

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA



“CONVECCIÓN NATURAL DE CALOR Y MASA EN
UNA CAVIDAD CILÍNDRICA CON PAREDES
ONDULADAS”

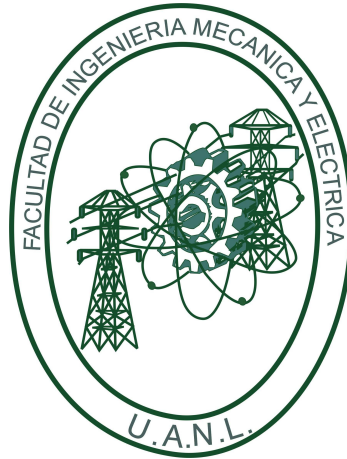
MONTERREY, NUEVO LEÓN

Por:
HUGO GUADALUPE RAMÍREZ HERNÁNDEZ

Como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRÍA en Ciencias
de la Ingeniería con Orientación en Energías Térmica y Renovable.

MAYO, 2011

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y
ELÉCTRICA



“CONVECCIÓN NATURAL DE CALOR Y MASA EN
UNA CAVIDAD CILÍNDRICA CON PAREDES
ONDULADAS”

MONTERREY, NUEVO LEÓN

Por:
HUGO GUADALUPE RAMÍREZ HERNÁNDEZ

Como requisito parcial para obtener el grado de MAESTRÍA en Ciencias
de la Ingeniería con Orientación en Energías Térmica y Renovable.

MAYO, 2011

A mis Padres
Sr. Hugo Guadalupe Ramírez Mendoza
Sra. Hermelinda Hernández Lara

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mis padres, Hugo Gpe. Ramírez Mendoza y Hermelinda Hernández Lara por todo su apoyo incondicional durante la realización de esta tesis.

A mis hermanos: Héctor, Hernán y Miguel Ángel por ser parte importante de mi vida.

A mis abuelos: Leonardo Hernández Ortíz e Hipólita Lara Martínez por todo su cariño.

A Luz B. Hernández por acompañarme en cada una de las etapas de mi vida y ser una gran amiga.

A la familia Ramírez Magallanes, en especial a Ángel Ramírez M. por siempre ser soporte en lo que he necesitado. A Angélica Ramírez y Linda C. Ramírez por los grandiosos días que pasamos juntos.

Al Cuerpo Académico: Procesos Termofluidodinámicos y Sistemas Energéticos, en especial al Dr. Fausto Alejandro Sánchez Cruz por su guía acertada en la realización de esta tesis, además de sus enseñanzas y consejos académicos y profesionales. Al Dr. Simón Martínez Mtz. por su orientación profesional a lo largo de estos años, permitirme incorporarme a la maestría y a su equipo de trabajo. A los profesores del Cuerpo Académico, Dr. Gustavo Rodríguez Morales, M.C. Miguel García Yera por sus enseñanzas en las aulas durante la maestría. Al Dr. Max Salvador Hernández por su apoyo en el aprendizaje del lenguaje de programación \LaTeX muy útiles para la redacción de esta tesis. Al Dr. Arturo Morales y al Dr. Santos Méndez por su colaboración en proyectos que realizamos durante la maestría.

A la empresa Whirlpool por el apoyo económico brindado a través del proyecto

FOMIX WHIRLPOOL-CONACyT, clave ECO-2007-C01-72835. En especial al Dr. Rodrigo Salgado, la Dra. Elvira Martínez y el Ing. Mario Navarro por permitir la colaboración y así realizar un proyecto importantísimo en mi carrera, la Cámara Climática de Bajo Costo.

A mis grandes amigos Juan Alberto Guerrero M., Linda Esperanza Frías R. por su compañía, consejos y reuniones tan especiales.

A los estudiantes que me ayudaron y colaboraron en diferentes proyectos durante mis estudios en la maestría: Aymhe Hinojosa, Andrés Patiño, Josefad.

A mis compañeros de la maestría con los que he pasado momentos gratos y he aprendido grandes cosas de cada uno de ustedes, Benjamín Zamudio Barrera, Roberto Eliud Soto E., Rubén D. Leal Garza, Jorge Vázquez, Jorge Díaz, Rafael Olvera, David Mares, Edgar Martínez, Bernardino Brizuela y Fernando Ibarra.

A las empresas que han confiado en mí para realizar proyectos en conjunto durante estos años: Control Pro, en especial al Ing. Jorge Rivera y el Ing. Leonel Martínez. A Nutec Bickley y TUNA-Villacero.

A CONACyT por el apoyo técnico a través del proyecto 62054.

A PAICyT-UANL por el apoyo técnico a través del proyecto IT182-09.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	V
1. Antecedentes	1
1.1. Introducción	1
1.2. Transferencia de calor por convección natural	2
1.2.1. Ecuaciones de gobierno	3
1.2.2. Convección natural en cavidades	5
1.2.3. Transferencia de calor y masa por convección natural	10
1.2.4. Estado del arte del estudio de la convección natural	13
1.3. Transferencia de calor por convección natural en medios porosos saturados	16
1.3.1. Ecuación de movimiento	18
1.3.2. Transporte de calor	21
1.3.3. Transporte de masa	22
1.3.4. Convección natural en cavidades llenas de un medio poroso saturado	23
1.3.5. Problema de doble difusión	25
1.3.6. La dispersión hidrodinámica	26
1.3.7. La convección natural en medios porosos	28
1.4. Objetivo de la presente investigación	31
2. Metodología	33
2.1. Métodos numéricos típicamente utilizados en la solución de problemas de convección	33
2.2. Cavidad cilíndrica llena de un fluido newtoniano	35

2.2.1. Ecuaciones de gobierno	35
2.2.2. Adimensionalización de las ecuaciones y cambio de coordenadas	36
2.2.3. Condiciones de frontera e iniciales	39
2.2.4. Número de Nusselt promedio	41
2.2.5. Número de Sherwood promedio	42
2.2.6. Discretización de las ecuaciones	42
2.2.7. Discretización de la variable temporal	42
2.2.8. Algoritmo de solución	43
2.2.9. <i>Heatlines</i> y <i>Masslines</i>	43
2.3. Cavity cilíndrica llena de un medio poroso saturado	47
2.3.1. Ecuaciones de gobierno	48
2.3.2. Adimensionalización de las ecuaciones y cambio de coordenadas	49
2.3.3. Condiciones de frontera e iniciales	51
2.3.4. Número de Nusselt promedio Nu_p	52
2.3.5. Número de Sherwood promedio Sh_p	52
2.3.6. Discretización de las ecuaciones	53
2.3.7. Discretización de la variable temporal	53
2.3.8. Algoritmo de solución	53
3. Resultados	54
3.1. Convección térmica de un fluido libre	55
3.1.1. Calentamiento desde la superficie inferior	55
3.1.2. Calentamiento desde la pared superior	62
3.2. Transferencia de calor y masa en un fluido libre	68
3.2.1. Efecto del número de Rayleigh Ra y relación de flotación N	69
3.2.2. Efecto de altos números de Schmidt	78
3.2.3. Efecto de la relación de aspecto	81
3.3. Transferencia de calor y masa en un medio poroso	84
3.3.1. Efecto del número de Schmidt Sc y la porosidad φ	84
3.3.2. Efecto de la longitud de onda adimensional (Λ)	90
3.3.3. Efecto de la amplitud (Γ)	91
3.3.4. Efecto de la relación de aspecto (ϵ)	95

4. Conclusiones	102
4.1. Convección térmica en estado permanente	103
4.2. Transporte de calor y masa en estado transitorio	105
4.3. Transporte de calor y masa en estado transitorio en el medio poroso	107
A. Coeficientes	123

