positiva  $POS_C(D) = \bigcup_{x \in \frac{U}{D}} \underline{C}(X)$ , de la partición  $U/D$  con respecto a  $C$ ,

$$\gamma(C, D) = \sum_{x \in \frac{U}{D}} \underline{C}(X)$$

Donde la región positiva son todos aquellos elementos que pueden ser clasificados únicamente por los conjuntos generados por la relación de indiscernibilidad  $U/D$ , por medio de  $C$ .

Ejemplo:

$$IND(C) = \{\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_2\}, \{x_5, x_6\}\}$$

$$IND(D) = \{\{x_1, x_4, x_5, x_6\}, \{x_2, x_3\}\}$$

$$k = \frac{|POS_c(D)|}{|U|} = \sum_{\substack{X \\ X \in \overline{D}}} \frac{|C(X)|}{|U|} = \frac{2+1}{6} = 0.5$$

Si  $k = 1$ ,  $D$  es totalmente dependiente de  $C$ , y si  $0 < k < 1$ ,  $D$  es parcialmente dependiente de  $C$  [43, 45].

## 2.6 CONJUNTOS DIFUSOS (FUZZY SETS).

### 2.6.1 INTRODUCCIÓN.

La teoría de los conjuntos difusos surgió en el año 1965 y fue desarrollada por Lotfi A. Zadeh [65]. La lógica difusa (LD) maneja valores en un rango continuo que va más allá de opciones binarias de falso y verdadero, en la LD hay grados de verdad o falsedad [61].

La lógica continua reconoce que la realidad no tiene que ser cierta o falsa en su totalidad, los elementos de un conjunto no tiene por qué estar en su totalidad dentro o fuera de un conjunto dado; es posible que determinado elemento pertenezca parcialmente a un conjunto o conjuntos, es decir, que tenga un grado de pertenencia [39, 33, 2, 65].

La lógica difusa permite analizar sistemas complejos partiendo de información cualitativa que se debe extraer del tomador de decisiones. Además permite expresar situaciones con un significado impreciso, tales como: “Muy grande, demasiado frío, un largo alcance”, etc., a través de rangos de números exactos, como por ejemplo, el término lingüístico “muy grande” expresado en centímetros podría estar en el intervalo [1000, 2000], lo que facilita su manipulación empleando operaciones y conceptos

matemáticos, con esto un gran volumen de problemas de decisión se simplifican [20, 33, 65]. La teoría de lógica difusa ofrece fuertes fundamentos matemáticos para trabajar con la incertidumbre que existen en los procesos cognitivos humanos tales como pensamiento y razonamiento. Los métodos y teorías de primer orden no son aptos para tratar con información difusa ya que carecen de los elementos para la representación de conceptos de sentido común, este conocimiento es lexicalmente impreciso y no categórico, esto motivó en gran medida a la creación de la lógica difusa con el fin de tener un marco conceptual con el que se pueda tratar la imprecisión léxica [20, 33, 2].

Los sistemas difusos tienen 2 características que dan un mejor desempeño para aplicaciones específicas [20]:

1. Son aptos para tratar el conocimiento aproximado o incierto, en modelos matemáticos difíciles de obtener.
2. Permiten tomar decisiones con valores estimados con información incompleta o incertidumbre.

### 2.6.2 CONCEPTOS BÁSICOS.

La teoría de conjuntos difusos facilita el trabajo y análisis con datos que son imprecisos lexicamente, esta tiene una relación fuerte con la lógica booleana; el concepto de subconjunto difuso tiene una gran similitud con el concepto de subconjuntos clásico. Sin embargo, a diferencia de los conjuntos clásicos, el concepto de pertenencia es extendido a un número entre 0 y 1, donde un valor de pertenencia 0 de un elemento indica que no pertenece al conjunto difuso y un grado de pertenencia 1 indica que el elemento pertenece con total certeza al conjunto difuso (la pertenencia de teoría clásica de conjuntos), por otra parte un grado de pertenencia  $p$  entre esos dos valores extremos indica una pertenencia parcial, que se debilita en la medida en que se acerca a 0 y se fortalece en la medida en que se acerca a 1.

En la teoría de los conjuntos difusos es usual caracterizar el grado de pertenencia de los elementos de un universo a un conjunto difuso mediante una función de pertenencia, que asigna a cada elemento del universo un grado de pertenencia al conjunto [39]. En el caso de un conjunto clásico la función de pertenencia puede definirse como [20]  $\mu_A(x) \mid U \rightarrow \{0,1\}$ , siendo  $U$  el universo:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

De esta manera un conjunto  $A$  puede definirse mediante un conjunto de pares ordenados:

$$A = \{x, \mu_A(x) : x \in U, \mu_A(x) \in \{0,1\}\}.$$

En un conjunto difuso la pertenencia de un elemento a un conjunto está dado por grados de pertenencia, la función de pertenencia puede tomar cualquier valor que este en el intervalo de real  $[0, 1]$ , y se denota por  $\mu_A(x) \mid U \rightarrow [0,1]$  entonces el conjunto difuso  $A$  [39, 33] se puede definir como [61, 33]:

$$A = \{x, \mu_A(x) : x \in U, \mu_A(x) \in [0,1]\}.$$

Ejemplo: Sea  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  el número de personas que pueden viajar en un automóvil compacto y el conjunto difuso “Viaje cómodo y con compañía” El conjunto difuso puede definirse como:

$$A = \{(1, 0.0), (2, 0.4), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.2), (6, 0)\}$$

El soporte del conjunto difuso  $A$  se expresa por el conjunto

$sop(A) = \{x \in U : \mu_A(x) > 0\}$  [39, 20], en el ejemplo que se muestra arriba el  $sop(A) = (2, 3, 4, 5)$ .

La altura del conjunto difuso  $A$  se define como  $alt(A) = \sup_x \mu_A(x)$ ; un conjunto difuso con  $alt(A) = 1$  se le llama conjunto normalizado, un conjunto no normalizado y no vacío puede normalizarse al dividir  $\mu_A(x)$  entre  $\sup_x \mu_A(x)$ , el



conjunto vacío  $\emptyset = \{x \in U : \mu_{\emptyset}(x) = 0\}$ . El conjunto universal se expresa:  $U = \{x \in U, \mu_U(x) = 1\}$  [39]. El grado de presunción,  $\alpha$  – *cut*( $\alpha$  – *corte*) o conjunto de nivel (umbral)  $\alpha$ , es el conjunto formado por los  $\alpha$ -cortes, este contiene la información completa del conjunto difuso, el conjunto  $\alpha$ -corte del conjunto difuso A [39] esta definido por:

$$A_{\alpha} = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1]$$

Este conjunto tiene los valores de  $x$  con valor de pertenencia al menos de  $\alpha$ , si solo se toman en cuenta los valores  $x$  tales que  $\mu_A(x) > \alpha$  se le llamará  $\alpha$  – *corte* estricto o fuerte y se escribirá  $A_{\alpha}^>$ , El conjunto  $A_{\alpha=1}^>$ , es conocido como el núcleo de A [39].

Un conjunto difuso convexo es definido con base en la función de pertenencia como sigue:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\},$$

$$\forall x_1, x_2 \in U \text{ y } \forall \lambda \in [0, 1].$$

Si todos los  $\alpha$ -cortes son convexos se dice que el conjunto difuso es convexo [39, 20].

### 2.6.3 NÚMEROS DIFUSOS.

Se denomina número difuso al conjunto difuso A si es convexo y existe exactamente un punto  $M \in R$ , con  $\mu_A(x) = 1(A_{\alpha=1} = M)$ . En sentido lingüístico puede expresarse como alrededor de  $x$ , para manejar estos números se definen 2 números difusos del tipo L-R(left-right) [20, 39]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((M - x)/l), & \text{si } x \leq M; l > 0 \\ R((x - M)/r), & \text{si } x \geq M; r > 0 \end{cases}$$

L y R son funciones fuertemente decrecientes en  $R^+$ , con  $L(0) = R(0) = 1$ . M se conoce como el valor central del número difuso. Estas funciones son de forma de

izquierda y derecha respectivamente,  $l$  y  $r$  son la extensión de amplitud o dispersión a izquierda y derecha [39].

Un intervalo difuso de tipo  $L$ - $R$  es una reducción del concepto de número difuso.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L((M-x)/l), & \text{si } x \leq M_1; l > 0 \\ 1 & \text{si } x \in [M_1, M_2] \\ R((x-M_2)/r), & \text{si } x \geq M_2; r > 0 \end{cases}$$

#### 2.6.4 INTERVALOS DE CONFIANZA Y NÚMEROS DIFUSOS.

Es un intervalo en el cual se espera que esté incluido el valor del parámetro en cuestión. Es decir si se tiene  $A = [a_1, a_3]$  el parámetro no puede ser menor que  $a_1$  ni mayor  $a_3$ . Este valor se expresa a través de la función de pertenencia [39]:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a_1 \\ 1 & \text{si } a_1 < x < a_3 \\ 0, & \text{si } x > a_3 \end{cases}$$

Un número difuso se considera como un subconjunto difuso normal y convexo en  $\mathbb{R}$ . La condición de normalidad indica:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) = 1$$

La convexidad puede ser expresada con la condición de que los  $\alpha$  – cortes estén anidados:

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (a_1^{(\alpha')} \leq a_3^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha')} \geq a_1^{(\alpha)})$$

El  $\alpha$  - corte queda  $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$  la condición de convexidad implica:

$$(\alpha' < \alpha) \Rightarrow (A_\alpha \subset A_{\alpha'})$$

Una manera de realizar operaciones con números difusos es empleando la aritmética de intervalos de confianza cualesquiera:

$$A = [a_1, a_3] \text{ y } B = [b_1, b_3], \text{ con } a_1, a_3, b_1, b_3 \in R$$

En las siguientes operaciones se muestra el uso de estos intervalos, al utilizar una función a un conjunto de intervalos, el límite inferior será el mínimo calculado después de aplicar esa función a las posibles combinaciones de valores que pertenezcan a los intervalos en consideración. Se considera a los símbolos  $\wedge$  y  $\vee$  como el mínimo y máximo [39].

Multiplicación

$$\begin{aligned} [a_1, a_3] * [b_1, b_3] = & [a_1 * b_1 \wedge a_1 * b_3 \wedge a_3 * b_1 \wedge a_3 * b_3 \\ & , a_1 * b_1 \vee a_1 * b_3 \vee a_3 * b_1 \vee a_3 * b_3] \end{aligned}$$

Si el conjunto difuso estuviera en el rango solo de los números reales positivos el resultado es:

$$[a_1, a_3] * [b_1, b_3] = [a_1 * b_1, a_3 * b_3]$$

Ejemplo.

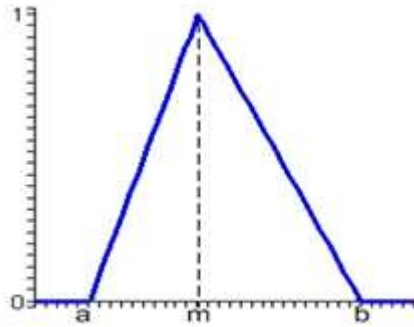
$$A = [4, 7], B = [5, -8]$$

$$\begin{aligned} A(*)B &= [\min\{20, -32, 35, -56\}, \max\{20, 32, 35, -56\}] \\ &= [-56, 35] \end{aligned}$$

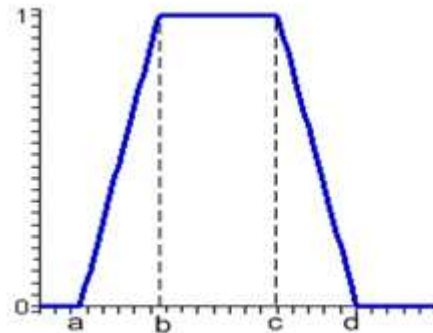
### 2.6.5 FUNCIONES DE PERTENENCIA.

Un número difuso es un conjunto de números reales, convexo y una función de pertenencia continua con soporte limitado, existen diferentes funciones de pertenencia: Triangulares, trapezoidales, gaussianos, gamma, entre otros, ver Figura 2.2. La

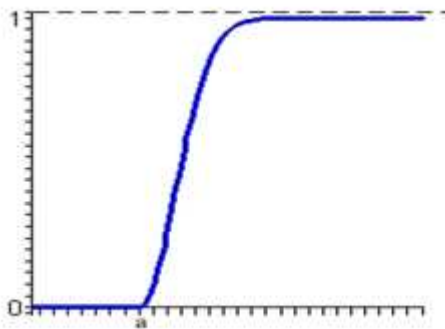
función de pertenencia triangular es, por simplicidad la más utilizada en la práctica, define por la terna  $(a_1, a_2, a_3)$ , ver Figura 2.2.a



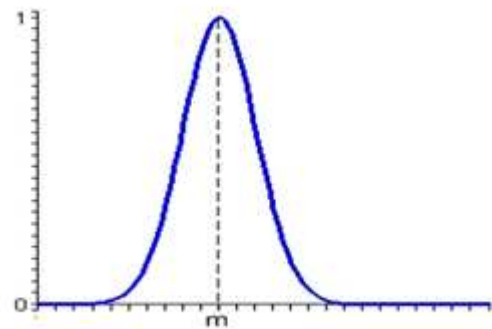
(a) Triangular



(b) Trapezoidal



(c) Gamma



(d) Gausiana

Figura 2.2: Funciones de Pertenencia Más Comunes [1]

Una función de pertenencia para un número triangular es definida como [20, 39]

:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a_1 \\ (x - a_1)/(a_2 - a_1) & \text{si } a_1 \leq x \leq a_2 \\ (a_3 - x)/(a_3 - a_2) & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si } x > a_3 \end{cases}$$

También se puede definir la función de pertenencia de un número difuso triangular con el intervalo de confianza de nivel  $\alpha$  [39]:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \\ &= [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha], \forall \alpha \in [0, 1] \end{aligned}$$

**Operaciones aritméticas con Números Difusos Triangulares.** La suma, resta y multiplicación por un número real de números difusos triangulares da como resultado un número difuso triangular, no sucede así en otras operaciones como en, Inverso, División, Máximo y Mínimo, etc.

A continuación se presentan el ejemplo de la suma:

Sean dos números difusos triangulares  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ .

$$\begin{aligned} A(+)B &= (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) \\ &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \end{aligned}$$

Con intervalos de confianza:

$$\begin{aligned} A_\alpha &= [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}] \\ &= [a_1 + (a_2 - a_1)\alpha, a_3 - (a_3 - a_2)\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_\alpha &= [b_1^{(\alpha)}, b_3^{(\alpha)}] \\ &= [b_1 + (b_2 - b_1)\alpha, b_3 - (b_3 - b_2)\alpha] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(+)B &= [(a_1 + (a_2 - a_1)\alpha) + (b_1 + (b_2 - b_1)\alpha), \\ &\quad (a_3 - (a_3 - a_2)\alpha) + (b_3 - (b_3 - b_2)\alpha)] \end{aligned}$$

Los números difusos serán de utilidad en los capítulos siguientes para representar el grado de pertenencia, permite pertenencia parcial [2], de los atributos y de la clase de cada pacientes.

### 2.6.6 OPERACIONES CON CONJUNTOS DIFUSOS.

Las operaciones que son más utilizadas en los conjuntos difusos son la unión ( $\cup$ ) que emplea el operador máximo, intersección ( $\cap$ ) utiliza el operador mínimo sugeridos por Zadeh , la suma lógica ( $\wedge$ ), el producto ( $\vee$ ), el complemento y la negación borrosa para las funciones de pertenencia [61]. Las operaciones elementales que se pueden realizar con los conjuntos difusos son similares a las que se realizan con los conjuntos tradicionales [39]. Sea  $A$  un subconjunto difuso de un conjunto difuso  $B$ , entonces  $A \subseteq B$ , si

$$\forall x \in U : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

En caso de que exista un punto  $x \in U$  tal que  $\mu_A(x) \neq \mu_B(x)$  entonces  $A \subset B$ [39]. Intersección (min-intersección). La intersección de dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$  punto a punto se escribe:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Unión (Max-intersección) La unión de dos conjuntos difusos punto a punto se representa por [39]:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

Complemento: El complemento de  $A$ , viene dado en un conjunto difuso, punto a punto, y se escribe como:

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

El operador min-intersección pertenece a un tipo de operadores que se denominan normas triangulares (t-normas), este concepto es usado en estadística para datos que pertenecen al intervalo  $[0,1]$ . Los operadores promedio (compensadores) intentan estar en una situación intermedia entre los criterios de intersección y unión de las funciones de pertenencia, los operadores se clasifican en paramétricos o no paramétricos. t-normas: Son funciones bivalentes del tipo  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que satisfacen [39, 2]:

1.  $t(0,0) = 0$

2.  $t(\mu_A(x), 1) = t(1, \mu_A(x)) = \mu_A(x), x \in X$
3. Cumplen la propiedad de monotonía. Si  $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_D(x)$  entonces  $t(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq t(\mu_C(x), \mu_D(x))$
4. Son conmutativas;  $t(\mu_A(x), \mu_B(x)) = t(\mu_B(x), \mu_A(x))$
5. Son asociativas;  $t(\mu_A(x), t(\mu_B(x), \mu_C(x))) = t(t(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x))$

t-conormas: Hay definidos otros operadores para la agregación, son las conormas triangulares, conocidas también como; s-normas, son funciones bivalentes del tipo  $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$  que satisfacen [39, 2]:

1.  $s(1,1) = 1$
2.  $s(\mu_A(x), 0) = s(0, \mu_A(x)) = \mu_A(x), x \in X$
3. Cumplen la propiedad de monotonía. Si  $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$  y  $\mu_B(x) \leq \mu_D(x)$  entonces  $s(\mu_A(x), \mu_B(x)) \leq s(\mu_C(x), \mu_D(x))$
4. Son conmutativas;  $S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = s(\mu_B(x), \mu_A(x))$
5. Son asociativas;  $S(\mu_A(x), s(\mu_B(x), \mu_C(x))) = s(s(\mu_A(x), \mu_B(x)), \mu_C(x))$

Las t-normas y las t-conormas son conceptos “duales”. Cualquier t-norma se puede generar de una t-conorma a través de la siguiente relación:

$$t(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1 - s(1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x))$$

Existen otros operadores que satisfacen las condiciones para ser t-normas y t-conormas. Hay diversas formas de combinar números difusos y procedimientos para relacionarlas, esto es útil por ejemplo en el análisis de la decisión. Se muestran a continuación algunos de los más comunes [39]:

Producto drástico:

$$t_w(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), & \text{si } \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Suma drástica:

$$s_w(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), & \text{si } \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0 \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### 2.6.7 REGLAS DIFUSAS.

Las reglas difusas son de la forma “Si  $x$  es  $b$  entonces  $y$  es  $w$ ”, se conoce como antecedente “si  $x$  es  $b$ ” y como consecuente “ $y$  es  $w$ ” representa a las funciones de pertenencia. La primer parte de las reglas está formada por los datos que previamente se han fuzzificado y se aplica cualquier operador difuso (or o and), la segunda parte se aplica algún método de implicación al consecuente (por ejemplo: Mínimo, producto) [2, 30].

### 2.6.8 SISTEMA DIFUSO.

Un Sistema Difuso está compuesto por los atributos de entrada difusos (funciones de pertenencia), reglas difusas, defuzzificación (se procesa la información arrojada por las reglas) y se obtiene un resultado preciso [30, 2]. Para llegar al resultado final el sistema difuso pasa por 5 procesos [2] :

1. Fuzzificar los Atributos de Entrada: Verificar el grado de pertenencia que tienen los datos de entrada, cada función de pertenencia esta limitada en un rango determinado, es decir, el valor numérico que se le da término lengüístico, por ejemplo, al término “poco frío” se puede definir en un rango [1,5] y el grado de



pertenencia siempre es esta entre 0 y 1, cuando ya se tiene la variable definida, como una o varias funciones de pertenencia, se dice que se ha fuzzificado la variable de entrada.

