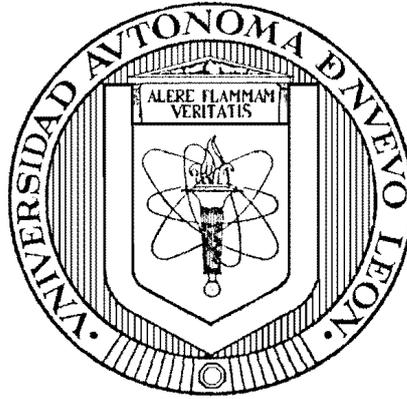


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTIMACIÓN FASORIAL SUBCÍCLICA Y LINEAL CUADRÁTICA

POR

ING. LUIS FERNANDO SÁNCHEZ GÓMEZ

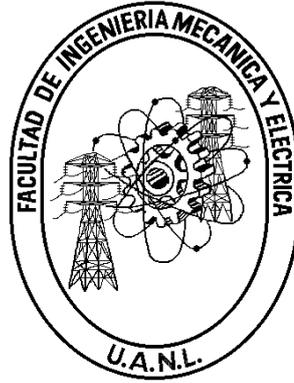
TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN  
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

JULIO DEL 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



ESTIMACIÓN FASORIAL SUBCÍCLICA Y LINEAL CUADRÁTICA

POR

ING. LUIS FERNANDO SÁNCHEZ GÓMEZ

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN  
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

JULIO DEL 2012

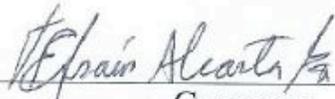
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "Estimación Fasorial Subcíclica y Lineal Cuadrática" realizada por el alumno **ING. Luis Fernando Sánchez Gómez**, matrícula 1572372 sea aceptada por su defensa como opción al grado de **Maestro en Ciencias** de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis



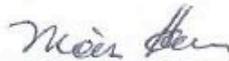
Asesor  
Dr. José Antonio de la O Serna



Coasesor:  
Dr. Efraín Alcorta García



Coasesor:  
Dr. Gerardo Maximiliano Méndez



Vo. Bo.  
Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios de Posgrado  
Cd. Universitaria, a Julio del 2012

*Para*  
*Catalina, Rubí, Fernando y David*

# Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi asesor de tesis, el Dr. José Antonio de la O Serna por sus valiosos consejos, por el apoyo e interés a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis, pero sobre todo por compartirme sus conocimientos y su entusiasmo en la búsqueda del saber. Agradezco también al Dr. Efraín Alcorta García y al Dr. Gerardo Maximiliano Méndez por sus valiosos comentarios y sugerencias con el objetivo de mejorar este trabajo.

A los doctores del DIE por su tiempo y dedicación para brindarme las herramientas necesarias para llevar a cabo la realización de este trabajo de investigación y a CONACYT por el apoyo otorgado, con el cual fue posible continuar con mis estudios. Igualmente a mis amigos y compañeros por su entusiasmo y apoyo.

Pero principalmente quiero agradecer a mi familia: Catalina, Fernando, David y Rubí. Quiero agradecerles por el apoyo incondicional que siempre me han brindado, por creer en mi y por cubrirme con su luz. Sin lugar a dudas, gracias por hacer de mi una mejor persona y formar parte de ese impulso que me hace levantarme todos los días y sonreír.

Luis Fernando Sánchez Gómez

Julio 2012

# RESUMEN

Publicación No. \_\_\_\_\_

Luis Fernando Sánchez Gómez, M. C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2012

## **Profesor Asesor: Jose Antonio de la O Serna**

Para facilitar el análisis de los sistemas de distribución de energía o cualquier otro sistema cuyo comportamiento dependa de señales sinusoidales, los ingenieros han simplificado las matemáticas que se aplican; dicha simplificación matemática es llamada *fasor*. La mayoría de los algoritmos diseñados para determinar los fasores consideran una señal sinusoidal con amplitud y fase constantes por lo que llegan a presentar desventajas cuando estas características son funciones variantes en el tiempo. Una manera de solucionar este problema y obtener mediciones confiables del fasor es aplicando una matriz de transición de estados del K-ésimo orden de Taylor para aproximar el fasor dinámico y sus primeras derivadas. Esto conduce a una pluralidad de representaciones en espacio de estados del modelo aproximado de la señal pasabanda de una oscilación de potencia.

Mediante estos modelos truncados de la señal, pueden ser aplicados distintos algoritmos a sus vectores de estado con el fin de encontrar observadores capaces de estimar el fasor dinámico y sus primeras derivadas, uno de ellos es el algoritmo del filtro de Kalman. Bajo estos principios, recientemente se ha descubierto el filtro Taylor-Kalman-Fourier para estimación de fasores oscilatorios con tiempos de respuesta de dos ciclos aproximadamente. En el presente trabajo se aplica el principio de optimalidad de control óptimo para el diseño de ganancias, dando lugar a nuevas clases de filtros, entre ellos los filtros Taylor-LQG-Fourier. Dichos filtros reducen las ganancias interarmónicas y las frecuencias de resonancia alrededor de la frecuencia fundamental vistas en el filtro Taylor-Kalman-Fourier. El filtro  $Taylor^0 - LQG - Fourier$  es equivalente al filtro  $Taylor^0 - Kalman - Fourier$ , mientras

que el filtro  $Taylor^2 - LQG - Fourier$  puede calcular el filtro  $Taylor^2 - Kalman - Fourier$  al hacer bastante grande el peso del control. El trabajo de investigación también contempla el diseño un algoritmo de estimación en el cual se aplica el principio de Ackermann para obtener el vector de ganancias de acuerdo a parámetros variantes preestablecidos con el fin de acelerar el tiempo de respuesta. Los estimados obtenidos mediante esta técnica no solo son instantáneos (sin retardo) sino que también son medio ciclo mas rápidos que el filtro Taylor-Kalman. Después del transitorio, dichos filtros reducen el error vectorial total a un valor similar a los filtros Taylor-Kalman.

# Índice General

<b>Agradecimientos</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>V</b>
<b>Índice General</b>	<b>VII</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>X</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>XI</b>
<b>Acrónimos</b>	<b>XV</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>XVI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Planteamiento del Problema . . . . .	2
1.2. Objetivos . . . . .	3
1.3. Metodología . . . . .	4
1.4. Descripción de la Tesis . . . . .	4
<b>2. Control Lineal-Cuadrático "LQ"</b>	<b>6</b>
2.1. Introducción . . . . .	6
2.2. Antecedentes . . . . .	7
2.2.1. Transformada Digital Taylor-Fourier . . . . .	8
2.2.2. Filtro $Taylor^K - Kalman$ . . . . .	9
2.2.3. Filtro $Taylor^K - Kalman - Fourier$ . . . . .	11

2.3.	Introducción al Control Óptimo . . . . .	11
2.3.1.	El Principio de Optimalidad . . . . .	12
2.4.	Interpretación de la Señal . . . . .	13
2.5.	Controlador LQ . . . . .	16
2.6.	Solución Numérica . . . . .	18
2.6.1.	Señal de análisis . . . . .	18
2.7.	Conclusiones . . . . .	26
<b>3.</b>	<b>Introducción al diseño del controlador LQG</b>	<b>28</b>
3.1.	Introducción . . . . .	28
3.2.	Propiedades del Filtro de Kalman . . . . .	29
3.3.	Estimador LQG . . . . .	30
3.3.1.	Principio de Separación . . . . .	31
3.3.2.	Acoplamiento entre LQ y el Filtro de Kalman . . . . .	32
3.4.	Modelo de la Señal y LQG . . . . .	35
3.4.1.	Señal de análisis . . . . .	35
3.5.	Respuesta en Frecuencia Taylor-LQG . . . . .	44
3.5.1.	Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Cero . . . . .	45
3.5.2.	Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Dos . . . . .	47
3.6.	Filtro $Taylor^K - LQG - Fourier$ . . . . .	49
3.6.1.	Señal de Análisis . . . . .	50
3.6.2.	$Taylor^0 - LQG - Fourier$ . . . . .	50
3.6.3.	$Taylor^2 - LQG - Fourier$ . . . . .	51
3.7.	Conclusiones . . . . .	53
<b>4.</b>	<b>Diseño de ganancias mediante Formulación de Ackermann</b>	<b>55</b>
4.1.	Introducción . . . . .	55
4.2.	Asignación de polos . . . . .	56
4.2.1.	Diseño mediante asignación de polos . . . . .	56
4.3.	Fórmula de Ackermann . . . . .	59
4.3.1.	Criterio de selección de polos . . . . .	60
4.3.2.	Observador Actual del Estado . . . . .	63

4.4.	Solución Numérica . . . . .	64
4.4.1.	Señal de análisis . . . . .	64
4.4.2.	Estimados de paso en Magnitud y Fase . . . . .	73
4.4.3.	Estimados de Paso de Frecuencia . . . . .	75
4.5.	Respuesta en Frecuencia . . . . .	77
4.5.1.	Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Cero . . . . .	77
4.5.2.	Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Dos . . . . .	78
4.6.	Conclusiones . . . . .	80
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>81</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	81
5.2.	Trabajo Futuro . . . . .	83
<b>A.</b>	<b>Diseño de Q</b>	<b>84</b>
A.1.	Introducción . . . . .	85
A.2.	Análisis de Resultados . . . . .	85
<b>B.</b>	<b>Exploración en el diseño del LQG</b>	<b>92</b>
B.1.	Introducción . . . . .	93
B.2.	Matriz de ponderación $Q(n)$ . . . . .	93
<b>C.</b>	<b>Rotación del Fasor Dinámico en Espacio de Estados</b>	<b>101</b>
C.1.	Introducción . . . . .	101
C.2.	Obteniendo la rotación del fasor dinámico en espacio de estados . . . . .	101
<b>D.</b>	<b>Herramientas Matemáticas</b>	<b>103</b>
D.1.	Introducción . . . . .	104
D.2.	Teorema del valor medio . . . . .	104
D.3.	Teorema de Taylor . . . . .	105
D.4.	Controlabilidad y Observabilidad . . . . .	106
D.4.1.	Controlabilidad . . . . .	106
D.4.2.	Observabilidad . . . . .	106
	<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Índice de Tablas

B.1. Efecto del Peso de Control . . . . .	97
---	----

# Índice de figuras

2.1. Posibles trayectorias de 1 al 8 . . . . .	12
2.2. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero) . . . . .	19
2.3. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero) . . . . .	20
2.4. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden cero) . . . . .	20
2.5. Error vectorial total (Modelo de orden cero) . . . . .	21
2.6. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos) . . . . .	22
2.7. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden dos) . . . . .	22
2.8. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos) . . . . .	23
2.9. Error vectorial total (Modelo de orden dos) . . . . .	24
2.10. Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos con el modelo de segundo orden de la señal . . . . .	24
2.11. Magnitud de las ganancias del controlador lineal-cuadrático . . . . .	25
2.12. Media cuadrática del TVE( %) como una función de la frecuencia de muestreo ( $M =$ $2^m$ muestras por ciclo) y grado $K$ del polinomio de Taylor . . . . .	26
3.1. Diagrama de Bloques del Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano . . . . .	30
3.2. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero) . . . . .	36
3.3. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero) . . . . .	36
3.4. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden cero) . . . . .	37
3.5. Error Vectorial Total (Modelo de orden cero) . . . . .	37
3.6. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos) . . . . .	39
3.7. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden dos) . . . . .	39
3.8. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos) . . . . .	40
3.9. Error Vectorial Total (Modelo de orden dos) . . . . .	41

3.10. Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos con el modelo de segundo orden de la señal . . . . .	41
3.11. Error normalizado de velocidad y frecuencia obtenido con el modelo de orden dos . .	42
3.12. Media cuadrática del TVE( %) como una función de la frecuencia de muestreo ( $M = 2^m$ muestras por ciclo) y grado K del polinomio de Taylor . . . . .	43
3.13. Magnitud de las ganancias de Kalman (gráfico superior) y Magnitud de las ganancias del controlador LQ (gráfico inferior) . . . . .	44
3.14. Respuesta en frecuencia del filtro $Taylor^0 - LQG$ a diferentes frecuencias de muestreo	45
3.15. Respuesta de magnitud del filtro $Taylor^0 - LQG - dc$ para diferentes frecuencias de muestreo . . . . .	46
3.16. Respuesta de magnitud del filtro de corriente directa para diferentes frecuencias de muestreo . . . . .	47
3.17. Respuesta en frecuencia del filtro $Taylor^2 - LQG$ para diferentes frecuencias de muestreo . . . . .	48
3.18. Respuesta de magnitud del primer y segundo diferenciador del filtro $T^2 - LQG$ . . .	48
3.19. Respuesta en frecuencia del filtro $T^0 - LQG - F$ . . . . .	51
3.20. Respuesta en frecuencia del filtro $T^2 - LQG - F$ . . . . .	52
3.21. Respuesta de magnitud del primer y segundo derivador asociado con el filtro $T^2 - LQG - F$ . . . . .	53
4.1. Líneas de frecuencia natural y amortiguamiento constantes . . . . .	61
4.2. Franjas periódicas en el plano $s$ . . . . .	62
4.3. Diagrama de Bloques de la Estimación de la Señal mediante un Observador Actual .	63
4.4. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero) . . . . .	64
4.5. Ubicación de los polos deseados en el plano $z$ . . . . .	65
4.6. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero) . . . . .	66
4.7. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden cero) . . . . .	66
4.8. Error vectorial total (Modelo de orden cero) . . . . .	67
4.9. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos) . . . . .	68
4.10. Ubicación de los polos deseados en el plano $z$ . . . . .	69
4.11. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden dos) . . . . .	70
4.12. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos) . . . . .	70

4.13. Error vectorial total (Modelo de orden dos) . . . . .	71
4.14. Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos con el modelo de segundo orden de la señal . . . . .	72
4.15. Error normalizado de velocidad y frecuencia obtenido con el modelo de orden dos . . . . .	72
4.16. Estimados de magnitud y fase obtenidos con el estimador $Taylor^k - Ackermann$ de cero y segundo orden para la magnitud y fase del paso de señal . . . . .	73
4.17. Trayectorias del fador del estimador de cero y segundo orden . . . . .	74
4.18. Estimados de las primeras derivadas de amplitud y fase obtenidas con el estimador de Ackermann de segundo orden de la amplitud y fase del paso de señal . . . . .	74
4.19. Estimados de magnitud y fase obtenidos con el estimador $Taylor^k - Ackermann$ de cero y segundo orden para el paso de frecuencia de la señal de prueba . . . . .	75
4.20. Trayectorias del fador del estimador de cero y segundo orden para el paso de frecuencia de la señal de prueba . . . . .	76
4.21. Estimados de las primeras derivadas de amplitud y fase obtenidas con el estimador de Ackermann de segundo orden del paso de frecuencia de la señal de prueba . . . . .	76
4.22. Respuesta en frecuencia del filtro $Taylor^0 - Ackermann$ a diferentes frecuencias de muestreo . . . . .	78
4.23. Respuesta en frecuencia del filtro $Taylor^2 - Ackermann$ para diferentes frecuencias de muestreo . . . . .	79
4.24. Respuesta de magnitud del primer y segundo diferenciador del filtro $T^2 - Ackermann$ . . . . .	79
A.1. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero) . . . . .	86
A.2. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero) . . . . .	86
A.3. Trayectoria del Fador y su estimado (Modelo de orden) . . . . .	87
A.4. Error vectorial total (Modelo de orden cero) . . . . .	87
A.5. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos) . . . . .	88
A.6. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de dos) . . . . .	89
A.7. Trayectoria del Fador y su estimado (Modelo de dos) . . . . .	89
A.8. Error vectorial total (Modelo de orden dos) . . . . .	90
A.9. Estimaciones de amplitud y fase (Matriz de ponderación $Q$ diseñada mediante <i>regla de Bryson</i> ) . . . . .	91

B.1. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero) . . . . .	94
B.2. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos) . . . . .	95
B.3. Estimación de Amplitud y Fase . . . . .	96
B.4. Error vectorial total para $r = 10$ . . . . .	96
B.5. Estimados de velocidad/frecuencia (superior). Error normalizado de velocidad/frecuencia obtenido con el modelo de orden dos (inferior) . . . . .	98
B.6. Magnitud de las ganancias de Kalman (izquierda) y LQ (derecha) afectadas por la ley de control . . . . .	98
B.7. Respuesta en frecuencia del filtro $Taylor^2 - LQG_c$ para diferentes frecuencias de muestreo a $16m/c$ . . . . .	99
B.8. Respuesta en frecuencia del filtro $Taylor^2 - LQG_c$ para diferentes frecuencias de muestreo a $64m/c$ . . . . .	100
B.9. Respuesta en frecuencia del filtro $T^2 - LQG_c - F$ . . . . .	100

# Acrónimos

DFT	Transformada Digital de Fourier
DTFT	Transformada Digital Taylor-Fourier
FFT	Transformada Rápida de Fourier
FIR	Respuesta al Impulso Finito
FT	Transformada de Fourier
LGR	Lugar Geométrico de las Raíces
LQ	Control Óptimo Lineal Cuadrático
LQG	Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano
LS	Mínimos Cuadrados
rms	Media Cuadrática
SNR	Relación Señal/Ruido
TFT	Transformada <i>Taylor<sup>K</sup> – Fourier</i>
$T^K - A$	<i>Taylor<sup>K</sup> – Ackermann</i>
$T^K - K$	<i>Taylor<sup>K</sup> – Kalman</i>
$T^K - K - F$	<i>Taylor<sup>K</sup> – Kalman – Fourier</i>
$T^K - LQG$	<i>Taylor<sup>K</sup> – LQG</i>
$T^K - LQG - F$	<i>Taylor<sup>K</sup> – LQG – Fourier</i>
$T^K - LQG_c - F$	<i>Taylor<sup>K</sup> – LQG – Fourier convencional</i>
TVE	Total Vector de Error
WLS	Mínimos Cuadrados Ponderados

# Nomenclatura

$a_0$	Amplitud constante.
$-$	Conjugado Complejo.
dB	Decibeles.
$q_{mn}$	Elemento de la matriz de ponderación Q.
$e$	Dinámica del Error.
$x$	Estado.
$\hat{x}$	Estimado. $x$
$x^-$	$x$ A priori.
$x_2$	Estados 2 (Velocidad).
$x_3$	Estados 3 (Aceleración).
$x_4$	Conjugado $x_1$ .
$x_5$	Conjugado $x_2$ .
$x_6$	Conjugado $x_3$ .
!	Factorial.
$\varphi_0$	Fase constante.
$\varphi_3$	Fase del Tercer armónico.
$\varphi_5$	Fase del Quinto armónico.
$f_a$	Frecuencia de la Función de Amplitud.
$f_\varphi$	Frecuencia de la Función de Fase.
$\omega_s$	Frecuencia de Muestreo.
$f_0$	Frecuencia de señal senoidal con amplitud y fase constantes.
$H$	Hermitiana.
Hz	Hertz.
I	Matriz Identidad.
$\Phi_0$	Matriz de Transición de Estados de Orden Cero.

$\Phi_2$	Matriz de Transición de Estados de Orden Dos.
$\tilde{\Phi}$	Matriz Retroalimentada.
$N_1$	Número de muestras por ciclo.
$Re$	Número Real.
$\phi$	Polinomio Característico.
rads	Radianes.
$\sigma_v^2$	Varianza del Ruido de Entrada.
$\sigma_w^2$	Varianza de Medición de Ruido.
$z$	Transformada Z (variable z).
$T$	Transpuesta.
pu	Unidades Fasoriales.
$j$	Unidad Imaginaria.

# Capítulo 1

## Introducción

El objetivo principal en la teoría de estimación es lograr un estimado lo más preciso del valor real, bajo diversas condiciones tales como: señal contaminada por ruido o con cambios abruptos, etc. Para esto, el diseño de un método que pudiese obtener mejores resultados bajo estas últimas condiciones, sería de gran utilidad. También considerando que la teoría de estimación es requerida en diferentes áreas como sistemas de comunicación, procesamiento digital de señales, control, entre muchas otras y con diferentes aplicaciones como medición por adquisición de datos, filtrado y otros; es sumamente importante que dicha teoría brinde las herramientas suficientes para la obtención de resultados cada vez más satisfactorios.

Por lo tanto, la posibilidad de determinar los fasores a lo largo de sistemas de distribución de energía o cualquier otro sistema cuyo comportamiento sea sinusoidal, en un momento dado abre una posibilidad para tener una supervisión mejor y más precisa de éstos. Para la estimación han sido desarrollados diversos algoritmos; uno de ellos es el método de *mínimos cuadrados* (Least square "LS") desarrollado por Gauss en 1795, y fue inspirado por la observación de cometas. Una desventaja de este método es que es necesario cierta cantidad de observaciones para obtener buenas estimaciones, esto es una desventaja más clara cuando es necesario no tener retardos en la medición de las estimaciones.

## 1.1. Planteamiento del Problema

Los principales métodos utilizados en la estimación fasorial como la FFT y LS, tienen la desventaja de necesitar una gran cantidad de muestras para obtener buenas estimaciones (tal y como lo mencionamos anteriormente). Además la mayoría de las técnicas usadas son basadas en el modelo clásico de una señal sinusoidal para la medición de las estimaciones del fasor, es decir, el viejo modelo del fasor con amplitud y fase constantes, lo que representa una desventaja. La restricción constante impuesta en la amplitud y fase constituye una severa limitación, que impide el monitoreo y control eficaz y eficiente de los sistemas, especialmente cuando se encuentran en condiciones transitorias.

Los estimados del fasor mediante un modelo de la señal con amplitud y fase como funciones variantes en el tiempo limitadas en banda, son más flexibles y adecuados ante fluctuaciones en la señal. Mediante los polinomios de Taylor es posible aproximar el modelo variante en tiempo de la señal; dichos polinomios y sus derivadas nos permiten construir una matriz de transición de estados y por ende el estado de transición. Con esta técnica no solo se obtienen mejores estimaciones del fasor, sino también sus derivadas. Además los estimados obtenidos mediante esta técnica logran llegar al estado estable ante cambios abruptos, más rápido que aquellos obtenidos con el modelo estático.

En [15] y [17] se expone el algoritmo del filtro de Kalman con el propósito de estimar tanto el fasor dinámico como sus derivadas, sin embargo, a diferencia de viejos trabajos realizados, en este caso el algoritmo de Kalman emplea el modelo que incorpora las funciones de amplitud y fase variantes en tiempo de la señal, en espacio de estados obtenido mediante los polinomios de Taylor. Bajo estas consideraciones se busca realizar una exploración en la aplicación de diferentes algoritmos con el objetivo de obtener nuevos vectores de ganancias capaces de mejorar de manera más eficiente el tiempo de respuesta de los filtro *Taylor<sup>K</sup> – Kalman*. Además este desarrollo permitirá llevar a cabo un análisis comparativo entre las metodologías abarcadas, resaltando la importancia de cada una.

El diseño de los nuevos algoritmos se basara primordialmente tanto en el *Principio de Optimalidad de Bellman* así como en la *Fórmula de Ackermann* desarrollada para la asignación de polos. La aplicación de estos algoritmos en la estimación fasorial y armónica implica el cálculo de la envolvente compleja así como el de sus derivadas en cada una de las frecuencias armónicas de las señales, para ofrecer estimaciones más precisas.

## 1.2. Objetivos

El objetivo general que se pretende alcanzar es encontrar “filtros de estimación fasorial con tiempos de respuesta menores a un ciclo”. Por lo que, para cumplirlo se llevaron a cabo una serie de objetivos específicos:

- Aplicar la *fórmula de Ackermann* para obtener las ganancias de acuerdo a parámetros preestablecidos, con el fin de acelerar el tiempo de respuesta de los algoritmos diseñados.
- Aplicar el Controlador Lineal-Cuadrático basado en el principio de optimalidad de Bellman para construir un vector de ganancias que será aplicado al estimador fasorial.
- Estudiar y aplicar unas de las metodologías desarrolladas para la estimación de fasores. Estas son el filtro  $T^K - K$  y el filtro  $T^K - K - F$ .
- Mediante el análisis detallado, determinar las ventajas y desventajas de las metodologías propuestas.
- Obtener filtros que bajo oscilaciones suaves, cambios abruptos y cuando la señal es contaminada con ruido proporcionen estimados factibles y de ser posible presenten tiempos de respuesta cortos.

### 1.3. Metodología

Para efectuar el desarrollo de este trabajo de tesis, se estableció una metodología a seguir, la cual se comprende de los siguientes pasos:

- Llevar a cabo una revisión de la bibliografía referente al análisis de Fourier y procesamiento digital de señales.
- Implementar un programa en MATLAB que lleve a cabo el análisis de señales mediante  $Taylor^K - Kalman - Fourier$ .
- Diseñar e Implementar algoritmos basados tanto en el principio de optimalidad como en el criterio de Ackermann para la construcción de vectores de ganancias.
- Analizar señales bajo oscilaciones suaves y contaminadas, mediante los algoritmos de estimación fasorial diseñados previamente utilizando el programa en MATLAB.
- Llevar a cabo un análisis comparativo entre los nuevos algoritmos de estimación desarrollados y los filtros  $Taylor^K - Kalman$  y  $Taylor^K - Kalman - Fourier$ .

### 1.4. Descripción de la Tesis

El trabajo de tesis a continuación desarrollado esta comprendido de la siguiente manera:

**Capítulo dos, Control Lineal-Cuadrático LQ.** Presenta una breve descripción de los métodos en estimación fasorial desarrollados anteriormente, tales como el método de la DTFT, el filtro  $T^K - K$  y el filtro extendido  $T^K - K - F$ . De igual manera que los métodos mencionados, también se da un breve recordatorio de los principios básicos del control óptimo; posteriormente se describe el modelo de señal adoptado para la oscilación. La importancia del capítulo se centra en la descripción del diseño de un algoritmo basado en el principio de optimalidad de Bellman.

**Capítulo tres, *Introducción al diseño del controlador LQG.*** En este capítulo se presenta una descripción del Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano y el uso de sus características para la aplicación en la estimación del fasor dinámico. Se presenta el diseño y construcción de una propuesta que consiste en una modificación del algoritmo tradicional del LQG. Por último se presentan las respuestas en frecuencia del filtro y se señalan puntos comparativos entre los filtros desarrollados mediante esta metodología y los filtros  $T^K - K$  y  $T^K - K - F$ .

**Capítulo cuatro, *Diseño de ganancias mediante Formulación de Ackermann.*** Se presenta la aplicación de la "Fórmula de Ackermann" para la obtención de un vector de ganancias mediante un criterio de asignación de polos en el plano  $z$ . El objetivo principal de este capítulo es presentar un algoritmo cuyo tiempo de respuesta sea lo más rápido posible ante cambios abruptos que la señal pudiese presentar. Este capítulo también presenta ligeras explicaciones sobre la técnica de asignación de polos así como del observador de estado.

**Capítulo cinco, *Conclusiones y Trabajo futuro.*** Se exponen las conclusiones generadas a lo largo del desarrollo de este trabajo de tesis obtenidas mediante los resultados analizados, lo que nos lleva a presentar sugerencias para trabajos futuros.

**Apéndices,** en este trabajo se incorporan cuatro apéndices, de los cuales dos contienen ligeras explicaciones y desarrollos de metodologías alternas en el desarrollo de algoritmos presentados más adelante. Los otros dos apéndices contienen herramientas matemáticas necesarias a lo largo de este trabajo.

# Capítulo 2

## Control Lineal-Cuadrático "LQ"

### 2.1. Introducción

Este capítulo se basa en la metodología presentada en [7], en la cual se aproxima al fasor oscilatorio de una señal paso banda. La metodología consiste en expresar la envolvente compleja [9] de la señal paso banda por su serie de Taylor, para después estimar los mejores coeficientes de Taylor mediante el uso del algoritmo del filtro de Kalman. En dicha metodología se consideran las primeras derivadas del fasor, cuando se propuso la nueva técnica la norma para medición de fasores [1] consideraba el fasor en estado estacionario, y los estimados del mismo se obtenían mediante el filtro de Fourier [4], lo cual provocaba numerosos errores importantes en las estimaciones fasoriales [8].

El filtro *Taylor<sup>K</sup> – Kalman* mostrado en [15], se desarrolló con el fin de solucionar el problema presentado por la transformada *Taylor-Fourier (TFT)* la cual usa mínimos cuadrados ponderados (WLS). La TFT aunque mas adecuada bajo condiciones dinámicas que la *Transformada Digital de Fourier (DFT)* contiene un retardo sistemático en los estimados del fasor. El filtro *Taylor<sup>K</sup> – Kalman* otorga estimados instantáneos bajo este tipo de condiciones, lo que hace posible su verdadera sincronización, importante en aplicaciones de control. Dicho filtro se basa en la representación en espacio

de estados del modelo de señal, la cual incorpora las derivadas de la envolvente compleja de la oscilación. Otra ventaja de esta metodología es que puede estimar no solo el fasor, sino también sus primeras  $K$  derivadas, además su respuesta en frecuencia ayuda a evaluar el comportamiento de sus estimaciones cuando la señal de entrada contiene componentes no consideradas dentro del modelo de la señal.

El comportamiento en frecuencias distintas a la fundamental del filtro *Taylor<sup>K</sup> – Kalman* puede mejorarse, si dichas frecuencias son incorporadas al modelo de la señal, es decir, extender la matriz de transición de estados para todo el conjunto de armónicos. El filtro extendido es conocido como *Taylor<sup>K</sup> – Kalman – Fourier* [17]

El tiempo de respuesta presentado por el filtro *Taylor<sup>K</sup> – Kalman – Fourier* para estimación de fasores oscilatorios es de aproximadamente dos ciclos. Aquí se propone reducir este tiempo de respuesta y mejorar su desempeño mejorando las ganancias de Kalman con el algoritmo de Control Óptimo Lineal Cuadrático (LQ).