RESUMEN

En este documento se presenta un estudio numérico del transporte de calor y masa por convección natural en una cavidad cilíndrica con la pared vertical ondulada. En la investigación se evaluó el efecto de la ondulación de la pared en los fenómenos de transporte en la cavidad. En particular se analizó una cavidad cilíndrica bidimensional axisimétrica llena de un fluido newtoniano con propiedades constantes, excepto la densidad, que se calcula mediante la aproximación de Boussinesq. También, se consideró el caso de la cavidad llena de un medio poroso isotrópico saturado de un fluido newtoniano de Boussinesq con propiedades constantes. Primeramente, se abordó el problema del transporte de calor en estado permanente para la cavidad llena de un fluido. Se analizaron dos casos, la cavidad calentada desde la superficie inferior y el caso con calentamiento desde la pared superior, ambos a temperatura constante. En todos los casos la pared ondulada se encuentra aislada térmicamente. Posteriormente, se estudió el estado transitorio en donde se incluyen de forma simultánea los efectos de los gradientes térmicos y de concentración. En el régimen transitorio se consideró el caso con el calentamiento desde abajo y el enfriamiento desde arriba a temperatura constante. La condición que se estudió considera una alta concentración en la pared superior, la pared vertical ondulada es adiabática, todas las paredes son impermeables. Como condiciones iniciales se impone una temperatura uniforme media al fluido, con una concentración de especies de cero y velocidad cero en toda la cavidad. Para la cavidad llena de un medio poroso saturado sólo se considera el estado transitorio y se imponen las mismas condiciones que el caso de la cavidad llena de fluido. Para resolver las ecuaciones de gobierno se realizó una transformación analítica para obtener un dominio computacional cuadrado a partir del dominio irregular original. Los parámetros adimensionales que gobiernan el problema son los números de Rayleigh, Prandtl, Schmidt y la relación de flotación. Por otra parte,

en el caso de la cavidad llena de un medio poroso saturado los parámetros adimensionales importantes son los números de Rayleigh-Darcy, Prandtl efectivo, Schmidt efectivo, la relación de flotación, la relación de calores específicos y la porosidad. En cuanto a los factores geométricos de la cavidad, se evalúa el efecto de la longitud de onda adimensional, la amplitud adimensional y la relación de aspecto de la cavidad. Los resultados muestran el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio en la pared superior. Se estudió el efecto de los diferentes parámetros mencionados sobre la transferencia de calor y masa en la cavidad. Para ilustrar el comportamiento de los fenómenos de transporte en la cavidad se crearon mapas de las isoterms, las líneas de isoconcentración y la función de corriente para los diferentes casos analizados. Adicionalmente, se muestra el transporte de calor y masa mediante las *Heatlines* y *Masslines*. Se evaluó de forma cuantitativa los efectos de los parámetros de ondulación, i.e. amplitud y longitud de onda, sobre el transporte de calor, masa y cantidad de movimiento en la cavidad.

CAPÍTULO 1

ANTECEDENTES

1.1. Introducción

Los fenómenos de transferencia de calor y masa por convección natural son muy comunes y han sido estudiados durante las últimas tres décadas debido a su gran importancia en procesos industriales y fenómenos naturales, e.g. la extracción de petróleo, enfriamiento de equipo electrónico, corrientes marinas, contaminación de lagos y mares, el transporte de contaminantes en el subsuelo y aguas subterráneas, entre otros. Los estudios clásicos de transferencia de calor y de masa por convección natural en recintos típicamente consideran geometrías regulares y simples para explicar los fenómenos de transporte que ocurren en estos casos, e.g. cavidades cuadradas, cilíndricas, esféricas, entre otras. Todos estos estudios consideran que las superficies de la geometría son planas o sin irregularidades. Esta consideración es válida para muchas aplicaciones en la ingeniería, sin embargo, cuando la rugosidad o las irregularidades de las superficies son considerables, pueden afectar a la transferencia de calor y masa. Debido a la dependencia en la distribución de temperatura, concentración y velocidad del fluido cerca de la superficie, si ésta presenta rugosidad o irregularidades los fenómenos de transporte se pueden ver afectados. Una forma sencilla de abordar el tema de las irregularidades en una superficie es considerar que la rugosidad de la superficie puede ser simulada y simplificada por una función sinusoidal.

Existen algunos trabajos que han abordado el tema de la transferencia de calor o de masa debido a la convección natural cerca de paredes onduladas inmersas en un fluido semi-infinito, o problemas de cavidades bidimensionales rectangulares con paredes onduladas. En esta tesis se presenta una investigación basada en resultados numéricos de la solución del problema de la transferencia de calor y masa en el

interior de una cavidad cilíndrica con la pared vertical ondulada. Se hace énfasis en los efectos que tiene la pared ondulada en la transferencia de calor y de masa. Primeramente, se consideró el problema de la cavidad llena de un fluido newtoniano. Posteriormente, se desarrolló el análisis de la cavidad llena de un medio poroso saturado. Estos dos estudios arrojan resultados importantes que son un gran aporte al acervo de conocimientos en la disciplina de la transferencia de calor y masa, cuyas aplicaciones van desde la contaminación de aguas subterráneas, hasta aplicaciones ingenieriles como los colectores solares o refrigeradores domésticos.

En este primer capítulo se presenta la teoría de la transferencia de calor por convección natural en fluidos, posteriormente, la teoría básica para el estudio de la convección natural en medios porosos. Finalmente, se considera la transferencia de calor y masa en medios porosos, específicamente, el fenómeno de doble difusión en medios porosos.

1.2. Transferencia de calor por convección natural

La convección se refiere al transporte debido al movimiento del fluido. El fenómeno de la convección puede ser clasificado en convección forzada, que implica que exista un mecanismo que permita que haya fluidez del fluido. Existen problemas en la ingeniería en los que los fluidos se mueven gracias al trabajo realizado por ventiladores o bombas, así como en gases y líquidos, respectivamente. Por otro lado, la convección natural se caracteriza por la ausencia de un medio externo que mueva al fluido, éste adquiere cantidad de movimiento debido a cambios de densidad en el fluido, generalmente por gradientes de temperatura o de concentración, provocando movimiento en presencia de la gravedad.

La convección natural ocurre en muchos fenómenos naturales y problemas de ingeniería. Se presenta cuando el campo de temperaturas en un fluido no es uniforme y existe un campo de aceleración, comúnmente la gravedad. En algunas ocasiones la transferencia de calor por convección natural es muy pequeña comparada con los otros mecanismos de transferencia de calor, en estos casos es despreciable su efecto, sin embargo, en otros casos es el mecanismo dominante.

En la convección natural el movimiento del fluido se debe a la existencia de fuerzas de empuje, también llamadas fuerzas de flotación. Cabe destacar que los

gradientes de densidad en el fluido no garantizan el movimiento del fluido, e.g. un fluido que está contenido en una cavidad rectangular en donde la pared superior se encuentra a una temperatura mayor a la de la pared inferior no necesariamente ocasiona movimiento en el fluido, debido a que el fluido con mayor densidad siempre se encuentra depositado en la zona inferior de la cavidad y no tiende a moverse.

Existen dos parámetros adimensionales relacionados con la intensidad de la transferencia de calor por convección natural. El número de Grashof y el número de Prandtl. El primero está definido como:

$$Gr_{L_c} = \frac{\beta g \Delta T L_c^3}{\nu^2}, \quad (1.1)$$

en donde β es el coeficiente de expansión térmica, g es la aceleración de la gravedad, ΔT es la diferencia de temperatura, L_c es la longitud característica y ν es la viscosidad cinemática. El otro parámetro relacionado a la transferencia de calor por convección natural es el número de Prandtl que está definido como:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad (1.2)$$

donde α es la difusividad térmica. Este parámetro relaciona la difusividad de cantidad de movimiento con la difusividad de calor. La adimensionalización de las ecuaciones muestra que en general el parámetro que gobierna la convección natural resulta de la multiplicación del número de Grashof y el número de Prandtl. Este parámetro adimensional es llamado el número de Rayleigh y puede entenderse como la relación entre las fuerzas de flotación y las fuerzas viscosas presentes en el fluido sometido a convección natural. Este número es muy importante ya que también está relacionado con el régimen del flujo de convección natural, i.e. establece si el flujo es laminar o turbulento. El número de Rayleigh está definido como:

$$Ra_{L_c} = Gr_{L_c} Pr = \frac{\beta g \Delta T L_c^3}{\nu \alpha}. \quad (1.3)$$

1.2.1. Ecuaciones de gobierno

Para estudiar la transferencia de calor por convección natural es necesario que las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos y la ecuación de la energía estén acopladas, además, la solución está restringida por la ecuación de continuidad. Si se

considera un flujo incompresible, sin generación de calor y se desprecia el efecto de la disipación viscosa, las ecuaciones de gobierno del problema son las siguientes:

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \bar{u} + \bar{F}, \quad (1.5)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (1.6)$$

La ecuación (1.4) es la ecuación vectorial de la continuidad, donde \bar{u} es el vector de la velocidad. La ecuación (1.5) es la ecuación de la cantidad de movimiento en forma vectorial donde D/Dt es la derivada material, ∇P es el gradiente de presión, μ es la viscosidad dinámica, ∇^2 es el operador laplaciano y \bar{F} es el vector de las fuerzas de cuerpo. Por último la ecuación (1.6) es la ecuación vectorial de la energía, donde c_p es el calor específico a presión constante, T es la temperatura, y k es la conductividad térmica del fluido.