2. Aplicar Operador Difuso: Después que se fuzzificadan las variables de entrada, se sabe el grado de pertenencia cada regla si es que el antecedente es de un solo elemento, de lo contrario, si se tiene un antecedete con 2 ó más elementos, se aplica un operador difuso (or o and) y se obtiene el valor de la regla. Ese valor se usará para obtener el resultado final.
3. Aplicar Método de Implicación: Primero se le da peso a cada regla antes de aplicar el método de implicación, cada regla tiene un peso entre 0 y 1, por lo general el peso siempre es 1, para no afectar el procesos de implicación. El valor que usa el proceso de implicación es un número proporcionado por el antecedente y el resultado es un conjunto difuso. El método de implicación se realiza para cada regla. Los métodos de implicación son: El mínimo y el producto.
4. Agregar Todos los Resultados. El resultado de las reglas después de que se aplicó el método de implicación se combina y es agrupado en un conjunto difuso, no importa el orden en que las reglas sean ejecutadas ya que el método de implicación es conmutativo.
5. Defuzzificación: El valor que recibe el método de defuzzificación es el conjunto difuso generado de la agregación y el resultado que arroja es un valor único, es decir, recibe del proceso de agregación un rango de valores de salida, por lo que se requiere la defuzzificación para obtener un solo resultado. Hay diversos métodos para la defuzzificacion [30]:
  - Centroide: El valor que se obtiene es el centro del área bajo la curva.
  - Bisector: Considera el área bajo la curva y arroja como resultado el punto en donde se divide en dos partes iguales.

- El mayor de los máximos: En términos de magnitud, es el mínimo de los valores máximos obtenidos después de la agregación.
- El menor de los máximos: En términos de magnitud, es el mínimo de los valores máximos obtenidos después de la agregación
- La media de los máximos: Se obtiene el promedio de los valores máximos que se obtienen de la agregación y se calcula un valor singleton.

En la Figura 2.3 se muestran los métodos de defuzzificación para obtener un valor preciso de un sistema difuso.

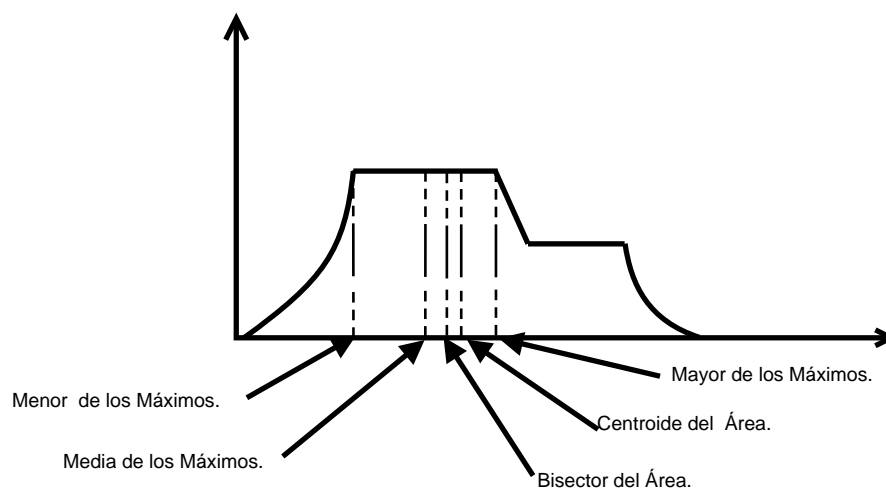


Figura 2.3: Métodos Defuzzificación [30]

Para elegir el método defuzzificación se realizaron varios experimentos probando los diferentes métodos, el que proporcionó los mejores resultados es el método del centroide por lo que fue el que se empleó en todos los experimentos.

En la imagen 2.4 se muestra el proceso completo del sistema difuso.

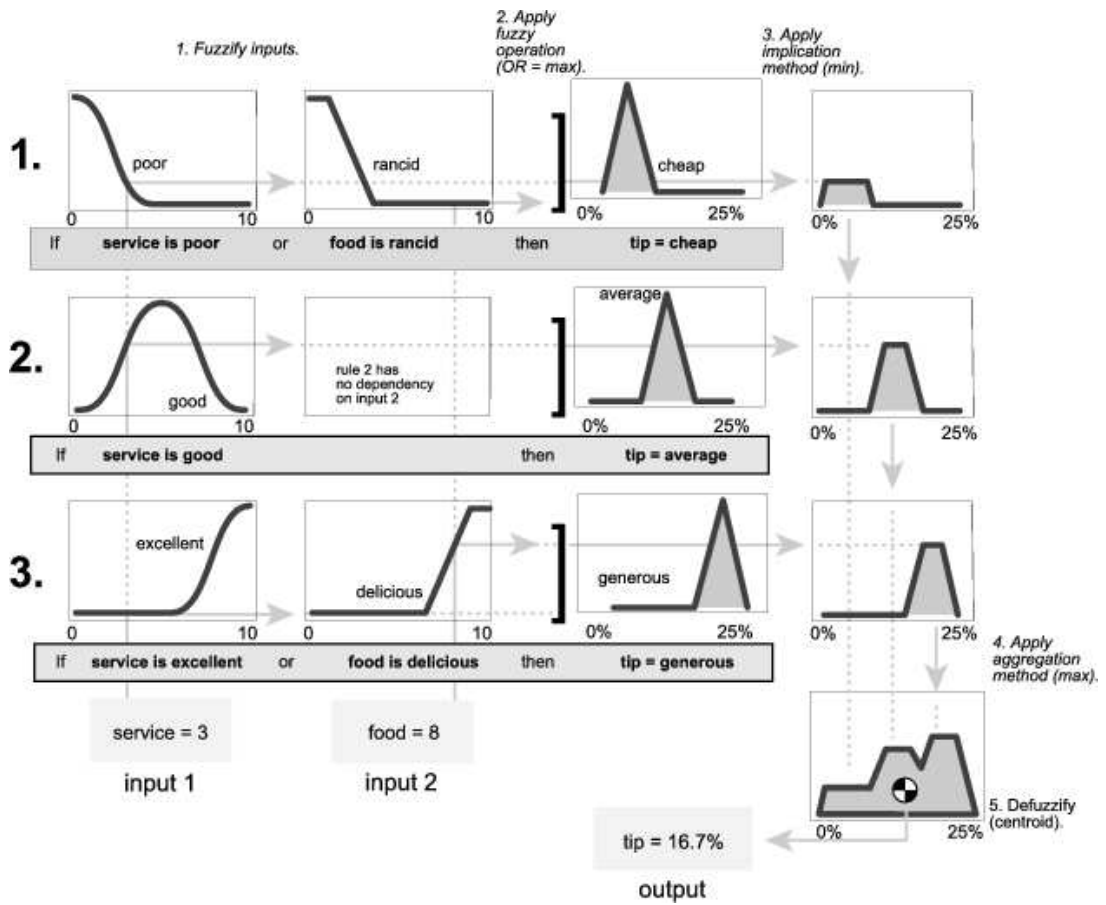


Figura 2.4: Proceso Sistema Difuso [2]

## 2.7 CONCLUSIONES.

En este trabajo el problema abordado es considerado y modelado como un problema de clasificación multicriterio es por ello que se ha incluido una sección en la que se presentan los fundamentos de la teoría de la decisión multicriterio (MCDM). En la sección 2.4 se expone una breve introducción a la teoría de los Conjuntos Aproximados (Rough Sets) por que en la metodología de apoyo a la decisión propuesta en el capítulo 4 se hace uso de esta teoría para generar las reglas que conformarán el sistema difuso. Finalmente, en la sección 3 se presentan los

---

fundamentos de la teoría de Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets), esto es debido a que en el capítulo 4 se hace uso de esta teoría para definir las funciones de pertenencia de las reglas del sistema difuso propuesto en la metodología.

## CAPÍTULO 3

# DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA.

---

### 3.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se describe el objeto de la presente investigación desde la perspectiva de las metodologías de solución más reconocidas hasta el momento: las radiografías de la mano-muñeca y las vértebras cervicales. Se muestra que aún no existe una solución satisfactoria para el problema de la estimación de la maduración ósea, y porque los métodos basados en vértebras cervicales resultan más atractivos que los basados en mano-muñeca.

En la sección (3.2) siguiente se describe el problema de la estimación del potencial de crecimiento en niños y adolescentes resaltando la relación entre este y la maduración ósea, y entre esta y el proceso de maduración de la dentición. Se presentan también los retos a los cuales hay que enfrentar en la solución del mismo así como sus características principales. En la secciones 3.3 se describen métodos clásicos empleados para estimar la maduración ósea, mientras que en la siguientes secciones (3.4 y 3.5) se describe el estado del arte en la estimación de la maduración ósea. Finalmente (sección 6) se presentan las conclusiones del capítulo.

## 3.2 DESCRIPCIÓN DE ASPECTOS RELEVANTES DEL PROBLEMA DE LA ESTIMACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA.

Para establecer que un niño padece alguna anomalía con su crecimiento es conveniente conocer los casos y la edad de los niños que crecen de manera normal. Es decir si un niño de 8 años edad con estatura baja tiene una edad ósea que indique el próximo fin del crecimiento significa que será un hombre de estatura baja, por el contrario si el mismo niño tiene una edad ósea temprana quiere decir que tiene retraso en el crecimiento y podrá crecer posiblemente alcanzando una estatura alta. La maduración ósea hace referencia al grado de desarrollo de los huesos [31, 27], lo que indica el desarrollo que el niño ha logrado y lo que le resta por alcanzar, esta no siempre coincide con la edad cronológica.

En cualquier caso donde se requiera saber el crecimiento actual y esperado del paciente es importante determinar la madurez ósea como parte conjunta del tratamiento en una edad precoz. Algunos tratamientos obtienen mejores resultados biológicos cuando se inician, modifican o cambian cuando se encuentran cerca del pico de crecimiento del paciente o en algún estadio de madurez determinado [38].

Es importante tener un indicador de la maduración ósea que sea preciso, dado que este servirá para aplicar el tratamiento que garantice los resultados planeados. Se han realizado diversos estudios empleando diversas partes del cuerpo buscando un estándar y una manera simple de obtener un buen indicador de madurez ósea.

Hasta la fecha los métodos más populares para estimar la maduración ósea se basan en radiografías de mano-muñeca, por los buenos resultados que se obtienen mediante el análisis de gran número de huesos que permiten observar y clasificar el crecimiento, aunque es complicado observar claramente el desarrollo en todos los huesos de interés porque por lo general se superponen unos sobre otros en la radio-

grafía, lo que dificulta el análisis, por otra parte se expone al individuo a radiaciones adicionales.

Disminuir la exposición a las radiaciones del paciente y encontrar un método que sea fácil y sencillo de interpretar son los objetivos de las nuevas investigaciones para estimar la maduración ósea por medio de radiografías laterales de las vértebras cervicales. Estos métodos solo requieren una radiografía del paciente, y los huesos que se estudian son más visibles en estas radiografías que en los de la mano-muñeca. En estudios recientes se ha demostrado que los resultados obtenidos con las radiografías de las vértebras cervicales son válidos como los que se obtienen cuando se estudian las radiografías de mano-muñeca [69, 7, 18].

Aunque se ha logrado avanzar y eliminar algunas de las desventajas tales como la radiación adicional y la reducción de huesos a analizar aún queda trabajo por hacer ya que los estudios que se han realizado hasta el momento, pero carecen de una precisión que permita a los especialistas conocer con precisión el estadio de crecimiento del niño dentro ya que algunos tratamientos ortopédicos y pediátricos así lo requieren [38, 36]. Hasta la fecha no se ha encontrado un método que sea eficiente, preciso, y simple de usar e interpretar[36].

### 3.3 ESTUDIOS REALIZADOS ESTIMAR LA MADURACIÓN ÓSEA SEGÚN LA ANATOMÍA DEL CUERPO.

En el siguiente cuadro se presentan algunos estudios realizados para estimar la maduración ósea con base en diferentes partes del cuerpo.

Zona anatómica	Autor	Año
Mano	Greulich-Pyle [22]	1959
	Sinclair et al. [56]	1960
	Tanner-Whitehouse [63]	1965
	Roche et al. (Método Fels) [51]	1988
	Tanner-Gibbons (Método CASAS) [62]	1994
	Chumela et al. [13]	1989
Rodilla	Pyle-Hoerr [49]	1955
	Schunk et al. [55]	1987
Tobillo y pie	Hoerr-Pyle [29]	1962
	Erasmie-Ringertz [16]	1980
Cadera	Argemi-Badia	1997
	Kim et al. [32]	
Vértabras Cervicales	Lamparski [34]	1975
	Hassel y Farman [27]	1995
	Lamparski y Nanda [35]	2002
	San Roman et al. [52]	2002

Tabla 3.1: Métodos de evaluación de la maduración ósea [36, 58]

Los estudios que han tenido mayor aceptación entre los especialistas son los que se realizan a través de radiografías de mano- muñeca y en años recientes los estudios que se realizan con radiografías laterales de las vértebras cervicales.

### 3.4 METODOLOGÍA CON RADIOGRAFÍAS DE MANO-MUÑECA.

Según Ceglia [11] los huesos que se identifican en la radiografía de mano-muñeca son:

1. Diáfisis de la falange distal del pulgar(DP1).



- 
2. Diáfisis de la falange proximal del pulgar(PP1).
  3. Hueso sesamoideo en la articulación metacarpofalángica pulgar(S).
  4. Diáfisis de la falange distal del dedo índice(DP2).
  5. Diáfisis de la segunda falange del dedo índice(MP2).
  6. Diáfisis de la falange proximal del dedo índice(PP2).
  7. Diáfisis de la falange distal del dedo medio(DP3).
  8. Diáfisis de la segunda falange del dedo medio(MP3).
  9. Diáfisis de la falange proximal del dedo medio(PP3).
  10. Diáfisis de la falange distal del dedo anular(DP4).
  11. Diáfisis de la segunda falange del dedo anular(MP4).
  12. Diáfisis de la falange proximal del dedo anular(PP4).
  13. Diáfisis de la falange distal del dedo meñique(DP5).
  14. Diáfisis de la segunda falange del dedo meñique(MP5).
  15. Diáfisis de la falange proximal del dedo meñique(PP5).
  16. Diáfisis del primer hueso metacarpiano(ver Imagen 3.1).
  17. Diáfisis del segundo hueso meta-carpiano.
  18. Diáfisis del tercer hueso metacarpiano
  19. Diáfisis del cuarto hueso metacarpiano.
  20. Diáfisis del quinto hueso metacarpiano.
  21. Trapecio.
  22. Trapezoide.

23. Hueso grande
24. Ganchoso.
25. Apófisis uniforme del ganchoso(H).
26. Piramidal.
27. Pisiforme(Pisi).
28. Semilunar.
29. Escafoides.
30. Diáfisis distal del Radio(R).
31. Diáfisis distal del cúbito.

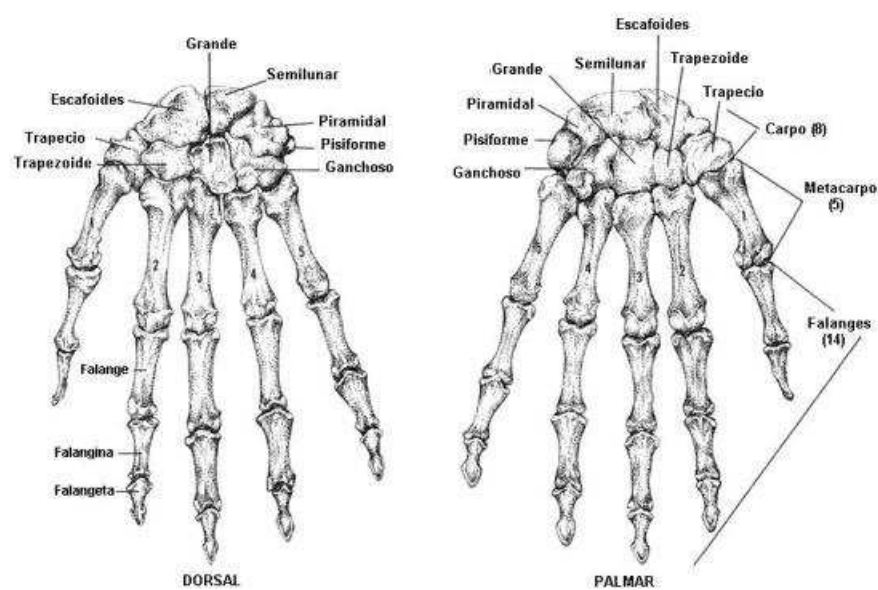


Figura 3.1: Radiografía Mano

La mano-muñeca está formada por 8 huesos cortos, cuyo conjunto constituye el esqueleto de la muñeca o carpo, 5 huesos largos que forman el metacarpo y por

último 14 huesos llamados falanges que constituyen el esqueleto de los dedos como se observa en las Figuras 3.2 y 3.3. Los estadios de crecimiento de los dedos se valoran según la relación epífisis- diáfisis que son 3 diferentes [11]:



Figura 3.2: Radiografía Mano [3].

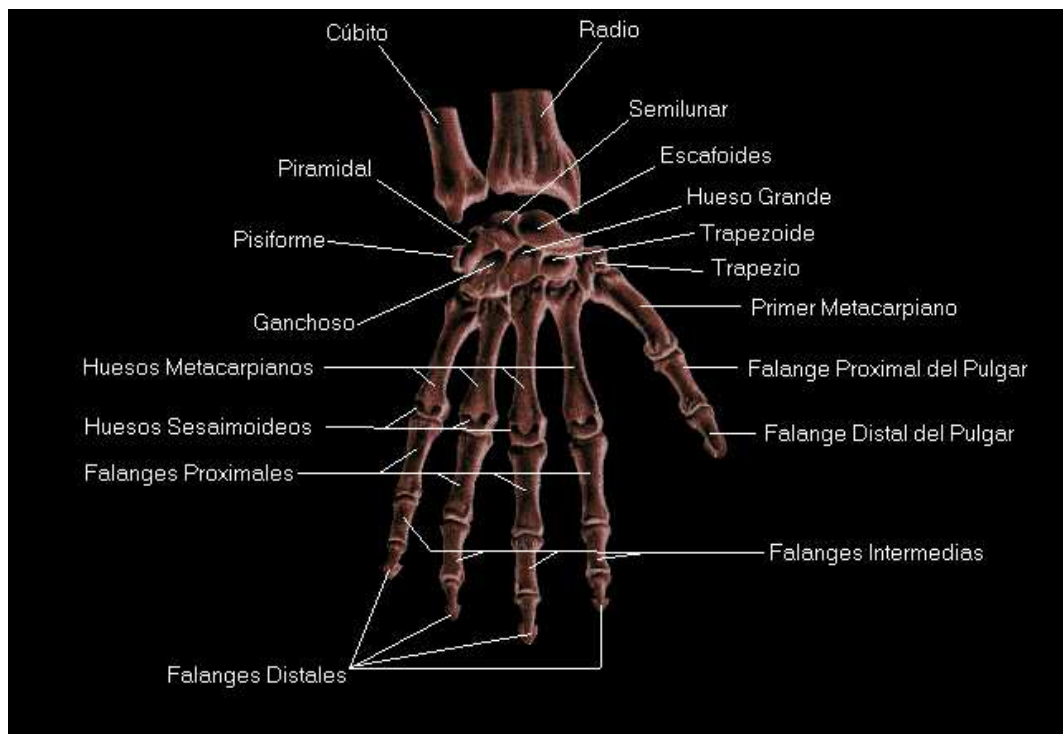


Figura 3.3: Radiografía Mano [4].

1. La epífisis tiene la misma anchura que la diáfisis.
2. La diáfisis rodea a la epífisis como capuchón.
3. La epífisis osifica con la diáfisis.

Según el análisis de la radiografía de mano de Bjork, Grave y Brown, se identificaron los siguientes estadios de maduración [11].

1. Primer estadio de maduración: La diáfisis de la falange proximal del dedo índice(PP2), muestra la misma anchura que la epífisis

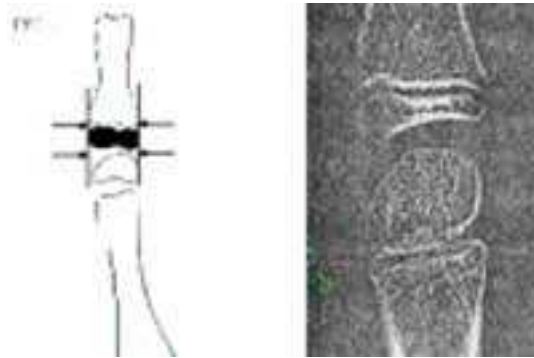


Figura 3.4: Primer Estadio

2. Segundo estadio de maduración: La diáfisis de la segunda falange del dedo medio (MP3), muestra la misma anchura que la epífisis.