## 2.2. Antecedentes

El fasor ha sido considerado como un concepto esencialmente de estado estacionario desde su invención, por lo que hasta ahora la mayoría de los algoritmos de estimaciones fasorial están conformados bajo esa suposición. Los principales métodos utilizados en las estimaciones fasoriales como la *FFT*, tienen como desventaja que necesitan una cierta cantidad de muestras para tener una buena estimación, también si se considera que la señal podría tener pequeñas perturbaciones o que el sistema eléctrico cambie su dinámica, podría ser más conveniente que la estimación se realizara mediante un algoritmo dinámico.

El concepto de *fasor oscilatorio* fue propuesto en [19] para encontrar las dinámicas de las desviaciones del comportamiento periódico de señales de corriente y voltaje en sistemas de potencia,

sin embargo, esto fue definido como la estimación sucesiva del primer coeficiente de Fourier en un periodo corto de la transformada de Fourier de un ciclo, la cual usa el mismo modelo de señal estática (una señal con amplitud, fase y frecuencia constante) como el filtro de Fourier propuesto en [22].

### 2.2.1. Transformada Digital Taylor-Fourier

La posibilidad de aproximar el fasor oscilatorio con un polinomio de Taylor a través del método de mínimos cuadrados conduce a la inclusión de términos de Taylor en la transformada de Fourier. Esta técnica, referida como *Transformada Taylor-Fourier* [14], utiliza la aproximación mediante mínimos cuadrados ponderados (WLS). Esta transformada provee un banco de filtros FIR mejorado para la estimación de armónicas oscilatorias. Los nuevos filtros en cada armónica no solamente tienen ganancias lisas de diferenciación más amplias (lo que elimina las distorsiones de amplitud y fase), sino que también rechazan la interferencia interarmónica, con ganancias lisas nulas junto a las armónicas restantes, lo que asegura su rechazo. Además de estimar los coeficientes de Fourier, la nueva transformación proporciona los mejores estimados (en el sentido de WLS) de los coeficientes de Taylor, correspondientes a las primeras derivadas de las envolventes complejas de cada armónica.

La *Transformada Digital Taylor-Fourier* expande la base de la FFT con una matriz extendida  $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{4N} & T_{4N} & T_{4N}^2 & T_{4N}^3 \end{bmatrix} F_N \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Donde la  $k$ -ésima submatriz está dada por:

$$B_k = T_N^k F_N \quad (2.2.2)$$

donde la matriz rectangular  $F_N$  contiene  $M$  matrices de Fourier de  $4N \times N$

$$F_N = \begin{bmatrix} W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix} \quad (2.2.3)$$

La matriz  $\mathbf{T}$  contiene las muestras del m-ésimo término de Taylor, la composición de la señal queda de la siguiente forma:

$$B\hat{X} = \begin{bmatrix} I_N & \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} & T_N & \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} & T_N^2 & \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} & \dots & T_N^M & \begin{pmatrix} W_N \\ W_N \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_N \\ \hat{X}_N \\ \hat{X}_N \\ \vdots \\ \hat{X}_N^{M-1} \end{bmatrix} \quad (2.2.4)$$

Aplicando la solución de mínimos cuadrados se obtiene

$$\hat{X}_N = (B^H B)^{-1} B^H x = B^\dagger x \quad (2.2.5)$$

donde la matriz  $B^\dagger$  es conocida como la *pseudoinversa*. La composición de la señal está dada por

$$\hat{x} = B\hat{X} \quad (2.2.6)$$

De esta forma, la DFT se ha extendido agregando los términos de Taylor-Fourier, ya que a más componentes agregados mayor es el subespacio. Estos componentes dan cabida a fluctuaciones con posición, velocidad, aceleración, etc. Debido al agregado de dichos términos la reconstrucción de la TFT es más precisa que la de Fourier para el tipo de fasores oscilatorios. En general, la FT nunca tendrá errores de reconstrucción menores a los de la TFT, debido a que el subespacio de la TFT contiene al subespacio de la FT [28].

### 2.2.2. Filtro $Taylor^K - Kalman$

El filtro de Kalman es usado en [13] como un observador capaz de construir (estimar) la señal de entrada con los instantáneos del fasor oscilatorio y sus derivadas en un vector de espacio de estados. Esto se basa en el hecho de que el filtro de Kalman proporciona estimados muy cercanos de la señal si su modelo se ajusta a la entrada. El modelo en espacio de estados de la señal usada en el algoritmo del filtro de Kalman es obtenido de las derivadas del polinomio de k-ésimo orden de Taylor modelado sobre la oscilación. La señal paso banda es obtenida mediante un proceso de modulación de la

rotación de la frecuencia fundamental sobre el plano complejo. La principal contribución del filtro es proporcionar una matriz de transición de estados con un modelo de señal sinusoidal relajado por un k-ésimo polinomio de Taylor para aproximar las fluctuaciones de amplitud y fase.

### **Filtro de Kalman**

Resumiendo, el proceso recursivo de Kalman se define por la siguiente secuencia para el n-ésimo ciclo:

#### 1. Actualización del estado

##### a) Predicción del estado

$$\hat{x}^-(n) = \Phi \hat{x}(n-1) \quad (2.2.7)$$

##### b) Error de covarianza a priori

$$P^-(n) = \Phi P(n-1) \Phi^H + \Gamma \Gamma^T \sigma_v^2 \quad (2.2.8)$$

#### 2. Actualización de la medición

##### a) Ganancia de Kalman

$$L(n) = P^-(n) H^T (H P^-(n) H^T + \sigma_w^2)^{-1} \quad (2.2.9)$$

##### b) Corrección del estado

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + L(n) (s(n) - H \hat{x}^-(n)) \quad (2.2.10)$$

##### c) Error de covarianza a posteriori

$$P(n) = (I - L(n) H) P^-(n) \quad (2.2.11)$$

Nótese que el concepto de filtrado es debido a que los valores del estado óptimo  $\hat{x}^-(n)$  y de la observación se producen en el mismo instante.

### 2.2.3. Filtro $Taylor^K - Kalman - Fourier$

El filtro  $Taylor^K - Kalman$  es propuesto en [13] para estimar tanto al fasor oscilatorio como a sus derivadas, brindando estimados instantáneos del fasor bajo este tipo de condiciones. Sin embargo, dicho filtro alcanza ganancias óptimas solo alrededor de la frecuencia fundamental. Para obtener estas ganancias alrededor de cada armónica, la matriz de transición de estados del modelo de la señal requiere ser extendida para todas aquellas armónicas de interés. La principal contribución del filtro  $Taylor^K - Kalman - Fourier$  es proporcionar su respuesta en frecuencia usando la matriz de transición de estados, y mostrar como puede ser extendido para todo el conjunto de armónicos. Esto se describe como el análisis espectral, incluyendo sus derivadas, con el filtro de Kalman, con un esfuerzo computacional mucho menor que la tradicional FFT.

## 2.3. Introducción al Control Óptimo

El método de estimación usando el filtro de Kalman es una herramienta fundamental en el estudio del fasor oscilatorio. El tiempo de respuesta que presenta dicho método es de dos ciclos lo que se pretende disminuir mediante el uso o introducción de un controlador óptimo.

El criterio particular que veremos es un funcional cuadrático del estado y la entrada de control,

$$J(x(t), u(t)) = \int_{t_i}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (2.3.1)$$

donde  $Q$  y  $R$  son las matrices constantes (aunque no necesariamente) semi-definida y definida positivas respectivamente. El control que se obtiene al minimizar este criterio es *lineal* y ya que el criterio se basa en funcionales cuadráticos el método se conoce como *lineal-cuadrático* (LQ: linear-quadratic). Criterios similares de optimización se siguen para el diseño de observadores, sólo que el funcional depende del error de estimación, y se basa en una caracterización estadística de los ruidos que afectan al sistema. Este estimador óptimo lineal-cuadrático se conoce como el *filtro de Kalman*

(visto anteriormente). Cuando se combinan la ganancia de realimentación de estados LQ con el filtro de Kalman, obtenemos lo que se conoce como un *controlador lineal-cuadrático-gaussiano* (LQG). (Gaussiano viene de la caracterización estadística del ruido empleada.)

### 2.3.1. El Principio de Optimalidad

El estado de un sistema discreto describe una trayectoria haciendo transiciones discretas de un estado a otro, bajo el efecto de una entrada también aplicada en tiempo discreto. Cuando se asocia un criterio de optimización al sistema, cada transición de estado tiene asociado un costo o penalidad. Por ejemplo, pueden penalizarse las transiciones de estado que se alejan demasiado del estado final deseado, o las acciones de control de valores demasiado elevados. A medida que el sistema evoluciona de estado en estado, los costos se suman hasta acumular un costo total asociado a la trayectoria.

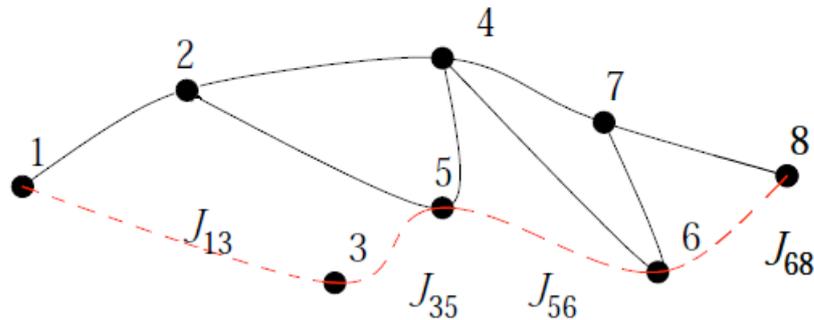


Figura 2.1. Posibles trayectorias de 1 al 8

La figura 2.1 representa 8 estados de un sistema discreto con sus transiciones posibles; el estado inicial es el 1, y el final el 8. El sistema pasa de un estado a otro en cada tiempo  $n$  determinado por la entrada  $u(n)$  y las ecuaciones  $x(n+1) = Ax(n) + Bu(n)$ . Las transiciones posibles se representan por los arcos que conectan el estado inicial al final a través de los estados intermedios. El costo asociado a cada transición se representa con la letra  $J$ ; por ejemplo, el costo de moverse del estado 3 al 5 es  $J_{35}$ .

Asumiendo que los costos se acumulan en forma aditiva, vemos que la trayectoria marcada en rojo, por ejemplo, tiene un costo total  $J_{13} + J_{35} + J_{56} + J_{68}$ . De forma general el costo queda determinado por la siguiente ecuación:

$$J_N = \sum_{n=0}^N = x^T(n)Q(n)x(n) + u^T(n)R(n)u(n) \quad (2.3.2)$$

Donde  $N$  es finito,  $Q(n)$  es positiva semidefinida, y  $R(n)$  es positiva definida. Como hay varias rutas alternativas del estado 1 al 8, el costo total dependerá de la trayectoria elegida. La señal de control  $u^*(n)$  que determina la trayectoria de menor costo es la *estrategia óptima* ya que según el criterio de optimabilidad de Bellman [2]:

Si el control de lazo cerrado  $u^*(n) = f[x(n)]$  es óptimo dentro del intervalo  $0 \leq n \leq N$ , también lo será en cualquier subintervalo  $m \leq n \leq N$ , donde  $0 \leq m \leq N$ .

Este obvio principio nos permitirá resolver desde otra perspectiva los elementos necesarios para obtener, de ser posible, una buena estimación del fasor oscilatorio.

## 2.4. Interpretación de la Señal

Las técnicas de estimación fasorial asumen una señal senoidal con amplitud y fase constante (con suposiciones de estado estacionario)

$$s(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \quad (2.4.1)$$

Sin embargo, en sistemas de potencia las oscilaciones de amplitud y fase pueden ser modeladas completamente por una señal pasabanda de la forma

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \quad (2.4.2)$$

siendo  $a(t)$  y  $\varphi(t)$  la amplitud y fase de la señal  $s(t)$  respectivamente. Estos parámetros son ahora señales reales. El contenido frecuencial de una señal pasabanda se encuentra confinado dentro de una banda estrecha alrededor de la frecuencia fundamental  $f_1$ . En términos de funciones exponenciales complejas, el modelo de la señal puede ser simplificado como:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} [p(t)e^{j2\pi f_1 t} + \bar{p}(t)e^{-j2\pi f_1 t}] \\ &= \text{Re}\{p(t)e^{j2\pi f_1 t}\}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

donde  $p(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}$  es la envolvente compleja de la señal pasabanda  $s(t)$ , mejor conocida como fasor oscilatorio de la oscilación. Dicho fasor es representado por una función compleja expresada en forma polar, en la cual  $a(t)$  y  $\varphi(t)$  son modulaciones de amplitud y fase de  $s(t)$ .

La función compleja del fasor oscilatorio  $p(t)$ , puede ser aproximada por un  $K$ -ésimo polinomio de Taylor centrado en  $t_0$ :

$$p_K(t) = p(t_0) + \dot{p}(t_0)(t - t_0) + \cdots + p^K(t_0) \frac{(t - t_0)^K}{K!}, \quad t_0 - \frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + \frac{T}{2} \quad (2.4.4)$$

a partir de las derivadas de sus curvas del polinomio de Taylor, es posible obtener la matriz de transición de estados. Para  $\tau = t - t_0$  tenemos:

$$\begin{aligned} p_K(t) &= p(t_0) + \dot{p}(t_0)\tau + \ddot{p}(t_0)\frac{\tau^2}{2!} + \cdots + p^K(t_0)\frac{(\tau)^K}{K!} \\ \dot{p}_K(t) &= \dot{p}(t_0) + \ddot{p}(t_0)\tau + \cdots + p^K(t_0)\frac{(\tau)^{K-1}}{(K-1)!} \\ &\vdots \\ p_K^K(t) &= p^K(t_0) \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Note que la transición de estados esta dado por:

$$p_K(t) = \Phi_K(\tau)p_K(t_0) \quad (2.4.6)$$

donde  $p_K(t)$  es el vector de estado, y la matriz de transición de estados se compone de la siguiente

forma:

$$\Phi_K(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & \tau & \frac{\tau^2}{2!} & \cdots & \frac{\tau^K}{K!} \\ & 1 & \tau & \cdots & \frac{\tau^{(K-1)}}{(K-1)!} \\ & & 1 & \cdots & \frac{\tau^{(K-2)}}{(K-2)!} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4.7)$$

Establecido el grado del polinomio de Taylor, esta aproximación es más exacta cuando  $t \rightarrow t_0$  si  $p(t)$  es una función suave. El modelo truncado puede ser aplicado en cualquier instante de tiempo  $t_0$  con precisión suficiente, siempre que el intervalo de tiempo  $\tau$  sea corto. Esta condición se logra entre dos muestras de la señal ya que generalmente los muestreadores se aplican con periodos de muestreo muy cortos con respecto al periodo fundamental  $T_1 = \frac{1}{f_1}$ .

El modelo de la señal truncado es dado por:

$$s_K(t) = \text{Re}\{h^T p_K(t) e^{j2\pi f_1 t}\} = \text{Re}\{h^T r_K(t)\} \quad (2.4.8)$$

donde  $r(t)$  es el fasor rotado, y  $h^T$  extrae su primera componente, i.e. el vector  $h^T = [1 \underbrace{0 \cdots 0}_K]$ , con un 1 en su primer elemento, seguido de  $K$  ceros. Asumiendo  $t_0 = (n-1)\tau$  y  $t = n\tau$ , tenemos la transición de estados rotados discretos:

$$r_K(n) = \Phi_K(\tau) \psi_1 r_K(n-1) \quad (2.4.9)$$

donde  $\psi_1$  es el factor de fase  $\psi_1 = e^{j\theta_1}$ , correspondiente a la frecuencia fundamental en radianes ( $\theta_1 = j2\pi f_1 \tau = j2\pi/N$ ). Finalmente, obtenemos la ecuación del estado de transición discreto:

$$\begin{bmatrix} r_K(n) \\ \bar{r}_K(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \Phi_K(\tau) & 0 \\ 0 & \bar{\psi}_1 \Phi_K(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_K(n-1) \\ \bar{r}_K(n-1) \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

y el modelo truncado de la señal:

$$s_K(n) = \frac{1}{2} [h^T h^T] \begin{bmatrix} r_K(n) \\ \bar{r}_K(n) \end{bmatrix} \quad (2.4.11)$$

Esta ecuación muestra la dependencia instantánea del modelo de señal en el fasor oscilatorio. Las mejores estimaciones del vector de rotación serán proporcionadas cuando alcance el valor más pequeño del error de estimación de la señal, lo que ocurrirá cuando la señal de entrada esté contenida en el subespacio generado por el modelo de la señal. La matriz de transición de estados en (2.4.10) es compleja  $2(K + 1) \times 2(K + 1)$  y trabaja con los fasores rotados, así que para obtener los estimados del fasor oscilatorio, deben anti-rotarse.

Note que el modelo de espacio de estados en (2.4.10) contiene la información genética del desarrollo de la trayectoria compleja de una muestra a la siguiente. El modelo en estado estable de la señal ( $K = 0$ ) obligaría al fasor a moverse en círculos de una muestra a la siguiente. Con la matriz de transición de estados de Taylor (ec. (2.4.7)), se permite a los estimados del fasor moverse en trayectorias más flexibles, acotadas por el término de Taylor de mayor orden en el polinomio. En la siguiente sección, se muestra cómo es que los modelos truncados de la señal se incorporan dentro del controlador Lineal-Cuadrático. Este filtro con base en el controlador, descompone la señal de entrada en las componentes de un vector de estados

## 2.5. Controlador LQ

Durante el desarrollo de esta sección se introducirá el método propuesto, el controlador lineal-cuadrático (linear-quadratic: LQ). Considerando que el modelo de vector de estado es:

$$x(n) = \Phi x(n - 1) + \Gamma u(n - 1) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.5.1)$$

en el cual, la matriz de transición de estados es definida en (2.4.10). Por otro lado, el modelo de observación (o medición) es

$$s(n) = Hx(n) + w(n) \quad (2.5.2)$$

Asumimos que la señal es afectada por ruido blanco gaussiano  $w(n)$ ; para ambos modelos, tenemos  $H = (h^T h^T)$  y  $\Gamma$  es un vector de unos de  $2(K + 1) \times 1$ . Por otro lado, requerimos determinar una

matriz de ganancias  $K$  que nos permita encontrar una secuencia de control  $u_n = -Kx$  que lleve a (2.5.1) de la condición inicial  $x_i = x_0$  al estado final  $x_N = x_f$ , minimizando el funcional cuadrático

$$J_N = \frac{1}{2}x^T(n)P(n)x(n) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^N x^T(n)Q(n)x(n) + u^T(n)R(n)u(n) \quad (2.5.3)$$

donde  $N$  es finito,  $Q(n)$  es una matriz de dimensión  $2(K + 1) \times 2(K + 1)$  definida positiva (o semidefinida positiva), y  $R(n)$  es definida positiva; sin embargo, en esta aplicación  $R$  es un escalar  $r$ . El funcional (2.5.3) puede interpretarse como el costo total de la transición de  $x_i$  a  $x_N$  y, en particular, el término  $x^T(n)P(n)x(n)$  penaliza el error en alcanzar el estado final deseado. dicho funcional se puede obtener al resolver la *ecuación de Riccati* por medio de la ecuación (2.5.4) de forma algebraica.

$$\Phi^T P + P\Phi - P\Gamma R^{-1}\Gamma^T P + Q = 0 \quad (2.5.4)$$

donde  $P$  es una matriz hermítica definida positiva.

Dado el modelo del sistema a controlar, el problema de diseño en  $LQ$  es la determinación de  $K(n)$  a partir de una matriz  $Q$  y  $R$  dadas arbitrariamente; la matriz  $Q$  y el escalar  $r$  determinan la importancia relativa del error y el gasto de energía en (2.5.3). El proceso de diseño avanza hacia atrás en el tiempo desde  $n = N$ , generando las siguientes ecuaciones recursivas para  $n = N, N - 1, \dots, 2, 1, 0$ :

$$u^\circ(n) = -K(n)x(n) \quad (2.5.5)$$

$$K(n) = [\Gamma^T P(n+1)\Gamma + r]^{-1} \Gamma^T P(n+1)\Phi \quad (2.5.6)$$

$$P(n) = \Phi^T P(n+1) [\Phi - \Gamma K(n)] + Q \quad (2.5.7)$$

Note que la ecuación en diferencias (2.5.7) se resuelve *hacia atrás*, por lo que el proceso comienza conociendo el valor final de la matriz  $P$ , es decir,  $P(N) = Q$  y  $K(N) = 0$ . El costo óptimo de  $n$  a  $N$  es  $J^*(n, N) = \frac{1}{2}x^T(n)P(n)x(n)$ .

Para la aplicación del controlador es necesario estimar cada uno de los coeficientes del polinomio de Taylor, por lo que se necesita de un observador y debido a que requerimos que la estimación se

realice a partir de la medición actual en lugar de una medición anterior, se emplea el modelo de *observador actual*, el cual se describe mediante las ecuaciones:

- Predicción del estado estimado

$$\hat{x}^-(n) = \Phi \hat{x}(n+1) \quad (2.5.8)$$

- Corrección de la estimación

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + K(n) [s(n) - H\hat{x}^-(n)] \quad (2.5.9)$$

Donde  $K(n)$  es la ganancia del controlador Lineal-Cuadrático que minimiza el funcional (2.5.3), y forma parte del conjunto de ecuaciones (2.5.5), (2.5.6) y (2.5.7) las cuales representan el controlador LQ completo para el sistema discreto (2.5.1). La ecuación en diferencias (2.5.7) se conoce como la *ecuación matricial en diferencias de Riccati*.

El hecho de que se resuelva hacia atrás en el tiempo, le da a  $K(n)$  la peculiaridad de que los transitorios aparecen al final del intervalo  $[n, N]$ , en vez de al principio.

## 2.6. Solución Numérica

### 2.6.1. Señal de análisis

De acuerdo con la señal pasabanda (2.4.2) construimos una señal de prueba mediante las siguientes funciones de amplitud y fase:

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t) \quad (2.6.1)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t) \quad (2.6.2)$$

cuyos parámetros son:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0,1$ , y  $f_a = 5Hz$ , para la amplitud y  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0,1$ , y  $f_\varphi = 5Hz$ , para la fase. Otras características de la señal son  $\sigma_v^2 = 0,01$  y  $\sigma_w^2 = 10^{-4}$ , en otras palabras las varianzas de entrada y la medición de ruido, respectivamente.

Esto corresponde a una relación señal-ruido de 37 dB, equivalente a la producida por un convertidor análogo-digital de 6 bits.

### Modelo Taylor Orden Cero

Los resultados mostrados a continuación son aquellos obtenidos mediante el modelo truncado de orden cero,  $\Phi_0$ ; cuya estructura es basada en un polinomio de Taylor de orden cero el cual corresponde al modelo tradicional de amplitud y fase constante. Tal y como se visualiza en la figura 2.2, el modelo de orden cero nos otorga buenos estimados de la señal de interés, con un error en el orden de  $10^{-3}$  en estado estable, ya que durante el transitorio presenta un error más grande. Debido a la peculiaridad de la ganancia  $K(n)$  (mencionada en la sección anterior), el transitorio no se observa en la figura ya que este ocurre al final del proceso, sin embargo, puede ser apreciado en la figura 2.4.

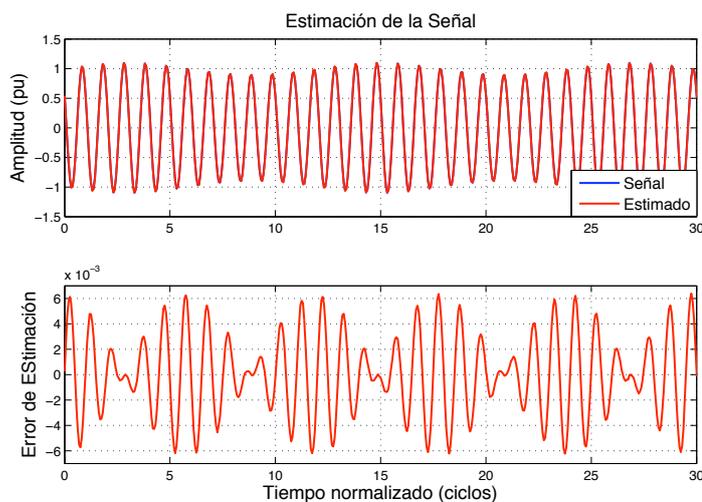


Figura 2.2. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero)

Las componentes ideales de amplitud y fase del fasor se muestran en la figura 2.3 siendo representadas por las líneas azules mientras que los estimados de éstas son representados por líneas rojas. Como puede observarse en dicha figura, existe un pequeño desfase de los estimados con respecto a las señales de amplitud y de fase, lo que indica la presencia de un retardo en la función de

transferencia del filtro. El transitorio puede ser reducido, aumentando el peso del control ( $r$ ), sin embargo, ésto ocasiona mayor error en los estimados ya que el peso del estado es disminuido. Además, los estimados presentan un comportamiento indeseado, es decir, pequeñas ondulaciones sobre si mismos similares a las infiltraciones del filtro de un ciclo de Fourier [11].

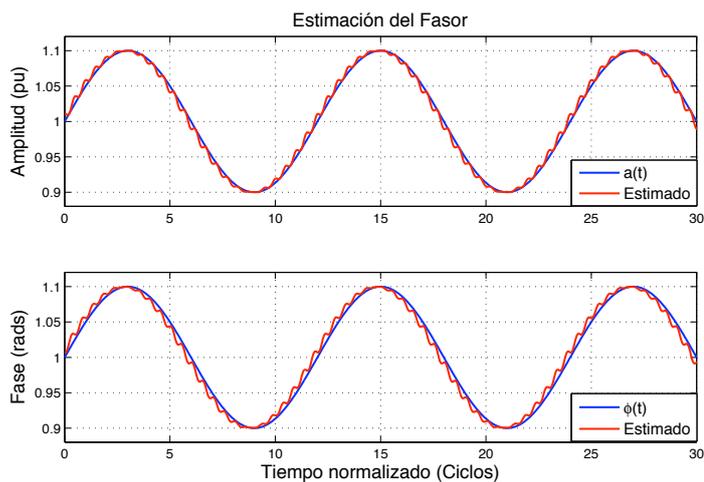


Figura 2.3. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero)

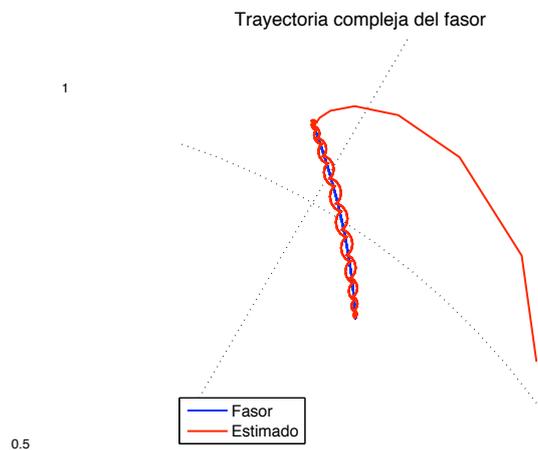


Figura 2.4. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden cero)

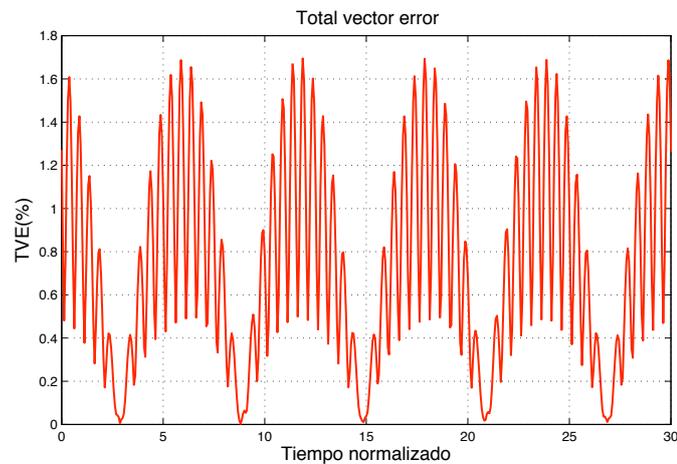


Figura 2.5. Error vectorial total (Modelo de orden cero)

Este comportamiento puede ser apreciado con mayor claridad en la figura 2.4, en la cual se visualiza la trayectoria compleja que siguen los estimados. Como se puede observar, el filtro LQ proporciona una buena estimación de la señal mediante el modelo de orden cero; sin embargo, los estimados fasoriales no son tan buenos como se desea. Además, usando el modelo de orden cero es imposible estimar la velocidad y aceleración del fasor. En la siguiente subsección los estimados obtenidos con el LQ usando el modelo de segundo orden de la señal son mostrados.

### Modelo Taylor Orden Dos

Los resultados a continuación mostrados, son aquellos obtenidos con el modelo de segundo orden,  $\Phi_2$ , para el cual la matriz de transición de estados es de  $6 \times 6$ . Tanto las características de la señal como la matriz  $Q$  permanecen semejantes a las mostradas en el primer caso. Es decir,  $\sigma_v^2 = 0,01$  y  $\sigma_w^2 = 10^{-4}$ , y la matriz final  $P(N) = Q$ , siendo  $Q$  simétrica. Como puede observarse en la figura 2.6 al incrementar el orden del modelo los estimados de la señal son mejorados ya que el efecto transitorio es reducido, lo que conlleva a un decremento en la magnitud del error. El incremento en el orden del modelo también mejora los estimados del fasor, los cuales ahora son más cercanos a las funciones de

amplitud y fase ideales; sin embargo, al igual que en el modelo de orden cero, los estimados siguen presentando un comportamiento indeseado de corrugación, como lo muestra la figura 2.7. A pesar de que los estimados son mejorados, aún existe un retardo en la función de transferencia del filtro lo que implica no obtener estimaciones instantáneas mediante este orden polinomial.