Existen fenómenos en los que la convección natural no solamente ocurre debido a gradientes térmicos, sino que también existen gradientes de concentración. Estos fenómenos son frecuentes en la oceanografía, en la contaminación de acuíferos y en general cualquier tipo de transporte de especies. En estos casos es necesario tomar en cuenta el transporte de masa. Es decir, además de las tres ecuaciones de gobierno principales se agrega una cuarta ecuación que modela la transferencia de masa, misma que en forma vectorial se expresa como:

$$\frac{DC}{Dt} = \nabla \cdot (D \nabla C), \quad (1.7)$$

donde C es la concentración de especies, D es el coeficiente de difusión molecular binaria. La ecuación de transferencia de masa también se encuentra acoplada con la ecuación de cantidad de movimiento, y en un caso más general también con la ecuación de la energía. Las ecuaciones de transporte expresadas en forma vectorial pueden ser empleadas en cualquier sistema de coordenadas aplicando los operadores que correspondan.

Actualmente se tiene una cantidad importante de literatura que refiere a la convección natural [2, 3, 4], en la que se discuten diferentes problemas, con muchas

variantes geométricas y condiciones físicas. Es de especial interés para esta investigación entender a detalle el problema de la convección natural en cavidades, por lo que a continuación se presentan conceptos relevantes de dicho problema.

1.2.2. Convección natural en cavidades

Tradicionalmente la convección natural se clasifica en dos tipos, convección externa y convección en cavidades. En la primera típicamente, una superficie está rodeada por un fluido de extensión infinita. Algunos análisis han considerado placas verticales, placas inclinadas, cilindros horizontales, esferas inmersas en fluidos, entre otros. Por su parte, la convección natural en cavidades toma lugar en regiones cerradas, e.g. recintos rectangulares, cilindros concéntricos y esferas concéntricas [5]. La presente tesis se enfoca al estudio de la convección natural en cavidades. A continuación se presentan algunos aspectos particulares en este tipo de fenómenos.

La convección natural en cavidades las encontramos en muchos problemas de ingeniería, e.g. ventanas con doble vidrio, colectores solares, en las paredes huecas de las casas, en aplicaciones electrónicas, entre otras. Un fluido en el interior de una cavidad experimenta la convección natural si las paredes de la cavidad no se encuentran a temperatura uniforme. Las fuerzas de flotación causan que el fluido circule a través de la cavidad transportando el calor. Cabe mencionar, que si las fuerzas de flotación no son lo suficientemente grandes para vencer las fuerzas viscosas, la circulación es despreciable y la transferencia de calor sólo se presenta por el mecanismo de la conducción.

La convección natural en cavidades varía según la geometría y orientación de la cavidad y, regularmente se clasifica en dos categorías: cavidades calentadas lateralmente y cavidades calentadas por abajo, la primera encuentra su aplicación en los colectores solares, los aislamientos con doble pared, y la circulación de aire a través de los cuartos de edificios.

Convección natural en una cavidad calentada lateralmente

El caso típico encontrado en la literatura [2] consiste en una cavidad rectangular de altura H' y longitud horizontal L' , como se muestra en la Figura 1.1. Si se considera que el fenómeno es bidimensional, en estado permanente, con propiedades

constantes, fluido newtoniano, una diferencia de temperaturas $T_H - T_C$ y paredes horizontales aisladas, las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía, que modelan el fenómeno son las siguientes:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.8)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.9)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - g[1 - \beta(T_H - T_C)], \quad (1.10)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (1.11)$$

En este caso el principal parámetro adimensional que gobierna el problema es el número de Rayleigh $Ra_{H'}$ definido como:

$$Ra_{H'} = \frac{\beta g (T_H - T_C) H'^3}{\nu \alpha}, \quad (1.12)$$

donde $T_H > T_C$.

En cavidades rectangulares calentadas lateralmente es común diferenciar cuatro regímenes de transferencia de calor por convección natural. I) Régimen de conducción, II) Sistemas muy altos, III) Régimen de capa límite, IV) Sistemas muy largos. Estos regímenes se ilustran en la Figura 1.2. Cada régimen tiene sus características y comportamiento muy particular. A continuación se da una breve descripción.

- **(I) Límite de conducción.** En este caso la temperatura varía linealmente a través de la cavidad, por lo tanto la transferencia de calor entre las dos paredes verticales es del orden de $kH'\Delta T/L'$. El gradiente de temperatura horizontal $\Delta T/L'$ genera una celda de convección muy lenta en dirección de las manecillas del reloj, sin embargo, la influencia en la transferencia de calor de este movimiento es insignificante.
- **(II) Límite de la cavidad muy alta.** En la mayoría de las cavidades altas la temperatura varía linealmente entre las dos paredes verticales. La transferencia de calor es del orden de $kH'\Delta T/L'$, como en el caso anterior. La circulación en

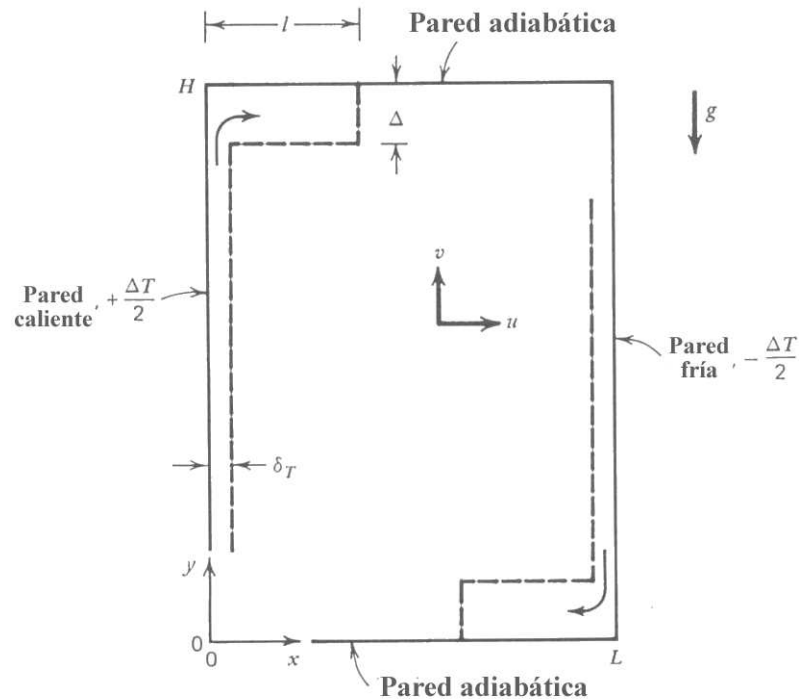


Figura 1.1: Convección natural en una cavidad rectangular calentada lateralmente. Considerada de Bejan [2].

favor de las manecillas del reloj y, se caracteriza por capas muy cercanas a las paredes horizontales, tanto la superior como la inferior.

- **(III) Régimen de capa límite (Altos números de Rayleigh).** Se identifican claramente capas límite térmicas a lo largo de las paredes que se encuentran a temperatura constante. La transferencia de calor es del orden de $(k/\delta_T) H' \Delta T$, donde δ_T es el espesor de la capa límite térmica. Las paredes adiabáticas horizontales mantienen capas límite térmicas distintas. La mayor parte de la cavidad (el núcleo) tiene poca cantidad de movimiento y se encuentra estratificado térmicamente.
- **(IV) Régimen de cavidad con poca altura.** La transferencia de calor es dominada por la presencia de capas límite térmicas verticales, por lo tanto es del orden de $(k/\delta_T) H' \Delta T$. Esta escala representa el límite superior debido a