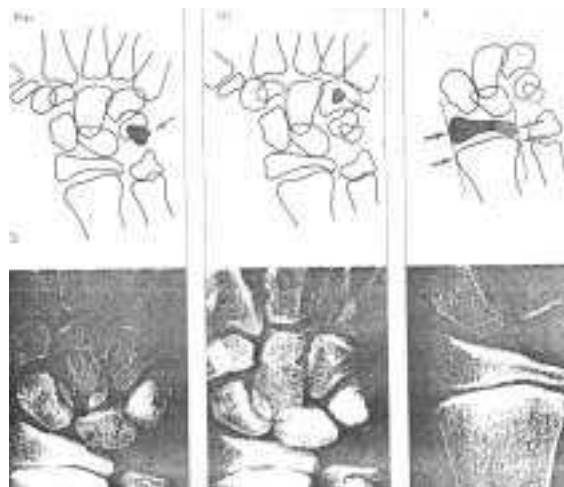


Figura 3.5: Segundo Estadio

3. Tercer estadio de maduración:
  - (Pisi): Osificación visible del hueso pisiforme.
  - (H): Osificación de la apófisis uniforme del ganchoso.

- (R): Anchura equivalente de la diáfisis y epíffisis del R.



Figura 3.6: Tercer Estadío

#### 4. Cuarto estadio de maduración:

- (S): Inicio de la mineralización del sesamoideo.
- (H2): Osificación avanzada de la ap. unc. del ganchoso.



Figura 3.7: Cuarto Estadío

## 5. Quinto estadío de maduración:

- (MP3 cap.): La diáfisis rodea a modo de capuchón a la epífisis, a nivel de la segunda falange del dedo medio.
- (P1 cap.): En la falange proximal del pulgar.
- (R cap.): En el Radio.

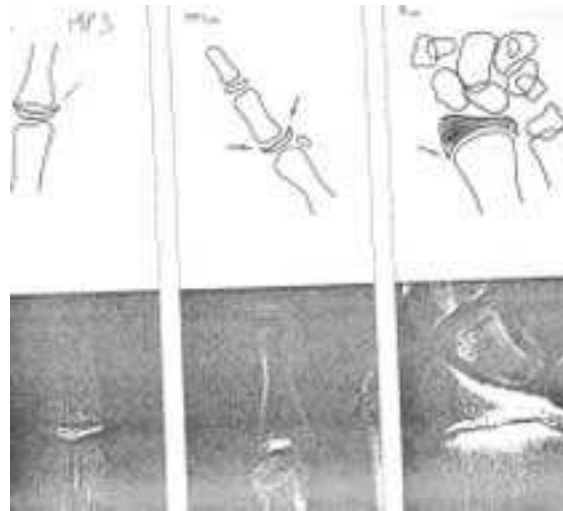


Figura 3.8: Quinto Estadío

6. Sexto estadío de maduración: (DP3u.): Fusión visible de la diáfisis y epífisis de la falange distal del dedo medio. Al alcanzarse este estadío evolutivo, termina el brote de crecimiento puberal.

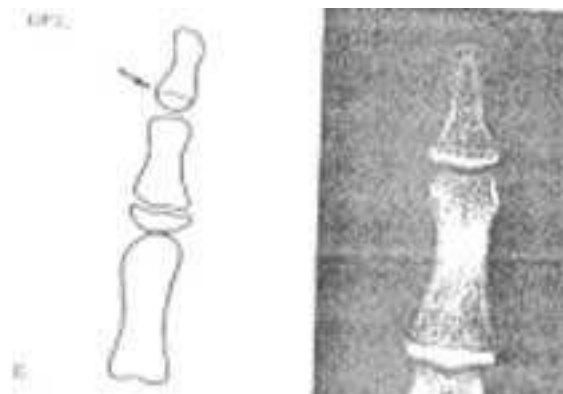


Figura 3.9: Sexto Estadío

7. Séptimo estadío de maduración: (PP3u.): Fusión visible de la diáfisis y epífisis de la falange proximal del dedo medio.



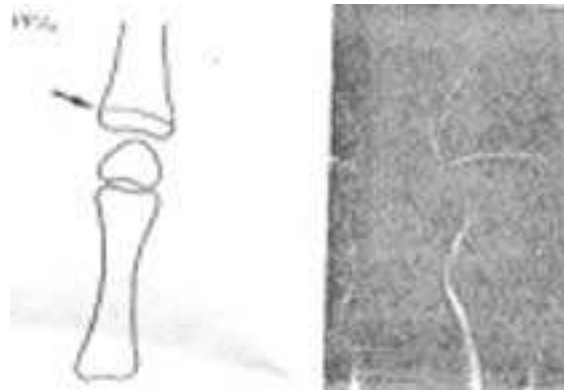


Figura 3.10: Séptimo Estadio

8. Octavo estadio de maduración: (MP3u.): Fusión visible de la diáfisis y epífisis de la segunda falange del dedo medio.

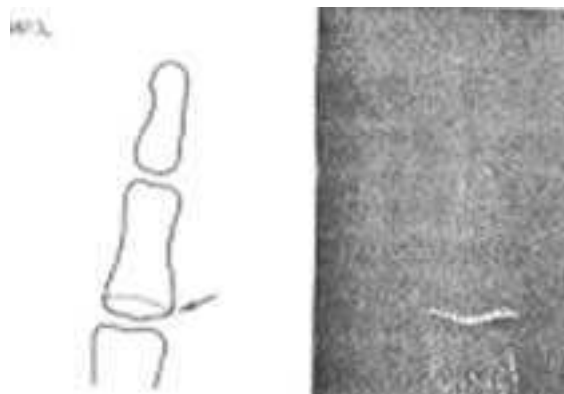


Figura 3.11: Octavo Estadio

9. Noveno estadio de maduración: (Ru.) Osificación completa de la diáfisis y epífisis del radio. Al llegar a este estadio, termina la osificación de todos los huesos de la mano, y al mismo tiempo, el crecimiento óseo.

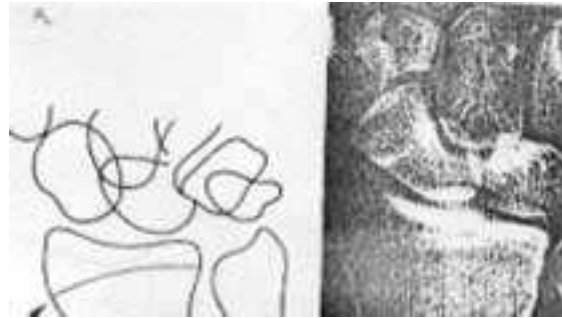


Figura 3.12: Noveno Estadío

El análisis de la radiografía de mano-muñeca es directo, se observan los centros de osificación y el crecimiento que muestran en el transcurso del tiempo. Si se encuentran anomalías es posible que exista algún desorden en el desarrollo esquelético del niño. Este indicador es útil en el seguimiento de tratamientos como la terapia de crecimiento hormonal, desórdenes endocrinológicos y en la planeación de corrección de deformidades en huesos largos o la columna vertebral, este indicador también es útil para determinar la talla final del individuo [67].

La edad en que ocurre el crecimiento, la velocidad y el tiempo de duración, es diferente en cada niño [27]. Conocer estos datos es importante cuando se requiere hacer una planeación sobre el tratamiento pediátrico de un infante [31].

El crecimiento está relacionado con la maduración esquelética, es decir, los huesos atraviesan por una serie de cambios cuando se da el crecimiento. Estos cambios se pueden observar mediante el estudio de las radiografías tomadas de mano-muñeca que permiten seguir la evolución que sufren los huesos a través del tiempo [27], lo que sugiere que se puede establecer al menos una aproximación del crecimiento del paciente o un pronóstico del crecimiento que se espera que el niño desarrolle en los siguientes años de su vida [31].

Los métodos que se han empleado con más aceptación son 2: El método del atlas y el método cuantitativo [67].

El primer método es el de Greulich and Pyle [22], su estudio se basa en la detección de cambios en la apariencia de los centros de osificación mediante radiografías de la mano-muñeca izquierda de niños y niñas caucásicos de clase social media alta de los Estados Unidos en el año 1931-1942 [28]. Las radiografías están agrupadas por sexo y edad, el estudio finalizó con la obtención de un atlas representativo para esta población, pero este atlas hasta la fecha no ha cambiado desde su versión original. Este atlas es útil en la práctica clínica para evaluar la madurez niños que tienen diferentes raíces étnicas como africano-americana, asiáticas, hispanas, entre otras [67].

Para establecer el grado de madurez se realiza una comparación de la radiografía bajo estudio con las radiografías incluidas en el atlas que contiene la madurez ósea, y es asignada a la que se aproxime más o se coloca dentro de las dos a las cuales más se aproxime. Aunque se considera un método sencillo se requiere cierta experiencia para reconocer los indicadores de madurez [28, 67]. Algunas de las desventajas de este método son:

- No se estima la madurez ósea, se asigna por similitud una radiografía bajo estudio a un estándar promedio lo que no garantiza que la clasificación sea correcta.
- Es difícil asignar un estado de edad ósea cuando los centros de maduración están más avanzados que otros [28].
- La evaluación es subjetiva, la clasificación de un evaluador A no necesariamente es la misma que la un evaluador B, esto depende de la experiencia que tenga cada uno [67].
- En el estudio solo se consideran niños caucásicos.

El segundo es el método de Tanner y Whitehouse [63]. En el que se proponen agregar puntuaciones a los centros de osificación de niños y niñas británicos. Al sumar las puntuaciones se obtiene la edad ósea en términos numéricos para ser analizada con

métodos estadísticos. De esta manera se determina la etapa de maduración en la que se encuentra con base en los datos que se tengan como referencia [28]. Algunas de las desventajas de este método son:

- Se considera complicado el cálculo matemático de esta ponderación por los especialistas.
- Los huesos se transponen algunas ocasiones impidiendo que se observen claramente el desarrollo de los huesos que se requieren para el estudio.
- Los niños en los que se baso la investigación eran de clase baja [28].
- Demanda gran cantidad de tiempo y experiencia [67, 28].
- Se emplea más de una radiografía [36].
- El crecimiento en los huesos de las mano algunas veces son tan pequeños que resulta difícil observarlos [28].

Una de las desventajas más importantes de este método es que tanto el atlas como la puntuación de los centros de osificación están basados solo en una muestra representativa de un grupo étnico, lo que indica que no puede ser aplicado a todos los niños del mundo de manera estándar, por ejemplo un niño en España se desarrolla más rápido que un niño inglés [28].

Una de las ventajas de este método es que se observan una gran cantidad de huesos en los que se puede observar los cambios morfológicos a través del tiempo.

Debido a los problemas que se presentan al estudiar la maduración ósea a través de radiografías de mano-muñeca, se ha buscado una alternativa que elimine las desventajas de esta metodología y proporcione el mismo grado de validez al estimar este indicador.

En los diversos intentos por encontrar tal indicador el que se ha demostrado que es igual de confiable que el de las radiografías de mano-muñeca es el que se realiza

con radiografías cefalométricas laterales de las vértebras cervicales. En el siguiente apartado se explica con más detalle esta metodología.

### 3.5 METODOLOGÍA CON RADIOGRAFÍAS LATERALES DE LAS VÉRTEBRAS CERVICALES.

Las radiografías laterales de las vértebras cervicales, ver Figura 3.13, se realizan para identificar problemas ortodóncicos [27], anomalías dentales, en este contexto una radiografía es útil para el diagnóstico dental y para la estimación de la maduración ósea, con esto se elimina la necesidad de radiografías adicionales como se hace con las radiografías de mano-muñeca, solo se estudian de 6 a 3 vértebras cervicales dependiendo la metodología que se emplee, además de que la forma de las vértebras se observa con mayor claridad que los huesos que se estudian en las radiografías mano-muñeca.

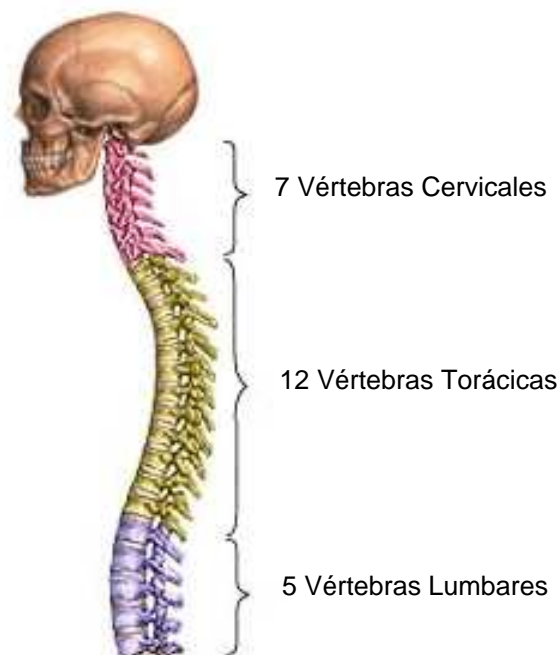


Figura 3.13: Vértebras Cervicales [5]

Lamparski es de los primeros en estudiar esta parte anatómica del cuerpo, propone estudiar 6 vértebras cervicales, por medio de radiografías laterales ofreciendo los siguientes beneficios:

- Los indicadores son los mismos para hombres y mujeres.
- Los resultados son tan confiables como los obtenidos con radiografías de muñeca.
- Empleo de una sola Radiografía.
- Se estudian solo 6 vértebras.

Las características de las vértebras que en este estudio se consideran importantes son:

- Alturas posteriores, anteriores y medias de las vértebras cervicales
- Anchos inferiores, medios y superiores de las vértebras cervicales
- Diferencias entre las alturas posteriores y anteriores de la tercera a la sexta vértebra cervical
- Diferencias entre los anchos de la tercera a la sexta vértebra cervical

Lamparski clasifica la edad ósea dentro de 6 estadios (Figura 3.14):

1. Iniciación: Los bordes inferiores de la segunda (C2), tercera (C3) y cuarta (C4) vértebra cervical, están planas. La C3 y C4 se encuentran en forma de cuña y sus bordes superiores están afilados desde posterior a anterior. Del 80 al 100 % de crecimiento puberal no se ha presentado en este estadio.

2. Aceleración: Se empiezan a desarrollar concavidades en el borde inferior de la C2. Los cuerpos de la C3 y C4 están casi rectangulares. Del 65-85 % del crecimiento puberal está por darse.
3. Transición: Se ven notables concavidades en los bordes inferiores de C2 y C3. Los cuerpos vertebrales de la C3 y C4 son rectangulares. El crecimiento adolescente se acelera hacia la velocidad del pico de crecimiento y solo resta un 25-65 % de crecimiento puberal.
4. Desaceleración: Se ven concavidades muy claras en los bordes inferiores de C2, C3 y C4. Los cuerpos vertebrales de C3 y C4 son más o menos cuadrados. Solo queda del 10-25 % del crecimiento puberal por expresarse.
5. Maduración: En este estadio se presenta la maduración final con un 5-10 % restante de crecimiento puberal. Se observan concavidades acentuadas en los bordes inferiores de C2, C3, C4, C5 y C6. Los cuerpos vertebrales de C3 y C4 son casi de forma cilíndrica.
6. Completación Se ven concavidades profundas en los bordes inferiores de C2 a C6. Los cuerpos vertebrales son mayores verticalmente que horizontalmente. El crecimiento puberal ha terminado.

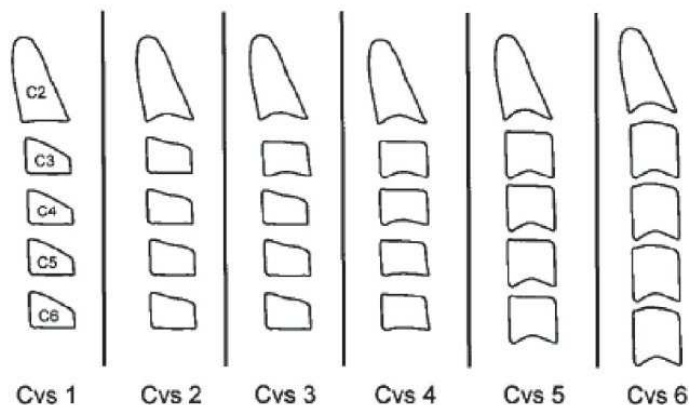


Figura 3.14: Estados de Maduración

Hassel&Farman realizaron un estudio con una muestra de 11 grupos de 10 hombres y 10 mujeres (220 individuos) de entre 8 y 18 años, niños y adolescentes blancos y la mayoría de descendencia del norte de Europa. Usaron radiografías de mano-muñeca y cefalografías laterales, la selección se hizo de manera aleatoria [27], para la evaluación de la maduración ósea de las radiografías de la mano se utilizó el método propuesto por Fishman que incluye 11 indicadores de maduración esquelética (SMI). Luego se dibujaron en papel mate la segunda, tercera y cuarta vértebra.

Se emplearon solo radiografías que tenían buen contraste y que se podían observar claramente. 10 niños y 10 niñas se asignaron en cada uno de los once grupos posibles del SMI: De manera aleatoria se seleccionaron 20 individuos, 11 niñas y 9 niños, dos evaluadores A y B analizaron estas 20 radiografías y un evaluador B.H., determinó el error de inter-operador que existe en la clasificación de los individuos, el error de intra-operador de clasificación que se realizó 3 semanas después también la hizo el evaluador B. Las radiografías laterales de las vértebras cervicales de los mismos pacientes se utilizaron para la clasificación que se llevó a cabo por los mismos evaluadores A y B, observaron las vértebras segunda, tercera y cuarta y posteriormente realizaron una clasificación que se comparó con la obtenida con las radiografías de la mano-muñeca en busca de correlación.

Definieron 6 etapas de maduración con base en las radiografías de las vértebras cervicales que se asociaron a las categorías SMI como sigue:

- Iniciación: SMI 1 y 2.
- Aceleración: SMI 3 y 4.
- Transición: SMI 5 y 6.
- Desaceleración: SMI 7 y 8.
- Maduración: SMI 9 y 10.
- Completación: SMI 11.



Las comparaciones entre las clasificaciones que se efectuaron por los evaluadores A y B mostraron diferencias insignificantes demostrando una alta correlación entre las radiografías de mano-muñeca y radiografías laterales de las vértebras cervicales, los puntos importantes en el que se observa el cambio según el estado de madurez que se adquiere con el tiempo son la forma de las vértebras tercera y cuarta que toman alguna tal como cuña, cuadrada, rectángulo mayor horizontal o verticalmente, así también se considera importante el cambio que hay en la concavidad del borde inferior de las vértebras segunda, tercera y cuarta [27].

López&Prado [36] realizaron su propia investigación en busca de una metodología que pueda ser usada como un estándar para la estimación de la maduración ósea en ella emplearon el registro de 80 niños y 80 niñas con oclusión normal, con edades entre 9 y 16 años, originarios de Matanzas, Cuba. Ellos observaron que las investigaciones recientes no contaban con un indicador preciso con respecto al momento en que se da la transición entre una etapa y otra, ese umbral de cambio es el que se consideró en su trabajo agregando etapas de transición o de cambio de una etapa a otra, como se observa a continuación en la Tabla 3.2.

Etapas	Etapas de transición
Iniciación	Iniciación→Aceleración
Aceleración	Aceleración→Transición
Transición	Transición→Desaceleración
Desaceleración	Desaceleración→Maduración
Maduración	Maduración→Finalización
Finalización	

Tabla 3.2: Etapas de Transición Propuestas por López&Prado[36].

Principalmente el trabajo se fundamentó en el análisis de datos con los Conjuntos Aproximados (Rough Sets), por ello en el conjunto de datos se realizaron cortes para tener atributos de baja cardinalidad, es decir se discretizaron los datos en términos lingüísticos.