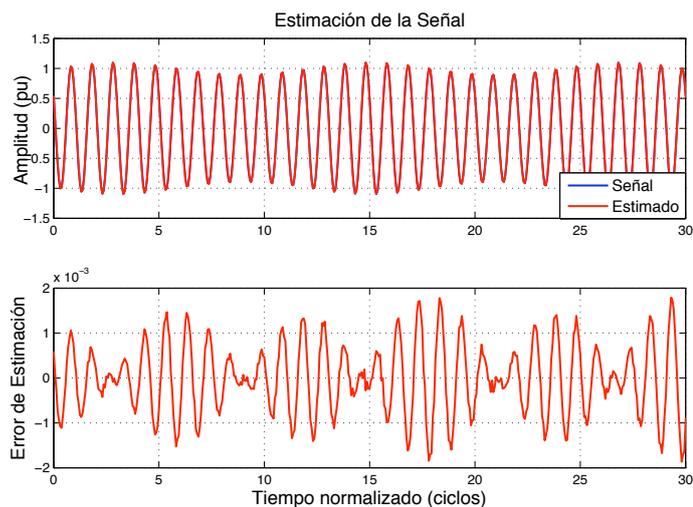


Figura 2.6. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos)

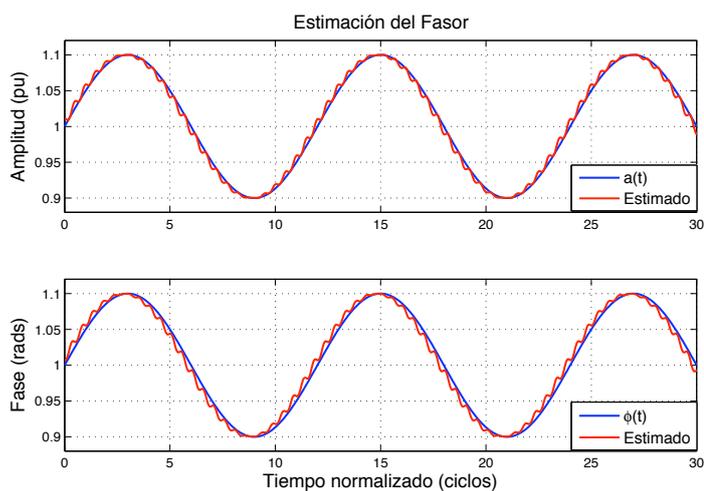


Figura 2.7. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden dos)

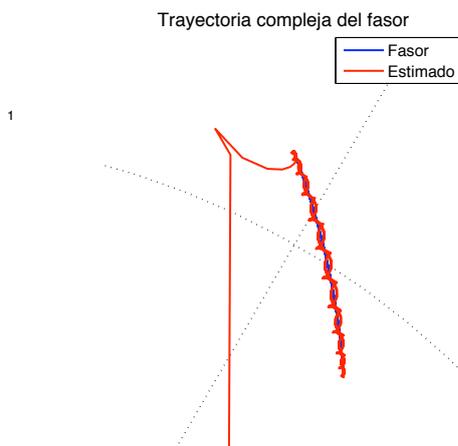


Figura 2.8. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos)

Los efectos de corrugación mencionados, son claramente visibles en la figura 2.8, la cual muestra la trayectoria compleja que sigue el fasor; por otro lado, dicha trayectoria es mas suave en comparación a la obtenida mediante el modelo de orden cero. Finalmente la figura 2.9 muestra el comportamiento del *TVE*, el cual es reducido un poco con respecto al caso anterior.

Naturalmente se espera que mediante el modelo de segundo orden sea posible estimar no solo el fasor sino también sus primeras dos derivadas, es decir, velocidad y aceleración. Pero a diferencia de los resultados obtenidos con el filtro de Kalman en [15], el filtro diseñado en base al controlador lineal-cuadrático no logra estimar dichas derivadas tal y como se puede observar en la figura 2.10.

Esto es debido a la estructura de las ecuaciones que conforman al controlador LQ, particularmente la ecuación (2.5.6), la cual computa el vector de ganancias óptimas. Según el vector de ganancias  $K = [1,2289 - 1,2238i \quad - 1,1049 + 1,0996i \quad 0,7975 - 0,7935i \quad 1,2289 + 1,2238i \quad - 1,1049 - 1,0996i \quad 0,7975 + 0,7935i]$ , podemos observar que los elementos del vector que influyen directamente sobre los estados  $x_2$  y  $x_3$  (así como en sus conjugados  $x_5$  y  $x_6$  respectivamente) son pequeños en magnitud, lo que afecta la posibilidad de estimar tanto la velocidad como la aceleración del fasor.

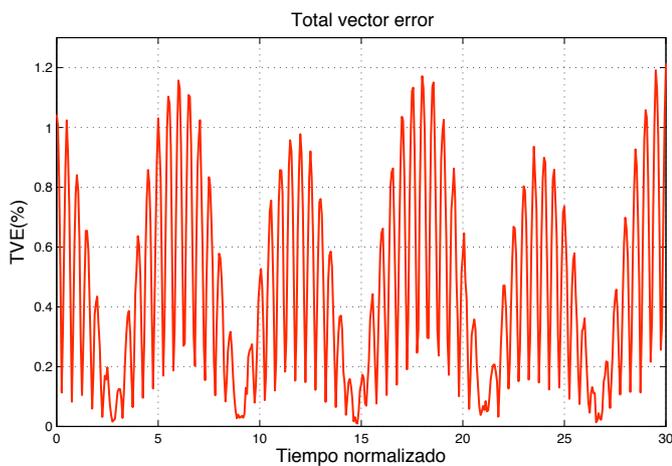


Figura 2.9. Error vectorial total (Modelo de orden dos)

La figura 2.11 muestra la evolución de las ganancias del controlador lineal-cuadrático para el modelo de segundo orden de la señal.

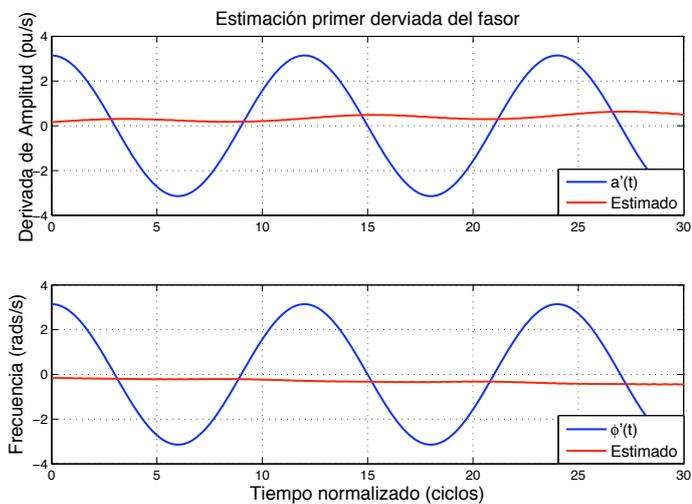


Figura 2.10. Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos con el modelo de segundo orden de la señal

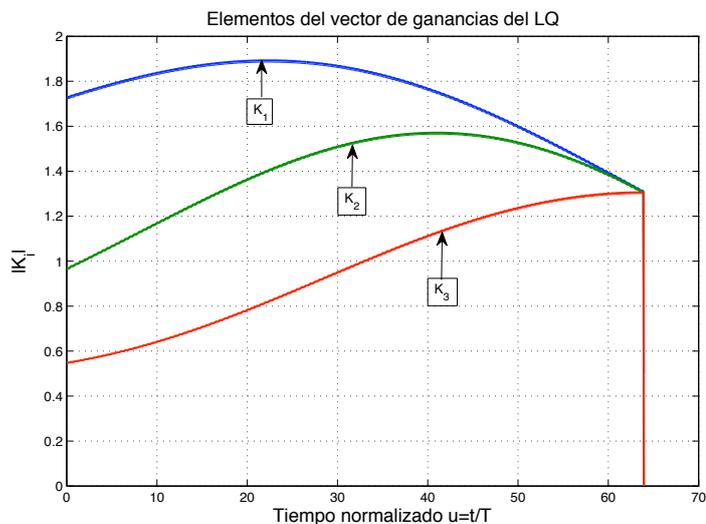


Figura 2.11. Magnitud de las ganancias del controlador lineal-cuadrático

### Análisis del Total Vector Error (TVE)

Analizaremos el comportamiento del TVE cuando la frecuencia de muestreo o el orden del polinomio de Taylor usado en el modelo de la señal, cambian. La figura 2.12 muestra la media cuadrática del TVE en porcentaje como una función de estos parámetros. El valor *rms* es definido como:

$$rms(TVE) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N TVE_n^2} \quad (2.6.3)$$

sobre las muestras en un número entero de ciclos de oscilación. Esto es una buena medición del nivel medio del error (dado en %). Como puede observarse en la figura, los niveles de error con el  $K = 0$  son, por poco, mayores a los niveles mostrados con el  $K = 2$ . Estos resultados indican que los altos niveles de error, son debidos principalmente a una distorsión de la fase (retardo), por lo que estos filtros no son capaces de formar ganancias planas de fase en la frecuencia fundamental.

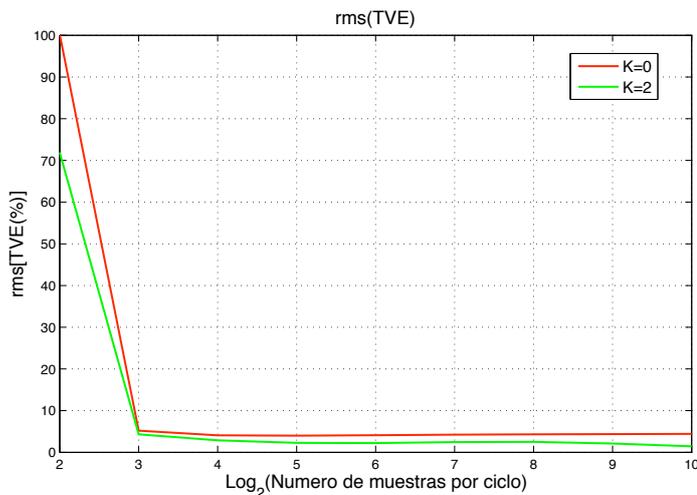


Figura 2.12. Media cuadrática del TVE( %) como una función de la frecuencia de muestreo ( $M = 2^m$  muestras por ciclo) y grado  $K$  del polinomio de Taylor

Esta insuficiencia para formar ganancias planas también se ve presente en el filtro de Fourier, el cual tiene un retraso constante. Como la frecuencia de muestreo aumenta, la forma de onda del error TVE se hace más fina. En el caso de  $K = 0$  las ganancias del LQ convergen rápidamente a valores constantes, sin embargo en el caso de  $K = 2$ , las ganancias presentan pequeños periodos en estado estable, tal y como lo muestra la figura 2.11.

## 2.7. Conclusiones

Mediante las matrices de transición de estados es posible representar las aproximaciones de Taylor de la envolvente de una oscilación de potencia como una combinación lineal del fasor oscilatorio y sus primeras  $K$  derivadas. El filtro diseñado mediante la inclusión de las ganancias del controlador óptimo lineal-cuadrático, es decir, el filtro *Taylor-LQ*; puede ser aplicado en señales de potencia bajo condiciones oscilatorias proporcionando buenos estimados del fasor. Sin embargo, este filtro no ofrece resultados tan determinantes como los observados en [15], ya que no proporciona estimaciones de las primeras  $K$  derivadas del fasor, que como se menciono anteriormente, se debe principalmente a que

las ganancias óptimas sean casi nulas. Este filtro presenta varias complicaciones en su diseño, ya que la asignación de la matriz de ponderación  $Q$  es arbitraria. Los métodos de diseño estándar parecían no proporcionar una matriz capaz de satisfacer las necesidades del modelo por lo que no se obtuvo un método específico de selección en base a éste. Por lo tanto, esto implicó una cuestión de diseño basada únicamente en las cualidades básicas: simétrica y definida positiva (o semidefinida).

Por otro lado, se extiende la posibilidad que el modelo truncado de la señal no satisfacía las cualidades del controlador, ya que sin importar el grado polinomial de las aproximaciones de Taylor los resultados no varían significativamente entre ellos. Para solucionar este problema y comprobar que el controlador lineal-cuadrático puede representar más ventajas que desventajas para esta metodología, se propone el diseño de un algoritmo que combine al controlador LQ con el filtro de Kalman lo que nos lleva a emplear el *controlador lineal-cuadrático-gaussiano (LQG)*, el cual se explica con más detalle en el siguiente capítulo.

# Capítulo 3

## Introducción al diseño del controlador LQG

### 3.1. Introducción

La formulación de la retroalimentación de estado del *controlador lineal-cuadrático* mostrada en el capítulo 2 tiene como inconveniente que la ley de control óptima:

$$u^*(n) = -Kx(n) \quad (3.1.1)$$

requiere que el proceso de medición del estado sea completo. Una posible aproximación para superar esta dificultad es estimar el estado basado solamente en la medición de la salida  $y$ , usando

$$u^*(n) = -K\hat{x}(n)$$

en lugar de 3.1.1, donde  $\hat{x}(n)$  denota el estimado del estado  $x(n)$ . En el capítulo previamente visto, los estimados del estado son obtenidos aplicando un observador actual, cuya estructura es representada por las ecuaciones (2.5.8) y (2.5.9). El observador requiere del vector de ganancias óptimo del controlador lineal-cuadrático  $K(n)$ , para proporcionar los estimados y entonces aplicar la ley de control haciendo posible la retroalimentación del modelo, sin embargo como ya se pudo apreciar los resultados no fueron los esperados. Por esta razón, a lo largo de este capítulo consideraremos el problema de construcción de estados por el filtro de Kalman, para luego incluir las ganancias de retroalimentación del LQ.

## 3.2. Propiedades del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman provee una solución al problema de estimación en el contexto de una evolución de los parámetros que se estiman de acuerdo con una ecuación de estado (2.4.10). Hay varias formas de derivar el filtro de Kalman. En este trabajo se optó por una variante basada en el observador de orden completo modificado, llamada *observador actual*, el cual permite una simplificación en las derivaciones y considera los efectos de los ruidos  $v(n)$  y  $w(n)$  por separado. La mejor *predicción* del estado que podemos hacer cuando hay ruido es el *valor esperado*.

$$\begin{aligned}\hat{x}^-(n) &= \Phi\hat{x}(n-1) + \Gamma u(n-1) + \Gamma v(n) \\ &= \Phi\hat{x}(n-1) + \Gamma u(n-1), \quad v(n) = 0.\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

Ésta suele denominarse la *estima a priori*, porque se realiza antes de medir la salida (sin corrección). Una vez disponible la salida en el instante  $n$ , terminamos de armar el observador actualizando la estima, obteniendo la *estima a posteriori*:

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + L(n) (s(n) - H\hat{x}^-(n))\tag{3.2.2}$$

En observadores determinísticos,  $L$  se selecciona para asignar la dinámica del error de estimación. En este caso, además, trataremos de minimizar el efecto de los ruidos.

Para modelar el problema de modo que el filtro Kalman puede ser utilizado, es necesario escribir una ecuación de estados para los parámetros que se calculan en la forma (3.2.1). El modelo requerido para la estimación de los parámetros se obtiene mediante aproximaciones de Taylor, lo que quiere decir que en lugar de usar el tradicional filtro de Kalman, se empleara el filtro *Taylor<sup>K</sup> – Kalman* visto en [15]. El algoritmo necesario para computar el filtro de Kalman así como el modelo truncado de la señal a estimar, fueron presentados en el capítulo 2.

### 3.3. Estimador LQG

Como bien lo mencionamos con anterioridad (Capítulo 2, sección 2.3), el control *Lineal-Cuadrático-Gaussiano* (LQG) es simplemente la interconexión del filtro óptimo de Kalman (estimador lineal cuadrático) con la ley de retroalimentación de estados del LQ. El control LQG puede ser aplicado tanto en sistemas lineales invariantes en el tiempo, así como en sistemas lineales variantes en el tiempo. Esta última característica permite el diseño de controladores lineales de retroalimentación para sistemas no lineales inciertos.

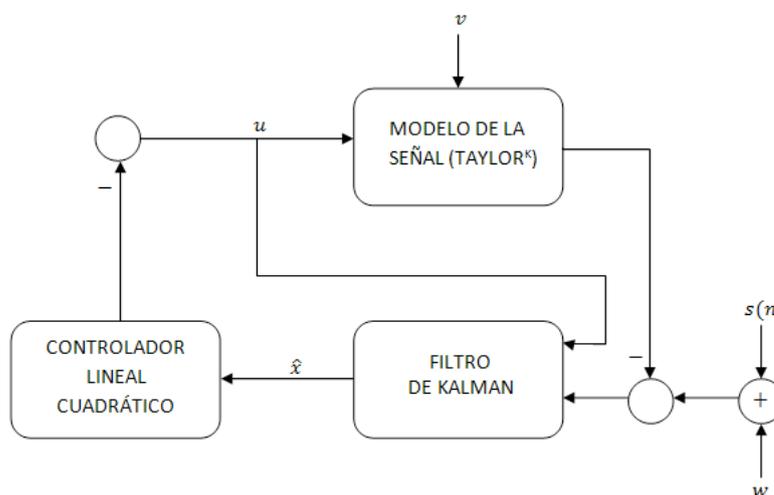


Figura 3.1. Diagrama de Bloques del Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano

Cualquier elección de la matriz de ganancias de Kalman  $L$  en (4.3.10) para la cual  $\Phi - LH$  es asintóticamente estable, hará converger  $\hat{x}$  a  $x$  a lo largo de las dinámicas del proceso dadas por (2.5.1). Sin embargo, en general la salida  $y$  es afectada por mediciones de ruido y las dinámicas del proceso también se ven afectadas por perturbaciones. En lugar de esto, un modelo más razonable para el proceso es:

$$x(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma u(n-1) + \Gamma v \quad y = Hx(n-1) + w, \quad (3.3.1)$$

donde  $v$  denota las perturbaciones y  $w$  la medición del ruido. En este caso necesitamos reescribir las

dinámicas de error de estimación para (3.3.1), las cuales son:

$$\begin{aligned}\dot{e} &= \Phi x(n) + \Gamma v - \Phi \hat{x}(n) - L(n) (s(n) - H \hat{x}(n)) \\ &= (\Phi - LH) e + \Gamma v + Lw\end{aligned}$$

ya que, generalmente el error de estimación de  $w$  y  $v$  no converge a cero, pero mediante la elección de la  $L$  correcta se mantienen pequeñas.

Por otro lado, la ecuación en diferencias de Riccati

$$P(n) = \Phi P(n-1) + P(n-1)\Phi^H + \Gamma \sigma_v^2 \Gamma^T - P(n-1)H^T r^{-1} H P(n-1) \quad (3.3.2)$$

es necesaria en el diseño del filtro de Kalman ya que resuelve el problema de estimación lineal-cuadrática, mientras que la ecuación:

$$P(n) = P(n+1)\Phi + \Phi^H P(n+1) - P(n+1)\Gamma r^{-1} \Gamma^T P(n+1) + Q \quad (3.3.3)$$

conocida de igual manera que (3.3.2) (ecuación en diferencias de Riccati), representa la solución al problema de obtención del vector de ganancias óptimas del controlador lineal-cuadrático LQ; además dicha ecuación tiene la peculiaridad de que es resuelta hacia atrás, tal y como es mencionado en 2.5.

Al observar ambas ecuaciones puede apreciarse una similitud entre ellas, lo que es denominado como *dualidad*. En otras palabras, se trata de dos problemas o esquemas diferentes que juntos resuelven el problema de control lineal-cuadrático de Gauss (LQG), por lo que este puede ser separado y resuelto de manera independiente bajo el principio de separación.

### 3.3.1. Principio de Separación

El principio de separación es la propiedad más elegante que puedan tener los sistemas lineales bien determinados. Esta propiedad se obtiene a partir de combinar un observador con un sistema de

control retroalimentado. Considerando:

$$x(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma u(n-1), \quad y = Hx(n-1) \quad (3.3.4)$$

$$\hat{x}(n) = (\Phi - LH) \hat{x}(n-1) + \Gamma u(n-1) + Ly, \quad u(n-1) = -K \hat{x}(n-1) \quad (3.3.5)$$

Para checar la estabilidad del sistema es mas conveniente considerar las dinámicas de error de estimación  $e = x - \hat{x}$  en lugar del estado de estimación  $\hat{x}$ . Por lo que reemplazamos las ecuaciones  $\hat{x}$  por  $x - e$ ,

$$x(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma u(n-1) = (\Phi - \Gamma K) x(n-1) + \Gamma K e, \quad y = Hx(n-1)$$

$$e(n) = (\Phi - LH) e(n-1), \quad u = -K(x - e)$$

En notación matricial tenemos.

$$\begin{bmatrix} x(n) \\ e(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi - \Gamma K & \Gamma K \\ 0 & \Phi - LH \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} H & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(n-1) \\ e(n-1) \end{bmatrix}$$

**Principio de Separación.** Los eigenvalores del sistema en lazo cerrado (3.3.4) son dados por las dinámicas del regulador de retroalimentación de estado  $\Phi - \Gamma K$  junto con las dinámicas del estimador de estado  $\Phi - LH$ . En caso de que ambas matrices sean asintóticamente estables, entonces también lo será (3.3.4) en lazo cerrado.

### 3.3.2. Acoplamiento entre LQ y el Filtro de Kalman

El *principio de separación* garantiza que tanto del controlador como el observador (Filtro de Kalman) pueden ser diseñados y calculados de forma independiente. En contraste con dicho principio y con la solución clásica del LQG la cual involucra un par de ecuaciones separadas de Riccati, en este trabajo se propone un acoplamiento de ambos problemas mediante la ecuación en diferencias de Riccati (3.3.2), substrayendo del algoritmo la ecuación (3.3.3).

La solución estabilizaste de Riccati, se emplea una sola vez por la inclusion de la matriz  $H$  en (3.3.2), la cual extrae la primera componente de la señal estimada (2.4.11) (que puede interpretarse

como  $\hat{y}$ ), de esta manera la ecuación de Riccati nos proporcionara la matriz  $P$  necesaria para calcular tanto  $L(n)$  como  $K(n)$  basados en el comportamiento de la señal de salida mediante la matriz  $H$ . A pesar de esto, las cualidades del algoritmo nos permiten considerar al filtro de Kalman en estado estacionario a partir de un instante  $n_1$ , es decir, una vez que sus ganancias han alcanzado su maxima magnitud constante; luego de estabilizar las ganancias de Kalman y obtener los estimados instantáneos, como lo visto en [13], se aplica la retroalimentación de estados del LQ mediante la ley de control (3.1.2), haciendo:

$$\tilde{\Phi} = (\Phi - K\Gamma)^T \quad (3.3.6)$$

El motivo por el cual  $\tilde{\Phi}$  es la transpuesta de la matriz de retroalimentación se debe a un problema numérico presentado en los cálculos llevados a cabo por MatLab para obtener las simulaciones requeridas, por lo que se optó por cambiar ligeramente la estructura de la matriz sin necesidad de cambiar alguno de sus términos.

Como bien lo mencionamos, las ganancias de Kalman  $L_i$ , son adoptadas una vez que convergen al valor máximo constante (estado estacionario) y es a partir de este instante en que la matriz de retroalimentación juega un papel importante. Las ganancias  $K_i$  del controlador LQ, son forzadas a converger a un valor constante en el instante  $n_1$ , es decir, mismo instante que Kalman.

Finalmente el proceso recursivo del LQG diseñado, se define por la siguiente secuencia para el  $n$ -ésimo ciclo:

1. Actualización del estado

**a)** Predicción del estado

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1) \quad (3.3.7)$$

**b)** Error de covarianza a priori

$$P^-(n) = \Phi P(n-1)\Phi^H + \Gamma\Gamma^T\sigma_v^2 \quad (3.3.8)$$

## 2. Actualización de la medición

### a) Ganancia de Kalman

$$L(n) = P^-(n)H^T (HP^-(n)H^T + \sigma_w^2)^{-1} \quad (3.3.9)$$

### b) Corrección del estado

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + L(n) (s(n) - H\hat{x}^-(n)) \quad (3.3.10)$$

### c) Error de covarianza a posteriori

$$P(n) = (I - L(n)H) P^-(n) \quad (3.3.11)$$

### d) Ganancia LQ

$$K(n) = [\Gamma^T P(n)\Gamma + r]^{-1} \Gamma^T P(n)\Phi \quad (3.3.12)$$

## 3. Retroalimentación del estado

### a) Ley de control

$$u(n) = -K(n)\hat{x}(n-1) \quad (3.3.13)$$

### b) Predicción del estado

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1) + \Gamma u(n) \quad (3.3.14)$$

### c) Corrección del estado

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + L(n) (s(n) - H\hat{x}^-(n)) \quad (3.3.15)$$

donde  $\sigma_v^2$  y  $\sigma_w^2$  son la varianza de la entrada y la medición de ruido, respectivamente; y  $r$  el peso del control. El proceso comienza con  $x(0) = 0$ , y  $P(0) = I \times 10^9$  para la matriz de error de covarianza inicial desconocida del estado. Note que una vez que las ganancias de Kalman son constantes, el proceso algorítmico se reduce al conjunto de ecuaciones (3.3.13)-(3.3.15).

### 3.4. Modelo de la Señal y LQG

El modelo de la señal del filtro *Taylor<sup>K</sup> – LQG* viene de la aproximación de Taylor del modelo de la señal pasabanda propuesta en [7] para sistemas con oscilaciones de potencia. En esta sección reescribimos las ecuaciones principales para establecer como fue implementada la notación en nuestro algoritmo y facilitar la lectura. Este material es mostrado en las secciones 2.4 y 2.5.

#### 3.4.1. Señal de análisis

De acuerdo con la señal pasabanda (2.4.2) construimos una señal de prueba mediante las siguientes funciones de amplitud y fase:

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t)$$

cuyos parámetros son:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0,1$ , y  $f_a = 5Hz$ , para la amplitud y  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0,1$ , y  $f_\varphi = 5Hz$ , para la fase. Otras características de la señal son  $\sigma_v^2 = 0,01$  y  $\sigma_w^2 = 10^{-4}$ , en otras palabras las varianzas de entrada y la medición de ruido, respectivamente. Esto corresponde a una relación señal-ruido de 37 dB, equivalente a la producida por un convertidor análogo-digital de 6 bits.

#### Modelo Taylor Orden Cero

Al igual que en el capítulo anterior, a continuación también se mostraran los resultados obtenidos mediante el modelo truncado de orden cero,  $\Phi_0$ . Para ilustrar mejor el comportamiento del estimador LQG empleando este modelo, se observa la figura 3.3, la cual muestra un comportamiento de estimación factible.

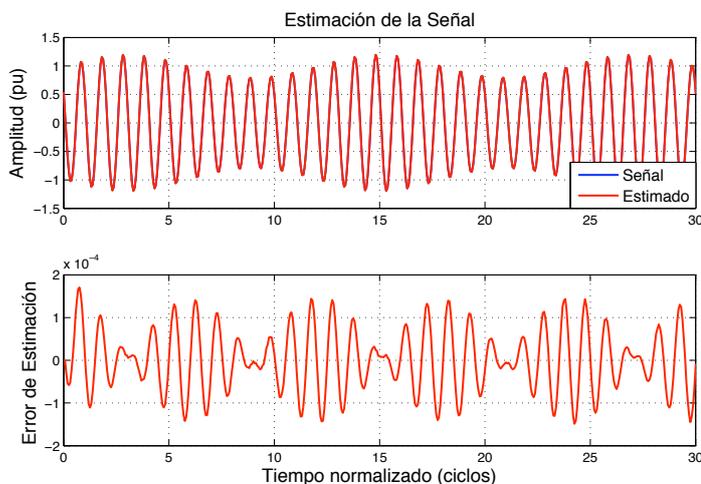


Figura 3.2. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero)

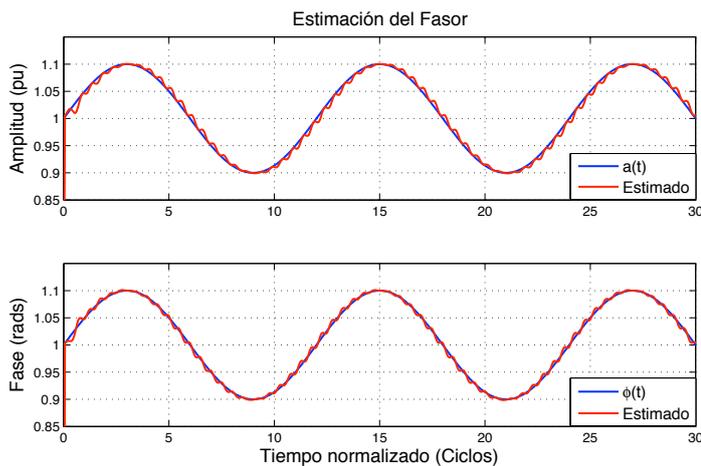


Figura 3.3. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero)

En comparación con los estimados obtenidos mediante el controlador lineal-cuadrático (capítulo 2), el LQG presenta una mejora considerable, ya que el error de estimación alcanza una magnitud en el orden de  $10^{-4}$ , viéndose claramente reducido en un factor de 10. Y si bien se sigue apreciando una magnitud de error mayor que a la otorgada por el filtro de Kalman, esto no deja de representar un buen resultado.