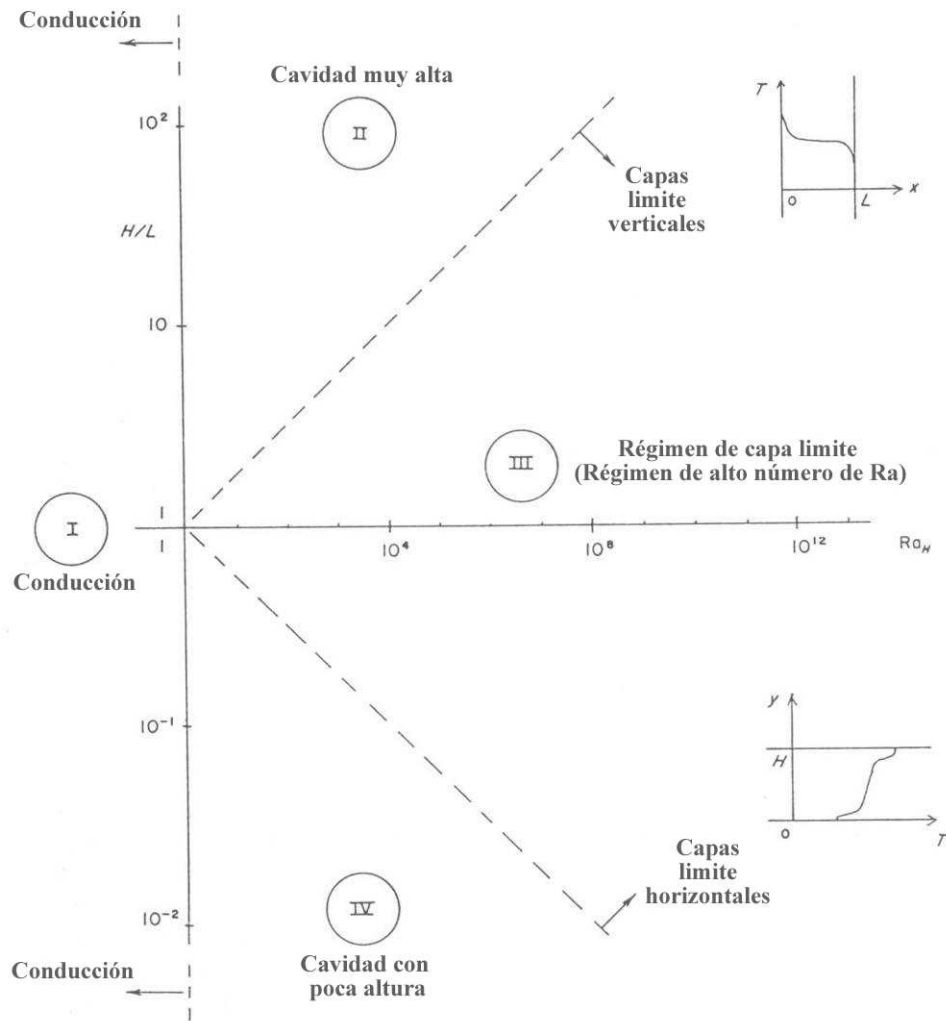


Figura 1.2: Regímenes de convección natural en cavidades rectangulares, considerada de Bejan [2]

que el largo núcleo interior añade un efecto adicional de aislamiento. En esta región, las dos secciones de contra flujo horizontal mantienen un buen contacto térmico, dando como resultado un buen aislamiento térmico en la dirección horizontal.

La figura 1.3 muestra el comportamiento del flujo para los diferentes regímenes de convección mencionados.

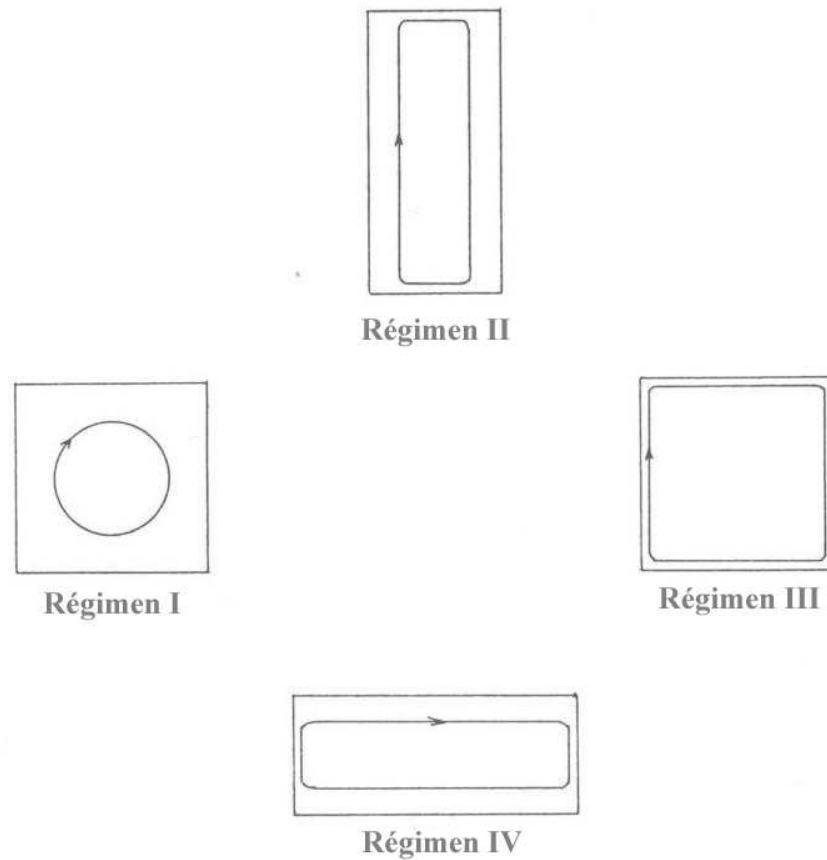


Figura 1.3: Comportamiento del flujo para los diferentes regímenes en convección natural en cavidades rectangulares. Considerada de Bejan [2]

Convección natural calentada por abajo

La diferencia fundamental entre las cavidades calentadas lateralmente y las calentadas por su pared inferior consiste en que el movimiento del fluido por flotación en las cavidades calentadas lateralmente se presenta inmediatamente después de que se impone una pequeña diferencia de temperaturas en las paredes laterales ($T_h \neq T_c$). Por el contrario, en las cavidades calentadas desde la pared inferior no se presenta movimiento hasta rebasar un límite crítico del número de Rayleigh. Por ejemplo, cuando la cavidad es lo suficientemente larga y de poca altura en la dirección vertical, la condición crítica para que inicie movimiento en el fluido está limitado por el número de Rayleigh crítico:

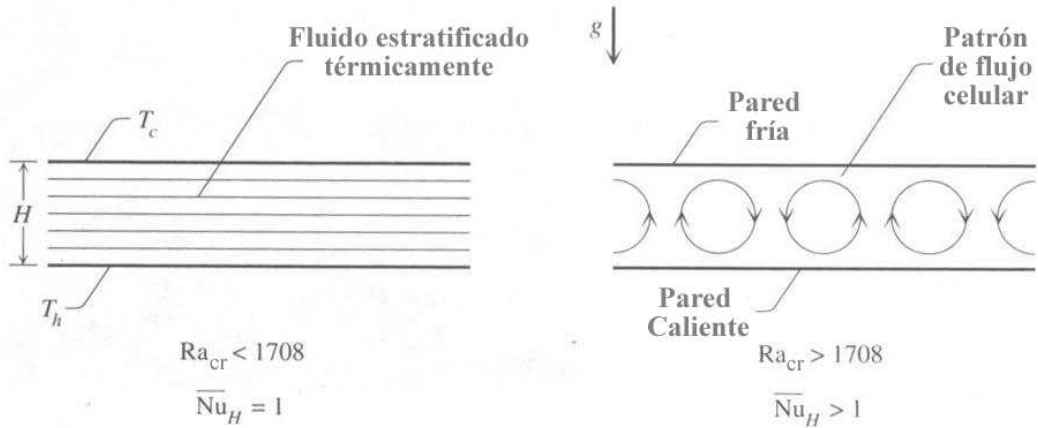


Figura 1.4: Convección natural de Bénard, considerada de Bejan [2]

$$Ra_{cr} \geq 1708, \tag{1.13}$$

donde $Ra_{cr} = g\beta(T_H - T_C)H^3/(\alpha\nu)$. Después de sobrepasar el límite de 1708 se observa un flujo bidimensional como el que se muestra en la figura 1.4. Este flujo es conocido como celdas de Bénard, o convección de Bénard, en honor a H. Bénard, quien reportó por primera vez este fenómeno en el año 1900.