Luego con base en criterios que fueron evaluados por un experto, se realizo una caracterización de la segunda, tercera y cuarta vértebra, los atributos que se consideran para formar la tabla de decisión son 12 de condición y uno de decisión; los atributos de condición son:

- Los atributos 2AngMC, 3AngMC y 4AngMC describen el ángulo de maduración de la segunda, tercera y cuarta vértebra, para cada atributo el dominio los valores “plano”, “ligeramente cóncavo”, “cóncavo” y “cóncavo pronunciado”, respectivamente.
- Los atributos 2ABP y 3ABP representan la altura del borde posterior de la segunda y tercera vértebra, cada atributo tiene como dominio los valores “no significativo”, “significativo” y “muy significativo”.
- Los atributos 2Ancho, 3Ancho y 4Ancho representan el ancho de la segunda, tercera y cuarta vértebra, cada atributo tiene como dominio los valores “no significativo”, “significativo” y “muy significativo”.
- Los atributos 3Aba y 4Aba representan la altura del borde anterior de la tercera y cuarta vértebra, cada atributo tiene como dominio los valores “no significativo”, “significativo” y “muy significativo”.
- Los atributos 3forma y 4forma representan la forma de la tercera y cuarta vértebra, cada atributo tiene como dominio los valores “cunã moderada”, “cunã pronunciada”, “cuadrada”, “rectángulo más ancho que alto” y “rectángulo más alto que ancho”.

Y el atributo de decisión “**Etapa**” que tiene como dominio los valores “Iniciación”, “Iniciación-Aceleración”, “Aceleración”, “Aceleración-Transición”, “Transición”, “Transición-Desaceleración”, “Desaceleración”, “Desaceleración-Madurez”, “Madurez”, “Madurez-Terminación” y “Terminación”.

Al contar con el estado de maduración de las vértebras se realizó la clasificación del individuo a la etapa de maduración correspondiente. Luego se aplicó la

metodología de los Conjuntos Aproximados a los datos que previamente se habían discretizado y categorizado, primero se obtuvieron reductos de la tabla por medio de alguna metodología como algoritmos genéticos o redes Neuronales y luego las reglas de decisión que fueron 609 y 608 para niños y 485 y 359 para niñas respectivamente, es un número muy grande de reglas, por lo que se consideró que los resultados no fueron buenos ya que se buscaba minimizar el número de reglas maximizando la cobertura y exactitud de las mismas.

Entonces se optó por determinar las reglas de decisión directamente de la tabla discretizada o tabla de decisión, se probaron cuatro algoritmos: algoritmo exhaustivo, algoritmo genético, algoritmo de cobertura y algoritmo LEM2 (Learning from Examples Module v2) [26, 24, 25]. El algoritmo LEM2 fue el que arrojó mejores resultados, además, el método LEM2 tiene la opción de variar el parámetro de cobertura, el cual varía de 0 a 1 [17], con un parámetro de cobertura con valor de 0.95 se obtuvieron 24 reglas que logran una gran cobertura de los datos de los niños, para los datos de las niñas con un parámetro de cobertura con valor de 0.95 se obtienen 22 reglas obteniendo los mejores resultados en cuanto a cobertura y exactitud de entre los 4 algoritmos comparados.

Después de realizar un análisis de sensibilidad concluyeron que los atributos relacionados a la concavidad inferior y a la forma de las vértebras son muy sensibles a variaciones de dos por ciento. Concluyeron que la maduración ósea puede modelarse como un problema de clasificación multicriterio que puede resolverse eficientemente con Conjuntos Aproximados generando reglas de decisión. Agregar etapas de transición es de gran utilidad para tener una mejor clasificación y más aproximada a la realidad, además de que es un concepto original de su investigación enriqueciendo y dando otro punto de vista para este indicador de madurez. Aunque la metodología es buena, se duda pueda generalizarse, puesto que hace falta más experimentación para comprobar la confiabilidad con respecto al conjunto mínimo de reglas, el nivel de cobertura y su precisión.

### 3.6 RADIOGRAFÍAS MANO-MUÑECA VS LATERALES DE LAS VÉRTEBRAS CERVICALES.

De los diversos indicadores que buscan encontrar el grado de crecimiento se han estudiado: edad cronológica, altura, desarrollo dental, desarrollo esquelético y desarrollo vertebral. El indicador mano-muñeca se considera el mejor indicador de madurez [52]. Esta distinción se ha logrado en gran parte por que se puede relacionar directamente con el crecimiento esperado. Unos de los inconvenientes que presenta este método es que se expone al paciente a una serie de radiaciones ya que se necesitan varias radiografías para su evaluación [52]. El estudio de radiografías de mano-muñeca permite el seguimiento del desarrollo de una gran cantidad de huesos [52], aunque algunas ocasiones dicho crecimiento es tan pequeño que es difícil de observar. Otras veces los huesos se transponen en la radiografía lo que hace complicado identificar el crecimiento de los huesos transpuestos.

Por otra parte, estudiar la maduración ósea usando radiografías laterales de las cervicales ha tomado popularidad en años recientes demostrando que sus resultados son tan válidos como los que se obtienen con radiografías mano-muñeca [59, 59, 52, 64, 8, 37, 21], por eso se considera que es un buen indicador de la madurez. Las características más atractivas de este método son: solo se requiere a lo mucho el estudio de 6 vértebras (segunda, tercera, cuarta, quinta y sexta) y en el mejor de los casos solo se requieren de 3 (segunda, tercera y cuarta) [8], para definir el estado de madurez se requiere observar las características físicas de la vértebra tales como: altura borde anterior, altura borde posterior, concavidad de la vértebra, el ancho y la forma [52]. Estos rasgos pueden observarse con claridad y se pueden obtener las medidas longitudinales de las vértebras y la forma, por lo que se puede estimar la maduración ósea de manera más simple que la que se realiza con radiografías de mano-muñeca.

Además de que al paciente ya no se le expone a radiaciones extra por que este

estudio solo requiere una radiografía [50].

### 3.7 CONCLUSIONES.

El problema de estimación del potencial de crecimiento esta directamente relacionado con la estimación de la etapa de maduración ósea en la que se encuentra un paciente (niño o adolescente), sin embargo para estimar aquel se necesita una mayor precisión de la requerida para estimar las etapas de maduración ósea. Esto hace posible que se puedan derivar métodos para estimar el potencial de crecimiento a partir de metodologías diseñadas para estimar la maduración ósea.

Aunque prevalece el uso del método de las radiografías de mano-muñeca para estimar la maduración ósea en el ámbito científico, este no ha tenido un impacto significativo en la práctica profesional, posiblemente por que resulta complicado realizar el procedimiento y obtener resultados satisfactorios. Debido a que se basa en un sistema de puntuación que se le otorga a los centros de osificación de las manos y muñecas izquierdas respectivamente, labor que se realiza por observación física de radiografías.

Las radiografías de las vértebras han probado ser un método tan preciso como el basado en radiografías mano-muñeca, los resultados son más simples de interpretar ya que se requieren menos características o propiedades que observar. Por ello se ha decidido en esta investigación emplear radiografías laterales de las vértebras cervicales para estimar el potencial de crecimiento.

## CAPÍTULO 4

# METODOLOGÍA.

---

### 4.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se expone la metodología desarrollada para caracterizar la maduración ósea en pacientes con edades entre 9 y 16 años. Dicha metodología se basa en la aplicación conjunta de el análisis multicriterio de la decisión, los Conjuntos Aproximados y los Conjuntos Difusos. En la sección 4.2 se presentan los pasos generales de la metodología. De las secciones 4.3 a la 4.5 se describen en detalle cada uno de los pasos. Finalmente, en las secciones 4.6 se presentan algunas conclusiones relacionadas con lo visto en el capítulo.

### 4.2 DESCRIPCIÓN DE LA METODOLOGÍA PROPUESTA.

La metodología propuesta esta basada en un trabajo previo realizado por López&Prado [36] quienes representaron el problema de la caracterización de la maduración ósea como un problema de clasificación multicriterio. Al igual que López&Prado se utilizan las vértebras cervicales para establecer la etapa de maduración ósea, sin embargo, a diferencia de López&Prado se introducen niveles de desarrollo en cada etapa lo que permite obtener una clasificación más precisa en cuanto al desarrollo del individuo y por ende obtener una estimación más precisa del potencial de crecimiento restante, que es el objetivo principal de esta investigación.

Al introducir niveles de desarrollo o de pertenencia en cada etapa, permite realizar una clasificación más fina sin introducir nuevas clases o categorías, y permite resolver el problema en dos etapas: Inicialmente se establece la etapa de maduración para el paciente y luego de ser necesario se identifica el nivel de desarrollo dentro de la etapa, que requiere un esfuerzo adicional por parte del tomador de decisiones o el especialista, pero no requiere que se tome otra radiografía o alguna otra información adicional por parte del paciente. Siguiendo la propuesta de Lopez&Prado, se han reconocido las siguientes etapas de maduración ósea; Iniciación, Aceleración, Transición, Desaceleración, Madurez, Terminación y las etapas de transición entre cada una de etapas consecutivas:

- Iniciación → Aceleración
- Aceleración → Transición
- Transición → Desaceleración
- Desaceleración → Madurez
- Madurez → Terminación.

Para cada etapa se han establecido tres niveles de desarrollo: Inicial, pico de desarrollo y salida. El **nivel de desarrollo inicial** se corresponde con un estadio temprano de desarrollo de la etapa, que puede iniciarse durante la etapa de transición que le antecede. Por **el nivel pico de desarrollo** se entiende un nivel de desarrollo en el cual el paciente presenta las características propias de la etapa lo que permite su identificación sin lugar a dudas o con un alto nivel de credibilidad. Finalmente **el nivel de salida** indica que presenta elementos que se identifican con la etapa siguiente aunque no reúne todas las características como para clasificarse en la etapa consecutiva, este nivel puede iniciar antes de la etapa de transición que corresponde inmediatamente.

En las etapas de transición es probable que no se observen o resulte más difícil establecer estos tres niveles, dado que de estas es sobre las que se tiene menos

información y la única referencia a las mismas se presentan en los trabajos de Lopez&Prado. Sin embargo, aún en estos casos pueden identificarse dos niveles: Entrada y salida que por lo general deben resultar suficientes para la mayoría de las aplicaciones.

Para la estimación de la etapa de maduración ósea se sigue el procedimiento propuesto en Lopez&Prado, se emplean los Conjuntos Aproximados para derivar reglas y realizar la clasificación. El nivel de desarrollo de la etapa se estima empleando Conjuntos Difusos, y la clasificación final se realiza empleando reglas difusas. De esta manera se obtiene un sistema de clasificación dinámico que se actualiza con la adición de nuevos casos (datos de pacientes) favoreciendo su generalización y adaptación a contextos diferentes. A continuación se presentan, de manera general, los pasos de la metodología propuesta para establecer un clasificador multicriterio:

1. Conformar la tabla de decisión que constituirá la base de clasificación.
2. Aplicar la teoría de los Conjuntos Aproximados para generar las reglas de caracterización de las etapas de maduración ósea a partir de la tabla de decisión.
3. Definir Conjuntos Difusos para cada categoría de cada atributo presente en la tabla de decisión.
4. Definir tres niveles de desarrollo para cada clase empleando la teoría de Conjuntos Difusos.

En las secciones que siguen se describe en detalle cada uno de estos pasos.

### 4.3 TABLA DE DECISIÓN.

Según criterios de expertos [52, 36, 38], las características más relevantes de las vértebras cervicales para la estimación de la maduración ósea son: Forma, tamaño y ángulo de maduración. Típicamente estas características se estiman a partir



de medidas longitudinales. El primer paso consiste en seleccionar una muestra representativa de una cierta población. Lo ideal es incluir en la muestra no solo niños normales sino también niños con maloclusiones. El paso siguiente consiste en obtener las características de las vértebras cervicales de cada paciente incluido en la muestra. Para obtener los datos que compondrán la tabla de decisión se requieren radiografías laterales cefalométricas que permiten observar las características morfológicas de la segunda, tercera y cuarta vértebras cervicales. Se parte de las medidas longitudinales tomadas de radiografías laterales cefalométricas [36], estos datos son agrupados luego en una tabla, como ejemplo ver tabla 4.1

No.	Edad	Sexo	2Abp	2Ancho	2AngMc	3Abp	3Aba	3A.Media	3Ancho	3AngMc
1	9	2	23	10	102	8	6.5	7.5	13	101
2	9	2	30	11	100	11	9	9.5	14	93
3	9	2	26	12	103	10	9	9.5	12.5	95
4	9	2	24	10	96	9.5	7	8	11.5	85
5	9	2	26	10	100	10	8	8.5	12	101

Tabla 4.1: Datos Obtenidos por Medio de Mediciones Longitudinales Aplicadas a las Radiografías de los Pacientes Incluidos en la Muestra.

Al trabajar con expertos se pudo constatar que les resultaba muy difícil establecer criterios sobre la maduración ósea utilizando los datos obtenidos en el paso anterior, por ello Lopez&Prado proponen transformar estos datos en otros que facilitarían la estimación. En el paso siguiente se transforman las medidas en los siguientes atributos:

1. Ángulo de maduración: Define el ángulo que tiene la concavidad del borde inferior de la segunda, tercera y cuarta vértebra. Siguiendo los criterios encontrados en los trabajos científicos revisados, los típicos que se identifican en el ángulo de maduración ósea son: Plano, ligeramente cóncavo, cóncavo y cóncavo pronunciado. Los ángulos de maduración se expresan en grados y se denominan "2AngMC", "3AngMC" y "4AngMC" asociados a la segunda, tercera y cuarta vértebras respectivamente.

2. Forma de la vértebra: Identifica la forma geométrica de la vértebra. Dado que la forma de la segunda vértebra prácticamente permanece inalterable a simple vista, sólo se consideran la tercera y cuarta vértebra. Los valores reconocidos por los expertos, expuestos en publicaciones científicas, son: Cuña pronunciada, cuña moderada, cuadrado, rectángulo más ancho que alto, rectángulo más alto que ancho. Estos atributos se denominan “3Forma y 4Forma”, para la tercera y cuarta vértebras respectivamente.
3. Aumento de la altura del borde posterior: Representa el aumento en el borde posterior de la segunda y tercera vértebra, respecto a un promedio de una población de pacientes entre 9 y 10 años, sus valores característicos son: No significativo, significativo y muy significativo. Los atributos se denominan 2ABP, 3ABP y 4ABP respectivamente.
4. Aumento del ancho: Representa el aumento del ancho de la segunda, tercera y cuarta vértebra, con base en el promedio de una población de pacientes entre 9 y 10 años, los atributos que representan este aumento son: 2ancho, 3ancho y 4ancho, los valores característicos son “no significativo, significativo y muy significativo”.
5. Aumento de la altura del borde anterior: Considera las vértebras tercera y cuarta, con base en un promedio de una población de entre 9 y 10 años, los atributos que representan este aumento son: 3aba y 4aba, los valores característicos se denominan “No significativo, significativo y muy significativo”.

Para representar los datos en una tabla con los valores típicos se requiere hacer transformaciones de las medidas longitudinales obtenidas en el paso anterior. Para ello se empleó el método de expertos, cuya aplicación se sugiere de la manera siguiente: Se selecciona un panel de expertos en el tema o especialistas de experiencia reconocida, y se le solicita que identifiquen las características de vértebras cervicales a partir de gráficas conformadas con valores específicos. Por ejemplo, se les solicita comparar cuando una vértebra es considerada como una cuña moderada o como

una cuña pronunciada, para ello se van variando las medidas correspondientes de la vértebra hasta que pueden realizar una identificación sin lugar a dudas, se realiza el mismo procedimiento para el resto de las características. Una vez que se identifican los valores típicos para cada característica de cada vértebra se genera la tabla correspondiente a la muestra poblacional (ver tabla 4.2 )

No.	2AngMc	2Abp	2Ancho	3AngMc	3Forma	3Aba	3Ancho
1	plano	no sign	no sign	plano	cuña moderada	no sign	no sign
2	plano	no sign	no sign	lig. concavo	cuña moderada	no sign	no sign
3	lig. concavo	no sign	no sign	lig. concavo	cuña moderada	no sign	no sign
4	plano	no sign	no sign	lig. concavo	cuña moderada	no sign	no sign
5	plano	no sign	no sign	plano	cuña moderada	no sign	no sign

Tabla 4.2: Valores Típicos de las Vértebras Cervicales Respecto a los Atributos Forma, Ángulo de Maduración, Altura del Borde Anterior y Posterior

El paso siguiente según López&Prado [36], consiste en solicitar a los expertos que describan cada etapa de maduración ósea, respecto a los valores típicos de las propiedades de cada vértebra. Para facilitar la descripción recomiendan identificar las características de cada vértebra por separado y después consolidar todas las vértebras al dar el diagnóstico final, verificando checando consistencia en el mismo. Las caracterizaciones se confrontan con las publicadas en la literatura y se rectifican de ser reconocida la necesidad por parte del panel de expertos. Con las caracterizaciones obtenidas de los expertos se clasifica los datos de cada paciente y se le asigna una etapa según la metodología de Conjuntos Aproximados. Los resultados se representan en una tabla de decisión (ver tabla 4.3).

No.	3Aba	3Ancho	3Abp	AngMc	4Forma	4Aba	Etapa
1	no sign	no sign	no sign	plano	cuña moderada	no sign	Ini/Ace
2	no sign	no sign	no sign	lig cóncavo	cuña moderada	no sign	Ini/Ace
3	no sign	no sign	no sign	lig cóncavo	cuña moderada	no sign	Ini/Ace
4	no sign	no sign	no sign	lig cóncavo	cuña moderada	no sign	Ini/Ace
5	es sign	no sign	no sign	lig cóncavo	Rect. más alto que ancho	es sign	Ini/Ace

Tabla 4.3: Extracto de una Tabla de Decisión que Representa las Características de la Muestra Poblacional

## 4.4 GENERACIÓN DE REGLAS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE LAS ETAPAS DE LA MADURACIÓN ÓSEA.

A partir de la tabla de decisión es posible generar reglas que establecen relaciones de causa y efecto entre los atributos de condición y el atributo de decisión. La teoría de Conjuntos Aproximados (Rough Sets) es una metodología que resulta interesante para derivar estas reglas a partir de la tabla de decisión, esta metodología no requiere de una base estadística y la generación se basa solo en los datos disponibles. Los resultados pueden expresarse en simples términos lingüísticos, de ahí que resulte atractiva su implementación y se explique la gran cantidad de aplicaciones que se han venido publicando en los últimos 5 años.

Existen diversas formas de expresar el conocimiento aprendido de un conjunto de datos, una de las maneras más comprensibles para los seres humanos es aquella que se expresa en forma de reglas de decisión. Las reglas representan la relación que existe entre los atributos de condición (AC) y los atributos de decisión (Clase) en la forma “SI AC1 & AC2 & AC3&...&ACN ENTONCES Clase”[23]. Las reglas explican la relación de dependencia que hay entre los atributos de condición y los atributos de decisión. Existen diversos algoritmos para el descubrimiento de reglas de decisión entre los que se encuentra el LEM2 (Learning from Examples Module v2) que a su vez es parte del sistema de minería de datos LERS (Learning from Examples based on Rough Sets) [24]. El algoritmo busca un mínimo de reglas únicas con la máxima cobertura posible. El algoritmo LEM2 solo considera condiciones de la forma Atributo = valor, por ello si se tiene un conjuntos de datos en el dominio continuo se requiere primero efectuar una discretización de los datos [24].