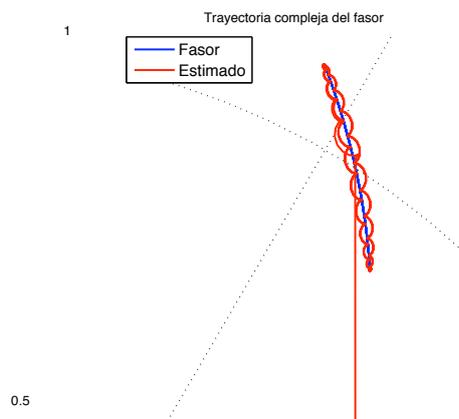


Figura 3.4. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden cero)

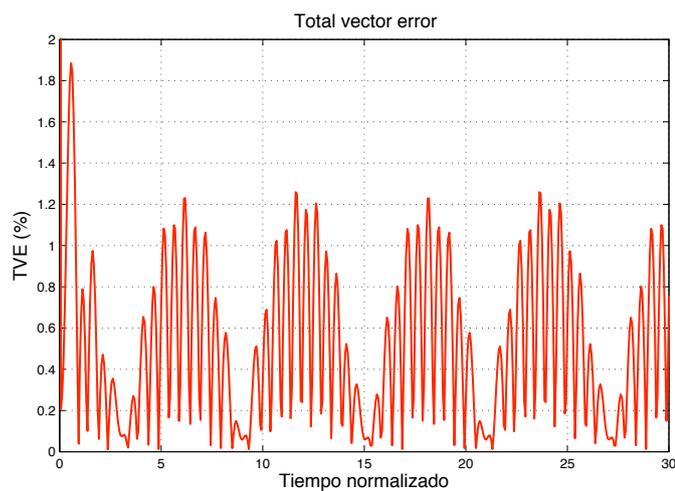


Figura 3.5. Error Vectorial Total (Modelo de orden cero)

A pesar de exhibir un mejor comportamiento que los estimados obtenidos mediante el controlador LQ, estos resultados muestran un pequeño desfaseamiento en las estimaciones de amplitud y de fase (figura 3.3). De igual manera al observar la figura, puede notarse la presencia de un retraso aproximadamente de un cuarto de ciclo en dichos estimados, indicando la presencia de un grupo de retardos

en la función de transferencia del filtro. Unido a esto, los estimados también exhiben un comportamiento indeseado de corrugación, que como ya lo mencionamos anteriormente, son similares a las infiltraciones del filtro de un ciclo de Fourier [11]; dicho comportamiento es claramente apreciado en la figura 3.4.

Las ganancias de Kalman son reales y convergen a 0,9903 después de los 2 primeros ciclos fundamentales por lo que la retroalimentación del estado es aplicado en ese instante. El error vectorial total (TVE) se visualiza en la figura 3.5, cuyo comportamiento es muy parecido al visto en [13]. Al analizar los resultados presentados podemos concluir que las estimaciones proporcionadas por el LQG mediante el modelo de orden cero son buenas, más no como las que esperamos obtener con el modelo de orden 2; además como detalle adicional y, como ya se explicó en el capítulo anterior, mediante el modelo de orden cero sera imposible obtener estimaciones tanto de la velocidad como de la aceleración del faser debido a que este modelo es insuficiente, por lo que esperamos lograrlo mediante el modelo de orden 2.

### **Modelo Taylor Orden Dos**

Una vez analizados las estimaciones del faser obtenidas con el modelo de orden cero, estudiaremos aquellos resultados obtenidos ahora mediante el modelo de segundo orden,  $\Phi_2$ . Los parámetros de la señal previamente presentada conservan los mismos valores para un análisis directo entre ambos modelos de Taylor.

Como era de esperarse, los estimados son mejorados ya que con este modelo la magnitud del error de estimación es reducida considerablemente, tal y como puede apreciarse en la figura 3.6. Además como lo mencionamos anteriormente, con el incremento del modelo también se mejoran los estimados del faser, los cuales ahora son más cercanos a las funciones de amplitud y fase ideales y, a diferencia de los estimados fasoriales del LQ, el efecto de corrugación presente parece desaparecer (3.7).

El adelanto-atraso de las estimaciones anteriores también desaparece, indicando que la respuesta

de fase de este filtro presenta un cero (o muy cercano a cero) plano alrededor de la frecuencia fundamental. Entonces, en este caso, los estimados no tienen distorsión de amplitud y fase, y por lo tanto son instantáneos. La desaparición del efecto de corrugación puede confirmarse en la figura 3.8. Con el modelo de segundo orden es posible obtener los estimados de las primeras derivadas del fasor, las cuales pueden ser vistas en 3.10, estas corresponden a las derivadas de amplitud y fase.

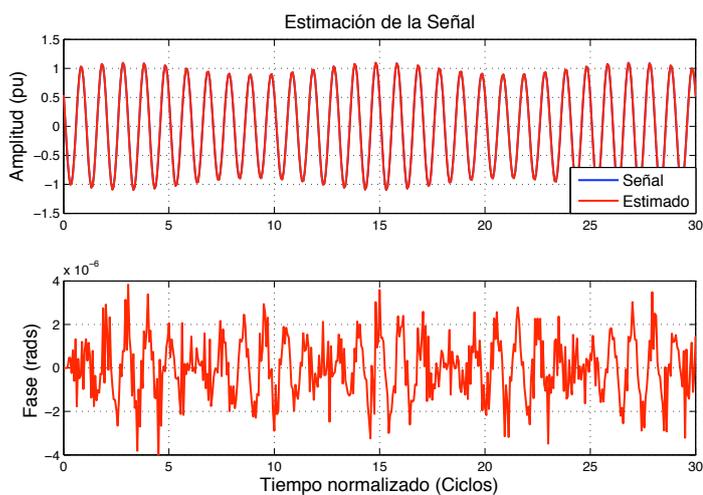


Figura 3.6. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos)

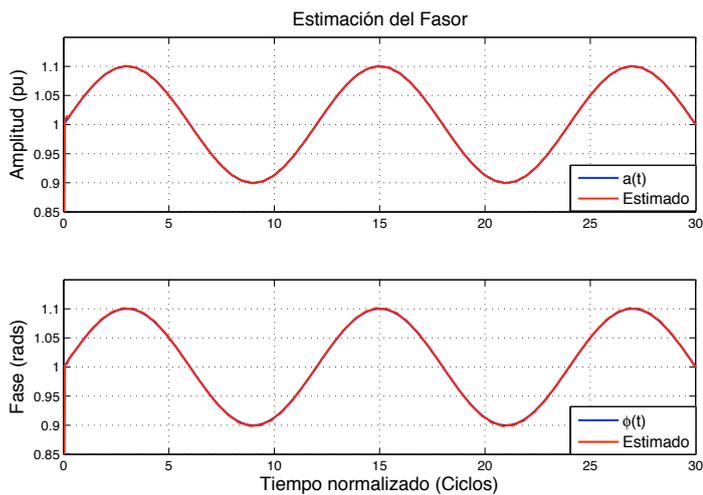


Figura 3.7. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden dos)

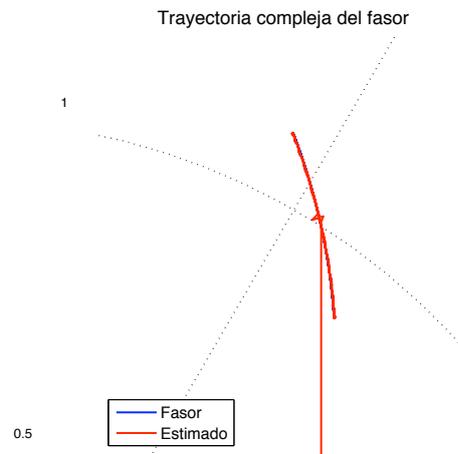


Figura 3.8. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos)

Dichas derivadas corresponden a la velocidad de oscilación de la amplitud y a la frecuencia de offset (respecto a la frecuencia fundamental), respectivamente. Las estimaciones de las derivadas no son suaves como los estimados del fasor, debido a su aparente comportamiento ondulatorio, y en un análisis comparativo con los resultados mostrados en [15], las estimaciones de las primeras derivadas proporcionadas por el LQG son de menor calidad.

Este efecto es más evidente en la figura 3.11, la cuál ilustra el error de los estimados normalizado por los valores pico. Debido al hecho de que las derivadas del fasor cruzan por cero, el TVE no puede ser aplicado. El vector de ganancias de Kalman de este ejemplo es tomado en su primer periodo de estado estacionario ocurrido al final del primer ciclo fundamental. Se observó que en los primeros cinco ciclos fundamentales, las estimaciones se comportan como los mostrados en las figuras anteriores, pero después de ese intervalo de tiempo, las ganancias se degradan adoptando un comportamiento muy similar al del modelo de orden cero. Por lo que el periodo de estado estacionario del vector ganancias de Kalman que puede verse en la figura 3.13 es congelado para obtener los resultados mostrados. El vector de ganancias para la primera mitad del vector de estado es el siguiente:  $L =$

$[1 - 2i, 121 - 562i, -1404 - 61117i]$ , donde la segunda mitad del vector es el conjugado de la primera. El vector de ganancias del controlador LQ, que también es congelando a partir del mismo instante  $n$  que el vector de Kalman, es el siguiente:  $K = [0,00 - 0,00i, 0,0028 - 0,0012i, 0,5444 - 0,0133i]$ .

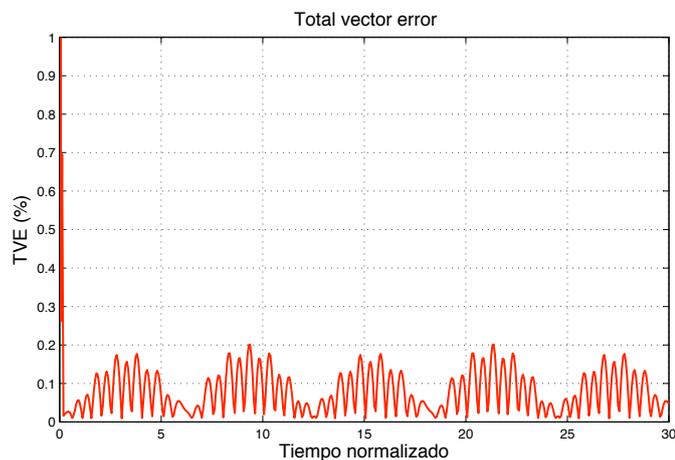


Figura 3.9. Error Vectorial Total (Modelo de orden dos)

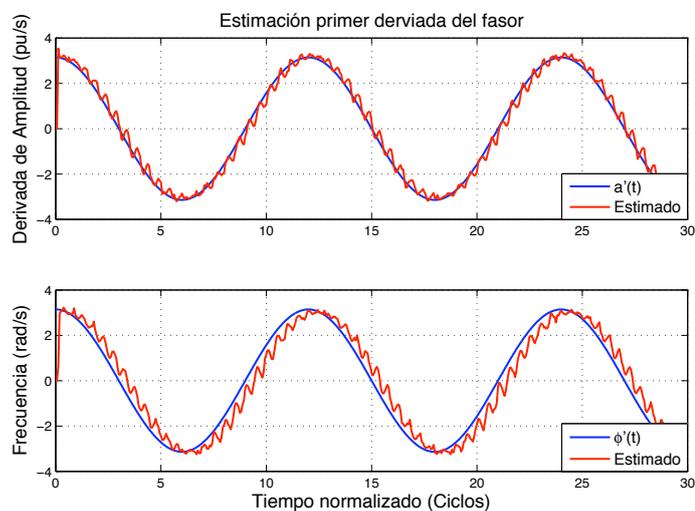


Figura 3.10. Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos con el modelo de segundo orden de la señal

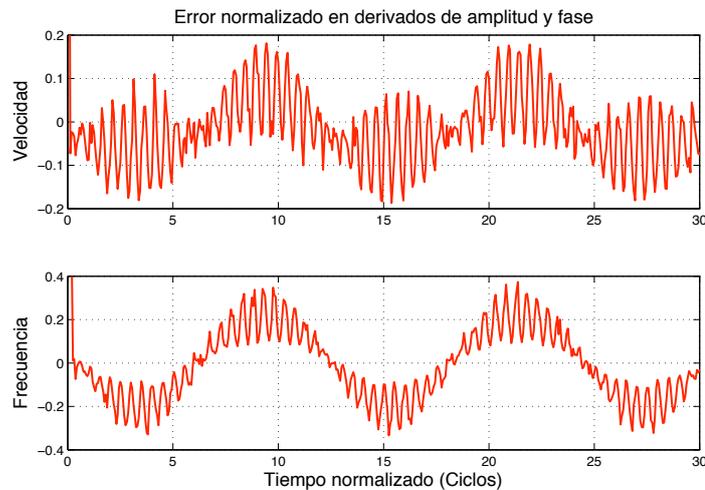


Figura 3.11. Error normalizado de velocidad y frecuencia obtenido con el modelo de orden dos

### Análisis del TVE

Al igual que en el capítulo anterior, también se analizara el comportamiento del error fasorial total cuando la frecuencia de muestreo o el orden del polinomio de Taylor cambian. El valor *rms* es definido en (2.6.3), mientras que la media cuadrática del TVE es apreciada en 3.12.

El comportamiento observado en la figura, indica que el elemento cuadrático de Taylor en el modelo de la señal es importante para reducir el error en los estimados del fasor. Tal y como ya se mencionó anteriormente, los resultados indican que los errores de estimación en los filtros para  $K = 0, 1$  son debido a que el modelo es insuficiente para estimar fluctuaciones generando una distorsión de fase, ocasionando que sean incapaces de formar ganancias planas de fase en la frecuencia fundamental, en contraste con los filtros para  $K \geq 2$ .

Las estimaciones proporcionadas por el LQG muestran que al aumentar la frecuencia de muestreo, la forma de onda del TVE se vuelve más continua y fina, lo que podemos corroborar en las figuras 2.9 y 3.9. Por otro lado, también se observó que las estimaciones de las derivadas se mejoran cuando el orden del polinomio de Taylor aumenta. Todos los observadores de Kalman utilizan las ganancias

alcanzadas en los periodos de estado estacionario determinado por un índice de muestreo que a su vez depende de la frecuencia de muestreo; sin embargo, casi es igual para cada uno de los tres diferentes órdenes.

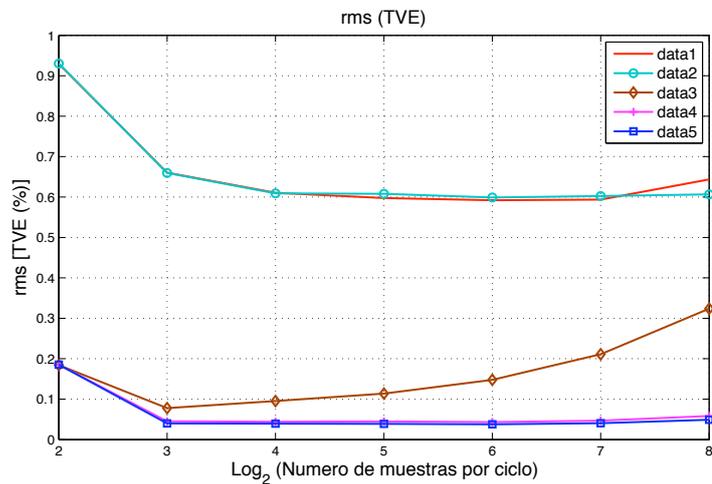


Figura 3.12. Media cuadrática del TVE( %) como una función de la frecuencia de muestreo ( $M = 2^m$  muestras por ciclo) y grado K del polinomio de Taylor

Al observar el comportamiento de las ganancias del controlador LQ mostradas en la figura 2.11 y analizarlas de forma paralela con las de la figura 3.13 (gráfico inferior), podemos darnos cuenta fácilmente que hay una gran mejora, esto es debido al acoplamiento entre el filtro de Kalman y el LQ, es decir, ya que la ecuación estabilizaste de Riccati modifica el vector de ganancias de ambos elementos.

Es perfectamente lógico que el comportamiento sea distinto. A pesar de que el vector de ganancias del controlador LQ es relativamente pequeño, es suficiente para afinar la trayectoria óptima impuesta por el filtro de Kalman.

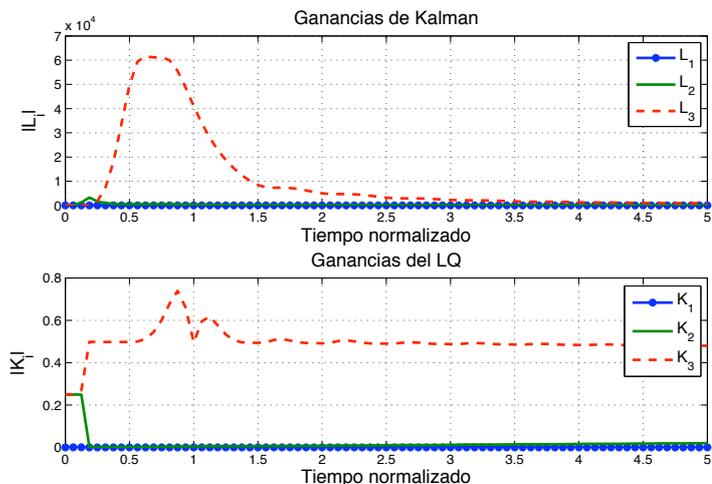


Figura 3.13. Magnitud de las ganancias de Kalman (gráfico superior) y Magnitud de las ganancias del controlador LQ (gráfico inferior)

### 3.5. Respuesta en Frecuencia Taylor-LQG

La respuesta en frecuencia del filtro Taylor-LQG puede ser obtenida a través de la transformada  $z$  de la ecuación de estado

$$\hat{x}(n) = \Phi \hat{x}(n-1) + L(n) (s(n) - H \Phi \hat{x}(n-1)) \quad (3.5.1)$$

con la ganancia de Kalman  $L$  en estado estable. La transformada  $z$  de (3.5.1) es

$$\hat{x}(z) = \tilde{\Phi} z^{-1} \hat{x}(z) + L (s(z) - H \tilde{\Phi} z^{-1} \hat{x}(z)) \quad (3.5.2)$$

y resolviendo para  $\hat{x}(z)$ , tenemos

$$\left[ I - \tilde{\Phi} z^{-1} + LH \tilde{\Phi} z^{-1} \right] \hat{x}(z) = L s(z) \quad (3.5.3)$$

Entonces la función de transferencia entre los estados del modelo de la señal y la señal de entrada está dada por

$$G(z) = \left[ I + (LH - I) \tilde{\Phi} z^{-1} \right]^{-1} L \quad (3.5.4)$$

y las respuestas en frecuencia de los estados del filtro se obtienen evaluando la función de transferencia en  $G(z)$  a  $z = e^{j\theta}$ , para  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

### 3.5.1. Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Cero

En la figura 3.14 muestra la respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^0 - LQG$  para diferentes frecuencias de muestreo. Note que las respuestas son asimétricas, lo que indica que pertenecen a filtros complejos. Esto puede apreciarse claramente cuando la señal de entrada corresponde a una señal de estado estable, la cual trabaja apropiadamente con una ganancia de magnitud 2 en la frecuencia fundamental positiva y una ganancia nula en la negativa. El comportamiento frecuencial exhibe una resonancia en la frecuencia nula, indicando la presencia de un polo cercano a  $z = 1$  en la función de transferencia. El polo se aproxima cada vez mas conforme la frecuencia de muestreo aumenta.

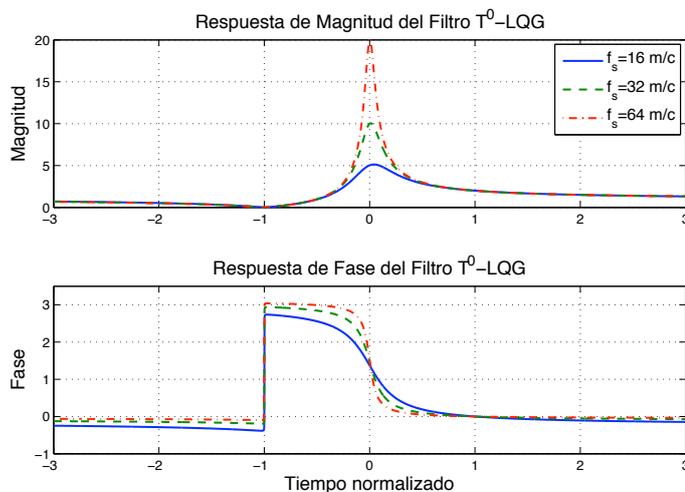


Figura 3.14. Respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^0 - LQG$  a diferentes frecuencias de muestreo

La respuesta de la fase no presenta magnitud nula y plana en la frecuencia fundamental, indicando un pequeño retardo en los estimados. La respuesta en magnitud del filtro  $Taylor^0 - LQG$  visto en la figura anterior resulta ser equivalente a la analizada en [17]. La resonancia en la frecuencia nula puede

ser resuelta añadiendo un cero en  $z = 1$ . Esto se obtiene al introducir una componente de corriente directa en el modelo rotatorio de la señal.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\psi}_1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.5.5)$$

Note que en la figura 3.15, la respuesta de magnitud ahora contiene una ganancia cero en la frecuencia fundamental; además el filtro pasabajas es obtenido de la variable del primer estado, es decir, la componente de directa. La respuesta de magnitud es mostrada en la figura 3.16. Al analizar esta ultima figura podemos darnos cuenta de que se trata de un buen filtro pasabajas debido a la ganancia plana en la frecuencia fundamental.

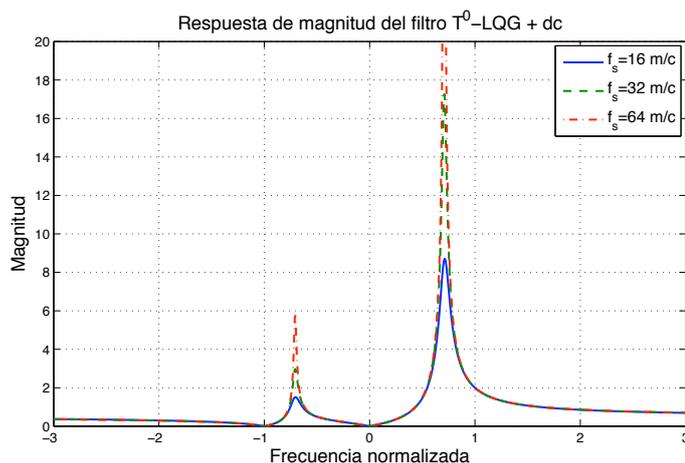


Figura 3.15. Respuesta de magnitud del filtro  $Taylor^0 - LQG - dc$  para diferentes frecuencias de muestreo

Como bien se menciona anteriormente tanto las estimaciones como su respectivo comportamiento frecuencial resultan ser equivalentes a los mostrados en [17], al menos para el modelo de orden cero.

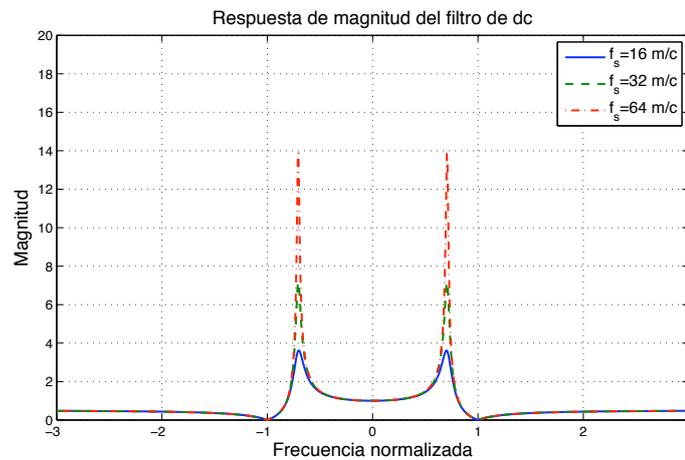


Figura 3.16. Respuesta de magnitud del filtro de corriente directa para diferentes frecuencias de muestreo

### 3.5.2. Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Dos

El filtro  $Taylor^2 - LQG$  provee no solo los estimados del fasor sino también de las dos primeras derivadas. La figura 3.17 muestra las respuestas de magnitud y fase del estimador del fasorial. Note que las ganancias alrededor de las frecuencias fundamentales (positiva y negativa). A diferencia del comportamiento frecuencial presentado por el filtro de Kalman, el filtro LQG no exhibe frecuencia de resonancia cercana a la frecuencia nula, sin embargo, tiene altas ganancias (mayores que uno) en los armónicos.

Por lo tanto el filtro trabaja solamente cuando el espectro de la señal esta confinado dentro de los intervalos de las ganancias planas. Una característica importante al igual que en el filtro de Kalman, es la respuesta de la fase ya que puede observarse un intervalo de fase casi nula alrededor de la frecuencia fundamental, lo que significa que los estimados del fasor proporcionados por el filtro, son cuasi-instantáneos, es decir, sin un retardo significativo cuando el espectro de la oscilación es la señal pasabanda asumida en nuestro modelo de señal

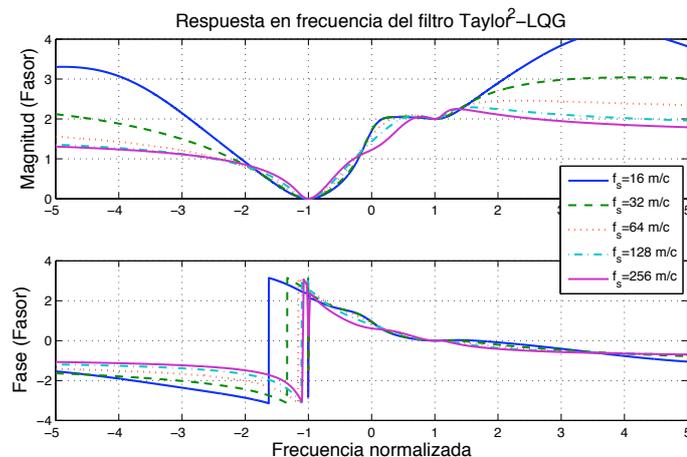


Figura 3.17. Respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^2 - LQG$  para diferentes frecuencias de muestreo

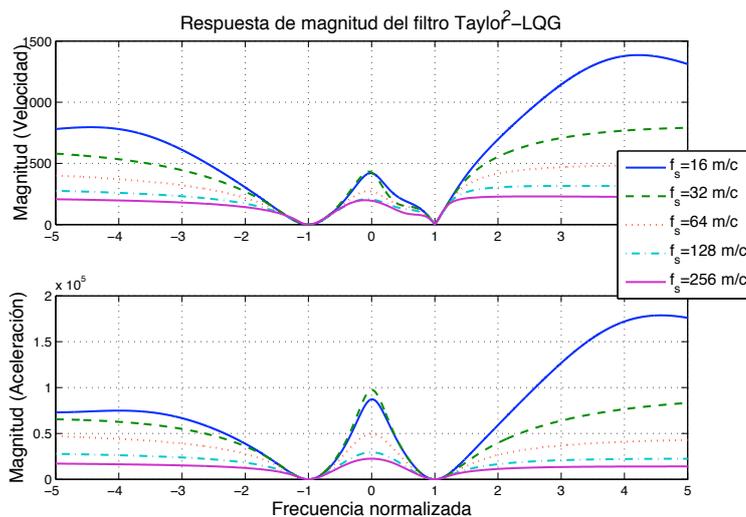


Figura 3.18. Respuesta de magnitud del primer y segundo diferenciador del filtro  $T^2 - LQG$

El cambio de fase abrupto en la frecuencia fundamental negativa es insignificante debido a la ganancia nula en ese intervalo. Por otro lado, la figura 3.18 muestra la respuesta de magnitud de la primera (gráfico superior) y la segunda (gráfico inferior) derivadas estimadas. Ambos filtros tienen ganancias nulas en la frecuencia fundamental negativa, lo que significa que rechazan esa componente

que provoca la corrugación en los estimados del modelo  $K = 0$  de la señal y como podemos percatarnos, dichos filtros siguen exhibiendo altas ganancias en los armónicos lo que quiere decir que son muy sensibles al ruido.

### 3.6. Filtro $Taylor^K - LQG - Fourier$

El filtro  $Taylor^2 - LQG$  otorga las ganancias ideales solamente alrededor de la frecuencia fundamental. Para obtener dichas ganancias alrededor de cada armónica, la matriz de transición de estados del modelo de la señal requiere ser extendida para todas las armónicas de interés. Por ejemplo si la señal es muestreada a  $N = 2^l$  muestras por periodo, y todas las armónicas son incluidas, entonces la matriz de transición es de la forma:

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} \Phi_K(\tau)\psi^0 & & & & \\ & \Phi_K(\tau)\psi^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \Phi_K(\tau)\psi^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.6.1)$$

La matriz extendida es  $(K + 1)N \times (K + 1)N$ ; sin embargo, el costo computacional para calcular la transición de un estado no es  $[(K + 1)N]^2$ , sino  $[(K + 1)^2]N/2$  debido a su diagonalidad, y la forma triangular superior de  $\Phi_K$ . Esta reducción es importante porque una vez que las ganancias de Kalman son estables, el algoritmo del LQG es ejecutado solo con las ecuaciones de predicción del estado (3.2.1) y la actualización del mismo (4.3.10). El vector  $H$  de la ecuación de salida (2.5.2), para  $K = 2$ , es de la forma

$$H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \underbrace{0 \ 0}_K & 1 & \underbrace{0 \ 0}_K & \cdots & 1 & \underbrace{0 \ 0}_K \end{bmatrix} \quad (3.6.2)$$

entonces requieres solo  $N$  productos para estimar la señal del vector de estado. Durante esta sección mostraremos que cuando son incluidas las armónicas de interés dentro del modelo, la respuesta en frecuencia del  $T^0 - LQG - F$  es la misma que la  $T^0 - K - F$  y la DFT, y que la respuesta de  $T^2 - LQG - F$  presenta ciertas mejoras en comparación a la  $T^2 - K - F$ .