1.2.3. Transferencia de calor y masa por convección natural

La transferencia de masa tiene mucha semejanza con la transferencia de calor. Como se puede ver en la ecuación 1.7, el transporte de masa es análogo al transporte de energía, ecuación (1.6). La semejanza entre los dos fenómenos de transporte es muy notoria. La transferencia de calor por conducción se calcula mediante la ley de Fourier de la conducción de calor:

$$q'' = -k\nabla T, \tag{1.14}$$

donde q'' es el flujo de calor por conducción, k es la conductividad térmica y ∇T es el gradiente de la temperatura. De manera análoga, en un medio sin movimiento y con gradientes de concentración, la transferencia de masa ocurre por difusión pura y se calcula mediante la Ley de Fick de la difusión, que se expresa como:

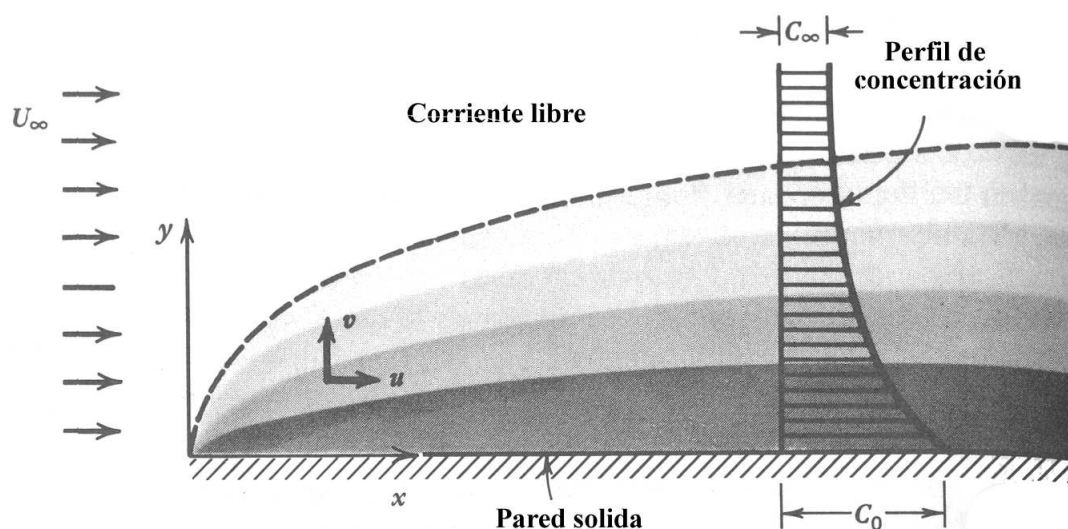


Figura 1.5: Esquema que muestra la formación de la capa límite de concentración en una placa plana con concentración constante, considerada de Bejan [2]

$$J = -D\nabla C, \quad (1.15)$$

donde J es el flujo de masa por difusión, D es el coeficiente de difusión binario de masa y ∇C es el gradiente de concentración en el fluido [28]. La analogía entre la transferencia de calor y la transferencia de masa se aprecia fácilmente cuando nos enfocamos en el fenómeno de la capa límite de concentración, esquematizada en la figura 1.5, se muestra un flujo uniforme con velocidad U_∞ , que fluye paralelamente a una superficie, la cual mantiene una concentración constante C_w de una cierta especie [2, 6, 7, 8]. A la transferencia de masa debida al movimiento del fluido se le llama convección de masa o transferencia de masa por convección.

La relación entre la difusividad de la cantidad de movimiento y la difusividad térmica se expresan a través número de Prandtl Pr , que se define como $Pr = \nu/\alpha$. Análogamente, la relación entre la difusividad de la cantidad de movimiento y la difusividad de la masa se expresa mediante el número adimensional de Schmidt (Sc), que se define como:

$$Sc = \frac{\nu}{D}. \quad (1.16)$$

En un flujo laminar el crecimiento de las capas límite hidrodinámica y térmica

depende del número de Prandtl, Pr . Por su parte el crecimiento de las capas límite hidrodinámica y de concentración dependen del número de Schmidt, Sc . El número adimensional que relaciona la difusión de calor con la difusión de masa es el número de Lewis (Le), definido como:

$$Le = \frac{\alpha}{D}. \quad (1.17)$$

En los análisis de transferencia de calor por convección generalmente es conveniente expresar el coeficiente de transferencia de calor en forma adimensional, a través del número de Nusselt,

$$Nu = \frac{hL_c}{k}, \quad (1.18)$$

donde h es el coeficiente de transferencia de calor por convección, L_c es una longitud característica y k es la conductividad térmica. Por otra parte, el número de Sherwood (Sh) representa el coeficiente de transferencia de masa por convección en forma adimensional y se define como

$$Sh = \frac{h_m L_c}{D}, \quad (1.19)$$

donde h_m es el coeficiente de transferencia de masa por convección y D es el coeficiente de difusión molecular binario.

Uno de los parámetros más importantes en la convección natural es el número de Rayleigh definido como $Ra = (\beta g \Delta T L_c^3) / (\nu \alpha)$; su equivalente en la transferencia de masa por convección y se le conoce como número de Rayleigh de concentración y se define como:

$$Ra_c = \frac{\beta_c g \Delta C L_c^3}{\nu D}, \quad (1.20)$$

donde β_c es el coeficiente de expansión de concentración.

Adicionalmente, existe un parámetro adimensional que relaciona la naturaleza de las fuerzas de flotación presentes en el fluido, es decir, las fuerzas de flotación debidas a gradientes de concentración y a gradientes térmicos. Este parámetro se conoce como relación de flotación y se define como:

$$N = \frac{\beta_c \Delta C}{\beta \Delta T}. \quad (1.21)$$

1.2.4. Estado del arte del estudio de la convección natural

La convección natural debida a gradientes térmicos o su combinación con gradientes de concentración tiene gran relevancia en estudios ambientales y en la ingeniería aplicada. En la literatura existen una amplia variedad de análisis para diferentes aplicaciones. Frecuentemente la convección mixta con gradientes térmicos y de concentración se estudia para comprender el comportamiento del transporte de calor y contaminantes a través de un recinto. Qj-Hong et al. [31] estudiaron la convección mixta con doble difusión en régimen laminar en un recinto bidimensional con fuentes discretas de calor y contaminante. Los resultados son descritos mediante la función de corriente, la *heatline* y la *massline*. Los parámetros que gobiernan el problema son el número de Grashof, la razón de flotación y el número de Reynolds. Los resultados muestran el movimiento del aire, las líneas del flujo de calor y de contaminante. Estos flujos son definidos por la interacción entre la flotación, debida a la fuente de calor y a la fuente de contaminante, y la convección forzada inducida por un ventilador. Por otra parte Hong Tao [15] estudió la convección natural en una cavidad rectangular que contiene en su interior 1, 4, 9, 16, 36 y hasta 64 bloques cuadrados que sirven de obstáculo al flujo producido por la flotación. El fenómeno se estudió numéricamente y se consideró un fluido newtoniano con propiedades constantes. La cavidad se estudia con calentamiento lateral y también con calentamiento desde abajo, con paredes isotérmicas y con flujo de calor. Adicionalmente, se consideraron condiciones de frontera transitorias. Hong obtuvo correlaciones para el número de Nusselt para el caso de estado permanente con calentamiento lateral, para el caso de paredes isotérmicas y con flujo de calor. Hong estudió el fenómeno en los rangos del número de Rayleigh entre 10^5 y 10^8 y para números de Prandtl Pr de 0.01 a 1. Por su parte, Chen [16] realizó un estudio numérico de la transferencia de calor y masa en una cavidad rectangular debida a la presencia de un cilindro sumergido en un fluido estratificado en su concentración. Adicionalmente, el cilindro funcionó como fuente de calor isotérmica, al tiempo que las paredes verticales se mantienen a una temperatura constante menor a la temperatura del cilindro, cuando las paredes horizontales se encuentran aisladas térmicamente y todas las paredes se consideran impermeables. El flujo ocasionado por las fuerzas de flotación, presenta inestabilidades por la interacción entre los gradientes de temperatura y concentración verticales, además de la interacción

entre los gradientes de temperatura horizontales con los gradientes de concentración verticales. El problema se estudió para números de Prandtl y Lewis de 6.59 y 80, respectivamente, y para números de Rayleigh de 5×10^5 y 2×10^6 , y diferentes valores de la razón de flotación $N = 4, 2.67, 1.33$.