Para obtener las reglas el algoritmo, LEM2 calcula la cardinalidad de los pares atributo-valor, después para el concepto generado por el atributo de decisión se hace la intersección con el bloque que contiene todos los pares atributo-valor y se toma

**Algoritmo 1** Procedimiento LEM2 [23]

- 
- 1: Entrada: Un conjunto  $B$
  - 2: Salida: Una cobertura local de una sola  $\tau$  de un conjunto  $B$
  - 3: comenzar
  - 4:  $G := B$
  - 5:  $\tau := \emptyset$
  - 6: **mientras**  $G \neq \emptyset$  **hacer**
  - 7:    $T := \emptyset$
  - 8:    $T(G) := \{t \mid [t] \cap G \neq \emptyset\}$  ;
  - 9:   **mientras**  $(T = \emptyset)$  *OR*  $([T] \not\subseteq B)$  **hacer**
  - 10:     comenzar
  - 11:     selecciona un par  $t \in T(G)$  tal que  $|[t] \cap G|$  es el maximo; si hay un empate, selecciona un par  $t \in T(G)$  con la menor cardinalidad de  $[t]$ ; si ocurre otro selecciona el primer par;
  - 12:      $T := T \cup \{t\}$ ;
  - 13:      $G := [t] \cap G$ ;
  - 14:      $T(G) := \{t \mid [t] \cap G \neq \emptyset\}$ ;
  - 15:      $T(G) := T(G) - T$ ;
  - 16:   **fin mientras**
  - 17:   para cada  $t \in T$  hacer
  - 18:   **si**  $[T - t] \subseteq B$  **entonces**
  - 19:     **devolver**  $T := T - t$ ;
  - 20:   **si no**
  - 21:      $\tau := \tau \cup \{T\}$ ;
  - 22:      $G := B - \cup_{T \in \tau} [T]$ ;
  - 23:   **fin si**
  - 24: **fin mientras**
  - 25: **para todo**  $T \in \tau$  **hacer**
  - 26:   **si**  $\cup_{S \in \tau - \{T\}} [S] = B$  **entonces**
  - 27:     **devolver**  $\tau := \tau - \{T\}$ ;
  - 28:   **fin si**
  - 29: **fin para**
  - 30: Fin del Procedimiento
-

el que tenga el mayor número elementos intersectados con el concepto. Después si hay varios pares atributo-valor con igual número de intersecciones se elige el par atributo-valor que tenga contenido el menor número de elementos y se tiene el primer complejo mínimo [57].

## 4.5 CONVERTIR CADA CATEGORÍA DE CADA ATRIBUTO DE CONDICIÓN DE LA TABLA DE DECISIÓN EN CATEGORÍAS DIFUSAS.

En el capítulo 3 se estableció que para ciertos tratamientos pediátricos se requiere una estimación más fina del potencial de crecimiento. Con este fin es que se introducen en esta metodología los niveles de desarrollo de las etapas descritos en la sección 4.2. La finalidad de este paso y los siguientes de la metodología propuesta es precisamente establecer un procedimiento que permita estimar el nivel de desarrollo de cualquier etapa de maduración ósea en la que se encuentre un determinado paciente a partir de los datos longitudinales obtenidos de una radiografía lateral de las vértebras cervicales segunda, tercera y cuarta. En esta sección se describe como se emplea la teoría de los Conjuntos Difusos para estimar el estado de cada atributo de cada vértebra. Cada estado se describe mediante términos lingüísticos lo que facilita la descripción e interpretación por parte de los expertos o especialistas.

A partir de la información recogida en la tabla de decisión que se construyó en el paso 3, se procede a construir un número difuso para cada uno de los términos lingüísticos que describen los valores típicos de cada atributo. Se precisa trabajar nuevamente con expertos para determinar el tipo de número difuso que mejor representa al término en cuestión y establecer las marcas asociadas al número difuso correspondiente. En la Figura 4.1, se observan los números difusos contruidos para los términos lingüísticos asociados a los valores típicos que toma el atributo “ángulo de Maduración de la segunda vértebra”, en este caso se han seleccionado números

triangulares para los términos “Ligeramente Cóncavo” y “Cóncavo” y “Números en forma de rampa, por derecha y por izquierda respectivamente” para los términos “Plano” y “Cóncavo Pronunciado” (podrían ser otros tipos de números, en dependencia de lo que opinen los expertos).

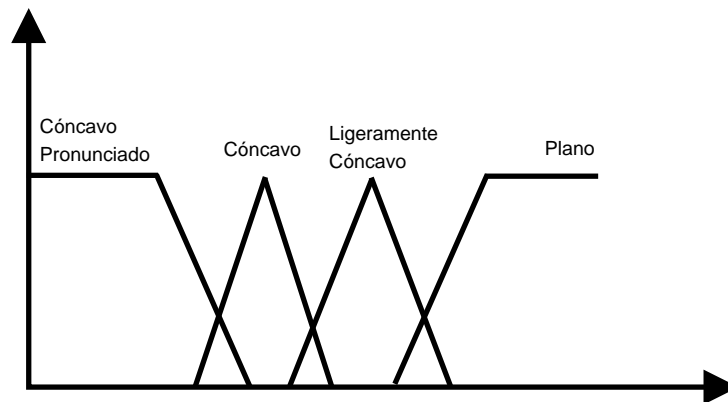


Figura 4.1: Categorías Difusas Variable 2angmc

## 4.6 FUZZIFICAR CATEGORÍAS DE DECISIÓN.

En esta sección se describe el proceso para fuzzificar las once categorías de decisión, que representan la madurez ósea de un paciente. Para cada categoría excepto la primera y la última que representa, la etapa de iniciación y la última que representa la etapa de terminación se definirán, un número difuso triangular. Para las etapas de iniciación y terminación se definen funciones de pertenencia tipo rampa. Para establecer los parámetros de las funciones de pertenencia de estas categorías se desarrollo el procedimiento descrito a continuación:

- Seleccionar un conjunto de casos de entrenamiento y otro conjunto de casos de validación compuesto por una muestra representativa de la población a la cual se le este caracterizando la maduración ósea (aplicando un método de muestreo estadístico)





- Para cada función de pertenencia de cada una de las clases mencionadas, por ejemplo, identificar los puntos ( $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  y  $p_6$  en la Figura 4.2) en los que la recta definida por el nivel  $\alpha$  de estabilidad que corta inicialmente la función, encontrar las abscisas correspondientes a esos puntos ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  i y  $j$ ). Entonces el intervalo  $a$ - $i$  representa el nivel de salida de la fase, en el ejemplo de la etapa de Iniciación, el intervalo  $i$ - $j$  representa el nivel de estabilidad en la fase de transición (Iniciación-Aceleración) definido como entrando a Iniciación-Aceleración y el intervalo  $j$ - $b$ , representa el nivel de salida en la fase, en este ejemplo de la etapa de Iniciación-Aceleración, las etapas de transición solo tienen 2 niveles: Entrando y saliendo de la etapa. En el intervalo  $b$ - $c$  se define el nivel entrando a aceleración, en el intervalo  $c$ - $d$  se establece el nivel de estabilidad o piko de desarrollo de la etapa aceleración.
- Si al defuzzificar la evaluación de todas las reglas el resultado cae en un intervalo en el que se traslapan 2 funciones de pertenencia se clasificará el elemento en aquella categoría que tenga un mayor valor de pertenencia, si la diferencia entre ambos valores de pertenencia (rebasa cierto umbral de indiferencia  $\beta$  (ver Figura 4.2) se asigna al nivel de desarrollo próximo.
- Si la diferencia entre los dos valores de pertenencia no rebasa ese umbral  $\beta$  se clasifica el elemento en ambas categorías y ese tipo de situaciones hay que consultarlas con los expertos. Esta última situación debe ser infrecuente pero de ocurrir permite identificar inconsistencias en la definición de las normas de Rough Sets o en la definición de los Conjuntos Difusos. Esta situación debe resolverse realizando los ajustes apropiados en el sistema de clasificación con la participación de los expertos.

La variable Madurez es definida por 11 categorías, que se representan con funciones de pertenencia triangulares y de tipo rampa:

- Iniciación
- Iniciación → Aceleración
- Aceleración
- Aceleración → Transición
- Transición
- Transición → Desaceleración
- Desaceleración
- Desaceleración → Madurez
- Madurez
- Madurez → Terminación
- Terminación

Ver Figura función en el apéndice

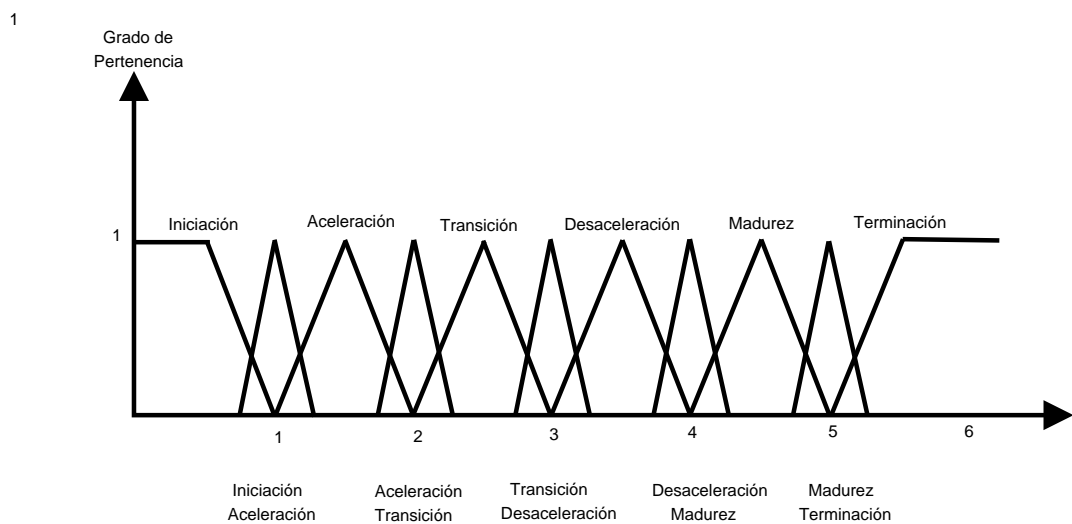


Figura 4.3: Categorías Variable de Salida Madurez

## 4.7 CONCLUSIONES.

Al complementar la metodología de Conjuntos Aproximados con las propiedades de los conjuntos difusos se logra una clasificación más precisa, identificando un momento específico del crecimiento para cada niño y niña, que ayuda al especialista a establecer si el paciente se encuentra iniciando, saliendo o estable (nivel meseta) en alguna de las etapas de maduración ósea empleadas en este trabajo. Sin embargo se requiere un mayor esfuerzo por parte del tomador de decisiones ya que se requiere modelar más aspectos subjetivos que alimentan los parámetros de la metodología híbrida definida en comparación con la metodología desarrollada por Lopez&Prado en el trabajo al que se hace referencia en este documento.

## CAPÍTULO 5

# RESULTADOS

---

### 5.1 INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se describe un experimento llevado a cabo con datos de pacientes reales (mismos que son descritos en la sección 5.2) para establecer la validez de la metodología de apoyo a la decisión propuesta (la aplicación de los pasos de la metodología se describen en las secciones 5.3-5.5). Se analizan críticamente los resultados obtenidos (sección 5.6) y se establecen conclusiones al respecto (sección 5.7).

### 5.2 LOS DATOS Y LA CREACIÓN DE LA TABLA DE DECISIÓN.

Se tomaron dos conjuntos de datos, el primero reportado en [36] -compuesto por 80 niños y 80 niñas con oclusión normal y edades entre 9 y 16 años (grupo I). El segundo conjunto de datos reportado en [48] estaba compuesto por niños y niñas con oclusión normal (grupo II.1), y niños y niñas con maloclusiones de clase II y III (grupo II.2), todos con edades entre 9 y 16 años, la composición de los conjuntos se muestran en la Tabla 5.1.

Grupo	Total	Sexo	Tipo Oclusión
I	F	80	I
II.1	F	78	I
Total.1	F	158	I
II.2	F	112	II y II
Completo	F	270	I, II y III
I	M	80	I
II.1	M	81	I
Total.1	M	161	I
II.2	M	99	II y III
Completo	M	260	I, II y III

Tabla 5.1: Composición de los Conjuntos de Datos Según Sexo, y Tipo de Oclusión

Para generar las reglas empleando la teoría de Conjuntos Aproximados (Rough Sets) se creó una tabla de decisión a partir de los datos siguiendo el procedimiento empleado en [36]. Esta decisión está justificada por el hecho de que ambos conjuntos de datos fueron recolectados en la misma región (Matanzas, Cuba) y por los mismos especialistas (Instituto de Estomatología de Matanzas), empleando los mismos procedimientos, solo se recolectaron en tiempos diferentes con un intervalo de aproximadamente 3 años entre cada recolección de datos. Los detalles los puede consultar en [14]. También se usaron las mismas normas para derivar las características relativas a forma, cambio en dimensiones y concavidad del borde inferior de las vértebras. Para conformar el atributo de decisión se utilizaron las opiniones que los expertos emitieron para formar el atributo de decisión en [36]. De esta manera se obtuvo un diagnóstico experto que establecía la etapa de maduración ósea de cada niño.

### 5.3 GENERACIÓN DE REGLAS EMPLEANDO CONJUNTOS APROXIMADOS (ROUGH SETS).

Para cada sexo y grupo se generó un conjunto de reglas de clasificación aplicando la metodología de Rough Sets tal y como se hizo en [36]. Además se aplicó un procedimiento de reducción del conjunto de reglas y de la cantidad de cláusulas por reglas buscando obtener un conjunto minimal (en las Tablas B.2 y B.8 se pueden observar las cantidades de reglas obtenidas para el grupo de las niñas, en las Tablas B.12 y B.18 niños antes y después de la reducción). En el Apéndice B se muestran las tablas de todos los grupos..

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	22	1	11	4,3	2	9	6,2
0,85	20	1	25	7,6	1	5	2,8
0,8	19	1	25	8	1	5	2,4
0,75	18	1	30	8,5	1	4	2,3
0,7	18	1	32	9,8	1	4	2,2

Tabla 5.2: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niñas

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	33	1	11	3,4	3	11	7,3
0,85	30	1	21	6,9	1	5	2,8
0,8	28	1	24	7,4	1	4	2,6
0,75	27	1	24	8	1	4	2,4
0,7	27	1	24	8	1	4	2,4

Tabla 5.3: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niñas

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	24	1	17	3,5	2	12	7
0,85	24	1	24	4,9	1	5	2,8
0,8	23	1	29	5,2	1	5	2,7
0,75	23	1	29	5,4	1	4	2,5
0,7	23	1	29	5,4	1	4	2,4

Tabla 5.4: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niños

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	30	1	17	3,6	4	12	7
0,85	27	1	30	7,4	2	7	2,9
0,8	22	1	3	8,6	1	6	2,7
0,75	22	1	33	9	1	6	2,5
0,7	22	1	33	9	1	6	2,5

Tabla 5.5: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niños

## 5.4 FUZZIFICACIÓN DE CATEGORÍAS.

Los rangos de las categorías para cada variable de entrada se definieron con base en la información expuesta en López&Prado [36], las categorías que son definidas según el valor de su intervalo, cuando el intervalo es acotado por izquierda y por

derecha se utilizan números triangulares y cuando es el intervalo es acotado solo por la izquierda o por la derecha se emplean números en forma de rampa.

en la Figura 5.1 se observa un ejemplo de la variable ángulo de maduración, con cuatro funciones de pertenencia, dos triangulares y dos en forma de rampa, las líneas punteadas indican el punto en donde las funciones de pertenencia alcanzan su valor máximo.

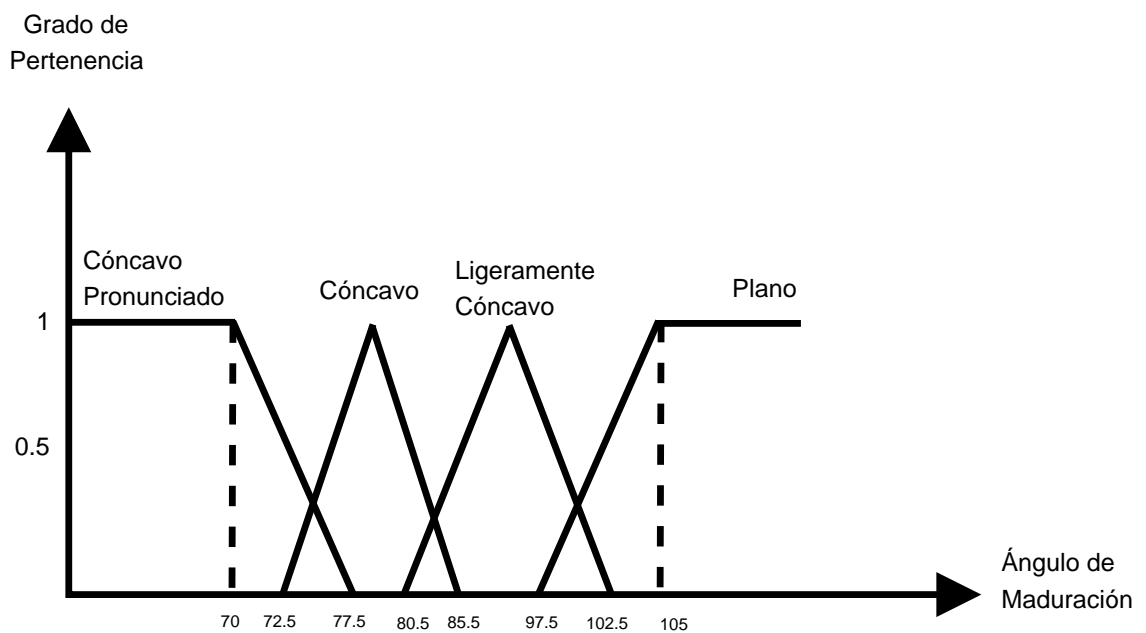


Figura 5.1: Ejemplo Atributo AngMC

En la Figura 5.2 se muestra ejemplo de la variable Abp con 3 funciones de pertenencia, las líneas punteadas señalan el punto en donde las funciones de pertenencia alcanzan su valor máximo.



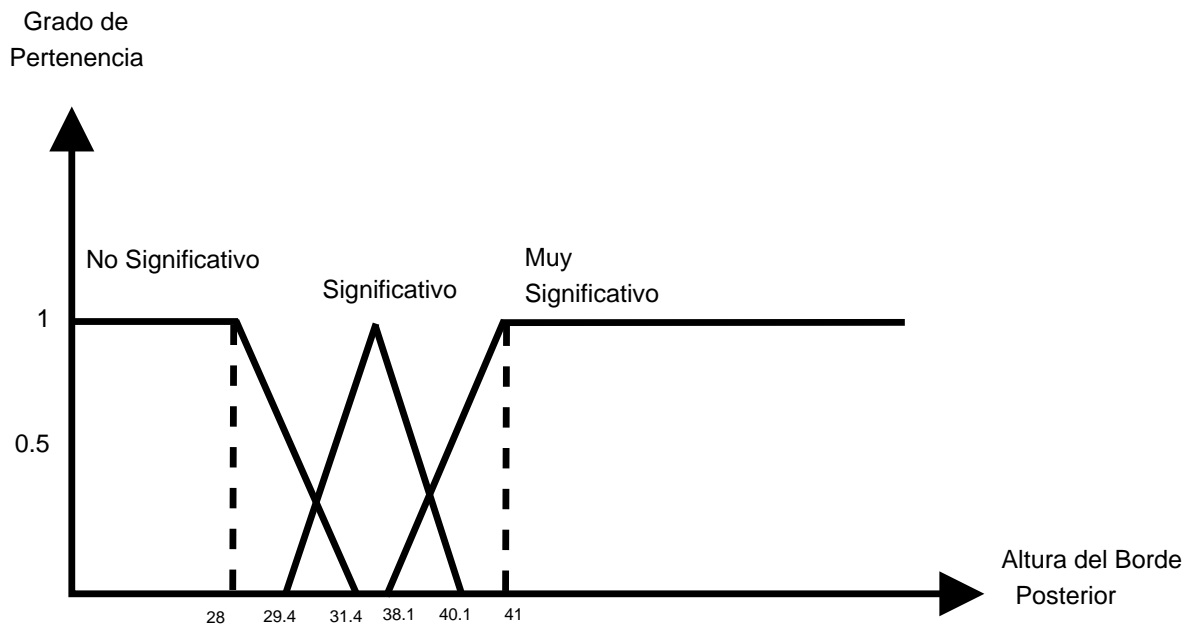


Figura 5.2: Ejemplo Atributo ABP

En la Figura 5.3 se muestra ejemplo de la variable Ancho con 3 funciones de pertenencia, las líneas punteadas señalan el punto en donde las funciones de pertenencia alcanzan su valor máximo.