### 3.6.1. Señal de Análisis

La evaluación de los filtros  $T^0 - LQG - F$  y  $T^2 - LQG - F$  se efectuara mediante una señal oscilatoria a la cual se le han agregado una  $3^a$  y  $5^a$  armónica en un cierto instante de tiempo. La señal es muestreada a  $N = 16$  muestras por ciclo; entonces el desempeño de los filtros en la estimación del fador será analizado.

$$\begin{aligned}
 s(t) &= a(t) \cos(2\pi f_1 t + \varphi(t)) \\
 &+ u(t) \left[ \frac{a(t)}{10} \cos(2\pi 3f_1 t + \varphi_3(t)) \right. \\
 &\left. + \frac{a(t)}{20} \cos(2\pi 5f_1 t + \varphi_5(t)) \right]
 \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

donde

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t < \frac{15}{f_1} \\ 1, & \text{para } t \geq \frac{15}{f_1} \end{cases} \tag{3.6.4}$$

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t) \tag{3.6.5}$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t) \tag{3.6.6}$$

$$\varphi_3(t) = 0,9\varphi(t) \tag{3.6.7}$$

$$\varphi_5(t) = 0,8\varphi(t) \tag{3.6.8}$$

cuyos parámetros de amplitud son:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 0,1$ , y  $f_a = 5Hz$  y  $\varphi_0 = 1$ ,  $\varphi_1 = 0,1$ , y  $f_\varphi = 5Hz$ , para la fase. Mientras que la varianza y la medición de ruido de la señal son  $\sigma_v^2 = 0,01$  y  $\sigma_w^2 = 10^{-4}$ , respectivamente.

### 3.6.2. $Taylor^0 - LQG - Fourier$

Para comprender mejor lo explicado anteriormente, mostraremos el filtro  $Taylor^0 - LQG - Fourier$  para una frecuencia de muestro de  $N = 16$  muestras por ciclo. La matriz de transición es una matriz diagonal con factores de fase rotatorios  $\{\psi^k, k = 0, 1, \dots, 15\}$  descendiendo por la diagonal.

Su respuesta en frecuencia es visualizada en la figura 3.19, la cual aparece junto con la respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^0 - Kalman - Fourier$ . Lo que se alcanza a apreciar es que ambos comportamientos frecuentases son exactamente iguales. Esto indica que  $Taylor^0 - LQG - Fourier$  permite el calculo tanto del  $T^0 - K - F$  así como de la DFT. También podemos darnos cuenta al checar la respuesta de fase que los estimados de  $Taylor^0 - LQG - Fourier$  tienen exactamente el mismo retardo que los estimados de  $T^0 - K - F$ .

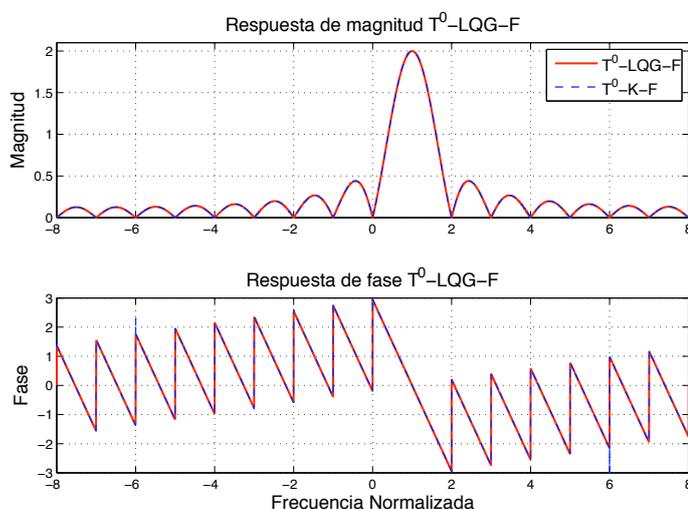


Figura 3.19. Respuesta en frecuencia del filtro  $T^0 - LQG - F$

### 3.6.3. $Taylor^2 - LQG - Fourier$

Una vez analizado el filtro  $Taylor^0 - LQG - Fourier$ , ahora veremos los resultados obtenidos al incrementar el orden del modelo, es decir, estudiaremos el filtro  $Taylor^2 - LQG - Fourier$ . La nueva matriz de transición, es una matriz diagonal cuyos elementos son la submatriz  $\Phi_2$  multiplicada por las factores de fase rotatorios  $\{\psi^k, k = 0, 1, \dots, 15\}$ . La figura 3.20 muestra la respuesta de magnitud y fase del filtro  $T^2 - LQG - F$  para las primeras armónicas. La figura mencionada también muestra la respuesta del filtro  $T^2 - K - F$  para apreciar de una manera mas clara el comportamiento frecuencial de ambos. Note, que el filtro  $T^2 - LQG - F$  tiene un comportamiento similar al  $T^2 - K - F$  ya que

se comportan como un filtro valla, es decir, un filtro que extrae una armónica oscilante rechazando el resto de las armónicas. Además los niveles de los lóbulos laterales cercanos al lóbulo principal son reducidos considerablemente; y si bien, el intervalo de plano de las ganancias en las bandas de armónicos se ve reducido en comparación con el filtro  $T^2 - K - F$ , sigue existiendo.

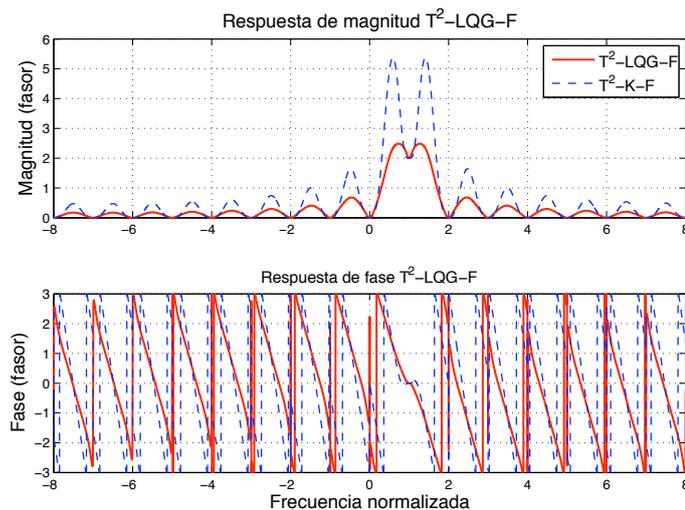


Figura 3.20. Respuesta en frecuencia del filtro  $T^2 - LQG - F$

Como podemos apreciar en 3.20 el filtro reduce las ganancias interarmónicas de Kalman y sus frecuencias de resonancia junto a la frecuencia fundamental. Note en la respuesta de la fase que la fase bajo la banda de paso es casi plana sobre cero, lo que indica un retardo demasiado pequeño en los estimados del fasor. Una de las ventajas mas sobresalientes de estos estimados es que son muy útiles en aplicaciones de control. Como ya lo explicamos anteriormente, con el modelo de segundo orden de Taylor también es posible obtener la primera y segunda derivada de la oscilación. 3.21 muestra las respuestas de magnitud de la primera y segunda derivada del fasor. Se puede notar que cercana a la frecuencia fundamental la respuesta de magnitud exhibe ganancias ideales en los diferenciadores.

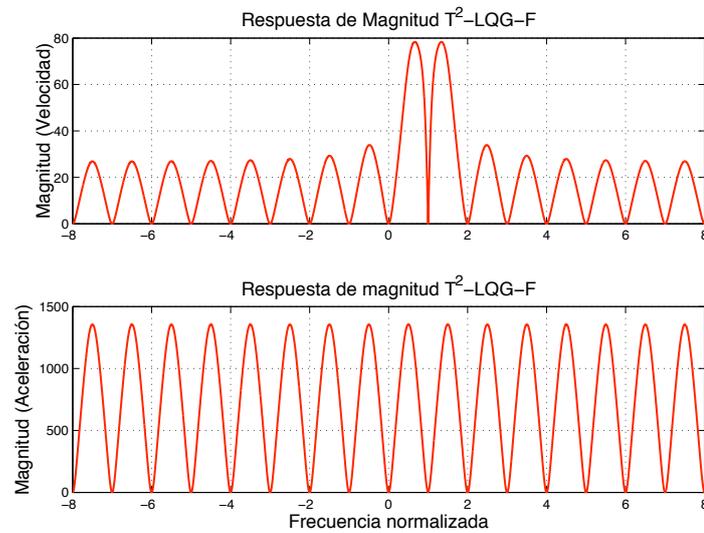


Figura 3.21. Respuesta de magnitud del primer y segundo derivador asociado con el filtro  $T^2 - LQG - F$

El desarrollo del filtro  $Taylor^K - LQG - Fourier$  para incluir una por una el conjunto completo de armónicas muestra que el subespacio del filtro  $Taylor^0 - LQG$ , cuya respuesta en frecuencia se visualiza en la figura 3.14, crece hasta llegar al subespacio completo de Fourier, con respuesta en frecuencia vista en 3.19. De la misma forma, el filtro  $Taylor^2 - LQG$  visto en la figura 3.17 con la de 3.20. Es por ello que es posible realizar la  $T^0 - K - F$  mediante la  $T^0 - LQG - F$ , y aumentando la ponderación del control (escalar  $r$ ), calcular el filtro  $T^2 - K - F$  con el filtro  $T^2 - LQG - F$ .

### 3.7. Conclusiones

Tras haber analizado los resultados presentados a lo largo de este capítulo, pudimos percatarnos de la clara mejora que existe en las estimaciones realizadas mediante el Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano; sin embargo, el controlador usado no es exactamente el planteado en la literatura ya que según las cuestiones de diseño que nos interesaban y los resultados esperados, se modificó la estructura de éste, fijando una dependencia entre observador (Kalman) y controlador (LQ) a través de

la ecuación en diferencias de Riccati (3.3.2); lo que nos llevo a suprimir una de las características del LQG convencional, me refiero al *principio de separación*. Las respuestas en frecuencia del filtro  $Taylor^K - LQG$  desarrollado en este capítulo indican que este filtro es muy sensible al ruido y su buen desempeño en la estimación del fasor dependerá de la concurrencia de la señal de entrada con el modelo de la señal. La inclusión del conjunto completo de armónicos dentro del modelo de la señal nos conduce al filtro  $Taylor^K - LQG - Fourier$ . Fue mostrado que el filtro  $Taylor^0 - LQG - Fourier$  tiene el mismo comportamiento en el análisis armónico que la  $Taylor^0 - Kalman - Fourier$  y por lo tanto que la DFT.

Por otro lado, el filtro  $Taylor^2 - LQG - Fourier$  tiene dos particularidades dependiendo de la importancia del estado retroalimentado, es decir, como ya lo mencionamos anteriormente al hacer bastante grande el peso del control, es posible obtener el filtro  $Taylor^2 - Kalman - Fourier$ , por el lado contrario (es decir, disminuyendo el peso del control), obtenemos los resultados mostrados. La inclusión del polinomio de Taylor de segundo orden en el modelo de la señal alcanza una respuesta plana en magnitud y fase alrededor de cada armónica produciendo armónicas oscilantes en las estimaciones del fasor con una clara disminución en la distorsión de magnitud y fase.

# Capítulo 4

## Diseño de ganancias mediante Formulación de Ackermann

### 4.1. Introducción

En los capítulos anteriores se utilizaron métodos de diseño basados en criterios de optimización, tales como el controlador lineal-cuadrático y el filtro de Kalman. El propósito es encontrar el vector de ganancias óptimas ( $L$  en el caso de Kalman y  $K$  para el LQ) que nos permitan realizar mejores estimaciones del fasor dinámico, apoyados en el modelo aproximado de Taylor de la señal pasabanda (2.4.1). Las ganancias son requeridas para asignar la dinámica del error de estimación y además minimizar los efectos de los ruidos. Básicamente la resolución de los vectores  $L(n)$  y  $K(n)$  se lleva a cabo tras solucionar la *ecuación en diferencias de Riccati* (3.3.2), lo que implica el uso de ciertas matrices iniciales como lo vimos anteriormente. Durante el desarrollo de este capítulo se explicará la propuesta de un método de diseño, distinto a los dos anteriores para la obtención del vector de ganancias. Dicho método se basa en la **fórmula de Ackermann**, la cual en forma general consiste en una asignación de polos; al aplicar esta metodología puede ser que estemos sacrificando el factor óptimo pero esperamos obtener cualidades que aceleren el tiempo de respuesta. La Fórmula de Ackermann es comúnmente usada en diseños de controladores y observadores debido a su sencillez y eficiencia.

## 4.2. Asignación de polos

En esta sección se presenta un método de diseño conocido comúnmente como *ubicación de polos* o *asignación de polos*. Se supone que todas las variables de estado son medibles y que están disponibles para su retroalimentación. El método de diseño comienza con la determinación de los polos en lazo cerrado deseados a partir de la respuesta transitoria y las especificaciones de la respuesta en frecuencia, tales como velocidad, razón de amortiguamiento, o ancho de banda, al igual que los requisitos en estado estacionario. Supóngase que se decide que los polos en lazo cerrado deseados estén en  $z = \mu_1, z = \mu_2, \dots, z = \mu_n$  (En la selección del periodo de muestreo, debe tenerse cuidado de que el sistema deseado no requiera de señales de control excesivamente grandes, de lo contrario ocurrirán fenómenos de saturación en el sistema). Seleccionando una matriz de ganancias apropiada para la realimentación del estado, es posible hacer que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre y cuando el sistema sea de estado completamente controlable.

### 4.2.1. Diseño mediante asignación de polos

A diferencia de los métodos del lugar geométrico de las raíces y Bode donde se busca ubicar únicamente los polos y ceros del controlador o compensador, en el enfoque actual de asignación de polos, es decir, en los sistemas de control de espacio de estados se ubica cada uno de los polos del sistema en lazo cerrado.

Con esto se puede asegurar que el sistema tenga la respuesta deseada y se evita la incertidumbre que ocurre en los métodos de control clásico como LGR y Bode, en donde después de diseñar el controlador o compensador hay que esperar que los polos y ceros de mayor orden se cancelen o queden lo suficientemente lejos de los polos dominantes para que no afecten al comportamiento. Sin embargo, hay un costo asociado con colocar todos los polos en lazo cerrado, porque hacerlo requiere tener buenas medidas de todas las variables de estado, o bien incluir un observador de estado en el

sistema. También existe un requisito por parte del sistema (modelo de Taylor) para que los polos en lazo cerrado se puedan situar en posiciones elegidas de forma arbitraria; la exigencia es que el sistema sea de estado completamente controlable. El ajuste de las ganancias de realimentación de estado se puede hacer de distintos modos. Retomando la ecuación (2.5.1), es decir:

$$x(n) = \Phi x(n-1) + \Gamma u(n-1)$$

Generamos la entrada de control  $u(n-1) = -\hat{K}x(n-1)$ . Los valores característicos deseados para de  $(\Phi - \Gamma\hat{K})$  son  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ; cualesquiera valores característicos complejos deben presentarse como pares conjugados. Si observamos que la ecuación característica del sistema original dado por la ecuación (2.5.1) es

$$|zI - \Phi| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

puede definirse una matriz de transformación  $\mathbf{T}x$  como sigue

$$Tx = MW$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

que es de rango completo, y donde

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

La ecuación  $|zI - \Phi + \Gamma\hat{K}|$  se convierte en

$$\begin{aligned}
|zI - \Phi + \Gamma\hat{K}| &= z \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & z + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} \\
&= z^n + (a_1 + \delta_1)z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})z + a_n + \delta_n = 0 \tag{4.2.3}
\end{aligned}$$

mientras que la ecuación característica con los valores deseados, esta dada por

$$\begin{aligned}
\alpha(z) = |zI - \Phi + \Gamma\hat{K}| &= (z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n) \\
&= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \tag{4.2.4}
\end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de potencias iguales de  $z$  correspondientes a las ecuaciones (4.2.3) y (4.2.4), obtenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_1 + \delta_1 \\
\alpha_2 &= a_2 + \delta_2 \\
&\vdots \\
\alpha_n &= a_n + \delta_n
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \vdots & \alpha_{n-1} - a_{n-1} & \vdots & \cdots & \vdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T x^{-1} \tag{4.2.5}$$

donde las  $a_i$  y las  $\alpha_i$  son coeficientes conocidos, y  $T\mathbf{x}$  es una matriz conocida.

### 4.3. Fórmula de Ackermann

Otro de los métodos usados en la asignación de polos es la **Fórmula de Ackermann**. Considerando el modelo completamente observable definido como:

$$x(n) = \Phi x(n-1) \quad (4.3.1)$$

$$y(n) = Hx(n) + w(n) \quad (4.3.2)$$

Para el diseño del observador (nuestro caso), determinamos la matriz  $\hat{L}$  de tal forma que su última ecuación característica sea idéntica a la ecuación característica deseada para el vector de error; ésta es:

$$\begin{aligned} |zI - \Phi + \hat{L}H| &= (z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdots (z - \mu_n) \\ &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

donde  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  son los valores característicos de la matriz  $(\Phi - \hat{L}H)$ . Para sistemas físicos los valores característicos complejos siempre aparecen en pares complejos conjugados. En el análisis presente, supondremos que todos los valores característicos complejos se presentan en pares complejos conjugados, de tal forma que los coeficientes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de la ecuación característica son reales. La fórmula de Ackermann también es usada para la determinación de la ganancia de retroalimentación del estado  $\hat{K}$ , de tal forma que la ecuación característica es:

$$|zI - \Phi + \Gamma\hat{K}|$$

la cual sería la misma que la ecuación característica (4.3.3), por lo que es claro que estos dos problemas son uno dual (es decir, matemáticamente la determinación de  $\hat{L}$  es igual a la determinación de la matriz de ganancia  $\hat{K}$  del problema de ubicación de polos). Por lo tanto es posible utilizar los resultados obtenidos en [21] con respecto a la determinación de la matriz  $\hat{L}$ . La matriz deseada  $\hat{K}$  se obtiene mediante Ackermann de la siguiente forma:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \cdots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}^{-1} \phi(\Phi) \quad (4.3.4)$$

Por lo que la matriz deseada  $\hat{L}$ , puede obtenerse de la manera similar a la ecuación (4.3.4), como sigue:

$$\hat{L} = \phi(\Phi) \begin{bmatrix} H \\ H\Phi \\ \vdots \\ H\Phi^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

$$\phi(\Phi) = \Phi^n + \alpha_1 \Phi^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \Phi + \alpha_n I$$

donde  $\phi(\Phi)$  es el polinomio característico deseado de la dinámica del error. La expresión  $\hat{L}$  dada por la ecuación (4.3.5) se trata de la formula de Ackermann para la determinación de la matriz de ganancia de realimentación del observador  $\hat{L}$ .

### 4.3.1. Criterio de selección de polos

En los sistemas de control continuos, la ubicación de polos y ceros en el plano  $s$  es muy importante, ya que mediante tal procedimiento podemos predecir la dinámica del sistema. De igual manera, determinar la ubicación de polos y ceros en el plano  $z$  cobra gran importancia en los sistemas discretos. Las variables complejas  $s$  y  $z$  quedan relacionadas mediante la siguiente ecuación:

$$z = e^{T_s s} = e^{\tau s} \quad (4.3.6)$$

Esto significa que un polo en el plano  $s$  puede quedar localizado en el plano  $z$  mediante la transformación  $z = e^{\tau s}$ . Dado que la variable compleja  $s$  está formada por una parte real  $\sigma$  y una parte imaginaria  $\omega$ , tenemos

$$s = \sigma + j\omega$$

entonces

$$z = e^{\tau(\sigma + j\omega)} = e^{\tau\sigma} e^{j\tau\omega} = e^{\tau\sigma} e^{j(\tau\omega + 2\pi n)}$$

Dado que  $\sigma$  es negativo en el semiplano izquierdo del plano  $s$ , el semiplano izquierdo del plano  $s$  corresponde a

$$|z| = e^{\tau\sigma} < 1$$

El eje  $j\omega$  en el plano  $s$  corresponde  $|z| = 1$ . Esto es, el eje imaginario en el plano  $s$  (la línea  $\sigma = 0$ ) corresponde al círculo unitario en el plano  $z$ , y el interior del círculo unitario corresponde al semiplano izquierdo del plano  $s$ . Debe observarse que el comportamiento dinámico del sistema de control en tiempo discreto depende del periodo de muestreo  $T_s$  o  $\tau$ . La localización de los polos y los ceros en el plano  $z$ , depende del periodo de muestreo  $\tau$ . En otras palabras un cambio en el periodo de muestreo  $\tau$  modifica las localizaciones de los polos y de los ceros en el plano  $z$  y hace que el comportamiento de la respuesta se modifique. Para el diseño del vector de polos deseados consideramos dos factores importantes: *factor de amortiguamiento relativo constante*  $\zeta$  y *frecuencia natural*  $\omega_n$ ; de acuerdo al esquema del plano  $z$  visto en la figura 4.1, seleccionamos los factores de diseño para ubicar los polos.

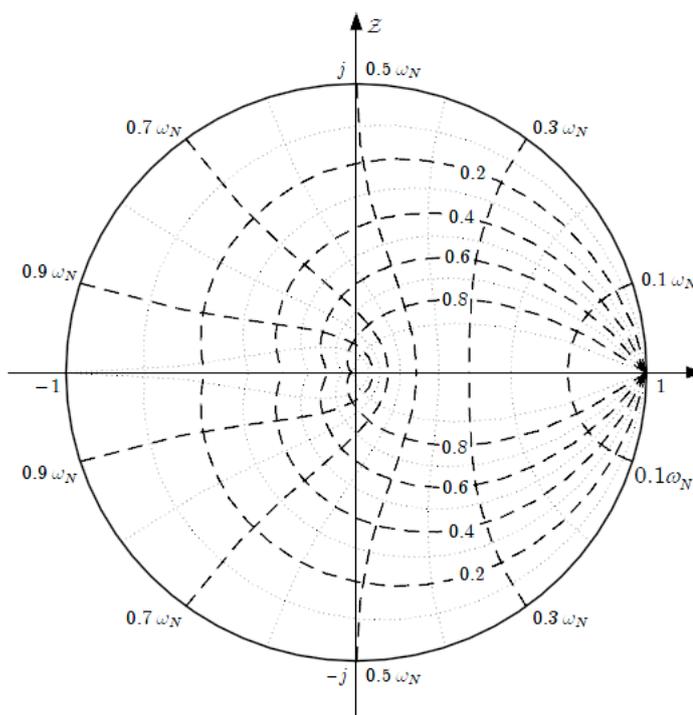


Figura 4.1. Líneas de frecuencia natural y amortiguamiento constantes

Como bien ya lo mencionamos anteriormente las líneas de parámetros constantes de la figura anterior se pueden usar para elegir la localización de los polos en lazo cerrado de un sistema de control para asegurar un determinado comportamiento. Cuando se usan periodos de muestreo muy pequeños (es lo habitual), los polos se van a encontrar siempre muy próximos de la unidad (que corresponde al origen de coordenadas del plano  $s$ ), además al cambiar el periodo de muestreo, automáticamente cambia la anchura de la franja primaria (Esto se aprecia en la figura 4.2. Note también que, si la frecuencia de muestreo es por lo menos dos veces mayor que la componente de frecuencia más alta involucrada en el sistema, entonces cada uno de los puntos del círculo unitario del plano  $z$  representarán frecuencias entre  $-\frac{1}{2}\omega_s$  y  $\frac{1}{2}\omega_s$ ).

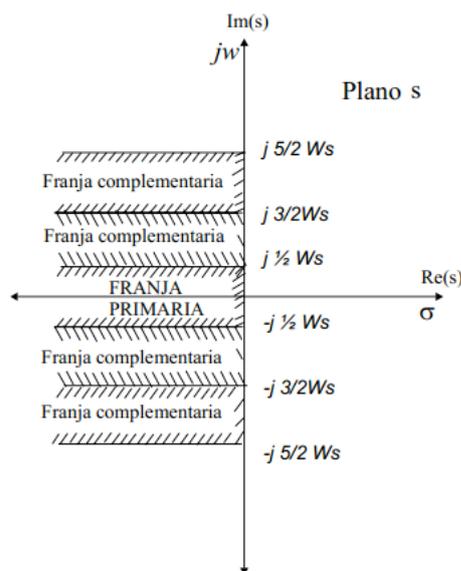


Figura 4.2. Franjas periódicas en el plano  $s$

Por tanto la posición relativa del polo, en el plano complejo  $s$ , cambia respecto a dicha franja, de esta manera cambia la posición del polo en el plano complejo  $z$ . Sin embargo, el ángulo que forma respecto al origen no cambia con el periodo de muestreo. Por ese motivo los polos y ceros en el plano complejo  $z$  se mueven o cambian de posición con diferentes periodos de muestreo según trayectorias

de amortiguamiento constante. Para el mapeo entre los planos  $s$  y  $z$  se pueden usar las siguientes relaciones:

$$s = -\sigma \pm j\omega_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (4.3.7)$$

$$|z| = e^{-\tau\zeta\omega_n} \implies \ln|z| = -\tau\zeta\omega_n = -\tau\sigma \quad (4.3.8)$$

$$\angle z = \tau\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \text{ rads} = \tau\omega_d \text{ rads} \quad (4.3.9)$$

### 4.3.2. Observador Actual del Estado

El tema del *observador actual* ya se ha manejado bastante en los capítulos anteriores por lo que en este apartado solo se expondrá de manera muy superficial. El observador como en los casos anteriormente, es utilizado para estimar el estado requerido para la estimación de la señal pasabanda. Para manera de recordar la estructura se presentan nuevamente las ecuaciones del observador junto con un diagrama de bloques:

$$\hat{x}^-(n) = \Phi\hat{x}(n-1) + \Gamma u(n-1)$$

Que suele denominarse *estimación a priori*; mientras que la *estimación a posteriori* es definida como:

$$\hat{x}(n) = \hat{x}^-(n) + \hat{L}(s(n) - H\hat{x}^-(n))$$

donde  $\hat{L}$  es la ganancia del observador obtenida mediante la fórmula de Ackermann vista anteriormente.

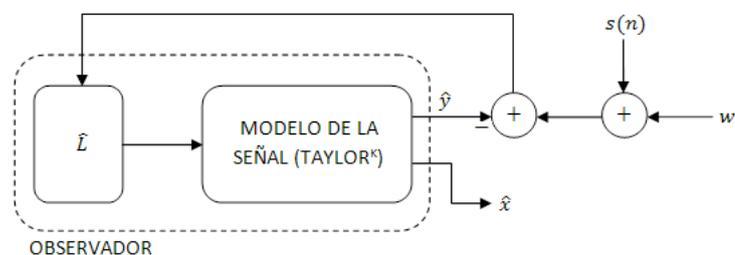


Figura 4.3. Diagrama de Bloques de la Estimación de la Señal mediante un Observador Actual

## 4.4. Solución Numérica

### 4.4.1. Señal de análisis

Para obtener resultados numéricos y analizar el comportamiento de los estimados, dicho análisis se efectuara sobre la misma señal pasabanda (2.4.2) vista en los capítulos anteriores, así mismo las especificaciones de cada elemento de la señal, es decir:

$$a(t) = a_0 + a_1 \sin(2\pi f_a t)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1 \sin(2\pi f_\varphi t)$$

conservan las características ya establecidas con anterioridad.

#### Modelo Taylor Orden Cero

Como ya es propio del avance que lleva este documento, a continuación se muestran los resultados obtenidos mediante el modelo de orden cero del polinomio de Taylor,  $\Phi_0$ .

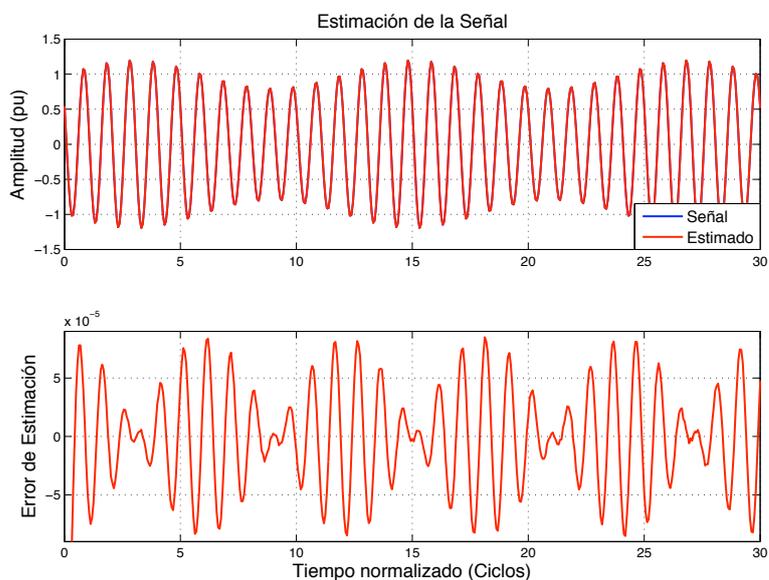


Figura 4.4. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero)

Al igual que los resultados anteriores, estos se obtuvieron al muestrear la señal a  $N_1 = 16m/c$ . Lo que difiere, obviamente es el método de diseño del vector de ganancias, para este caso se diseñó ubicando los polos mediante los siguientes parámetros: un coeficiente de amortiguamiento de  $\zeta = 0,5$  y una frecuencia natural de  $\omega_n = 0,3$ , lo que genera los siguientes polos

$$s = -\sigma \pm \omega_d j = -452,3893 \pm 783,5613j$$

$$z = e^{\tau s} = 0,4276 \pm 0,4548j$$

con un periodo de muestreo de  $\tau = T_1/N_1$ . La ubicación puede verificarse en la figura 4.5. Por lo que respecta a los estimados obtenidos mediante este modelo, puede observarse que resultan presentar un mejor comportamiento que los obtenidos en los capítulos anteriores ya que presentan un error de estimación en el orden de  $10^{-5}$ . Una region que podemos establecer para obtener buenas estimaciones es comprendida por la relación:  $0,5 \leq \zeta < 0,6$  y  $0,3(\frac{\omega_s}{2}) \leq \omega_n \leq 0,4(\frac{\omega_s}{2})$ . Hay que aclarar que con esto no se quiere decir que cualquier valor fuera de estas regiones ocasionaría no obtener estimaciones, sin embargo, dentro de esta region se producen magnitudes de error de estimación de menor magnitud.