La transferencia de calor y masa por convección natural desde superficies que no son planas, difiere en su comportamiento respecto al caso con superficies uniformes o rectas. Las paredes corrugadas o con ondulaciones modifican el movimiento del fluido y la transferencia de calor y de masa. Este tipo de problemas ha cobrado interés por la necesidad de observar el efecto que tiene la pared. Ashjaee *et al.* [17] estudiaron la transferencia de calor por convección natural desde una pared ondulada a temperatura constante y calcularon el coeficiente de transferencia de calor local usando el interferómetro Mach-Zehner. Las mediciones experimentales se llevaron a cabo para una relación de amplitud-longitud de onda de 0.05, 0.1 y 0.2, y para números de Rayleigh entre 2.9×10^5 a 5.8×10^5 . Se compararon los resultados numéricos, obtenidos mediante un código de volúmenes finitos, con los resultados experimentales obteniendo una buena concordancia. Los resultados revelaron que el coeficiente de transferencia de calor promedio decrece conforme la relación amplitud-longitud de onda aumenta. Los datos experimentales se ajustaron a una sola ecuación con la cual se obtiene el número de Nusselt local a lo largo de la superficie ondulada, ésta como función de la relación amplitud-longitud de onda y el número de Rayleigh. Hossain *et al.* [18] estudiaron los efectos combinados de las fuerzas de flotación debido a gradientes térmicos y de concentración en presencia de una pared ondulada a temperatura constante y concentración constante. El estudio centró su atención en la evolución del esfuerzo cortante en la pared, en la razón de transferencia de calor y en el gradiente de concentración en la superficie para diferentes valores de los parámetros de gobierno. El número de Schmidt Sc se trabajó en el rango de 7 a 1500, valores apropiados para diferentes concentraciones de especies en el agua ($Pr = 7$). La amplitud de la onda de la superficie se consideró entre 0.0 y 0.4, y la razón de flotación entre 0.0 y 1.0. En general los autores encontraron que la presencia de ondulaciones en la pared provoca un espesor mayor en la capa límite, reduce el área de transferencia de calor, el gradiente de concentración y esfuerzo cortante. Por su parte Molla *et al.* [19] estudiaron la convección natural debida a una pared ondulada con flujo de calor empleando la teoría de la capa límite. La superficie que estudiaron

se compuso de dos funciones senoidales, una onda principal y su primer armónico. Los resultados numéricos demuestran que el armónico adicional altera el campo de velocidades y la distribución de temperaturas cerca de la superficie. Javad [20] estudió el movimiento del fluido y la transferencia de calor en una cavidad en estado transitorio. La cavidad consistió en dos paredes onduladas y verticales, y dos paredes horizontales sin ondulación. Las paredes horizontales se consideraron adiabáticas y las paredes onduladas isotérmicas. La ondulación de las paredes se aproximan a la función senoidal. La simulación se llevó a cabo para números de Grashof de 10^3 y 10^6 , número de Prandtl entre 0.5 y 0.4, y el parámetro llamado razón de onda (ancho promedio / longitud de onda) de 0.5 y 1.0. Javad presentó sus resultados mediante la función de corriente e isotermas, mostrando también el valor promedio del número de Nusselt.

Existen algunos estudios numéricos en donde una cavidad cuadrada bidimensional tiene alguna de sus paredes con superficie ondulada. Dalal y Kumar Das [21] analizaron el efecto del ángulo de inclinación en la convección térmica en régimen laminar debido a una pared ondulada con temperatura constante en una cavidad cuadrada. Para el caso de una cavidad diferencialmente calentada y con una pared ondulada, el número de Nusselt es menor que el que corresponde a una cavidad cuadrada con paredes planas, según Adjlout *et al.* [22]. Aounallah *et al.* [25] encontraron que la turbulencia mejora la transferencia de calor por convección en la superficie de la pared ondulada en una cavidad cuadrada con altos números de Rayleigh y, contrario a lo que sucede con el flujo laminar, la presencia de la pared ondulada incrementa el número de Nusselt local. Rostami [23] estudió la transferencia de calor y la dinámica de fluidos transitoria bidimensional en una cavidad calentada lateralmente por una pared ondulada y con paredes horizontales planas y adiabáticas. Dalal y Kumar [21] estudiaron la convección natural dentro de una cavidad bidimensional con una pared vertical ondulada. La pared se calentó a una temperatura que varía espacialmente mientras las otras tres paredes se mantienen a temperatura constante. Se calculó el número de Nusselt local y promedio para los regímenes dominados por la conducción y por la convección. Otros análisis consideraron los fenómenos de transporte en estado permanente con absorción de soluto en un canal con paredes onduladas, como el de Woollard *et al.* [26]. También ha sido objeto de estudio las variaciones de la viscosidad y de la conductividad térmica en la magneto-hidrodinámica [27], y su

efecto en el coeficiente de fricción local, el número de Nusselt y Sherwood.

1.3. Transferencia de calor por convección natural en medios porosos saturados

Antes de presentar las ecuaciones que modelan los fenómenos de transporte de calor y masa por convección natural en medios porosos es necesario definir algunos conceptos básicos.

Medio Poroso

Se le llama **medio poroso** (MP) a un material que consiste de una matriz sólida con espacios interconectados. Se considera que la matriz sólida es rígida o que está sometida a una deformación despreciable. El espacio interconectado se conoce como poros y son los que permiten el flujo de uno o más fluidos a través del material. En la situación más simple el espacio está saturado por un sólo fluido. A esta situación se le llama fluido en una sola fase. En un flujo con dos fases un líquido y un gas cubren la totalidad o parte del espacio [1].

Porosidad

La porosidad (φ) de un MP está definida como la fracción del volumen total del medio que es ocupado por el espacio vacío. Esto implica que $1-\varphi$ es la fracción que está ocupada por el sólido. Al definir la porosidad de esta manera se supone que todo el fluido está interconectado. En medios porosos naturales la porosidad no excede el valor de 0.6. Para arreglos de esferas sólidas de diámetro uniforme la porosidad puede variar entre los límites 0.2595 en arreglo romboedro y 0.4764 en arreglo cúbico [1].

Fractura

Una fractura es una parte del espacio vacío de un medio poroso la cual tiene una configuración tal que una de sus dimensiones, llamada apertura, es mucho más pequeña que las otras dos. Un medio poroso fracturado es aquel que está compuesto por dos partes, una red de fracturas y bloques de medio poroso [9].

Aproximación del continuo

Resulta complicado estudiar el flujo de fluidos en un medio poroso, análogamente como se estudia en los fluidos libres con las ecuaciones de Navier-Stokes. Resulta imposible medir las variables necesarias (presión, velocidad, flujo másico, densidad, etc.) para aplicarlas al modelo y después validar dicho modelo. Estas variables tendrían que ser medidas en un nivel microscópico. Debido a estas complicaciones, el problema es transformado de un nivel microscópico a un nivel macroscópico en el cual el problema es reformulado en términos de los promedios de las variables microscópicas. Estos promedios son variables medibles. Esta aproximación es llamada la aproximación del continuo [9].

Volumen Representativo Elemental (REV)

El concepto de Volumen Representativo Elemental (REV), presentado por Bear [10], es fundamental para la descripción matemática del flujo de fluidos en un medio poroso. El concepto del REV consiste en definir un volumen en donde las propiedades del medio poroso corresponden a promedios de las propiedades en la escala microscópica, i.e. tamaño de grano y tamaño del poro. Estas propiedades son representadas por un continuo equivalente en una escala mayor descrito por las nuevas propiedades. El REV debe ser suficientemente grande para evitar las fluctuaciones indeseables de los promedios de las propiedades, además, debe ser lo suficientemente pequeño para evitar la dependencia espacial de las variables [12]. En la Figura 1.6 se muestra la zona en la que se ubica el REV.