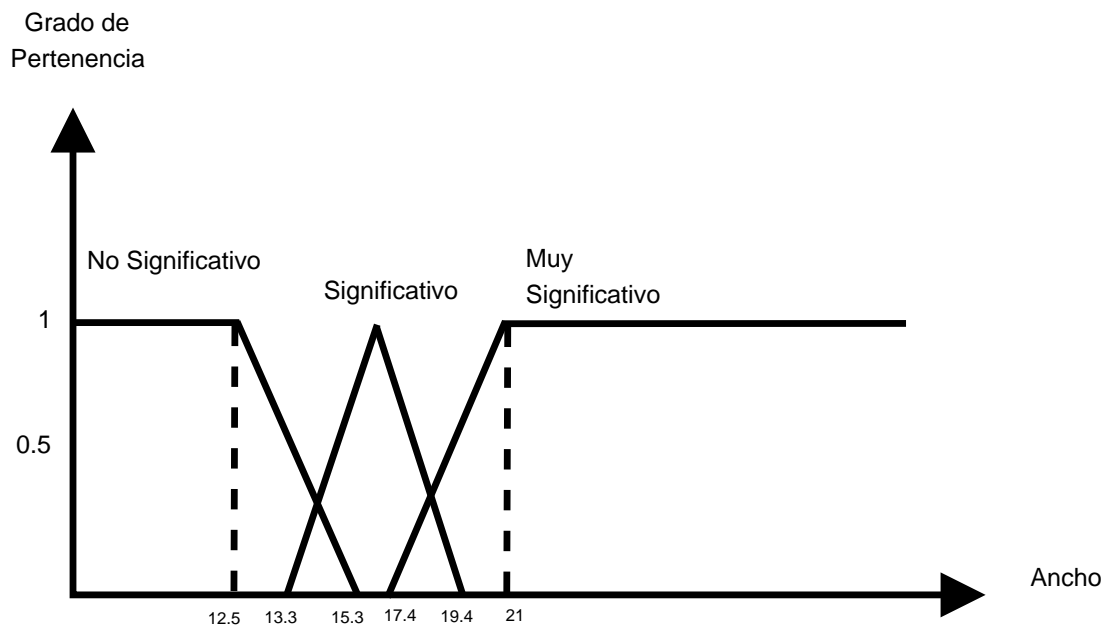


Figura 5.3: Ejemplo Atributo Ancho

En la Figura 5.4 se muestra ejemplo de la variable Aba con 3 funciones de pertenencia, las líneas punteadas señalan el punto en donde las funciones de pertenencia alcanzan su valor máximo.

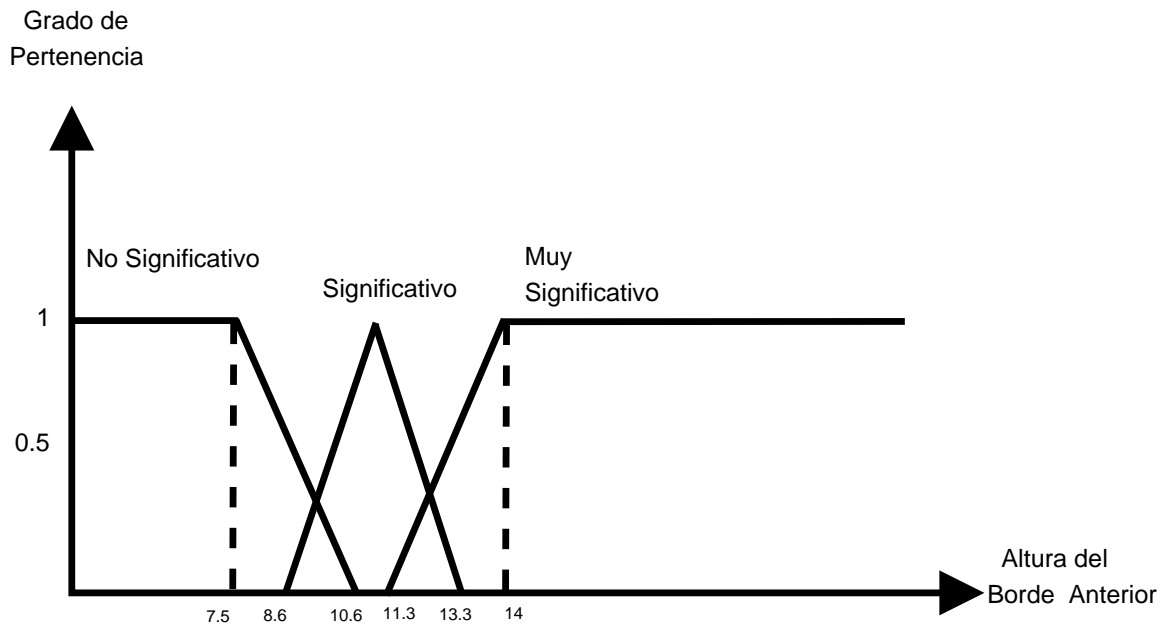


Figura 5.4: Ejemplo Atributo ABA

Originalmente el atributo Forma contenía 5 categorías, debido que para determinar la forma de la vértebra se requieren primero, dos atributos; Altura del borde anterior y Altura del borde posterior, para determinar la forma de cuña moderada y pronunciada; para estimar la forma cuadrada, rectángulo más alto que ancho y rectángulo más ancho que alto se emplean: El ancho, Altura del borde anterior y Altura del borde posterior. La forma cuña moderada y pronunciada como se muestra en la Figura 5.5, la línea punteada señala el punto en donde las funciones de pertenencia alcanzan su valor máximo.

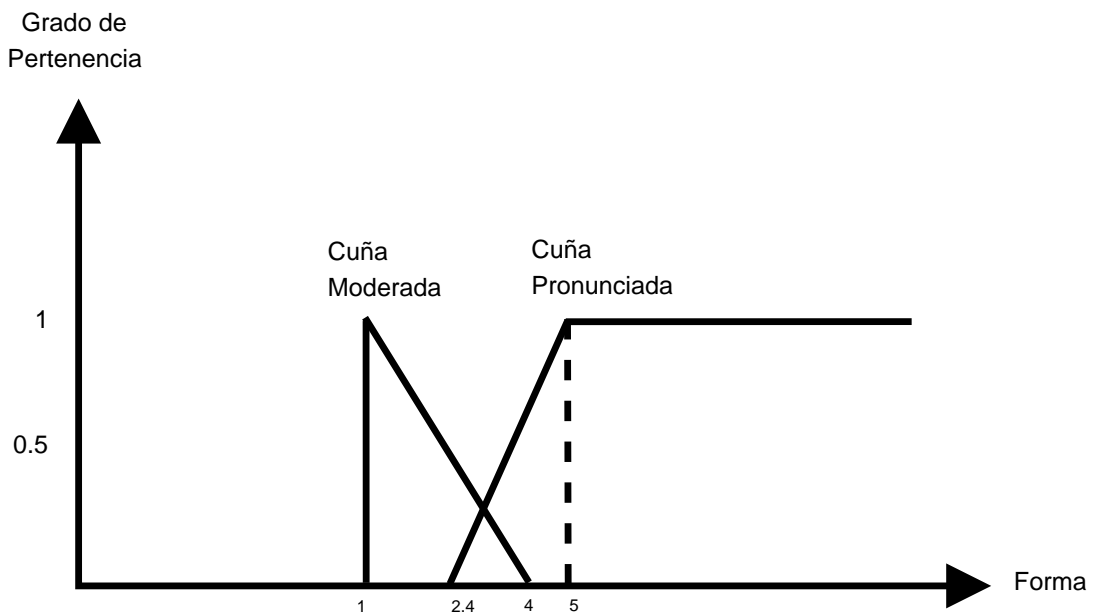


Figura 5.5: Ejemplo Atributo Forma1

Las formas: cuadrada, rectángulo más alto que ancho y rectángulo más ancho que alto. Se muestran en la Figura 5.6, las líneas punteadas señalan el punto en donde las funciones de pertenencia alcanzan su valor máximo.

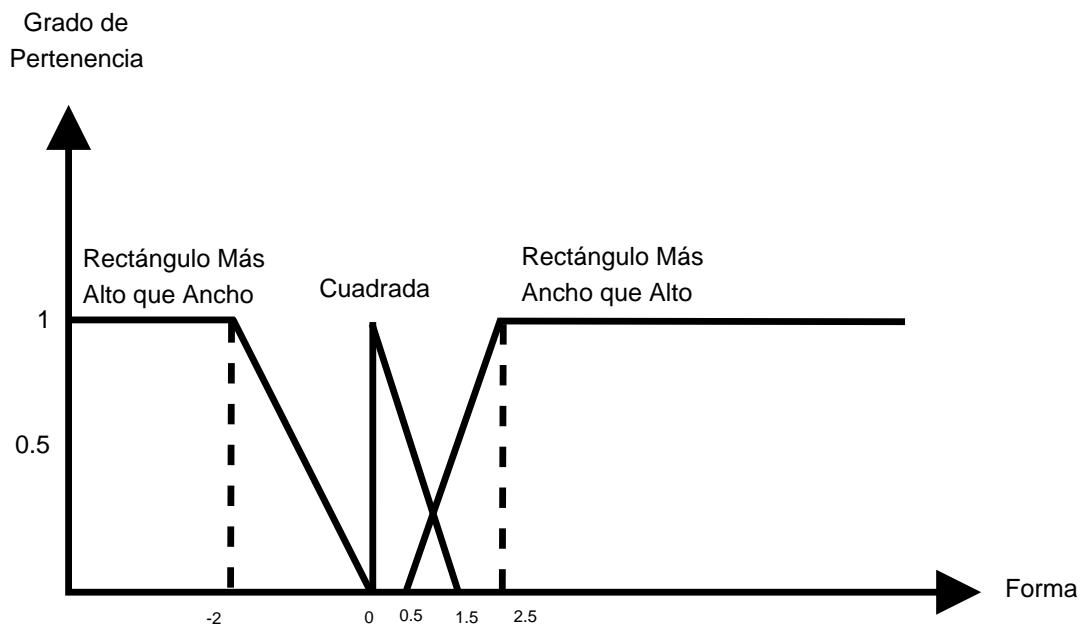


Figura 5.6: Ejemplo Atributo Forma2

## 5.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS.

1. En el apéndice A, se presenta la Tabla A.1 que muestra la distribución que siguen los datos de niñas, según las etapas propuestas por López&Prado, en la Tabla A.2 se muestran las distribuciones de datos de los grupos I, II.1, Total1, II.2 y Completo de las niñas después de que se evalúan con el sistema difuso, en la Tabla A.3 se muestra la distribución de los elementos de los grupos de las niñas después de la reducción de reglas, al comparar las tablas se observa cómo se mejora la clasificación en la mayoría de los elementos, se distingue el progreso que se tiene en las etapas, es decir, si está en el pico de desarrollo, saliendo o entrando a una etapa. El Apéndice C se presentan las tablas comparativas de la exactitud de los Conjuntos Aproximados y los Conjuntos Difusos para de los grupos I, II.1, Total1, II.2 y Completo de niñas y niños.

2. El proceso de crecimiento entre niños y niñas es diferente y es evidente mayor diferencia entre niños y niñas de clase 2 y 3 y entre niños y niñas, con diferente maloclusión, lo que sugiere realizar procesos separados para niños y niñas.
3. Es posible una clasificación general con diferentes clases de maloclusiones a expensas de que el número de reglas sea muy grande, lo que limita la aplicación de este método, ya que estos conjuntos de reglas dejan de ser intuitivos para el especialista, se recomienda realizar proceso individual para niños con maloclusión normal y otro para niños con maloclusión II y III.
4. Reducir el número de reglas disminuye el porcentaje exactitud en los elementos clasificados y aumenta el porcentaje en la cobertura. En el apéndice A las tablas muestran cómo cambia la distribución en cada una de las clasificaciones que se hacen dependiendo el conjunto de reglas que se usan lo que indica que las clasificaciones no son robustas, no se mantiene la misma distribución en las etapas cuando se emplean diferentes reglas en la clasificación.
5. En grupo II.1 de niñas, las reglas reducidas ofrecen un mejor balance entre la exactitud y cobertura, manteniendo ambos indicadores aceptables ó buenos (cercano a 0.7 o superior), en la mayoría de las clasificaciones.
6. En los conjuntos de reglas derivables del grupo Total1 y Completo de niñas, se obtienen una disminución de reglas importante con un radio de 30 %, mientras los indicadores tienen un nivel bueno.
7. Los conjuntos de reglas generados a partir de los grupo I, II.1 y Total1, no ofrecen resultados satisfactorios para clasificar datos del grupo II.2. Sin embargo las reglas de clasificación generadas del grupo completo ofrecen resultados muy buenos para todos los grupos, también el conjunto de reglas ofrece buenos resultados.
8. El conjunto de reglas reducido contenido del grupo II.2 aporta resultados satisfactorios en todos los grupos y los resultados obtenidos para los grupos Total1 y Completo pueden ser considerados cómo buenos.

## 5.6 CONCLUSIONES.

Se logra una clasificación más final combinando los conjuntos aproximados y los conjuntos difusos, el número de elementos que se logran clasificar correctamente esta ligado a la cantidad de reglas empleadas y la cobertura y exactitud de las mismas.

## CAPÍTULO 6

# CONCLUSIONES, RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO.

---

### 6.1 CONCLUSIONES.

- La metodología presentada para la estimación de la maduración ósea puede considerarse como promisoría por los buenos resultados arrojados en los experimentos realizados en la presente investigación. Mismos que superan en calidad a los obtenidos por Lopez&Prado que mostraron eran superiores a otros métodos reconocidos de clasificación.
- Se han considerado datos de niños con maloclusiones, dando atención a un reclamo constante en varias publicaciones sobre el tema, y aunque no fueron excelentes los resultados de la estimación de la maduración ósea en niños con maloclusiones a partir de reglas generadas de datos de niños con oclusión normal si pueden calificarse de buenos los resultados lo que demuestra la robustez de la metodología de clasificación, también se evidencia en los buenos resultados obtenidos al aplicarse a un conjunto de datos con mucho ruido.
- Comparando la metodología con otros métodos reportados en la literatura se puede afirmar que los resultados obtenidos son muy satisfactorios y cumplen con los objetivos trazados en esta investigación, pues las reglas para la estimación se presentan en términos lingüístico que son del dominio de los especia-



listas por lo que no presenta dificultad alguna su interpretación por parte de estos. Por otra parte el esfuerzo que se requiere para establecer los parámetros del sistema de clasificación no es muy grande siempre y cuando se pueda reunir un panel de expertos calificados en la materia.

- La metodología puede ser aplicada tal cual a diversos grupos étnicos, sin detrimento de la calidad de los resultados lo que la posiciona como una potente herramienta para convertirse en un estándar a nivel mundial. En este sentido también tributa el hecho de que su implementación computacional no resulta complicada y que su base de clasificación puede ser actualizada a un costo razonable.
- Entre las limitaciones de la metodología podemos mencionar la dependencia de la calidad de la información extraída de los expertos, pues si esta información no es buena o es inconsistente no se asegura la calidad ni la precisión de los resultados en la estimación de la maduración ósea. Se debe realizar un análisis de sensibilidad tanto en el establecimiento de las normas de discretización de la tabla de decisión de la que se derivan las reglas al aplicar los Conjuntos Aproximados (Rough Sets), como en la fuzzificación de las categorías de los atributos de condición y de las clases de decisión, para identificar aquellos elementos que son sensibles y así poder dedicarle mayor esfuerzo en su establecimiento.
- Otra limitación de la metodología es que si no se cuenta con un sistema de apoyo a la decisión (DSS) que oculte a los especialistas o usuarios finales los aspectos relacionados con los Conjuntos Aproximados (Rough Sets) y Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets) se requiere de la participación de especialistas para establecer la base de clasificación.

## 6.2 RECOMENDACIONES Y TRABAJO FUTURO.

Aunque los resultados obtenidos en la experimentación al aplicar la metodología donde se emplean conjuntamente Conjuntos Aproximados (Rough Sets) y Conjuntos Difusos (Fuzzy Sets) se recomienda explorar otras vías para establecer una hibridación entre estas dos metodologías con una base teórica sólida desde una perspectiva de la lógica multivaluada, lo que permite garantizar una robustez en los resultados de la clasificación para cualquier escenario, ya que en este caso el resultado final depende en gran medida de la calidad de las reglas obtenidas por la aplicación de los conjuntos aproximados, mientras que si se diseña una teoría que parte desde su esencia de la hibridación de ambos enfoques es posible sacar el mejor resultado desde la confección de la tabla de decisión.

Para que se pueda aplicar esta metodología de forma masiva se recomienda la implementación de un sistema de apoyo a la decisión (DSS) que oculte al usuario final, especialistas en diversas ramas de la medicina, los detalles de las teorías matemáticas subyacentes y le faciliten la exploración de diversos escenarios así como el tratamiento de la incertidumbre o el ruido en los datos de entrada y le presente recomendaciones acorde a su sistema de preferencias y a su personalidad como tomador de decisiones.

## APÉNDICE A

# TABLAS DE DISTRIBUCIÓN POR ETAPA.

---

### A.1 NIÑAS.

- Resultados Obtenidos de la Tabla de Decisión de 270 Niñas.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	Total1	II.2	Completo
Iniciación	4	3	7	1	8
Iniciación/Aceleración	40	38	78	47	125
Aceleración	7	15	22	27	49
Aceleración/Transición	20	19	39	36	75
Transición	2	2	4	0	4
Transición/Desaceleración	2	1	3	1	4
Desaceleración	5	0	5	0	5
Desaceleración/Madurez	0	0	0	0	0
Madurez	0	0	0	0	0
Madurez/Terminación	0	0	0	0	0
Terminación	0	0	0	0	0

Tabla A.1: Distribución por Etapas Según Tabla de Decisión de 270 Niñas.

■ Grupo I.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	4	5	9	1	10
Saliendo_Iniciación	3	0	3	0	3
Entrando_IniAce	26	22	48	39	87
Saliendo_IniAce	0	2	2	2	4
Entrando_Aceleración	13	18	31	14	45
Pico_Aceleración	7	9	16	30	46
Saliendo_Aceleración	4	2	6	2	8
Entrando_AceTran	2	1	3	1	4
Saliendo_AceTran	12	8	20	2	22
Entrando_Transición	1	0	1	1	2
Pico_Transición	0	0	0	3	3
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	2	11	13	17	30
Saliendo-TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	5	0	5	0	5
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	78	158	112	270

Tabla A.2: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo I.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	4	3	7	1	8
Entrando_IniAce	19	14	33	15	48
Saliendo_IniAce	10	7	17	9	26
Entrando_Aceleración	12	28	40	32	72
Pico_Aceleración	17	19	36	28	64
Saliendo_Aceleración	5	6	11	24	35
Entrando_AceTran	6	1	7	3	10
Saliendo_AceTran	2	0	2	0	2
Entrando_Transición	1	0	1	0	1
Pico_Transición	0	0	0	0	0
Saliendo_Transición	3	0	3	0	3
Entrando_TransDes	1	0	1	0	1
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	78	158	112	270

Tabla A.3: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo I.

■ Grupo II.1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	2	2	4	2	6
Saliendo_Iniciación	4	2	6	0	6
Entrando_IniAce	14	14	28	19	47
Saliendo_IniAce	5	7	12	2	14
Entrando_Aceleración	14	14	28	19	47
Pico_Aceleración	6	11	17	14	31
Saliendo_Aceleración	4	5	9	12	21
Entrando_AceTran	3	6	9	4	13
Saliendo_AceTran	16	12	28	15	43
Entrando_Transición	4	2	6	0	6
Pico_Transición	1	1	2	0	2
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	7	2	9	25	34
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	78	158	112	270

Tabla A.4: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	1	1
Saliendo_Iniciación	2	1	3	1	4
Entrando_IniAce	8	10	18	8	26
Saliendo_IniAce	7	5	12	5	17
Entrando_Aceleración	13	19	32	18	50
Pico_Aceleración	22	16	38	43	81
Saliendo_Aceleración	13	13	26	21	47
Entrando_AceTran	4	5	9	6	15
Saliendo_AceTran	11	8	19	8	27
Entrando_Transición	0	1	1	0	1
Pico_Transición	0	0	0	0	0
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	1	1
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	78	158	112	270

Tabla A.5: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.1.