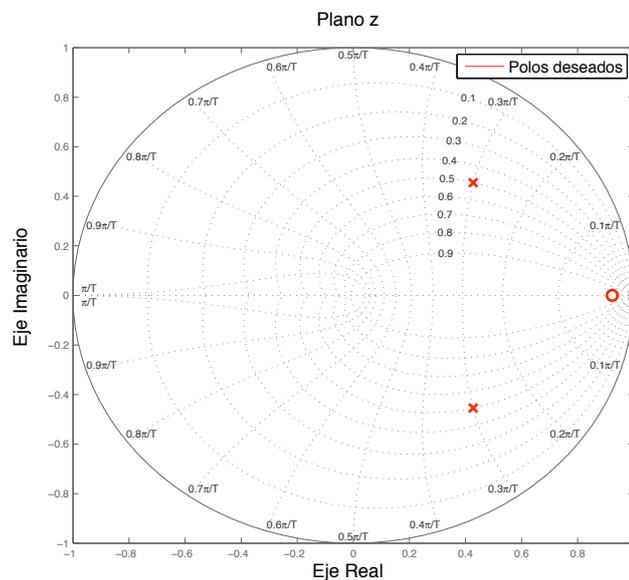


Figura 4.5. Ubicación de los polos deseados en el plano z

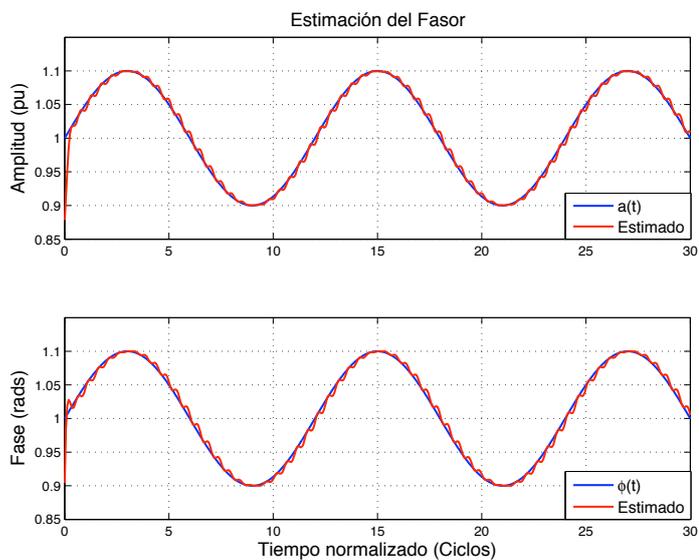


Figura 4.6. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero)

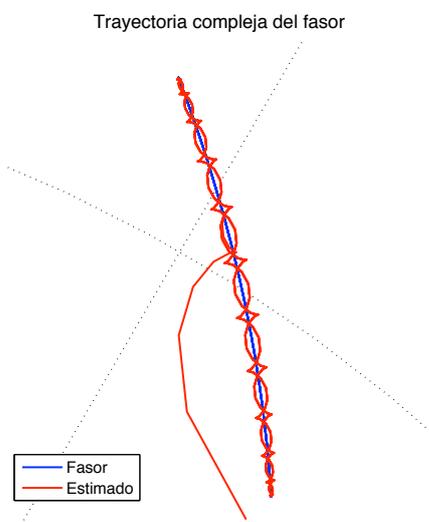


Figura 4.7. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden cero)

Se ve claramente que las estimaciones realizadas a través del modelo de orden cero son en general

buenas. Esto resulta ser particularmente bueno ya que el algoritmo destinado para la obtención del estimado, comprende solamente un observador actual cuyo vector de ganancias es obtenido mediante la fórmula de Ackermann, en otras palabras su diseño es relativamente sencillo. A pesar de esto, los estimados para este modelo, y como en los casos anteriores, presentan el mismo comportamiento indeseado de corrugación así como un desfase en los estimados de amplitud y de fase; esto es claramente visible en las figuras 4.7 y 4.6 respectivamente. Aunado a esto también existe la presencia de un retardo en la función de transferencia del filtro. Es fácil notar que las ganancias debido a la forma en la que se calculan, no presentan dinamismo y siempre se comportan de manera constante a diferencia de los casos anteriormente vistos; dichas ganancias exhiben para los polos seleccionados una magnitud de 1,276. Siguiendo el procedimiento habitual mostrado en este documento, la figura 4.8 muestra el error vectorial total (TVE). En general las estimaciones proporcionadas por este método para este orden, son buenas, a decir verdad, las estimaciones usando el modelo de orden cero proporcionadas con cualquiera de los métodos vistos resultan ser buenas, la diferencia cae cuando se emplean modelos de mayor orden, como es el caso del orden dos que analizaremos a continuación.

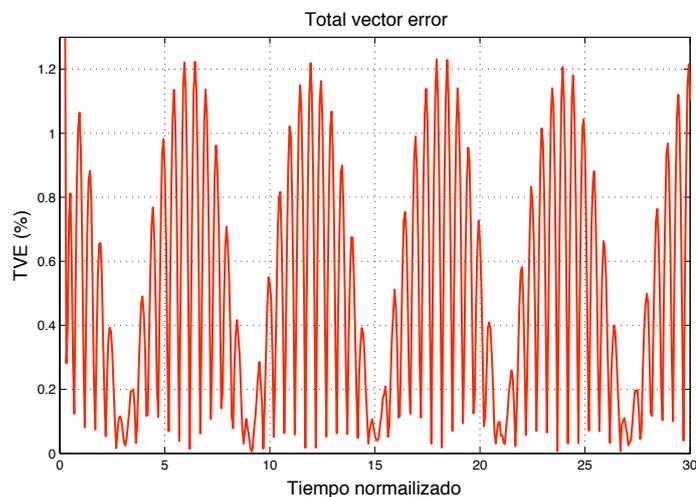


Figura 4.8. Error vectorial total (Modelo de orden cero)

## Modelo Taylor Orden Dos

Como ya se sabe con seguridad, al elevar el grado del polinomio las estimaciones mejoran considerablemente debido a que el numero de componentes en el modelo de la señal es mayor. Al usar un modelo de orden dos, es decir,  $\Phi_2$  se presentan cambios de suma importancia tanto en el comportamiento frecuencial del filtro así como en las estimaciones del fasor. Veamos los siguientes resultados para corroborar lo dicho.

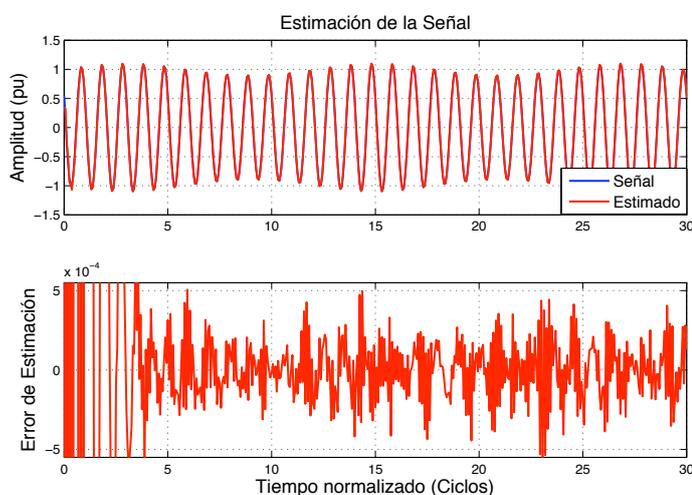


Figura 4.9. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos)

Para el caso de este modelo, los parámetros de diseño asignados para conocer los polos deseados fueron:  $(\zeta_1 = 0,5, \omega_{n_1} = 0,18)$ ,  $(\zeta_2 = 0,6, \omega_{n_2} = 0,2)$  y  $(\zeta_3 = 0,36, \omega_{n_3} = 0,15)$ , lo que da lugar al siguiente vector de polos deseados:

$$z_d = [(0,6651 \pm 0,3545j), (0,6011 \pm 0,3304j), (0,7637 \pm 0,3592j)]$$

con un periodo de muestreo  $\tau$ . En este caso, el comportamiento de los estimados presenta un error mayor que en el caso de orden cero y los estimados obtenidos mediante el filtro de Kalman, sin embargo como lo mencionamos al principio del capítulo, se pensó en obtener una respuesta rápida haciendo aun lado la precisión (Mas adelante visto). El error cobra tal magnitud debido al estado

transitorio inicial de los estimados, lo que podemos ver en las estimaciones de amplitud y fase del fasor en la figura 4.11. Para el caso de  $16m/c$  al manipular los parámetros de diseño se debe tener en cuenta que al menos un polo debe ubicarse en la frecuencia natural  $\omega_n = 0,15$  ya que aseguramos un decaimiento exponencial en el comportamiento oscilatorio de los polos.

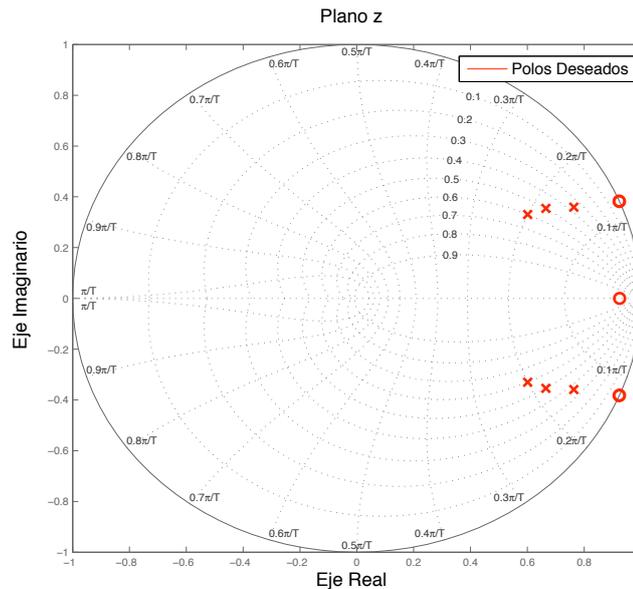


Figura 4.10. Ubicación de los polos deseados en el plano z

Pese al error mostrado por los estimados, en ellos es ausente el comportamiento de corrugación, lo que se aprecia en la figura 4.12. Otro aspecto importante que resalta al observar los resultados es que los estimados ya no presentan un desfase respecto a las señales de amplitud y fase ideales, indicando que la respuesta en frecuencia de fase de este filtro presenta una ganancia nula plana alrededor de la frecuencia fundamental, por lo que los estimados son instantáneos. Como lo vimos en [15] y en el capítulo 3 el modelo de orden dos además de proporcionarnos los estimados del fasor también nos da los estimados de las dos primeras derivadas de este.

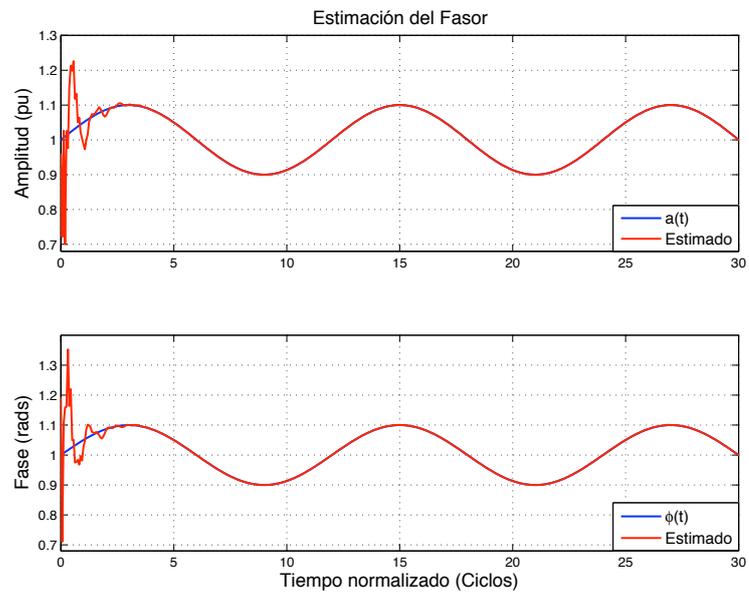


Figura 4.11. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden dos)

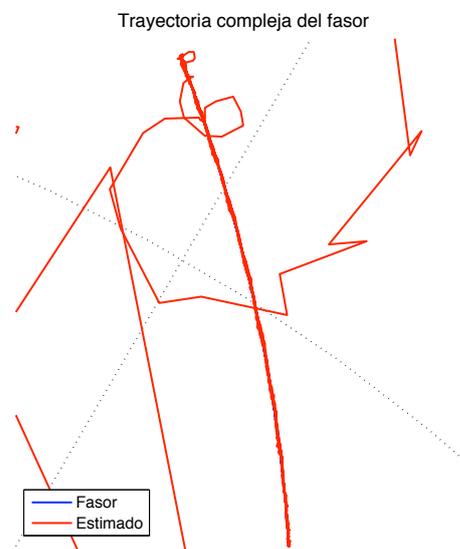


Figura 4.12. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden dos)

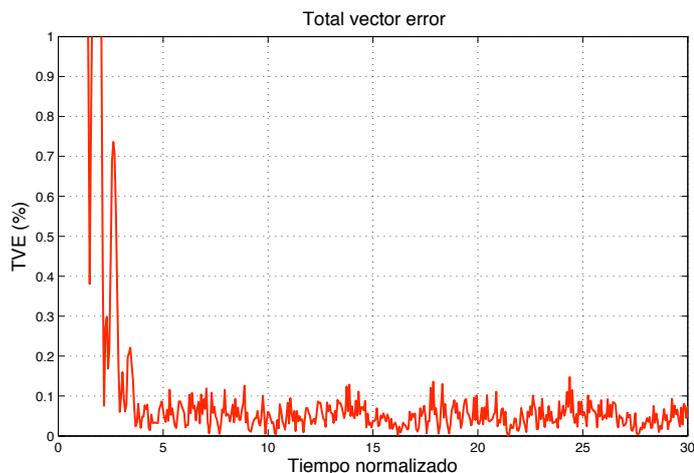


Figura 4.13. Error vectorial total (Modelo de orden dos)

La figura 4.13 muestra el comportamiento del error vectorial total (TVE). Como ya lo mencionamos con anterioridad, las derivadas representan la velocidad de oscilación de la amplitud y la frecuencia de offset (respecto a la frecuencia fundamental), respectivamente. Una característica de las estimaciones de las derivadas es que no son suaves a diferencia de los estimados del fasor.

El error es del mismo orden que el observado en las estimaciones proporcionadas por el filtro de Kalman y por el LQG, lo que es causado debido a su estado ondulatorio. La figura 4.14 ilustra el comportamiento de dichas derivadas mientras que la figura 4.15 el error de estimación normalizado. En el caso del vector de ganancias de Ackermann para el modelo de orden dos, es constante en  $\hat{L} = [1 - 1i, 187 - 328i, 5853 - 25635i]$ .

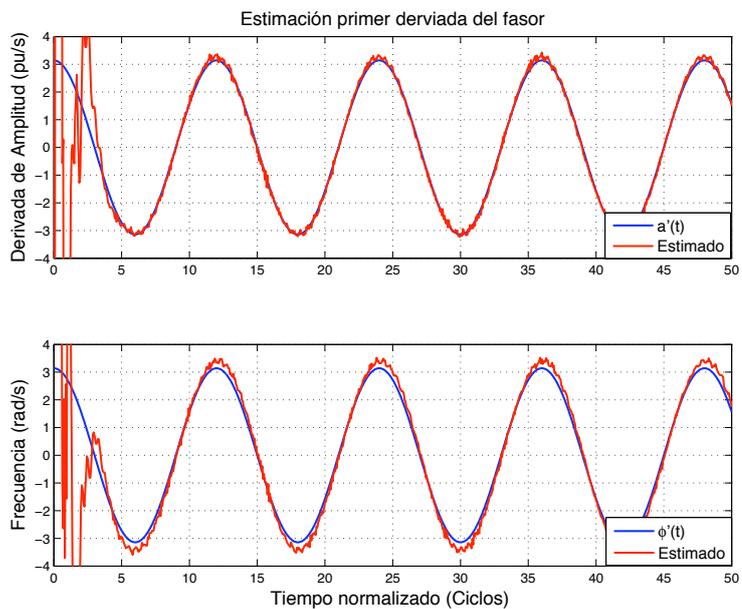


Figura 4.14. Estimados de velocidad y frecuencia obtenidos con el modelo de segundo orden de la señal

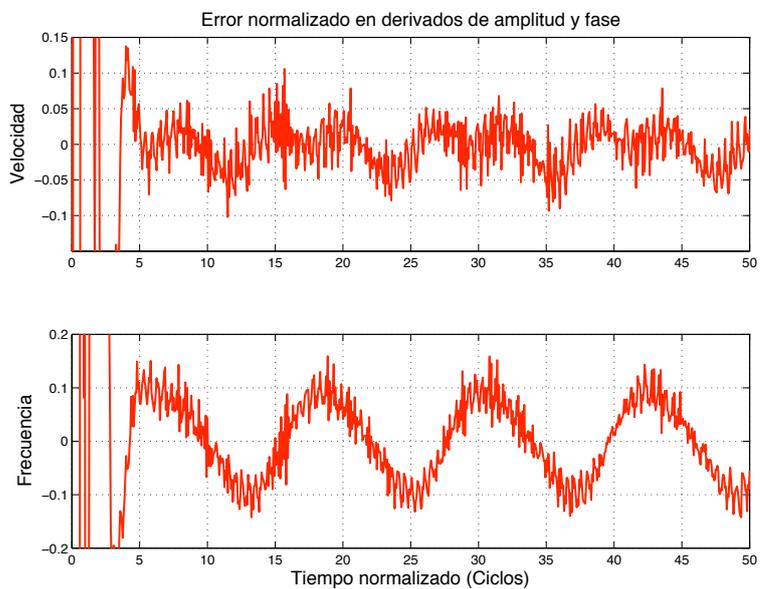


Figura 4.15. Error normalizado de velocidad y frecuencia obtenido con el modelo de orden dos

#### 4.4.2. Estimados de paso en Magnitud y Fase

Para ilustrar la respuesta transitoria de los filtros, los pasos de magnitud y fase de la referencia de prueba en [1, Anexo G.2 y G.3] son mezclados con la señal analizada. La figura 4.16 muestra los transitorios de magnitud y fase obtenidos con los estimadores de cero y segundo orden de Ackermann de la señal de prueba. Esto corresponde a la respuesta a una función escalón por los estimadores de Ackermann y son formados por los polos dominantes de la funciones de transferencia correspondientes. El modelo de orden cero produce un sobrepasó de amplitud durante un periodo muy corto de tiempo. Este transitorio dura alrededor de un cuarto de ciclo mientras que el estimador de segundo orden presenta un transitorio mucho mas largo, alrededor de 1 ciclo, debido a la presencia de mayor numero de polos, esto se puede apreciar de mejor manera en la figura 4.17.

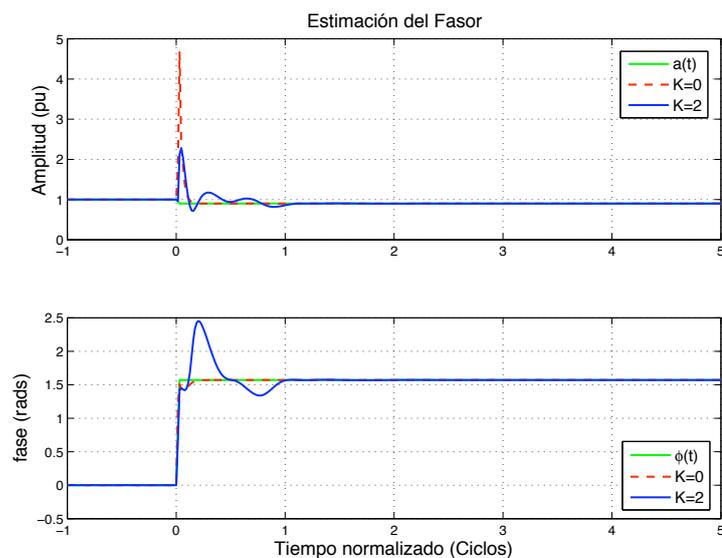


Figura 4.16. Estimados de magnitud y fase obtenidos con el estimador  $Taylor^k - Ackermann$  de cero y segundo orden para la magnitud y fase del paso de señal

En esta subsección en particular, la señal fue muestreada a  $64m/c$ , para realizar una evaluación comparativa con los datos obtenidos en [15] mediante el filtro  $Taylor^k - Kalman$ . Los estimados

de las primeras derivadas del fasor otorgadas por el estimador de segundo orden son mostradas en la figura 4.18. Podemos apreciar que las respuestas transitorias de la magnitud y fase de las derivadas tienen una duración aproximada de un ciclo.

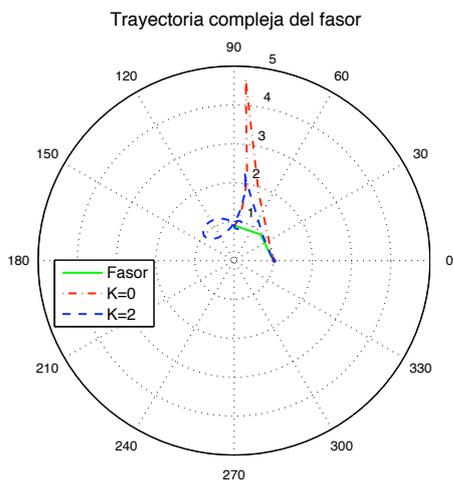


Figura 4.17. Trayectorias del fasor del estimador de cero y segundo orden

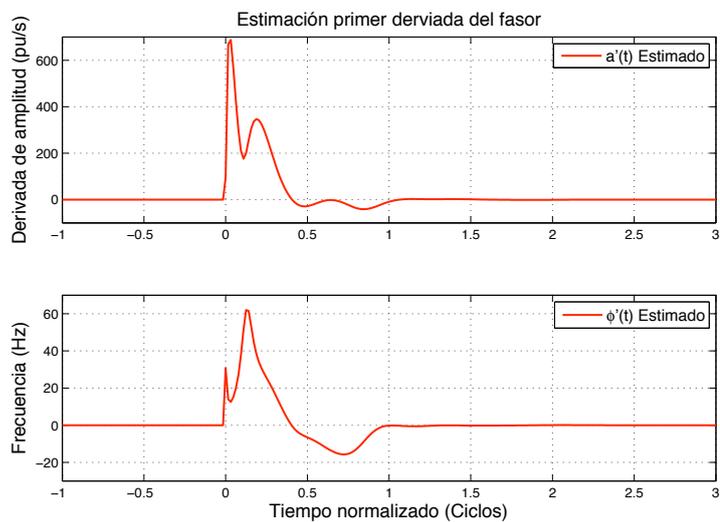


Figura 4.18. Estimados de las primeras derivadas de amplitud y fase obtenidas con el estimador de Ackermann de segundo orden de la amplitud y fase del paso de señal

### 4.4.3. Estimados de Paso de Frecuencia

Los estimados de la prueba en el paso de frecuencia ( $+5Hz$ ) en [1, Anexo G.4] son mostrados en la figura 4.19. Dicha figura muestra la magnitud y fase de los estimados obtenidos con el estimador evaluado. Puede observarse claramente que ambos estimadores presentan un comportamiento similar en los estimados de fase, lo que difiere en los estimados de la magnitud.

La figura 4.20 muestra la trayectoria compleja que siguen los estimados del fasor, lo que nos ayuda a visualizar mejor la diferencia entre ambos estimadores. Finalmente las derivadas del fasor obtenidas mediante el estimador de orden dos son mostradas en la figura 4.21; al analizar dicha figura, note que la frecuencia de los estimados converge a la frecuencia ideal aproximadamente después de 1.2 ciclos.

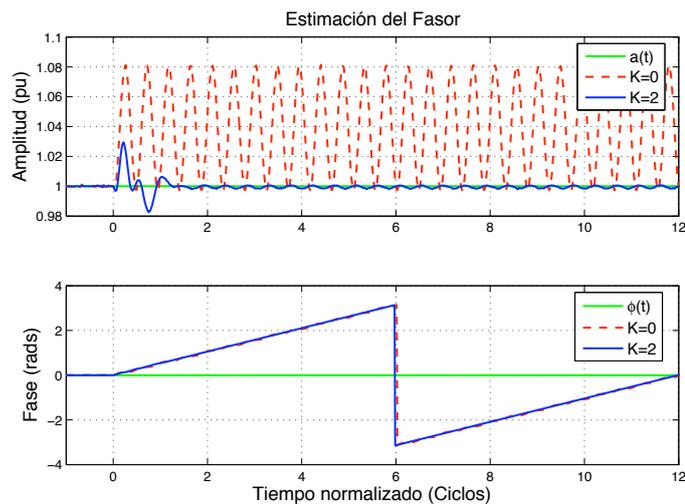


Figura 4.19. Estimados de magnitud y fase obtenidos con el estimador  $Taylor^k - Ackermann$  de cero y segundo orden para el paso de frecuencia de la señal de prueba

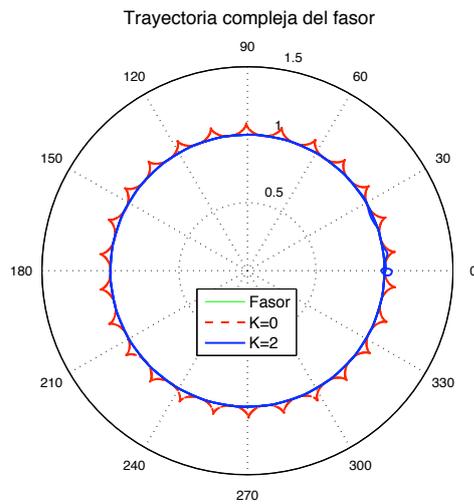


Figura 4.20. Trayectorias del fasor del estimador de cero y segundo orden para el paso de frecuencia de la señal de prueba

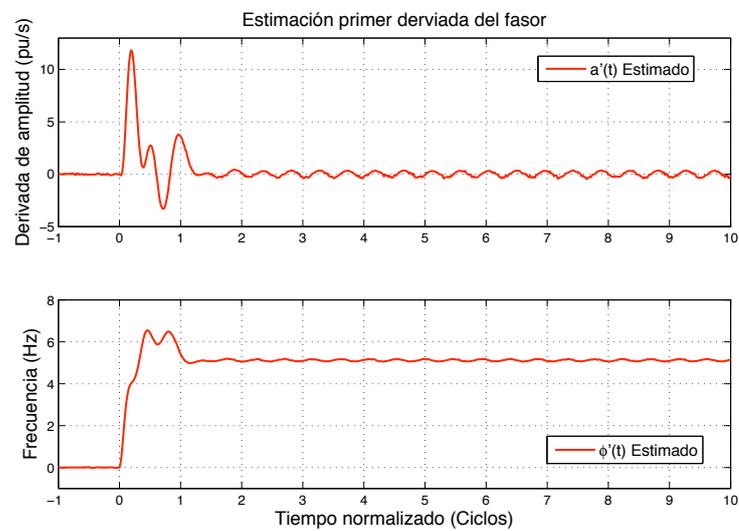


Figura 4.21. Estimados de las primeras derivadas de amplitud y fase obtenidas con el estimador de Ackermann de segundo orden del paso de frecuencia de la señal de prueba

## 4.5. Respuesta en Frecuencia

Al igual que en el capítulo anterior, la respuesta en frecuencia de Taylor-Ackermann puede ser obtenida a través de la transformada  $z$  de la ecuación de estado

$$\hat{x}(n) = \Phi \hat{x}(n-1) + \hat{L}(s(n) - H\Phi \hat{x}(n-1)) \quad (4.5.1)$$

con la ganancia de Ackermann  $\hat{L}$  constante. De acuerdo a los cálculos vistos en 3.5 tenemos que la función de transferencia entre los estados del modelo de la señal y la señal de entrada está dada por

$$G_A(z) = \left[ I + \left( \hat{L}H - I \right) \Phi z^{-1} \right]^{-1} \hat{L} \quad (4.5.2)$$

y las respuestas en frecuencia de los estados del filtro se obtienen evaluando la función de transferencia en  $G_A(z)$  a  $z = e^{j\theta}$ , para  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

### 4.5.1. Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Cero

La figura 4.22 nos permite observar la respuesta en frecuencia de *Taylor<sup>0</sup> – Ackermann* para distintas frecuencias de muestreo. Al igual que en los filtros analizados anteriormente, note que son respuestas asimétricas, lo que indica que pertenecen a filtros complejos. Esto es ocasionado cuando la señal de entrada corresponde a una señal de estado estable. Dicha señal trabaja con una ganancia de magnitud 2 en la frecuencia fundamental positiva y una ganancia nula en la negativa. Note que las respuestas en frecuencia no exhiben resonancias en la frecuencia nula como el caso anterior, en lugar de ello presentan una tendencia lineal, debido a la ubicación de sus polos en la función de transferencia. Dicha función presenta un cero cercano a  $z = 1$  y conforme la frecuencia de muestreo aumenta, el cero se aproxima más a 1. El comportamiento frecuencial de la fase no presenta ganancias planas nulas alrededor de la frecuencia fundamental por lo que existe un pequeño retardo en los estimados. A diferencia del caso del LQG y del filtro de Kalman, las respuestas tanto en magnitud y fase difieren considerablemente, que como ya se mencionó es debido a que el objetivo del estimador es ser rápido.