Velocidad de Darcy

Si se considera un modelo continuo para un medio poroso basándose en el concepto de REV, y si además se considera un volumen de control lo suficientemente grande comparado con el tamaño de poro, entonces es posible obtener valores promedio confiables para las propiedades. Los valores promedio no deben ser sensibles al elemento elegido, sin embargo, existe una diferencia entre los promedios tomados con respecto al volumen del elemento V_m (que incluye la matriz sólida y los poros) y el tomado con respecto al volumen del fluido V_f . Por ejemplo, la velocidad promedio con respecto al volumen V_m se identifica como $\bar{v} = (u, v, w)$. Esta cantidad tiene

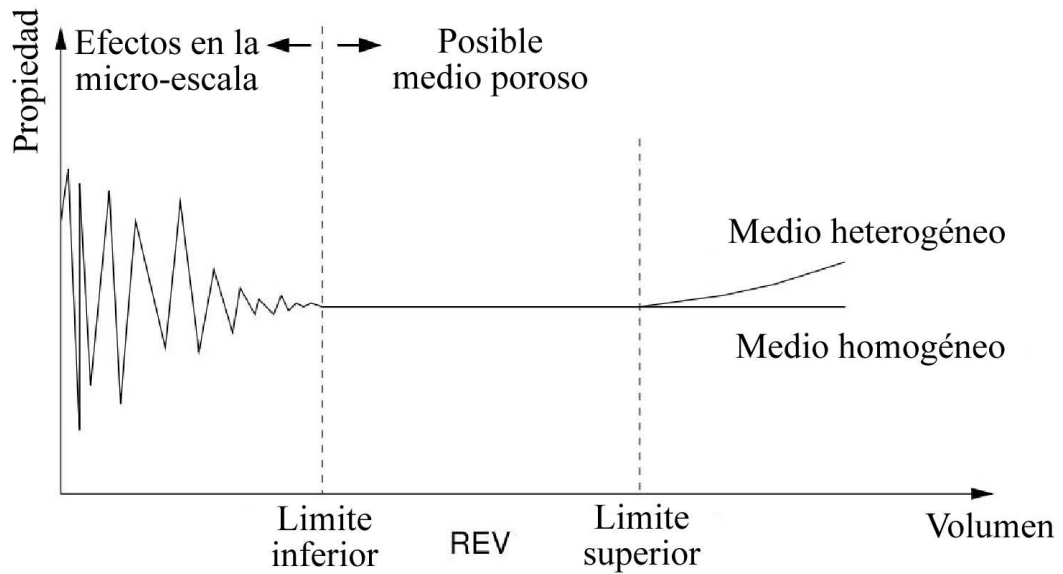


Figura 1.6: Volumen Representativo Elemental (REV). Extraída de Dietrich [12]

distintos nombres en la literatura, como velocidad de filtración, velocidad superficial o velocidad de Darcy. Sin embargo, si la velocidad promedio se toma respecto al volumen del fluido V_f se obtiene la velocidad promedio intrínseca \bar{V} , la cual se puede relacionar con \bar{v} por la relación de Dupuit-Forchheimer que expresa que $\bar{v} = \varphi \bar{V}$. De aquí en adelante la velocidad utilizada en las ecuaciones que modelan los transportes de cantidad de movimiento, energía y especies será la velocidad de Darcy \bar{v} .

1.3.1. Ecuación de movimiento

Modelo de Darcy

Las primeras investigaciones de la hidrodinámica en medios porosos comenzaron con los experimentos de Henry Darcy que datan de 1856. Estos estudios sobre la hidrología del abastecimiento de agua y los experimentos en flujos unidimensionales en estado permanente en un medio poroso uniforme llevaron a Darcy a concluir que existe una proporcionalidad entre el flujo y la diferencia de presión aplicada. Actualmente los resultados de estos experimentos los conocemos como la ley de Darcy que se expresa como:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.22)$$

en donde μ es la viscosidad dinámica del fluido, $\partial P/\partial x$ es el gradiente de la presión aplicado y K es la permeabilidad. Este último parámetro es independiente de la naturaleza del fluido y depende de la geometría del medio [1]. Los valores de K en materiales naturales varían considerablemente; típicamente valores para suelos en unidades de m^2 , son: grava limpia 10^{-7} a 10^{-9} , arena limpia 10^{-9} a 10^{-12} , suelo pantanoso 10^{-11} a 10^{-13} y arcilla estratificada 10^{-13} a 10^{-16} .

Permeabilidad K

Si la permeabilidad K está determinada por la geometría del medio, entonces, debe ser posible calcular el valor de K en términos de parámetros geométricos, al menos para el caso de geometrías simples. Por ejemplo, en el caso de paquetes de partículas o fibras se puede introducir un diámetro efectivo de partícula o de fibra D_p . La teoría del radio hidráulico de Carman-Kozeny [1] lleva a la relación:

$$K = \frac{D_{p2}^2 \varphi^3}{180 (1 - \varphi)^2}, \quad (1.23)$$

donde

$$D_{p2} = \frac{\int_0^\infty D_p^3 h(D_p) dD_p}{\int_0^\infty D_p^2 h(D_p) dD_p}, \quad (1.24)$$

y $h(D_p)$ es la función de densidad para la distribución de diámetros D_p . La constante 180 fue obtenida al buscar el mejor ajuste con los resultados experimentales. La ecuación de Carman-Kozeny arroja resultados satisfactorios para medios que consisten en partículas de una forma aproximadamente esférica y cuyos diámetros se encuentran en un rango estrecho.

Por su parte Ergun [14] propuso una correlación para un paquete de esferas, mediante la cual la permeabilidad se calcula como:

$$K = \frac{d^2 \varphi^3}{175 (1 - \varphi)^2}, \quad (1.25)$$

donde d es el diámetro de las esferas y φ es la porosidad del medio.

Extensiones de la Ley de Darcy

A partir del modelo de Darcy se han desarrollado otras ecuaciones para modelar el flujo de fluidos en medios porosos como el modelo de Brinkman y el de Forchheimer.

Extensión de Brinkman

La extensión de Brinkman a la ecuación de Darcy incluye el efecto de la pared o el efecto del esfuerzo cortante en la velocidad de flujo, y se expresa como [1]:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\bar{u} + \bar{\mu}\nabla^2\bar{u}. \quad (1.26)$$

El primer término de la ecuación (1.26) se identifica fácilmente de la Ley de Darcy, el segundo término es análogo al laplaciano que aparece en la ecuación de N-S y que evalúa el transporte difusivo de la cantidad de movimiento. El coeficiente $\bar{\mu}$ se llama coeficiente efectivo de viscosidad en la pared, que en general no es igual a la viscosidad μ . Para muchas situaciones, el uso del segundo término no es necesario. El efecto sólo es significativo en una pequeña región cerca de la pared, cuyo espesor es del orden de la raíz cuadrada de la permeabilidad del medio poroso, $K^{1/2}$ (suponiendo que $\mu = \bar{\mu}$), así que para muchas aplicaciones, el efecto puede ser ignorado.

La ecuación de Brinkman regularmente se emplea cuando se tienen interfaces entre un medio poroso y un fluido libre, esperando establecer continuidad en los esfuerzos cortantes[1, 13]

Extensión de Forchheimer

Para bajas velocidades en los poros la Ley de Darcy funciona correctamente, sin embargo, cuando se presentan altas velocidades en los poros el flujo se vuelve turbulento y la resistencia al flujo se vuelve no lineal. En estos casos es apropiada la ecuación de Forchheimer. Expresada como:

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\bar{u} - C_F K^{-1/2} \rho_f |\bar{u}| \bar{u}. \quad (1.27)$$

El primer término corresponde a la Ley de Darcy, mientras que el segundo es un término no lineal de resistencia al flujo. El valor del coeficiente C_F es aproximadamente 0.55, sin embargo, C_F puede variar con el medio poroso, tomando así un valor

mínimo de 0.1 en el caso de fibras de metal. Nield y Bejan [1] mencionan que Beavers *et al.* encontraron una correlación para calcular el coeficiente C_F para un paquete de esferas[1, 13]:

$$C_F = 0.55 \left(1 - 5.5 \frac{d}{D_e} \right), \quad (1.28)$$

donde d es el diámetro de las esferas y D_e es el diámetro equivalente del paquete de esferas en términos de la altura h_t y el espesor w del paquete

$$D_e = \frac{2wh_t}{w + h_t} \quad (1.29)$$

Los modelos de Forchheimer, Brinkman y la Ley de Darcy son los más empleados para el flujo de fluidos en medios porosos. La convección natural en medios porosos generalmente se modela con alguna de estas ecuaciones.

1.3.2. Transporte de calor

El estudio de la transferencia de calor en un medio poroso implica aplicar la primera ley de la termodinámica a este medio. En el problema más simple y sencillo se considera un medio poroso isotrópico en donde los efectos de la radiación, la disipación viscosa y el trabajo hecho por diferencias de presión son despreciables. Se considera que localmente existe equilibrio térmico, así que $T_s = T_f = T$, donde T_s y T_f son las temperaturas de la fase sólida y fluida, respectivamente. De esta manera, se supone también que la transferencia de calor por conducción en el sólido y el fluido se realiza paralelamente, así que no hay transferencia de calor neta de una fase a otra.