■ Grupo Total1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	Total1	II.2	Completo
Pico_Iniciación	1	0	1	1	2
Saliendo_Iniciación	3	4	7	0	7
Entrando_IniAce	22	15	37	20	57
Saliendo_IniAce	4	12	16	6	22
Entrando_Aceleración	13	15	28	14	42
Pico_Aceleración	4	8	12	21	33
Saliendo_Aceleración	5	5	10	8	18
Entrando_AceTran	4	4	8	2	10
Saliendo_AceTran	12	8	20	5	25
Entrando_Transición	2	2	4	0	4
Pico_Transición	1	1	2	0	2
Saliendo_Transición	3	0	3	0	3
Entrando_TransDes	2	4	6	35	41
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	2	0	2	0	2
Pico_Desaceleración	2	0	2	0	2
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	78	158	112	270

Tabla A.6: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Total1.



Etapa	Grupo				
	I	II.1	Total1	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	10	6	16	2	18
Entrando_IniAce	12	17	29	14	43
Saliendo_IniAce	6	3	9	10	19
Entrando_Aceleración	19	26	45	33	78
Pico_Aceleración	6	9	15	21	36
Saliendo_Aceleración	4	3	7	12	19
Entrando_AceTran	6	2	8	4	12
Saliendo_AceTran	4	5	9	0	9
Entrando_Transición	8	8	16	2	18
Pico_Transición	3	2	5	0	5
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	1	1
Saliendo_TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.7: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo Total1.

■ Grupo II.2.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	0	0	0	0	0
Entrando_IniAce	18	25	43	37	80
Saliendo_IniAce	2	4	6	6	12
Entrando_Aceleración	15	10	25	12	37
Pico_Aceleración	8	12	20	26	46
Saliendo_Aceleración	8	7	15	7	22
Entrando_AceTran	1	3	4	2	6
Saliendo_AceTran	5	4	9	10	19
Entrando_Transición	0	0	0	0	0
Pico_Transición	0	0	0	0	0
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	23	13	36	12	48
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	78	158	112	270

Tabla A.8: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.2.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	5	8	13	2	15
Entrando_IniAce	12	21	33	25	58
Saliendo_IniAce	6	1	7	0	7
Entrando_Aceleración	30	31	61	49	110
Pico_Aceleración	16	11	27	20	47
Saliendo_Aceleración	6	6	12	2	14
Entrando_AceTran	2	0	2	0	2
Saliendo_AceTran	3	3	6	0	6
Entrando_Transición	0	0	0	0	0
Pico_Transición	0	0	0	0	0
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	1	1
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.9: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.2.

■ Grupo Completo.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	3	5	8	2	10
Saliendo_Iniciación	8	7	15	1	16
Entrando_IniAce	13	21	34	31	65
Saliendo_IniAce	4	0	4	2	6
Entrando_Aceleración	15	12	27	22	49
Pico_Aceleración	7	11	18	17	35
Saliendo_Aceleración	2	7	9	4	13
Entrando_AceTran	1	0	1	1	2
Saliendo_AceTran	8	8	16	6	22
Entrando_Transición	4	4	8	0	8
Pico_Transición	10	4	14	0	14
Saliendo_Transición	1	0	1	0	1
Entrando_TransDes	2	2	4	12	16
Saliendo_TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	1	2
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.10: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Completo.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	1	1	2	1	3
Entrando_IniAce	7	6	13	10	23
Saliendo_IniAce	5	6	11	3	14
Entrando_Aceleración	20	21	41	35	76
Pico_Aceleración	21	26	47	43	90
Saliendo_Aceleración	3	8	11	4	15
Entrando_AceTran	6	1	7	1	8
Saliendo_AceTran	6	4	10	1	11
Entrando_Transición	6	7	13	0	13
Pico_Transición	2	1	3	1	4
Saliendo_Transición	2	0	2	0	2
Entrando_TransDes	0	0	0	0	0
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
total por edades	80	81	161	99	260

Tabla A.11: Distribución de Niñas por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo completo.

## A.2 NIÑOS.

- Resultados Obtenidos de la Tabla de Decisión de 260 Niños.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	Total1	II.2	Completo
Iniciación	5	10	8	3	18
Iniciación/Aceleración	40	37	77	62	139
Aceleración	7	14	21	16	37
Aceleración/Transición	14	16	30	17	47
Transición	10	4	14	0	14
Transición/Desaceleración	2	0	2	0	2
Desaceleración	2	0	2	1	3
Desaceleración/Madurez	0	0	0	0	0
Madurez	0	0	0	0	0
Madurez/Terminación	0	0	0	0	0
Terminación	0	0	0	0	0

Tabla A.12: Distribución por Etapa de Niños Según la Tabla de Decisión de 260 Niños.

- Grupo I.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	1	1	2	0	2
Saliendo_Iniciación	1	0	1	0	1
Entrando_IniAce	6	14	20	18	38
Saliendo_IniAce	6	5	11	6	17
Entrando_Aceleración	18	18	36	20	56
Pico_Aceleración	13	16	29	22	51
Saliendo_Aceleración	7	8	15	9	24
Entrando_AceTran	3	1	4	3	7
Saliendo_AceTran	6	6	12	6	18
Entrando_Transición	4	1	5	1	6
Pico_Transición	12	5	17	0	17
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	1	6	7	14	21
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	1	0	1	0	1
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.13: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo I.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	1	0	1	0	1
Entrando_IniAce	5	11	16	6	22
Saliendo_IniAce	6	7	13	9	22
Entrando_Aceleración	23	23	46	34	80
Pico_Aceleración	16	20	36	39	75
Saliendo_Aceleración	5	8	13	9	22
Entrando_AceTran	5	3	8	0	8
Saliendo_AceTran	6	4	10	2	12
Entrando_Transición	5	3	8	0	8
Pico_Transición	5	2	7	0	7
Saliendo_Transición	1	0	1	0	1
Entrando_TransDes	1	0	1	0	1
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	1	0	1	0	1
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.14: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo I.



■ Grupo II.1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	12	10	22	3	25
Entrando_IniAce	0	0	0	0	0
Saliendo_IniAce	0	0	0	0	0
Entrando_Aceleración	17	24	41	37	78
Pico_Aceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Aceleración	6	11	17	8	25
Entrando_AceTran	0	0	0	0	0
Saliendo_AceTran	0	0	0	0	0
Entrando_Transición	6	4	10	1	11
Pico_Transición	0	0	0	0	0
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	0	0
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	41	49	90	49	139

Tabla A.15: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	12	10	22	3	25
Entrando_IniAce	0	0	0	0	0
Saliendo_IniAce	0	0	0	0	0
Entrando_Aceleración	17	24	41	37	78
Pico_Aceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Aceleración	6	11	17	8	25
Entrando_AceTran	0	0	0	0	0
Saliendo_AceTran	0	0	0	0	0
Entrando_Transición	6	4	10	1	11
Pico_Transición	0	0	0	0	0
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	0	0
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	0	0	0	0	0
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	41	49	90	49	139

Tabla A.16: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.1.

■ Total1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	Total1	II.2	Completo
Pico_Iniciación	3	3	6	2	8
Saliendo_Iniciación	7	8	15	1	16
Entrando_IniAce	15	23	38	20	58
Saliendo_IniAce	4	0	4	0	4
Entrando_Aceleración	14	10	24	12	36
Pico_Aceleración	6	10	16	15	31
Saliendo_Aceleración	2	8	10	12	22
Entrando_AceTran	2	0	2	1	3
Saliendo_AceTran	7	8	15	6	21
Entrando_Transición	5	4	9	0	9
Pico_Transición	11	4	15	1	16
Saliendo_Transición	1	0	1	0	1
Entrando_TransDes	1	3	4	29	33
Saliendo_TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.17: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Total1.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	Total1	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	10	6	16	2	18
Entrando_IniAce	12	17	29	14	43
Saliendo_IniAce	6	3	9	10	19
Entrando_Aceleración	19	26	45	33	78
Pico_Aceleración	6	9	15	21	36
Saliendo_Aceleración	4	3	7	12	19
Entrando_AceTran	6	2	8	4	12
Saliendo_AceTran	4	5	9	0	9
Entrando_Transición	8	8	16	2	18
Pico_Transición	3	2	5	0	5
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	1	1
Saliendo_TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.18: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo Total1.

■ Grupo II.2.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	3	3	6	2	8
Saliendo_Iniciación	7	8	15	1	16
Entrando_IniAce	15	23	38	20	58
Saliendo_IniAce	4	0	4	0	4
Entrando_Aceleración	14	10	24	12	36
Pico_Aceleración	6	10	16	15	31
Saliendo_Aceleración	2	8	10	12	22
Entrando_AceTran	2	0	2	1	3
Saliendo_AceTran	7	8	15	6	21
Entrando_Transición	5	4	9	0	9
Pico_Transición	11	4	15	1	16
Saliendo_Transición	1	0	1	0	1
Entrando_TransDes	1	3	4	29	33
Saliendo-TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.19: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo II.2.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	10	6	16	2	18
Entrando_IniAce	12	17	29	14	43
Saliendo_IniAce	6	3	9	10	19
Entrando_Aceleración	19	26	45	33	78
Pico_Aceleración	6	9	15	21	36
Saliendo_Aceleración	4	3	7	12	19
Entrando_AceTran	6	2	8	4	12
Saliendo_AceTran	4	5	9	0	9
Entrando_Transición	8	8	16	2	18
Pico_Transición	3	2	5	0	5
Saliendo_Transición	0	0	0	0	0
Entrando_TransDes	0	0	0	1	1
Saliendo_TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.20: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo II.2.

■ Grupo Completo.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	3	5	8	2	10
Saliendo_Iniciación	8	7	15	1	16
Entrando_IniAce	13	21	34	31	65
Saliendo_IniAce	4	0	4	2	6
Entrando_Aceleración	15	12	27	22	49
Pico_Aceleración	7	11	18	17	35
Saliendo_Aceleración	2	7	9	4	13
Entrando_AceTran	1	0	1	1	2
Saliendo_AceTran	8	8	16	6	22
Entrando_Transición	4	4	8	0	8
Pico_Transición	10	4	14	0	14
Saliendo_Transición	1	0	1	0	1
Entrando_TransDes	2	2	4	12	16
Saliendo-TranDes	1	0	1	0	1
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	1	2
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.21: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Originales del Grupo Completo.

Etapa	Grupo				
	I	II.1	TotalI	II.2	Completo
Pico_Iniciación	0	0	0	0	0
Saliendo_Iniciación	1	1	2	1	3
Entrando_IniAce	7	6	13	10	23
Saliendo_IniAce	5	6	11	3	14
Entrando_Aceleración	20	21	41	35	76
Pico_Aceleración	21	26	47	43	90
Saliendo_Aceleración	3	8	11	4	15
Entrando_AceTran	6	1	7	1	8
Saliendo_AceTran	6	4	10	1	11
Entrando_Transición	6	7	13	0	13
Pico_Transición	2	1	3	1	4
Saliendo_Transición	2	0	2	0	2
Entrando_TransDes	0	0	0	0	0
Saliendo_TranDes	0	0	0	0	0
Entrando_Desaceleración	0	0	0	0	0
Pico_Desaceleración	1	0	1	0	1
Saliendo_Desaceleración	0	0	0	0	0
Entrando_DesMad	0	0	0	0	0
Saliendo_DesMad	0	0	0	0	0
Entrando_Madurez	0	0	0	0	0
Pico_Madurez	0	0	0	0	0
Saliendo_madurez	0	0	0	0	0
Entrando_MadTer	0	0	0	0	0
Saliendo_MadTer	0	0	0	0	0
Entrando_Terminación	0	0	0	0	0
Pico_Terminación	0	0	0	0	0
Total	80	81	161	99	260

Tabla A.22: Distribución de Niños por Etapa Ejecutando un Sistema Difuso con Reglas Reducidas del Grupo Completo.



## APÉNDICE B

# VARIACIÓN EN EL FACTOR DE REDUCCIÓN

---

A continuación se muestran los resultados obtenidos al variar el factor de reducción a las reglas. Este factor fue definido entre el valor 0 y 1. Se observa el comportamiento obtenido y se busca una exactitud y cobertura altas.

Las tablas de resultados son enunciadas de manera separada por género y por grupo. Para cada caso se presentan dos tablas. La primera tabla muestra cómo se comportan los datos en exactitud y cobertura, según el factor de reducción. En la primera columna de esta tabla se indica el grupo. Las columnas subsecuentes muestran, para cada factor de reducción, la exactitud, columna etiquetada con la letra E, y la cobertura, indicada por la columna con etiqueta C.

La segunda tabla muestra el soporte que tienen las reglas, así como la longitud de las premisas. Para cada uno se indican el minimal, maximal y promedio de elementos que es cubierto por las reglas.

## B.1 NIÑAS.

### 1. Grupo I

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	1	0,95	0,974	0,962	0,948	0,962	0,948	0,962	0,923	0,975
II.1	0,848	0,59	0,676	0,91	0,644	0,936	0,649	0,949	0,662	0,949
Total 1	0,943	0,772	0,831	0,937	0,8	0,949	0,801	0,956	0,796	0,962
II.2	0,558	0,384	0,393	0,955	0,4	0,982	0,399	1	0,393	1
Completo	0,842	0,611	0,647	0,944	0,631	0,963	0,605	0,974	0,625	0,978

Tabla B.1: Factor de Reducción del Grupo I de Niñas.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	22	1	11	4,3	2	9	6,2
0,85	20	1	25	7,6	1	5	2,8
0,8	19	1	25	8	1	5	2,4
0,75	18	1	30	8,5	1	4	2,3
0,7	18	1	32	9,8	1	4	2,2

Tabla B.2: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niñas

2. Grupo II.1

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	0,686	0,638	0,77	0,925	0,784	0,925	0,784	0,925	0,784	0,925
II.1	1	0,936	0,987	0,962	0,961	0,987	0,909	0,987	0,909	0,987
Total 1	0,871	0,785	0,879	0,943	0,874	0,956	0,848	0,956	0,848	0,956
II.2	0,774	0,554	0,691	0,839	0,688	0,857	0,68	0,92	0,68	0,92
Completo	0,839	0,689	0,807	0,9	0,802	0,915	0,78	0,941	0,78	0,941

Tabla B.3: Factor de Reducción del Grupo II.1 de Niñas.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	20	1	18	4,6	2	10	6
0,85	20	1	25	7,4	1	5	2,6
0,8	20	1	25	7,4	1	4	2,6
0,75	20	1	17	8	1	4	2,2
0,7	20	1	27	8	1	4	2,2

Tabla B.4: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.1 de Niñas

3. Grupo Total1

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
II.1	1	0,938	0,961	0,95	0,961	0,95	0,947	0,95	0,935	0,962
	1	0,923	0,961	0,974	0,947	0,974	0,947	0,974	0,883	0,987
Total1	1	0,93	0,961	0,962	0,954	0,962	0,947	0,962	0,909	0,975
II.2	0,944	0,321	0,755	0,875	0,727	0,884	0,727	0,884	0,689	0,946
Completo	0,989	0,678	0,88	0,926	0,865	0,93	0,861	0,93	0,819	0,963

Tabla B.5: Factor de Reducción del Grupo Total1 de Niñas.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	36	1	37	5,5	3	11	7,2
0,85	32	1	43	10,2	1	6	2,9
0,8	31	1	43	11,9	1	5	2,7
0,75	30	1	47	11,9	1	5	2,6
0,7	25	1	41	14,1	1	5	2,5

Tabla B.6: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Total1 de Niñas

4. Grupo II.2

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	0,778	0,338	0,7	0,875	0,648	0,888	0,662	0,888	0,662	0,888
II.1	0,883	0,538	0,803	0,91	0,73	0,949	0,747	0,962	0,747	0,962
Total1	0,812	0,437	0,752	0,892	0,69	0,918	0,705	0,924	0,705	0,924
II.2	1	0,92	0,945	0,973	0,901	0,991	0,874	0,991	0,874	0,991
Completo	0,924	0,637	0,836	0,926	0,781	0,948	0,778	0,952	0,778	0,952

Tabla B.7: Factor de Reducción del Grupo II.2 de Niñas.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	33	1	11	3,4	3	11	7,3
0,85	30	1	21	6,9	1	5	2,8
0,8	28	1	24	7,4	1	4	2,6
0,75	27	1	24	8	1	4	2,4
0,7	27	1	24	8	1	4	2,4

Tabla B.8: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niñas

5. Grupo Completo

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	1	0,95	0,962	0,975	0,936	0,975	0,949	0,975	0,855	0,975
II.1	1	0,963	0,948	0,987	0,935	0,987	0,961	0,987	0,859	1
Total1	1	0,956	0,955	0,981	0,935	0,981	0,955	0,981	0,872	0,987
II.2	1	0,92	0,936	0,973	0,9	0,982	0,883	0,991	0,874	0,991
Completo	1	0,941	0,947	0,978	0,921	0,981	0,925	0,985	0,873	0,989

Tabla B.9: Factor de Reducción del Grupo Completo de Niñas.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	66	1	27	5,6	4	11	7,5
0,85	53	1	63	11,7	1	6	3
0,8	50	1	63	14,2	1	6	2,9
0,75	43	1	63	16,1	1	5	2,6
0,7	41	1	77	17,5	1	5	2,5

Tabla B.10: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Completo de Niñas

## B.2 NIÑOS.

### 1. Grupo I

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	1	0,95	0,961	0,962	0,909	0,962	0,857	0,962	0,857	0,962
II.1	0,828	0,716	0,747	0,926	0,705	0,963	0,696	0,975	0,696	0,975
Total1	0,925	0,832	0,855	0,944	0,806	0,963	0,776	0,969	0,776	0,969
II.2	0,717	0,535	0,667	0,939	0,688	0,97	0,667	0,97	0,667	0,97
Completo	0,866	0,719	0,788	0,942	0,761	0,965	0,734	0,969	0,738	0,969

Tabla B.11: Factor de Reducción del Grupo I de Niños.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	24	1	17	3,5	2	12	7
0,85	24	1	24	4,9	1	5	2,8
0,8	23	1	29	5,2	1	5	2,7
0,75	23	1	29	5,4	1	4	2,5
0,7	23	1	29	5,4	1	4	2,4

Tabla B.12: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo I de Niños

2. Grupo II.1

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	0,905	0,525	0,762	0,788	0,681	0,862	0,653	0,938	0,653	0,938
II.1	0,987	0,938	0,909	0,951	0,886	0,975	0,85	0,988	0,85	0,988
Total1	0,958	0,733	0,843	0,87	0,791	0,919	0,755	0,963	0,755	0,963
II.2	0,844	0,323	0,698	0,869	0,659	0,919	0,701	0,98	0,701	0,98
Completo	0,933	0,577	0,788	0,869	0,741	0,919	0,734	0,969	0,734	0,969

Tabla B.13: Factor de Reducción del Grupo II.1 de Niños.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	23	1	14	3,6	3	12	7,6
0,85	21	1	24	5,4	2	4	2,8
0,8	21	1	24	5,5	2	4	2,7
0,75	20	1	27	7,6	1	4	2,4
0,7	20	1	27	8	1	4	2,4

Tabla B.14: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.1 de Niños



3. Grupo Total1

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	1	0,938	0,948	0,962	0,896	0,962	0,833	0,975	0,795	0,975
II.1	1	0,938	0,877	1	0,852	1	0,84	1	0,827	1
Total1	1	0,938	0,911	0,981	0,873	0,981	0,836	0,988	0,811	0,988
II.2	0,674	0,434	0,734	0,949	0,701	0,98	0,646	1	0,667	1
Completo	0,928	0,746	0,845	0,969	0,808	0,981	0,764	0,992	0,756	0,992

Tabla B.15: Factor de Reducción del Grupo Total1 de Niños.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	44	1	35	4,4	3	12	8,1
0,85	42	1	48	8	1	5	3
0,8	42	1	48	8,3	1	5	2,9
0,75	41	1	54	8,2	1	5	2,7
0,7	41	1	54	9,8	1	5	2,6

Tabla B.16: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Total1 de Niños

4. Grupo II.2

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	0,8	0,438	0,683	0,788	0,662	0,812	0,652	0,825	0,652	0,825
II.1	0,812	0,593	0,703	0,914	0,645	0,938	0,658	0,938	0,649	0,951
Total1	0,807	0,516	0,693	0,851	0,652	0,876	0,655	0,882	0,65	0,888
II.2	1	9.19	0,989	0,949	1	0,919	0,878	0,99	0,878	0,99
Completo	0,908	0,669	0,814	0,888	0,756	0,915	0,746	0,923	0,743	0,927

Tabla B.17: Factor de Reducción del Grupo II.2 de Niños.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	30	1	17	3,6	4	12	7
0,85	27	1	30	7,4	2	7	2,9
0,8	22	1	3	8,6	1	6	2,7
0,75	22	1	33	9	1	6	2,5
0,7	22	1	33	9	1	6	2,5

Tabla B.18: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo II.2 de Niños

5. Grupo Completo

Grupo	Factor de reducción									
	0,9		0,85		0,8		0,75		0,7	
	E	C	E	C	E	C	E	C	E	C
I	1	0,95	0,962	0,975	0,885	0,975	0,886	0,988	0,835	0,988
II.1	1	0,951	0,914	1	0,852	1	0,802	1	0,802	1
Total1	0,993	0,95	0,937	0,988	0,868	0,988	0,844	0,994	0,819	0,994
II.2	1	0,949	0,949	0,99	0,867	0,99	0,816	0,99	0,727	1
Completo	0,996	0,95	0,949	0,988	0,968	0,988	0,833	0,992	0,784	0,996

Tabla B.19: Factor de Reducción del Grupo Completo de Niños.