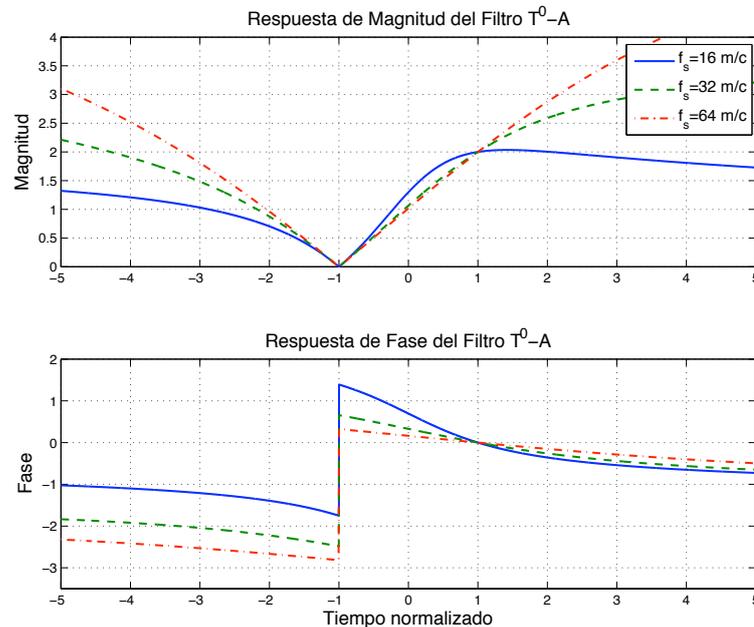


Figura 4.22. Respuesta en frecuencia del filtro *Taylor<sup>0</sup> – Ackermann* a diferentes frecuencias de muestreo

#### 4.5.2. Respuesta en Frecuencia del Modelo de Orden Dos

Mediante la figura 4.23 analizaremos las respuestas en frecuencia obtenidas mediante el modelo de orden dos. Claramente se puede observar que las respuestas exhiben una frecuencia de resonancia cerca de la frecuencia nula y altas ganancias en los armónicos, sin embargo también presenta ganancias notoriamente planas alrededor de la frecuencia fundamental (positiva y negativa) lo que nos indica (igual que en el caso del filtro de Kalman) que el filtro solo trabaja cuando el espectro de la señal se encuentra dentro de los intervalos comprendidos por las ganancias planas. Una característica, la cual es importante resaltar es que aparte de ser rápidos, los estimados son instantáneos ya que al analizar la respuesta de la fase, note que alrededor de la frecuencia fundamental la fase es nula. Lo que significa que los estimados no presentan retardo cuando el espectro de la señal es asumida dentro de nuestro modelo de señal.

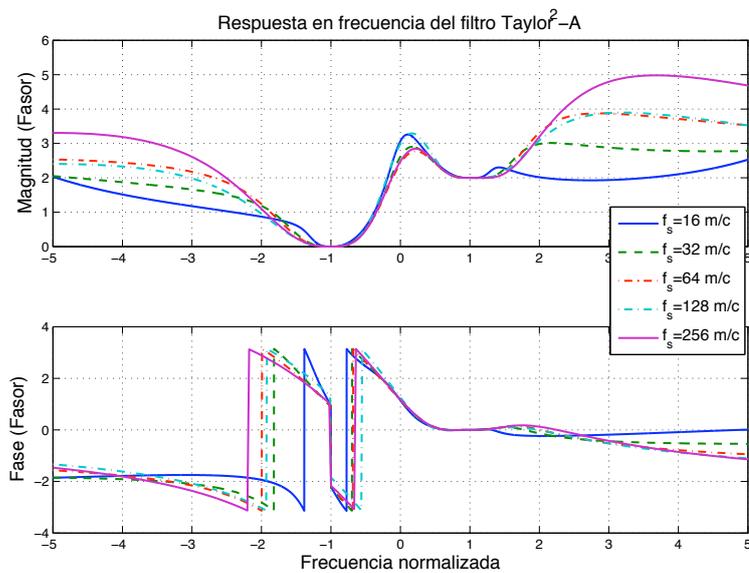


Figura 4.23. Respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^2 - Ackermann$  para diferentes frecuencias de muestreo

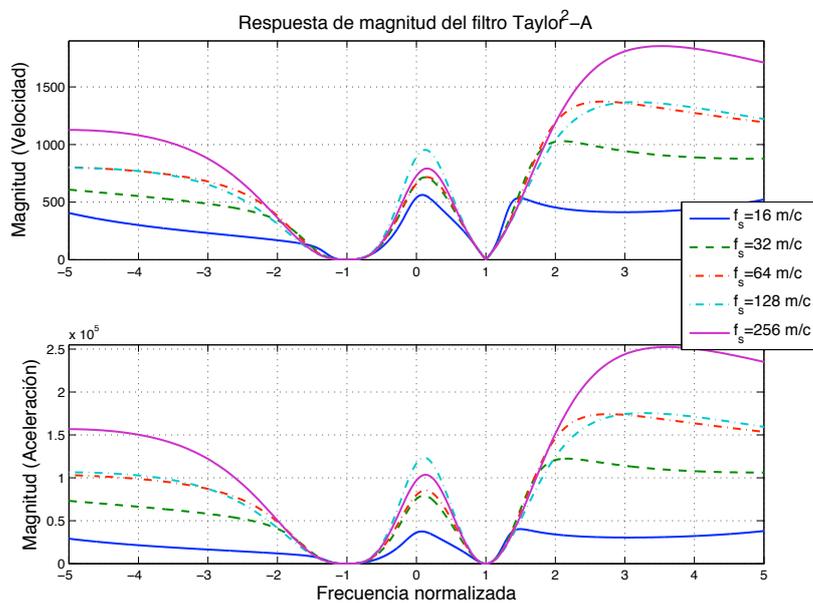


Figura 4.24. Respuesta de magnitud del primer y segundo diferenciador del filtro  $T^2 - Ackermann$

En la respuesta de fase también ocurre un cambio drástico en la frecuencia fundamental negativa, sin embargo se puede decir que el cambio es insignificante debido a la ganancia nula en ese preciso intervalo. La figura 4.24 ilustra la respuesta de magnitud de la primera (gráfico superior) y la segunda (gráfico inferior) derivadas estimadas; la gráfica nos deja apreciar que las respuestas que a pesar de ser muy sensitivas al ruido también presentan ganancias nulas en la frecuencia fundamental negativa.

## 4.6. Conclusiones

A través del capítulo se describió el diseño del estimador fasorial  $Taylor^K - Ackermann$ , el cual consiste en el empleo de dos técnicas básicas en el área de control: fórmula de Ackermann y observador actual. Estas características implican que el cálculo del algoritmo sea relativamente sencillo además de tener cierta flexibilidad en su comportamiento dependiente de la asignación de los polos deseados. A diferencia de los filtros vistos en los capítulos anteriores así como en el filtro  $Taylor^K - Kalman$ , el criterio óptimo cobra menor importancia debido a que lo que se buscaba era obtener un tiempo de respuesta más corto y como se observó en las secciones 4.4.2 y 4.4.3, dicho filtro presenta un tiempo de respuesta de un ciclo, lo que resulta ser aproximadamente mitad de ciclo más rápido que el filtro  $Taylor^K - Kalman$  visto en [15]. Sin embargo las respuestas en frecuencia del estimador  $Taylor^K - Ackermann$  indican que es más sensible al ruido dependiendo de los parámetros que especifiquen los polos deseados, pero a pesar de esto las respuestas entre ambos algoritmos (modelo de orden dos) son muy similares. El buen desempeño en la estimación del fasor dependerá de la concurrencia de la señal de entrada con el modelo de la señal. Al igual que en los filtros  $Taylor^K - Kalman$ , la inclusión del polinomio de Taylor de segundo orden en el modelo de la señal alcanza una respuesta plana en magnitud y fase alrededor de la frecuencia fundamental, con una clara disminución en la disposición de magnitud y fase.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 5.1. Conclusiones

En este trabajo de investigación se han descrito diversos algoritmos de estimación fasorial los cuáles trabajan sobre un modelo de señal que maneja funciones de amplitud y fase variables, lo que es algo más cercano a lo que realmente ocurre en las oscilaciones presentadas por las señales en la vida cotidiana.

- La aproximación de Taylor para el fasor dinámico provee de una matriz de transición de estados para modelar con mejor precisión una oscilación de potencia.
- Usando el *Controlado Lineal-Cuadrático* basado en el principio de optimalidad de Bellman se calcula un vector de ganancias óptimo con el fin de estimar el fasor dinámico. Dicho algoritmo demostró obtener buenas estimaciones del fasor bajo condiciones dinámicas, sin embargo, el diseño requiere de la aplicación de una matriz de ponderación  $Q$  cuya elección resulta ser arbitraria; esto nos conduce a diseñar dicha matriz bajo un modelo de prueba y error. Además el vector de ganancias obtenido resulta ser insuficiente para la estimación de las primeras  $K$  derivadas del fasor dinámico.

- Usando el modelo de la señal pasabanda con el algoritmo del *Controlador Lineal-Cuadrático-Gaussiano* el cual es la interconexión del algoritmo del filtro de Kalman con el algoritmo del controlador lineal-cuadrático, es obtenida una nueva técnica ( $T^K - LQG$ ).
- Los estimados  $T^K - LQG$  (para  $K \geq 2$ ) y sus derivadas, son estimados cuasi-instantáneos (retardo muy pequeño), presentando una sincronía con la señal. También presentan un error despreciable cuando la señal es contaminada por oscilaciones suaves de ruido blanco gaussiano, y con pequeños lapsos para alcanzar el estado estable cuando la señal es afectada por transiciones.
- En el dominio de la frecuencia, la principal ventaja del filtro  $T^K - LQG$  es que no presenta resonancia en la frecuencia nula. Mediante la extensión del modelo de la señal al incluir el conjunto completo de armónicos nos conduce al filtro  $T^K - LQG - Fourier$ . El filtro  $T^0 - LQG - Fourier$  tiene el mismo comportamiento que el filtro  $T^0 - K - Fourier$  y por lo tanto que la *DFT*. Por otro lado es posible calcular  $T^2 - K - Fourier$  mediante el filtro  $T^2 - LQG - Fourier$  al hacer muy grande  $r$ .
- En el dominio de la frecuencia el filtro  $T^K - LQG - Fourier$  (para  $K \geq 2$ ) reduce tanto las ganancias interarmónicas así como las frecuencias de resonancia junto a la frecuencia fundamental vistas en el filtro  $T^2 - K - Fourier$ , lo que se aprecia en la figura 3.20.
- El uso del observador actual y la fórmula de Ackermann junto con el modelo de la señal, dan lugar al estimador  $T^K - A$ . La fórmula de Ackermann que se basa en la técnica de asignación de polos es usada para calcular un vector de ganancias para las dinámicas del error.
- La principal ventaja de los estimados  $T^K - A$  y sus derivadas es que son instantáneos (sin retardo), preservando su sincronía con la señal. Además presentan un periodo de tiempo mas corto que los filtros  $T^K - K$  y los filtros  $T^K - LQG$  en alcanzar el estado estable cuando la señal es afectada por una transición. También presentan un error despreciable cuando la señal es contaminada con oscilaciones suaves y ruido blanco gaussiano.

## 5.2. Trabajo Futuro

Mediante los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo de tesis y las conclusiones establecidas, se proponen los siguientes puntos como trabajos futuros sobre esta línea de investigación:

- Establecer un criterio de diseño más específico para la matriz de ponderación  $Q$ , determinada a partir de las características del modelo.
- Explorar con mayor profundidad la estructura matemática de los filtros  $T^K - LQG$  y  $T^K - LQG - F$ . De esta manera explotaremos las cualidades de los filtros.
- Establecer un criterio más completo para la asignación de polos en el plano  $z$ , para la aplicación de la fórmula de Ackermann con el fin de mejorar el estimador  $T^K - A$ .
- Extender el estimador  $T^K - A$  al estimador  $T^K - A - F$  incluyendo el conjunto completo de armónicos en el modelo de la señal.

# **Apéndice A**

## **Diseño de Q**

## A.1. Introducción

Considerando el modelo como un sistema de segundo orden cuya salida es singular  $y(n) = Hx(n) = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \end{bmatrix} x(n)$  y esperando obtener una observación de la señal (2.4.2), cambiamos la función de costo para introducir a  $y^2(n)$  [2]. Entonces:

$$y^2(n) = y^T(n)y(n) = x^T H^T H x(n) = x^T(n)Qx(n) \quad (\text{A.1.1})$$

Por lo que  $Q = H^T H$ , entonces considerando la función cuadrática

$$\begin{aligned} x^T(n)Qx(n) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= q_{11}x_1^2 + (q_{12} + q_{21})x_1x_2 + q_{22}x_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

## A.2. Análisis de Resultados

### Modelo de orden cero

Ahora bien, sustituyendo  $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} / 2$  para el modelo de orden cero tenemos:

$$\begin{aligned} x^T(n)Qx(n) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}|x_1|^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)x_1x_2 + \frac{1}{4}|x_2|^2 = |x_1|^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

Al observar la ecuación (A.2.1), podemos darnos cuenta de que los pesos asignados a cada estado son equivalentes. El estado  $x_1$  porta la información necesaria para conocer la posición de fasor, mientras que el estado  $x_2$  representa el conjugado complejo de  $x_1$ . Los resultados obtenidos mediante seleccionar a  $Q$  de esta manera otorgan buenos resultados de estimación, pero en comparación a los mostrados en el capítulo 2 (sección 2.6), estos resultan ser menos satisfactorios ya que además de presentar el mismo comportamiento indeseado de corrugación y distorsión en la fase también visualizan un transitorio mas grande, tal y como se muestra en la figura A.3.

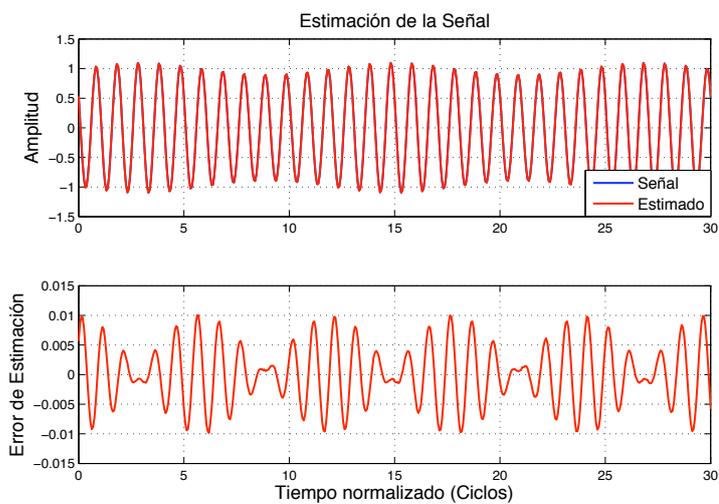


Figura A.1. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero)

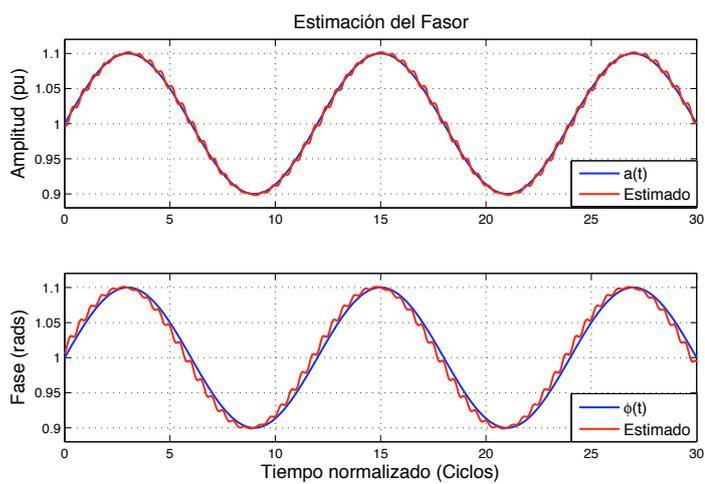


Figura A.2. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de orden cero)

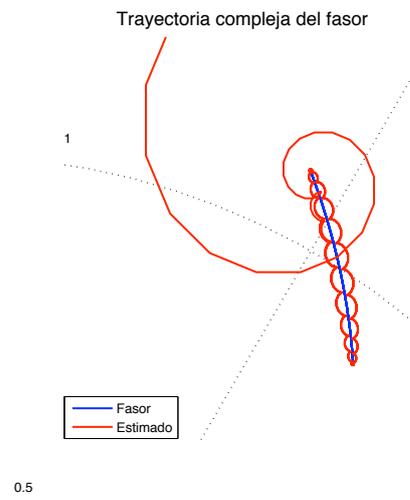


Figura A.3. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de orden)

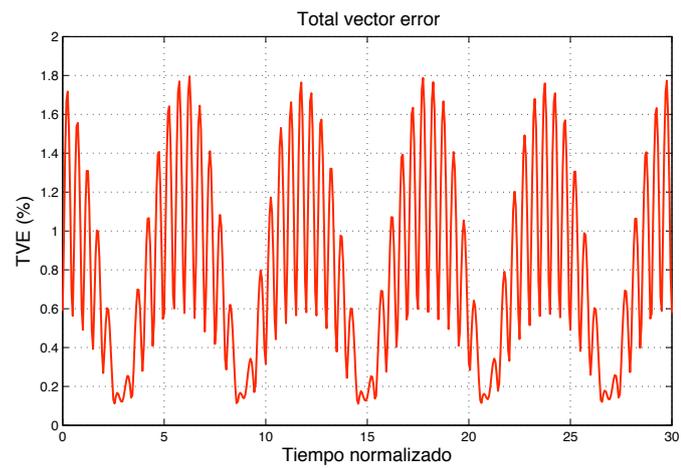


Figura A.4. Error vectorial total (Modelo de orden cero)

### Modelo de orden dos

Para el modelo de orden dos tenemos que  $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} / 2$ , por lo que

$$\begin{aligned}
 x^T(n)Qx(n) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{4}x_1(x_1 + x_4) + \frac{1}{4}x_4(x_1 + x_4) \\
 &= \frac{1}{4}|x_1|^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)x_1x_4 + \frac{1}{4}|x_4|^2 \\
 &= \frac{1}{4}|x_1|^2 + \frac{1}{2}|x_1|^2 + \frac{1}{4}|x_4|^2 = |x_1|^2
 \end{aligned} \tag{A.2.2}$$

donde  $x_1$  representa la posición del fasor,  $x_2$  su velocidad y  $x_3$  su aceleración. Los estados  $x_4$ ,  $x_5$  y  $x_6$  representan los conjugados complejos de los primeros 3 estados respectivamente.

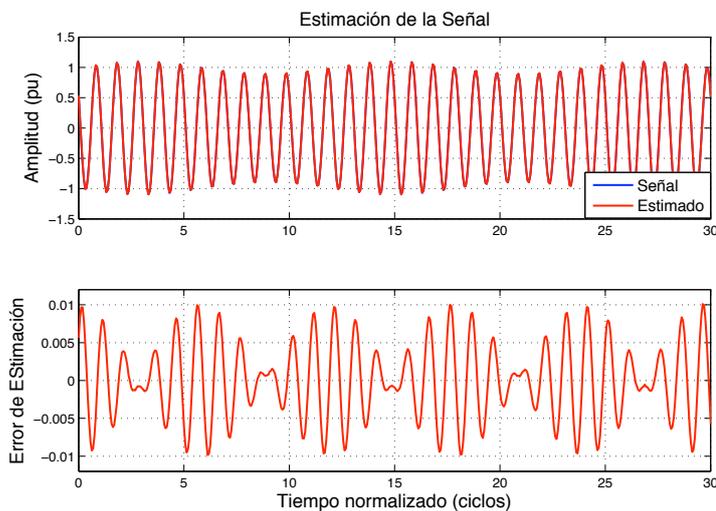


Figura A.5. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos)

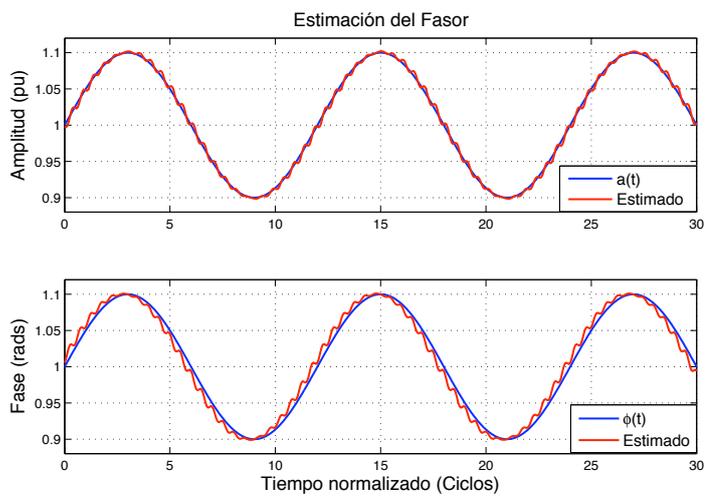


Figura A.6. Estimación de Amplitud y Fase (Modelo de dos)

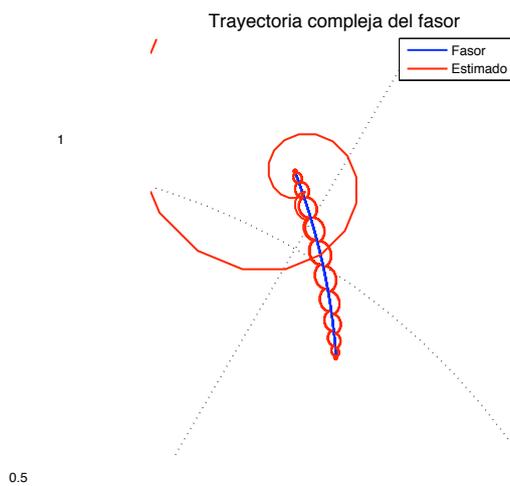


Figura A.7. Trayectoria del Fasor y su estimado (Modelo de dos)

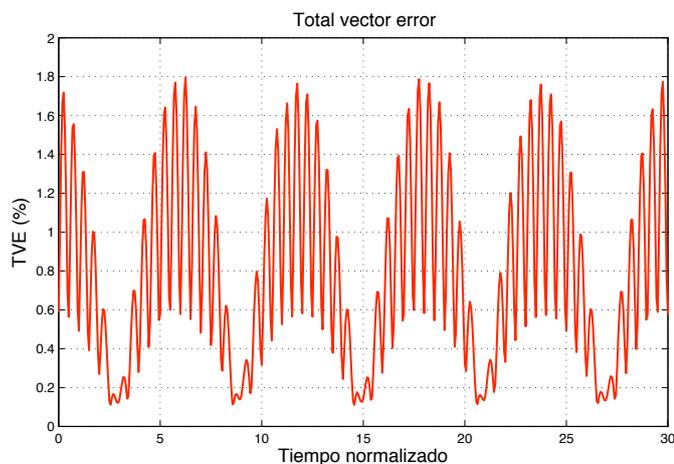


Figura A.8. Error vectorial total (Modelo de orden dos)

Haciendo una comparativa entre las estimaciones obtenidas con el modelo de orden cero y el modelo de orden dos, podemos darnos cuenta que ambas son muy similares y, lo podemos comprobar chequeando cada una de las figuras aquí mostradas, sin embargo, para mayor claridad compare las figuras A.4 y A.8. Esto se debe a que si se analiza la ecuación (A.2.2), se verá que la matriz  $Q$  únicamente considera la posición del fasor, es decir, los estados  $x_1$  y  $x_4$ , mientras que a los demás los anula, provocando que la información necesaria para obtener mejores estimados se pierda. Esto da lugar a que sin importar el orden del polinomio, al establecer una matriz de ponderación  $Q$  mediante (A.1.1), los resultados no tendrán variaciones y serán similares.

**Regla de Bryson** Otra forma para seleccionar las matriz  $Q$  y  $R$  (en otro caso), es dada por la *regla de Bryson*, la cual establece que:

$$Q_{ii} = \frac{1}{\text{Max}(x_i^2)} \quad i \in \{1, 2, \dots, l\}$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\text{Max}(u_j^2)} \quad j \in \{1, 2, \dots, l\}$$

En esencia la *regla de Bryson* escala las variables que aparecen en (2.5.3) tal que el máximo valor

aceptable para cada termino sea uno. Aunque la regla de Bryson a veces da buenos resultados, a menudo es sólo el punto de partida para un proceso iterativo de diseño dirigido a obtener las propiedades deseadas para el sistema de lazo cerrado.

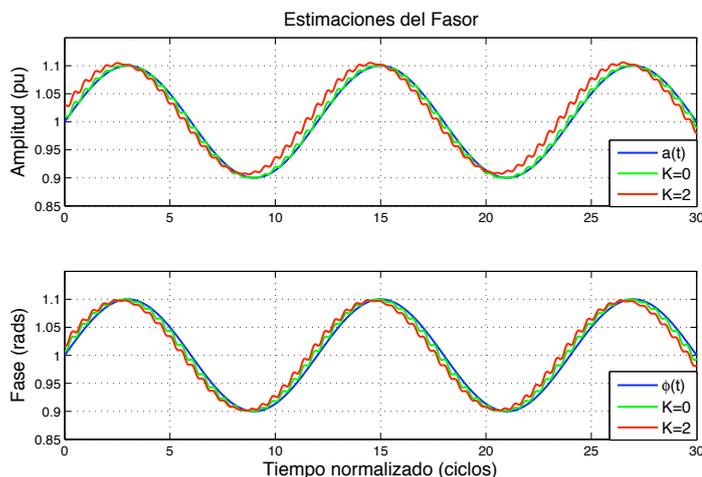


Figura A.9. Estimaciones de amplitud y fase (Matriz de ponderación  $Q$  diseñada mediante *regla de Bryson*)

Por esta razón, se estableció otro tipo de matriz de ponderación  $Q$  que proporcionara tanto estimaciones factibles como una diferenciación clara entre los estimados obtenidos mediante cada uno de los grados polinomiales de interés. Las características de esta matriz continúan siendo las mismas, es decir, simétrica y definida positiva (o semidefinida positiva). Estos resultados se aprecian en el capítulo 2 (sección 2.6) que aunque muy ligera, existe una mejora de los estimados obtenidos con el modelo de orden dos respecto a los del modelo de orden cero.

## **Apéndice B**

### **Exploración en el diseño del LQG**

## B.1. Introducción

En el capítulo 3, se analizó el controlador *Lineal-Cuadrático-Gaussiano* como estimador fasorial de la señal pasabanda (2.4.1). Sin embargo, el algoritmo plantea una modificación del LQG convencional ya que se propone la supresión de la ecuación en diferencias de Riccati (3.3.3) haciendo que tanto controlador como estimador, dependan únicamente de la ecuación (3.3.2); además de esto, se establece que la ley de control actúa, solo hasta que las ganancias de Kalman alcanzan su periodo de estado estacionario, pasando a ser constantes durante el resto de los ciclos, como se menciona anteriormente. A continuación presentaremos un diseño mas convencional, solo con la inclusion de una matriz de ponderación  $Q$  variante en el tiempo, debido al fasor dinámico. Una cuestión importante que debemos mencionar es que al considerar la ley de control desde el instante inicial, el comportamiento de las ganancias de Kalman difiere bastante al visto en la figura 3.13, el diseño considera los instantes a partir de los cuales las ganancias de Kalman tienen mayor magnitud.

## B.2. Matriz de ponderación $Q(n)$

Debido a que los estados del sistema evolucionan con cada instante  $n$ , se propone una matriz de ponderación  $Q$  variante en el tiempo con el objetivo de obtener una ponderación del estado de acuerdo a la dinámica del mismo. La solución surge del teorema de estabilidad de Lyapunov para sistemas discretos [20]. La matriz de ponderación es caracterizada por la siguiente ecuación:

$$-Q(n) = \Phi(n)^H P(n) \Phi(n) - P(n) \quad (\text{B.2.1})$$

donde  $P(n)$  es la solución estabilizaste de Riccati y se define como:

$$P(n) = \bar{\Phi}(n)^H P(n-1) \bar{\Phi}(n) + Q(n-1) \quad (\text{B.2.2})$$

Cabe mencionar que en el capítulo 3, durante el desarrollo del algoritmo propuesto del LQG (Capítulo 3), la matriz de ponderación  $Q$  no es requerida debido al acoplamiento.

### Modelo Taylor Orden Cero

El análisis de este algoritmo se llevó a cabo bajo las mismas especificaciones de la señal pasabanda mostradas en los capítulos anteriores. Un aspecto importante en la estructura de este modelo es que el uso de una matriz de ponderación dinámica no es tan requerido debido a las características de la matriz de transición de estados, mientras que la retroalimentación es de la siguiente forma:

$$\tilde{\Phi} = (\Phi - \Gamma K) \quad (\text{B.2.3})$$

Esto significa, que usamos las cualidades convencionales del estimador LQG. A continuación mostraremos los resultados obtenidos mediante el modelo de Taylor de orden cero.

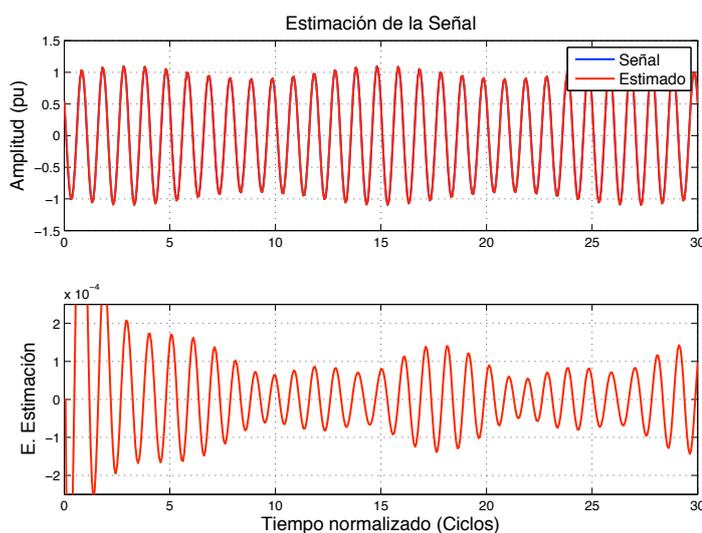


Figura B.1. Señal y error de estimación (Modelo de orden cero)

Tal y como se aprecia en la figura anterior, esta modalidad del LQG ofrece estimaciones factibles del fasor. Por otro lado, al analizar la *respuesta en frecuencia* del filtro existe una ligera modificación, ya que tanto  $\Phi$  como  $\tilde{\Phi}$  presentes en las ecuaciones vistas en el capítulo 3, son reemplazadas por  $\bar{\Phi}$  definida en la ecuación (B.2.3). Pese a esto, el comportamiento frecuencial es exactamente igual que el visto en la figura 3.14 y de la misma forma al extender el filtro incluyendo el conjunto completo

de armónicas obtendremos 3.19. Como lo mencionamos, el comportamiento de los estimados cambia muy poco al variar  $r$  por lo que en la respuesta en frecuencia del filtro, dicha variación es casi imperceptible.

### Modelo Taylor Orden Dos

Como ya hemos visto anteriormente sabemos que el modelo de orden dos, proporciona mejores estimaciones del fasor dinámico. El diseño de este algoritmo contempla las propiedades mencionadas al inicio del apéndice, me refiero a la inclusión de las ecuaciones (B.2.1), (B.2.2) y (B.2.3).

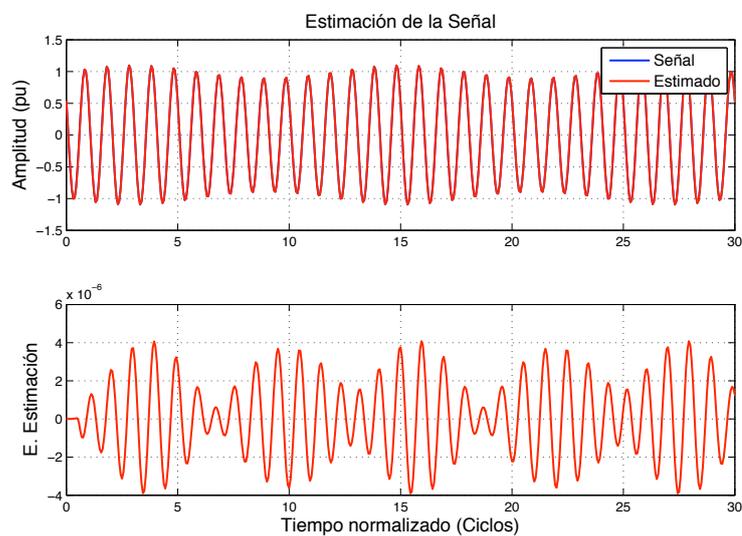


Figura B.2. Señal y error de estimación (Modelo de orden dos)

El filtro mostrará un mejor comportamiento una vez que las ganancias de Kalman sean estables, el periodo de estabilidad es tomado de las ganancias que como mencionamos anteriormente, presentan una mayor magnitud (fig. B.6). Esto puede resultar una cuestión de verificación al observar que estimaciones son mas satisfactorias dependiendo de la ganancia que se haya tomado. Por otro lado, podemos considerar las ganancias que no son influidas por la retroalimentación (fig. 3.13). Las estimaciones obtenidas fueron realizadas bajo una ponderación de control de  $r = 1$  en ambos modelos.

Las figuras B.3 y B.4 muestran para ambos modelos, los estimados de amplitud y fase así como el TVE respectivamente. Puede notarse claramente la mejora que existe al elevar el grado del modelo.

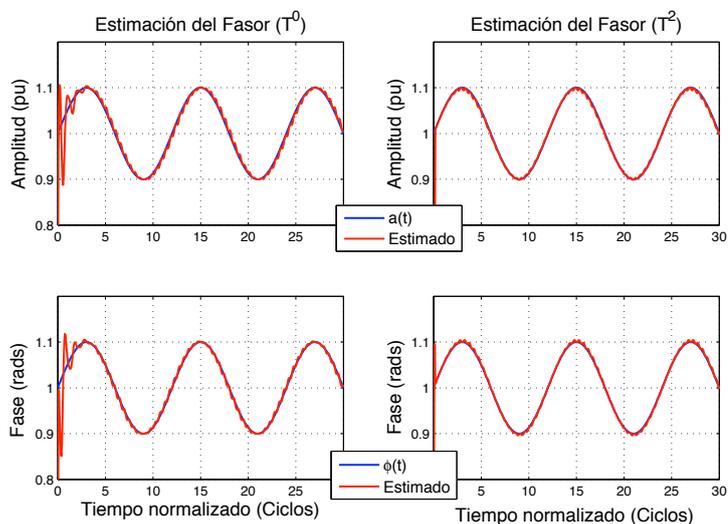


Figura B.3. Estimación de Amplitud y Fase

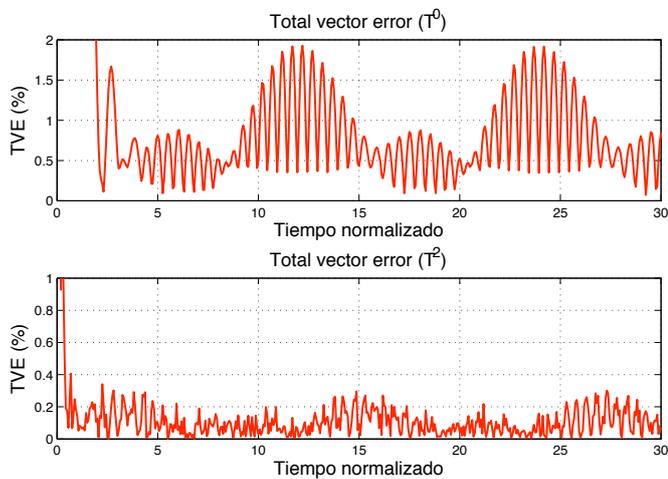


Figura B.4. Error vectorial total para  $r = 10$

La figura B.5 muestra los estimados de las primeras derivadas de amplitud y fase del fasor obtenidas mediante el modelo de orden dos, bajo diferentes ponderaciones de control. AL analizarla

podemos percatarnos que al elevar el peso del control, los estimados tienden a tomar un mayor desfase respecto a las derivadas ideales. Por esta razón solo se mostró el error de estimación bajo una acción de control  $r = 1$ . Si bien al aumentar el peso del control sobre la retroalimentación de estados puede mejorar o empeorar los estimados (en nuestro caso), la selección de este será basándonos en el comportamiento de los filtros que más nos parezca adecuado. La tabla B.1 muestra los efectos del control tanto en el índice de desempeño como en algunos otros factores importantes.

Tabla B.1. Efecto del Peso de Control

Control R	Índice de Desempeño J	Error de Estimación
1	$6,5795 \times 10^9$	$2 \times 10^{-6}$
2	530,3522	$3 \times 10^{-6}$
3	535,6771	$1,8 \times 10^{-6}$
4	521,2895	$2,47 \times 10^{-6}$
5	527,9399	$3,002 \times 10^{-6}$
6	543,6636	$3,557 \times 10^{-6}$
7	558,1192	$4 \times 10^{-6}$
8	568,1157	$4 \times 10^{-6}$
9	573,3876	$3,558 \times 10^{-6}$
10	574,7832	$3,253 \times 10^{-6}$

Dando paso a los siguientes análisis, observaremos la *respuesta en frecuencia* del filtro  $Taylor^k - LQG_c$  bajo diferentes ponderaciones de control y diferentes frecuencias de muestreo. La figura B.7 muestra las variantes en la respuesta en frecuencia del filtro, dependientes de la selección de  $r$ . Este primer análisis se llevó a cabo a una tasa de muestreo de 16 muestras por ciclo. Como se puede observar en dicha figura, al aumentar el valor de  $r$ , bajan tanto los lóbulos laterales así como la resonancia alrededor de la frecuencia nula, sin embargo al aumentar demasiado el control, sacrificamos la ganancia plana alrededor de la frecuencia fundamental debido a la optimización de la trayectoria que realiza la parte del controlador.

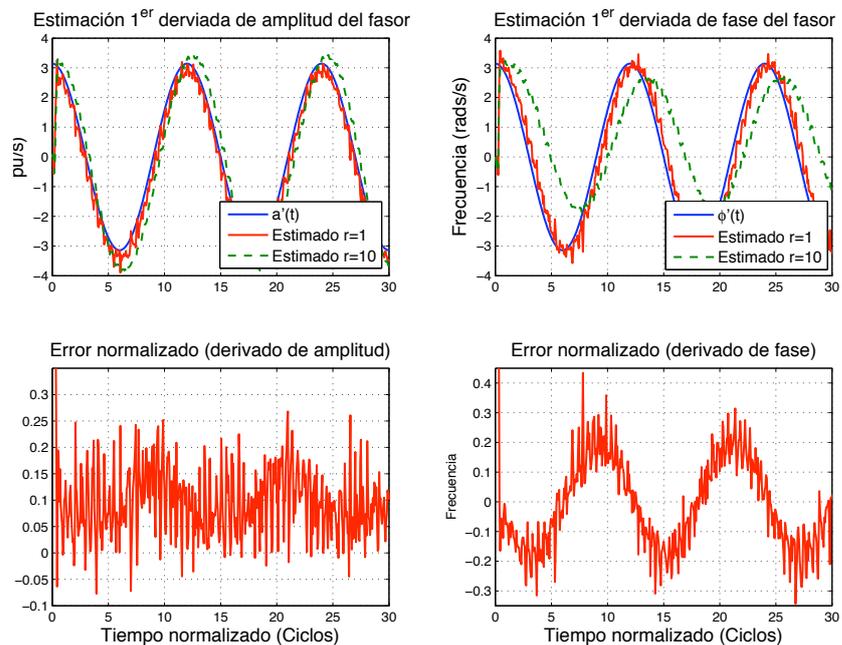


Figura B.5. Estimados de velocidad/frecuencia (superior). Error normalizado de velocidad/frecuencia obtenido con el modelo de orden dos (inferior)

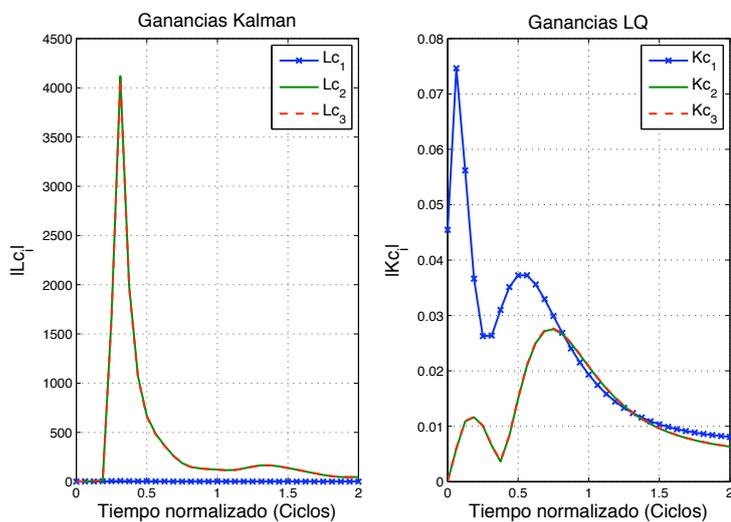


Figura B.6. Magnitud de las ganancias de Kalman (izquierda) y LQ (derecha) afectadas por la ley de control

Como podemos darnos cuenta en las figuras B.7 y B.8, depende de la frecuencia de muestreo para seleccionar correctamente el peso del control sobre los estados retroalimentados, ya que no para todos los valores de  $r$  se obtienen resultados satisfactorios. Esto resulta un poco tedioso ya que sería preferible no depender tanto de un factor de este tipo, sino que la ponderación actuara dependiendo de los estimados obtenidos en el instante  $N$ , es decir, un poco más similar al visto en el capítulo 3. La figura B.9 muestra la respuesta en frecuencia cuando es considerado el conjunto completo de armónicas dentro del modelo, en otras palabras muestra el filtro  $Taylor^2 - LQG_c - Fourier$ ; el peso del control asignado fue de  $r = 10$ , ya que en la respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^2 - LQG_c$  mostrada en la figura B.7, esta ponderación presenta una resonancia plana cercana a la frecuencia nula. Con motivo de un análisis comparativo entre éste, los filtros  $T^2 - K - F$  y  $T^2 - LQG - F$  también son presentados en la siguiente figura. La tasa de muestreo será de  $16m/c$ .

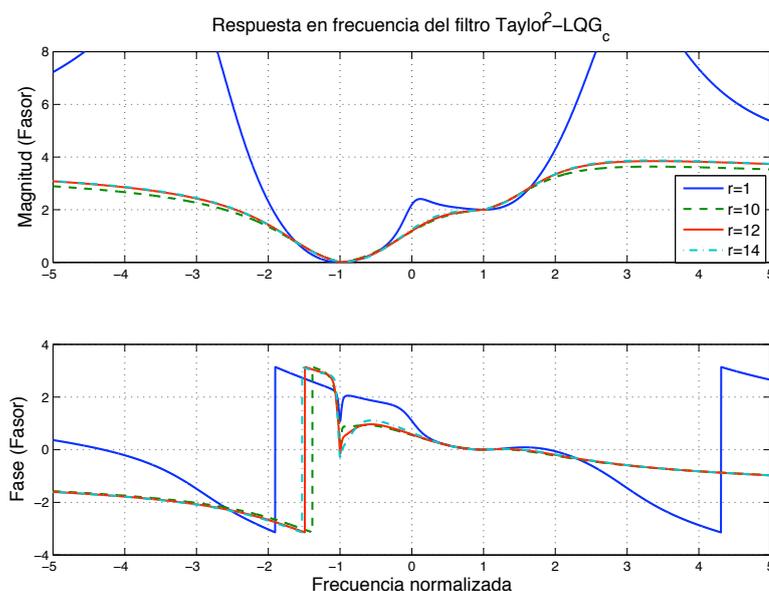


Figura B.7. Respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^2 - LQG_c$  para diferentes frecuencias de muestreo a  $16m/c$

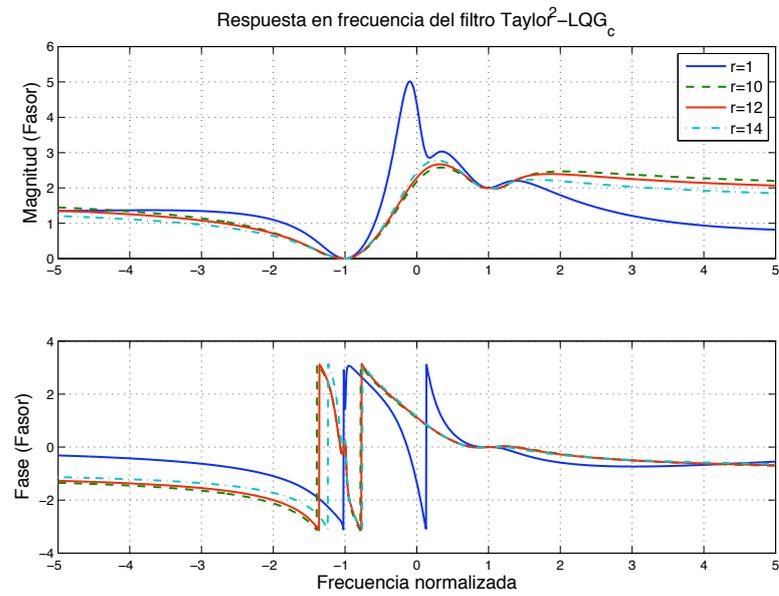


Figura B.8. Respuesta en frecuencia del filtro  $Taylor^2 - LQG_c$  para diferentes frecuencias de muestreo a  $64m/c$

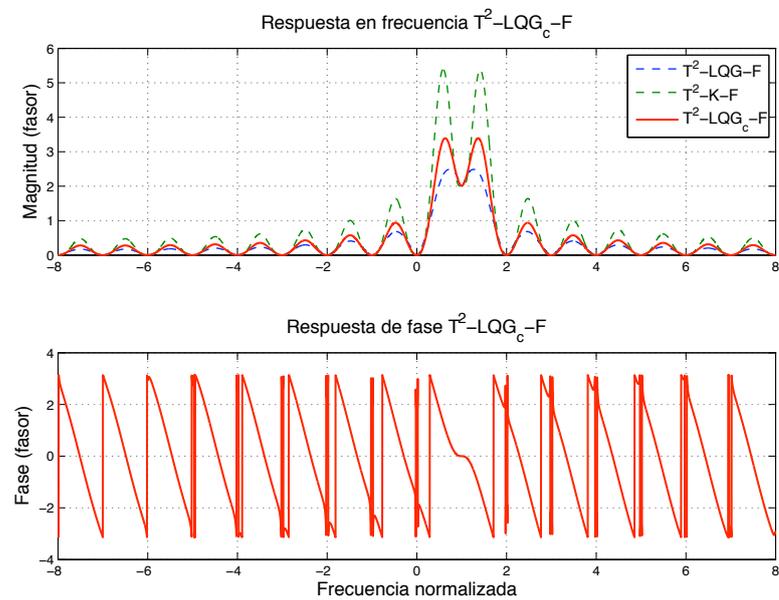


Figura B.9. Respuesta en frecuencia del filtro  $T^2 - LQG_c - F$

# Apéndice C

## Rotación del Fasor Dinámico en Espacio de Estados

### C.1. Introducción

En este apéndice es desarrollado la rotación del fasor dinámico el cual es relacionado con la matriz de transición de estados.

### C.2. Obteniendo la rotación del fasor dinámico en espacio de estados

Para el desarrollo de la ecuación de rotación del fasor, comenzamos por la señal

$$s_K(t) = \text{Re}\{h^T p_K(t)e^{j2\pi f_1 t}\} = \text{Re}\{h^T r_K(t)\} \quad (\text{C.2.1})$$

tomando  $t_0 = (n - 1)\tau$ ,  $t = n\tau$ , con  $\tau = T_1/N_1$  y  $T_1 = 1/f_1$  entonces

$$p_K(n)e^{j2\pi f_1 n\tau} = p_K(n)e^{j2\pi(f_1\tau)n} \quad (\text{C.2.2})$$

al elevar  $e^{j2\pi(f_1\tau)n}$  con respecto al valor de  $\tau$  es obtenido  $e^{j\frac{2\pi}{N_1}n}$ . Ahora aproximamos la ecuación de la transición de estado de la rotación del fasor (2.4.10), para este comenzamos con la ecuación de la transición del estado (2.4.6)

$$p(n)e^{j2\pi f_1(n)\tau} = \Phi_K(\tau)p(n - 1)e^{j2\pi f_1(n-1)\tau} \quad (\text{C.2.3})$$

para simplificar,  $e^{j2\pi f_1(n-1)\tau} = e^{j2\pi f_1 n\tau} e^{-j2\pi f_1 \tau}$  la segunda exponencial ubicada a la derecha de la igualdad es multiplicada por la inversa de  $e^{j2\pi f_1 \tau}$  y entonces obtenemos

$$p_K(n)e^{j2\pi f_1 n\tau} e^{j2\pi f_1 \tau} = \Phi_K(\tau)p(n-1)e^{j2\pi f_1 n\tau} e^{-j2\pi f_1 \tau} e^{j2\pi f_1 \tau} \quad (\text{C.2.4})$$

como  $p_K(n)e^{j2\pi f_1 n\tau} = r_K(n)$  cada que

$$r_K(n)e^{j2\pi f_1 \tau} = \Phi_K(\tau)r_K(n) \quad (\text{C.2.5})$$

con (C.2.5) es fácil y claro como obtener la ecuación de transición del estado de la rotación del fasor

$$\begin{bmatrix} r_K(n) \\ \bar{r}_K(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi\Phi_k(\tau) & 0 \\ 0 & \bar{\phi}\Phi_k(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k(n-1) \\ \bar{r}_k(n-1) \end{bmatrix} \quad (\text{C.2.6})$$

donde  $\phi = e^{j2\pi f_1 \tau}$ .

## **Apéndice D**

### **Herramientas Matemáticas**

## D.1. Introducción

A lo largo de este apéndice se describirán diversas aplicaciones matemáticas que fueron empleadas en el diseño de los algoritmos presentados en los capítulos. Con esto se pretende ayudar al lector a tener un mejor entendimiento del trabajo de tesis realizado.

## D.2. Teorema del valor medio

**Teorema D.2.1.** *Si  $f$  es una función continua real sobre  $[a, b]$  la cual es diferenciable en  $(a, b)$ , entonces existe un punto  $x \in (a, b)$  en el cual*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x) \quad (\text{D.2.1})$$

*Demostración.* Se construye la función

$$h(t) = [f(b) - f(a)]t - (b - a)f(t) \quad (\text{D.2.2})$$

La cual es continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $(a, b)$ . Observe de (D.2.2) que  $h(a) = af(b) - bf(a) = h(b)$ . Se obtiene la primera derivada de  $h(t)$

$$h'(t) = [f(b) - f(a)] - (b - a)f'(t) \quad (\text{D.2.3})$$

Para probar el teorema es necesario demostrar que  $h'(x) = 0$  para algún  $x \in (a, b)$ .

Si  $h$  es constante esto se cumple para toda  $x$  en  $(a, b)$ , si  $h(t) > h(a)$  para algún  $t \in (a, b)$  entonces existe un punto  $x$  en el cual la función  $h$  alcanza su máximo y en este punto  $h'(x) = 0$ . La misma conclusión aplica para el caso en que  $h(t) < h(a)$ , solo que en este caso la función alcanza un mínimo.

### D.3. Teorema de Taylor

**Teorema D.3.1.** *Supóngase que  $f$  es una función real sobre  $[a, b]$ ,  $n$  es un entero real positivo,  $f^{(n-1)}$  es continua sobre  $[a, b]$  y  $f^n$  existe  $\forall t \in (a, b)$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  puntos distintos de  $(a, b)$ , y sea  $P(t)$  definida por*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} (t - \alpha)^k \quad (\text{D.3.1})$$

Entonces existe un punto  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  tal que:

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (\beta - \alpha)^n \quad (\text{D.3.2})$$

*Demostración.* Sea  $M$  el número definido por

$$f(\beta) = P(\beta) + M(\beta - \alpha)^n \quad (\text{D.3.3})$$

La prueba consiste en demostrar que  $n!M = f^{(n)}(x)$  para un punto  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ , para esto se crea la función

$$g(t) = f(t) - P(t) - M(t - \alpha)^n \quad a \leq t \leq b \quad (\text{D.3.4})$$

donde, dado que  $P^{(k)}(t) = 0$  para  $k \geq n$ , la  $n$ -ésima derivada de  $g(t)$  esta dada por

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \quad a \leq t \leq b \quad (\text{D.3.5})$$

Ahora, el mostrar que  $n!M = f^{(n)}(x)$  para algún  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  es equivalente a mostrar que  $g^{(n)}(x) = 0$  para algún  $x$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ , esto se realiza a través del teorema del valor medio.

Primero observe que  $P^{(k)}(\alpha) = f^{(k)}(\alpha)$  para  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  entonces de (D.3.4) se tiene que

$$g(\alpha) = g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(n-1)}(\alpha) = 0 \quad (\text{D.3.6})$$

Ahora observe que de D.3.4 que  $g(\beta) = 0$  entonces por el teorema del valor medio, existe un punto  $x_1$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  en el cual  $g'(x_1) = 0$ , y ya que  $g'(\alpha) = 0$  existe en un punto  $x_2$  entre  $x_1$  y  $\alpha$  en el cual  $g''(x_2) = 0$ , al seguir recursivamente se llega a la conclusión de que  $g^{(n)}(x_n) = 0$  donde  $x_n$  es un punto entre  $x_{(n-1)}$  y  $\alpha$  el cual a su vez esta incluido entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

## D.4. Controlabilidad y Observabilidad

Para diseñar controladores en espacio de estado, primero hay que averiguar si el sistema es observable y controlable. La *controlabilidad* se ocupa del problema de poder dirigir un sistema de un estado inicial dado, a un estado arbitrario. La *observabilidad* se ocupa del problema de determinar el estado de un sistema dinámico a partir de observaciones de los vectores de salida y de control en un número finito de periodos de muestreo.

### D.4.1. Controlabilidad

Se dice que el sistema es *controlable* si existe una entrada  $u$  capaz de variar el estado inicial  $x_0$  a cualquier otro estado deseado  $x_t$  en un tiempo finito. Matemáticamente, un sistema es controlable si su *matriz de controlabilidad*  $P_c$  no es singular. La matriz de controlabilidad se define como

$$P_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (\text{D.4.1})$$

y el sistema es controlable si y sólo si el  $\det(P_c) \neq 0$ . Un sistema controlable es siempre *estabilizable*.

### D.4.2. Observabilidad

Se dice que un sistema es *observable* si cualquier estado  $x_0$  puede ser determinado mediante la salida del sistema y durante un tiempo finito. Matemáticamente, un sistema es observable si su *matriz de observabilidad*  $P_o$  no es singular. La matriz de observabilidad se define como

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{D.4.2})$$

y el sistema es observable si y sólo si el  $\det(P_o) \neq 0$ .

# **Bibliografía**

- [1] IEEE *Standard for synchrophasors for power systems*. IEEE std, C37.118-2005, 2006.
- [2] C. L. Phillips y H. T. Nagle, *Digital Control System Analysis and Design*, 3ª edición, Prentice Hall, 1995
- [3] D. S. Naidu, *Optimal Control Systems*, CRC Press LLC, 2003
- [4] Athanasios Papoulis, *Signal analysis*, McGraw Hill, 1977.
- [5] A. G. Phadke y J. S. Thorp, *Computer Relaying for Power Systems*, 1ª edición, Research Studies Press LTD, Sep. 1998
- [6] M. A. Platas. *Una Extensión a la Transformada de Fourier, la Transformada Taylor-Fourier*, Tesis de Doctorado, 2011.
- [7] J. A. de la O Serna, *Dynamic phasor estimates for power system oscillations and transient detection*, IEEE Trans. Instrumentation and Measurement 56 (2007), no.5.
- [8] M. Donolo y V. Centeno, *A fast quality assessment algorithm for phasor measurements*, IEEE Trans. Power Del. 20 (2005), no.4, 2407-2413.
- [9] John G. Proakis y Dimitris G. Monolakis. *Tratamiento digital de señales*, 4ª edición, Prentice Hall, 2007.
- [10] S. Haykin y B. Van Veen, *Señales y Sistemas*, 1ª edición, Limusa, 2004
- [11] J. A. de la O Serna y K. Martin, *Improving Phasor Measurements Under Power System Oscillations*, IEEE Trans, Power Syst.. volo.18, no.1, pp. 160-166, 2003.
- [12] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory*, Dover publications, 2004
- [13] J. A. de la O Serna y J. Rodriguez, *Instantaneous dynamic phasor estimates with Kalman filter*. IEEE PES General Meeting. 2010
- [14] J. A. de la O Serna y M. A. Platas. *Dynamic Harmonic Analysis Through Taylor-Fourier Transform*, IEEE Trans. Instrumentation and Measurement 60 (2011), no.3.
- [15] J. A. de la O Serna y J. Rodriguez, *Instantaneous oscillating phasor estimates with Taylor<sup>K</sup> – Kalman filters*. IEEE Trans. Power Syst.. in Press
- [16] J. Rodriguez, *Instantaneous oscillating phasor estimates with Taylor<sup>K</sup> – Kalman filters*. Tesis de Doctorado, 2011.
- [17] J. A. de la O Serna y J. Rodriguez, *Taylor-Kalman-Fourier Filters for Instantaneous Oscillating Phasor and Harmonic Estimates*. IEEE Trans. Instrumentation and Measurement 61 (2012), no.4.
- [18] J. A. de la O Serna y M. A. Platas. *Dynamic Phasor Estimates through Maximally Flat Differentiators*, IEEE Trans. Instrumentation and Measurement 59 (2010), no.7.

- [19] P. Mattavelli, A. Stankovic y G. Verghese, *SSR analysis with dynamic phasor model of thyristor-controlled serie capacitor*, IEEE Trans. Power Syst., vol. 14, no.1, pp.200-208, 1999.
- [20] J. H. Braslavsky, *Notas de clase de control automático 2*, Universidad Nacional de Quilmes, 2001.
- [21] K. Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, 2ª edición, Prentice Hall, 1996.
- [22] A. G. Phadke y J. S. Thorp. *Computer Relaying for Power Systems*. 1ª edición, Research Studies Press LTD. 1998
- [23] K. Ogata, *Ingeniería de Control Moderna*, 4ª edición, Prentice Hall, 2003
- [24] P. de Larminat, *Contrôle d'état standard*, Hermes Science Europe, 2000
- [25] Z. Wang y B. W. Surgenor, *A Problem With the LQ Control of Overhead Cranes*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 128, pp. 436-440, 2006
- [26] J. J. Gil Nobajas y A. R. Díaz-Cordovés, *Fundamentos de Control Automático de Sistemas Continuos y Muestreados*, Deposito Legal SS-1094-2009, 2009
- [27] B. D. O. Anderson y J. B. Moore, *Optimal Control, Linear Quadratic Methods*, Prentice Hall, 1989
- [28] D. G. Almazán, *Generación de Alarma ante oscilaciones mediante la Transformada Digital Taylor-Fourier*, Tesis de Maestría, 2011.
- [29] P. Castello, M. Lixia, C. Muscas y P. A. Pegoraro, *Impact of the Model on the Accuracy of Synchrophasor Measurement*, IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, DOI 10.1109/TIM,2012,2193699
- [30] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4ª edición, Prentice Hall, 2002.