Factor de reducción	No. de reglas	Soporte de reglas			Longitud de premisas		
		Minimal	Maximal	Promedio	Minimal	Maximal	Promedio
0,95	30	1	17	3,6	4	12	7
0,85	27	1	30	7,4	2	7	2,9
0,8	22	1	3	8,6	1	6	2,7
0,75	22	1	33	9	1	6	2,5
0,7	22	1	33	9	1	6	2,5

Tabla B.20: Soporte y Longitud de Reglas del Grupo Completo de Niños

## APÉNDICE C

# TABLAS DE EXACTITUD DE CONJUNTOS APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS.

---

### C.1 NIÑAS.

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	0,923	0,925	0,923	0,875
II.1	0,662	0,82	0,662	0,897
Total1	0,796	0,873	0,796	0,886
II.2	0,393	0,678	0,393	0,741
Completo	0,625	0,792	0,625	0,825

Tabla C.1: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo I de Niñas.

APÉNDICE C. TABLAS DE EXACTITUD DE CONJUNTOS APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	0,686	0,85	0,784	0,85
II.1	1	0,987	0,909	0,935
Total1	0,871	0,917	0,848	0,892
II.2	0,774	0,696	0,68	0,928
Completo	0,839	0,825	0,78	0,907

Tabla C.2: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo II.1 de Niñas.

2.

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	1	0,9375	0,935	0,875
II.1	1	0,948	0,883	0,961
Total1	1	0,943	0,909	0,917
II.2	0,944	0,642	0,689	0,9375
Completo	0,989	0,818	0,819	0,925

Tabla C.3: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo Total1 de Niñas.

APÉNDICE C. TABLAS DE EXACTITUD DE CONJUNTOS APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	0,778	0,6625	0,662	0,8
II.1	0,883	0,769	0,747	0,884
Total1	0,812	0,715	0,705	0,841
II.2	1	0,821	0,874	0,955
Completo	0,924	0,759	0,778	0,888

Tabla C.4: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo II.2 de Niñas.

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	1	0,9625	0,855	0,9
II.1	1	0,948	0,859	0,961
Total1	1	0,955	0,872	0,93
II.2	1	0,821	0,874	0,883
Completo	1	0,9	0,873	0,911

Tabla C.5: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo Completo de Niñas.

## C.2 NIÑOS.

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	1	0,962	0,857	0,95
II.1	0,828	0,814	0,696	0,938
Total1	0,925	0,888	0,776	0,944
II.2	0,717	0,666	0,667	0,878
Completo	0,866	0,803	0,738	0,919

Tabla C.6: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo I de Niños.

1.

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	0,905	0,9125	0,653	0,5
II.1	0,987	0,95	0,85	0,58
Total1	0,958	0,931	0,755	0,54
II.2	0,844	0,636	0,701	0,434
Completo	0,933	0,819	0,734	0,5

Tabla C.7: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo II.1 de Niños.

APÉNDICE C. TABLAS DE EXACTITUD DE CONJUNTOS APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	1	0,938	0,795	0,925
II.1	1	0,938	0,827	0,925
Total1	1	0,938	0,811	0,925
II.2	0,674	0,434	0,667	0,777
Completo	0,928	0,746	0,756	0,869

Tabla C.8: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas, del Grupo Total1 de Niños.

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	0,8	0,875	0,652	0,837
II.1	0,812	0,839	0,649	0,876
Total1	0,807	0,857	0,65	0,857
II.2	1	0,878	0,878	0,909
Completo	0,908	0,865	0,743	0,876

Tabla C.9: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas ,Originales y Reducidas, del Grupo II.2 de Niños.



APÉNDICE C. TABLAS DE EXACTITUD DE CONJUNTOS APROXIMADOS Y CONJUNTOS DIFUSOS

Grupo	Exactitud Original		Exactitud Reducido	
	Conjuntos	Sistema	Conjuntos	Sistema
	Aproximados	Difuso	Aproximados	Difuso
I	1	0,987	0,835	0,887
II.1	1	0,975	0,802	0,962
Total1	0,993	0,981	0,819	0,925
II.2	1	0,858	0,727	0,919
Completo	0,996	0,934	0,784	0,923

Tabla C.10: Exactitud de Reglas, Originales y Reducidas ,Originales y Reducidas, del Grupo Completo de Niños.

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] URL <http://difusalogica.wikispaces.com/EJEMPLOS+DE+FUNCIONES+DE+PERTENENCIA>.
- [2] URL <http://www.mathworks.com/help/toolbox/fuzzy/fp4856.html>.
- [3] URL <http://enciclopedia.us.es/index.php/Radiograf%C3%ADa>.
- [4] URL <http://anatomif.galeon.com/album1513471.html>.
- [5] URL [http://grupos.emagister.com/imagen/las\\_vertebraes\\_cervicales/1181\discretionary-102488](http://grupos.emagister.com/imagen/las_vertebraes_cervicales/1181\discretionary-102488).
- [6] AL KHAL, H., R. WONG y A. RABIE, «Elimination of hand–wrist radiographs for maturity assessment in children needing orthodontic therapy», *Skeletal radiology*, **37**(3), págs. 195–200, 2008.
- [7] ALKHAL, H., R. WONG y A. RABIE, «Correlation between chronological age, cervical vertebral maturation and Fishman’s skeletal maturity indicators in southern Chinese», *The Angle Orthodontist*, **78**(4), págs. 591–596, 2008.
- [8] BACCETTI, T., L. FRANCHI y J. MCNAMARA JR, «An improved version of the cervical vertebral maturation (CVM) method for the assessment of mandibular growth», *The Angle Orthodontist*, **72**(4), págs. 316–323, 2002.
- [9] BOHANEK, M., *What is Decision Support?*, Kluwer Academic Publishers, 2003.

- 
- [10] CALDAS, M., G. AMBROSANO y F. HAITER-NETO, «Use of cervical vertebral dimensions for assessment of children growth», *Journal of Applied Oral Science*, **15**(2), págs. 144–147, 2007.
- [11] CEGLIA, A. y A. CEGLIA, «Indicadores de maduración de la edad ósea, dental y morfológica», *linea En: Revista Latinoamericana*, 2005.
- [12] CHEN, F., K. TERADA y K. HANADA, «A new method of predicting mandibular length increment on the basis of cervical vertebrae», *The Angle Orthodontist*, **74**(5), págs. 630–634, 2004.
- [13] CHUMELA, W., A. ROCHE y D. THISEN, «The FELS method of assessing the skeletal maturity of the hand-wrist», *American Journal of Human Biology*, **1**(2), págs. 175–183, 1989.
- [14] D., C., *Maduración cervical en niños y adolescentes de 9 a 16 años con oclusión normal*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Médicas, Universidad de Ciencias Médicas Matanzas, Cuba, 2006.
- [15] DOUMPOS, M. y C. ZOPOUNIDIS, *Multicriteria decision aid classification methods*, tomo 73, Springer, 2002.
- [16] ERASMIE, U. y H. RINGERTZ, «A method for assessment of skeletal maturity in children below one year of age», *Pediatric Radiology*, **9**(4), págs. 225–228, 1980.
- [17] FILIBERTO, Y., R. BELLO, Y. CABALLERO y M. FRÍAS, «ALGORITMO PARA EL APRENDIZAJE DE REGLAS DE CLASIFICACION BASADO EN LA TEORÍA DE LOS CONJUNTOS APROXIMADOS EXTENDIDA ALGORITHM TO LEARN CLASIFICATION RULES BASED ON THE EXTENDED ROUGH SET THEORY», *Dyna*, **169**, pág. 63, 2011.
- [18] FLORES-MIR, C., C. BURGESS, M. CHAMPNEY, R. JENSEN, M. PITCHER y P. MAJOR, «Correlation of skeletal maturation stages determined by cervical

- vertebrae and hand-wrist evaluations», *The Angle Orthodontist*, **76**(1), págs. 1–5, 2006.
- [19] FRENCH, S., J. MAULE y N. PAPAMICHAIL, *Decision behaviour, analysis and support*, Cambridge University Press Cambridge, 2009.
- [20] FULLER, R., *Fuzzy reasoning and fuzzy optimization*, Turku Centre for Computer Science, 1998.
- [21] GANDINI, P., M. MANCINI y F. ANDREANI, «A comparison of hand-wrist bone and cervical vertebral analyses in measuring skeletal maturation», *The Angle Orthodontist*, **76**(6), págs. 984–989, 2006.
- [22] GREULICH, W. y S. PYLE, *Radiographic atlas of skeletal development of the hand and wrist*, Stanford Univ Pr, 1959.
- [23] GRZYMALA-BUSSE, J., «LERS-a system for learning from examples based on rough sets», *Intelligent Decision Support. Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory*, **3**, pág. 8, 1992.
- [24] GRZYMALA-BUSSE, J. y S. SIDDHAYE, «Rough set approaches to rule induction from incomplete data», en *Proceedings of the IPMU*, tomo 2, págs. 923–930, 2004.
- [25] GRZYMALA-BUSSE, J. y J. STEFANOWSKI, «Three discretization methods for rule induction», *International Journal of Intelligent Systems*, **16**(1), págs. 29–38, 2001.
- [26] GRZYMALA-BUSSE, J. y P. WERBROUCK, «On the best search method in the LEM1 and LEM2 algorithms», *Incomplete Information: Rough Set Analysis*, **13**, págs. 75–91, 1998.
- [27] HASSEL, B. y A. FARMAN, «Skeletal maturation evaluation using cervical vertebrae», *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, **107**(1), págs. 58–66, 1995.

- [28] HERNÁNDEZ, M., *Maduración ósea y predicción de talla: atlas y métodos numéricos*, Ediciones Díaz de Santos, 1991.
- [29] HOERR, N., S. PYLE y C. FRANCIS, «Radiographic atlas of skeletal development of the foot and ankle: a standard of reference», *Charles C Thomas, Springfield*, 1962.
- [30] JANG, J., *Fuzzy inference systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [31] KAMAL, M., S. GOYAL *et al.*, «Comparative evaluation of hand wrist radiographs with cervical vertebrae for skeletal maturation in 10-12 years old children», *Journal of Indian Society of Pedodontics and Preventive Dentistry*, **24**(3), pág. 127, 2006.
- [32] KIM, H., J. YOON, C. MODI, H. MODI, H. SONG y S. SONG, «Interrelationship of the Risser sign, knee epiphysis, and bone age in determining skeletal maturity: a case-control study», *Journal of Pediatric Orthopaedics B*, **20**(3), pág. 173, 2011.
- [33] KLIR, G. y B. YUAN, *Fuzzy sets and fuzzy logic*, Prentice Hall New Jersey, 1995.
- [34] LAMPARSKI, D., «Skeletal age assessment utilizing cervical vertebrae», *American Journal of Orthodontics*, **67**(4), págs. 458–459, 1975.
- [35] LAMPARSKI, D. y S. NANDA, «Skeletal age assessment utilizing cervical vertebrae», *CRANIOFACIAL GROWTH SERIES*, **39**, págs. 171–184, 2002.
- [36] LÓPEZ, F., L. LLANES y R. MORALES, «Multi-criteria classification applied to characterize skeletal maturation in male and female from 9 to 16 years with normal occlusion.», .
- [37] MITO, T., K. SATO y H. MITANI, «Cervical vertebral bone age in girls», *American journal of orthodontics and dentofacial orthopedics*, **122**(4), págs. 380–385, 2002.

- 
- [38] MÓNICA, O., G. SOL, F. DORATHYS, F. MARGARITA, Q. OSCAR, R. SANDRA y L. HARRY, «METODO DE MADURACION OSEA DE LAS VERTEBRAS CERVICALES, EN PACIENTES DEL DIPLOMADO DE ORTODONCIA INTERCEPTIVA, UGMA-2006», .
- [39] MORILLAS RAYA, A., «Introduccion al analisis de datos difusos», , 2006.
- [40] PATHAK, A. y S. PAL, «Fuzzy grammars in syntactic recognition of skeletal maturity from X-rays», *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, **16**(5), págs. 657–667, 1986.
- [41] PAWLAK, Z., *Rough sets: Theoretical aspects of reasoning about data*, tomo 9, Springer, 1991.
- [42] PAWLAK, Z., «Rough sets present state and further prospects», en *Third International Workshop on Rough Set and Soft Computing (RSSC'94)*, págs. 72–76, 1994.
- [43] PAWLAK, Z., «Rough set approach to knowledge-based decision support», *European journal of operational research*, **99**(1), págs. 48–57, 1997.
- [44] PAWLAK, Z., «Rough sets and intelligent data analysis», *Information sciences*, **147**(1), págs. 1–12, 2002.
- [45] PAWLAK, Z., «Some issues on rough sets», *Transactions on Rough Sets I*, págs. 1–58, 2004.
- [46] POLIZIO, S., «Skeletal and Vertebral Age A Literature Review», WWW page, june 2009, URL <http://www.scribd.com/doc/17583100/Skeletal-and-Vertebral-Age-A-Literature-Review>.
- [47] POLKOWSKI, L. y A. SKOWRON, *Rough Sets in Knowledge Discovery: Applications, case studies, and software systems*, tomo 2, Physica Verlag, 1998.

- [48] PRIETO D., M. I., *Maduración cervical en niños y adolescentes de 9 a 16 años*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias Médicas, Universidad de Ciencias Médicas Matanzas, Cuba, 2012.
- [49] PYLE, S. y N. HOERR, *Radiographic atlas of skeletal development of the knee*, Thomas, 1955.
- [50] QUINTANA, R., H. BRAVO, Q. R. ZAROR y B. H. PANIAGUA, «Determinación de la maduración esquelética según el método de evaluación cervicovertebral y su relación con la oportunidad de tratamiento con clase II dentoalveolar», *Int. J. Odontostomat*, **2**(1), págs. 27–31, 2008.
- [51] ROCHE, A., W. CHUMLEA, D. THISEN *et al.*, *Assessing the skeletal maturity of the hand-wrist: Fels method*, Thomas Springfield, IL, 1988.
- [52] ROMÁN, P., J. PALMA, M. OTEO y E. NEVADO, «Skeletal maturation determined by cervical vertebrae development», *The European Journal of Orthodontics*, **24**(3), pág. 303, 2002.
- [53] ROY, B., *Multicriteria methodology for decision aiding*, 12, Springer, 1996.
- [54] SAR, R., «Pawlak's Rough Set Theory (Chapter-1)», , 2007.
- [55] SCHUNK, K., W. KRAUS y R. BOOR, «The sonographic examination of the distal femoral epiphysis as a method of determining maturity of the newborn», *Fortschr Röntgenstr*, **146**, págs. 623–627, 1987.
- [56] SINCLAIR, R., A. KITCHEN y R. TURNER, «The Marfan syndrome», *QJM*, **29**(1), págs. 19–46, 1960.
- [57] SŁOWIŃSKI, R., *Intelligent decision support: handbook of applications and advances of the rough sets theory*, tomo 11, Springer, 1992.
- [58] SOBRADILLO-RUIZ, B., «Evaluación de la maduración ósea y pronóstico de talla final (tema 2)», *Sociedad Española de Endocrinología Pediátrica. Sección de la*

- Asociación Española de Pediatría. Hipocrecimiento. 5º Curso de Formación de Postgrado, 1ª ed. Palma de Mallorca, págs. 11–22, 1999.*
- [59] SOEGIHARTO, B., S. CUNNINGHAM y D. MOLES, «Skeletal maturation in Indonesian and white children assessed with hand-wrist and cervical vertebrae methods», *American Journal of Orthodontics and Dentofacial Orthopedics*, **134**(2), págs. 217–226, 2008.
- [60] STEFANOWSKI, J., «On rough set based approaches to induction of decision rules», *Rough sets in knowledge discovery*, **1**(1), págs. 500–529, 1998.
- [61] TABARES, H. y J. HERNANDEZ, «Aproximacion por logica difusa de la serie de tiempo "demanda diaria de energia electric" Forecasting time series. Short-term electrical power using fuzzy logic», *Revista Facultad de Ingenieria Universidad de Antioquia*, págs. 209–217, 2009.
- [62] TANNER, J. y R. GIBBONS, «A computerized image analysis system for estimating Tanner-Whitehouse 2 bone age», *Hormone Research in Paediatrics*, **42**(6), págs. 282–287, 1994.
- [63] TANNER, J., R. WHITEHOUSE y M. TAKAISHI, «Standards from birth to maturity for height, weight, height velocity, and weight velocity: British children, 1965. I.», *Archives of Disease in Childhood*, **41**(219), págs. 454–471, 1966.
- [64] UYSAL, T., S. RAMOGLU, F. BASCIFTCI y Z. SARI, «Chronologic age and skeletal maturation of the cervical vertebrae and hand-wrist: Is there a relationship», *American journal of orthodontics and dentofacial orthopedics*, **130**(5), págs. 622–628, 2006.
- [65] ZADEH, L., «Fuzzy Sets», , 1965.
- [66] ZHANG, A., *A computer-aided-diagnosis (CAD) method combining phalangeal and carpal bone features for bone age assessment of children*, Tesis Doctoral, UNIVERSITY OF SOUTHERN CALIFORNIA, 2007.



- 
- [67] ZHANG, A., A. GERTYCH y B. LIU, «Automatic bone age assessment for young children from newborn to 7-year-old using carpal bones», *Computerized Medical Imaging and Graphics*, **31**(4-5), págs. 299–310, 2007.
- [68] ZIARKO, W., *Rough sets, fuzzy sets and knowledge discovery*, Springer-Verlag Berlin, 1994.
- [69] ZURITA C., F. A., «CORRELACION ENTRE RESULTADOS DE RADIOGRAFIA CERVICAL LATERAL y RADIOGRAFIA DE MANO-MUÑECA EN LA ESTIMACION DE EDAD OSEA EN NIÑAS», *Revista chilena de radiología*, **15**(1), págs. 39–45, 2009.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

José Alejandro Cid Medina

Candidato para el grado de Maestro en Ingeniería  
con especialidad en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Tesis:

CARACTERIZACIÓN DE LA MADURACIÓN ÓSEA  
EN NIÑOS EN EDADES DE ENTRE 9 Y 16 AÑOS  
MEDIANTE CONJUNTOS APROXIMADOS Y  
CONJUNTOS DIFUSOS

Nací en Morelos, Zacatecas, en el año de 1982. Mis padres, originarios del mismo pueblo, tuvieron 5 hijos de los cuales soy el mayor. Mis estudios de primaria, secundaria y bachillerato los realicé en mi pueblo natal. Después en la ciudad de Zacatecas, Zacatecas retomé mis estudios en la Universidad Autónoma de Zacatecas en la facultad de Ingeniería, donde cursé la carrera de Ingeniería en Computación. Posteriormente me incorporé a la vida laboral durante tres años y continué mi formación académica en la Universidad Autónoma de Nuevo León en la Facultad de Mecánica y Eléctrica en el posgrado en Ciencias de la Ingeniería en Sistemas.