Si se toman en cuenta los valores promedio en un volumen de control se tiene, para la fase sólida:

$$(1 - \varphi) \rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = (1 - \varphi) \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + (1 - \varphi) q_s''', \quad (1.30)$$

y para la fase fluida

$$\varphi (\rho C p)_f \frac{\partial T_f}{\partial t} + (\rho C p)_f \bar{u} \cdot \nabla T_f = \varphi \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + \varphi q_f''', \quad (1.31)$$

en donde los subíndices s y f indican sólido y fluido, respectivamente, C es el calor específico en el sólido y Cp es el calor específico en el fluido a presión constante, k es la conductividad térmica y q''' es la generación de calor por unidad de volumen.

Las ecuaciones (1.30) y (1.31) son válidas si se supone que la superficie de los poros es igual a la porosidad. Si consideramos que $T_s = T_f = T$, y se suman las ecuaciones (1.30) y (1.31) obtenemos:

$$\rho_m C_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho Cp)_f \bar{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_m \nabla T) + q_m''', \quad (1.32)$$

donde

$$\rho_m C_m = (1 - \varphi) (\rho_s C_s) + \varphi (\rho Cp)_f, \quad (1.33)$$

$$k_m = (1 - \varphi) k_s + \varphi k_f, \quad (1.34)$$

y

$$q_m''' = (1 - \varphi) q_s''' + \varphi q_f''', \quad (1.35)$$

son, respectivamente, la capacidad calorífica total por unidad de volumen, la conductividad térmica total y la generación de calor total por unidad de volumen del medio [1].

1.3.3. Transporte de masa

La ecuación del transporte de especies en un fluido en movimiento y en estado transitorio se define en la ecuación (1.7), sin embargo, si se considera que el transporte de especies sucede en un medio poroso saturado e isotrópico en la matriz sólida no existe movimiento ni mezcla alguna. Multiplicando la ecuación (1.7) por la porosidad φ , se obtiene:

$$\varphi \frac{\partial C}{\partial t} + \varphi \bar{V} \cdot \nabla C = \varphi \nabla \cdot (D \nabla C), \quad (1.36)$$

y utilizando la ecuación de Dupuit-Forchheimer, $\bar{u} = \varphi \bar{V}$, se aprecia que si φ es constante, la ecuación (1.36) puede ser escrita como:

$$\varphi \frac{\partial C}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (D_m \nabla C), \quad (1.37)$$

donde D_m es la difusión de masa del medio poroso y se define como:

$$D_m = \varphi D. \quad (1.38)$$

1.3.4. Convección natural en cavidades llenas de un medio poroso saturado

En la actualidad existe una amplia literatura que trata el estudio de la dinámica de fluidos, la transferencia de calor y masa en un medio poroso bajo diferentes configuraciones y condiciones [2, 9, 11, 12, 13]. El problema de las cavidades calentadas lateralmente comúnmente se encuentra en fenómenos que ocurren en medios porosos sujetos a una convección natural. Los aislamientos térmicos de edificios, aislamientos industriales, la criogenia y el transporte de calor y masa en el subsuelo son algunos ejemplos típicos. El problema de una cavidad rectangular calentada lateralmente ayuda a entender la transferencia de calor por convección natural en medios porosos. Un análisis general, presentado por Nield y Bejan [1], consiste en una cavidad con una diferencia de temperatura entre las paredes laterales, las paredes superior e inferior se encuentran aisladas y la cavidad está completamente llena con un medio poroso saturado con un fluido newtoniano con propiedades constantes. El fenómeno se considera bidimensional y en las coordenadas cartesianas que se muestran en la Figura 1.7, suponiendo un medio poroso homogéneo, en la región $H' \times L'$ la continuidad es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.39)$$

la ecuación de Darcy en la dirección horizontal:

$$u = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1.40)$$

en la dirección vertical:

$$v = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g \right), \quad (1.41)$$

y la ecuación de la energía:

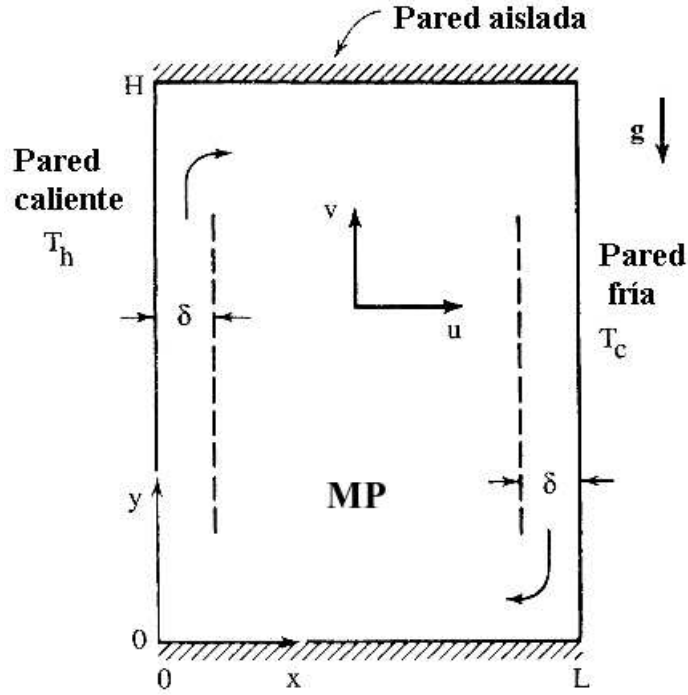


Figura 1.7: Convección natural en una cavidad rectangular llena de un Medio Poroso Saturado calentada lateralmente, considerada de Nield [1]

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (1.42)$$

En la mayoría de los casos, especialmente si los calentamientos no son muy intensos, es conveniente eliminar la dependencia explícita del flujo en la presión presente en las ecuaciones (1.40) y (1.41), y aplicando la aproximación de Boussinesq resulta:

$$\rho \cong \rho_0 [1 - \beta (T - T_0)], \quad (1.43)$$

finalmente, queda solo una ecuación para la conservación la cantidad de movimiento, que se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{Kg\beta}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.44)$$

donde ν es la viscosidad cinemática, esta propiedad se considera constante al igual que la permeabilidad K , el coeficiente de expansión térmica β y la difusividad térmica

del medio poroso α_m , queda representada como:

$$\alpha_m = \frac{k_m}{(\rho C_p)_f}. \quad (1.45)$$

1.3.5. Problema de doble difusión

La convección natural con doble difusión en medios porosos es un proceso que combina la transferencia simultánea de calor y masa. Usualmente es llamada convección termosalina en el caso de que las especies sean sales, termosoluta, doble-difusiva, o combinación de transporte de calor y masa en la convección natural. En estos problemas los gradientes de concentración y temperatura son independientes entre sí, es decir, sus ecuaciones de transporte no están acopladas. Este tipo de convección natural ocurre frecuentemente en el movimiento de las corrientes marinas, en los flujos de los mantos acuíferos en la corteza terrestre, así como en muchos procesos industriales [11].

El interés en el fenómeno de la convección natural por doble difusión en medios porosos está motivado principalmente por la importancia en muchos problemas ambientales e industriales. Algunos ejemplos de sus aplicaciones se encuentran en astrofísica, metalurgia, electroquímica y geofísica. Los flujos por doble difusión cobran mucho interés debido a que se presentan en el transporte de contaminantes en aguas subterráneas que pueden ser fuentes de agua potable. Este fenómeno también resulta de gran importancia en la exploración de reservas geotérmicas.

El problema de la doble difusión es muy interesante pero también muy complicado debido a que la densidad local del fluido depende simultáneamente de la temperatura y de la concentración de especies. La interacción entre la intensidad de los gradientes térmicos y de concentración vuelven complicado el problema, además de que el fenómeno depende de muchos parámetros.

Parámetros adimensionales importantes

Uno de los parámetros más importantes en la convección natural en medios porosos es el número de Rayleigh-Darcy (Ra_D) que se define como:

$$Ra_D = \frac{g\beta K \Delta T L_c}{\nu \alpha_m}. \quad (1.46)$$

Por su parte, en la convección natural debido a gradientes de concentración el parámetro adimensional análogo al número de Rayleigh-Darcy es el número de Rayleigh-Darcy de concentración que se define como:

$$Ra_{DC} = \frac{g\beta_c K \Delta C L_c}{\nu D_m}. \quad (1.47)$$

El número de Prandtl definido en la ecuación (1.2) relaciona la difusividad de cantidad la de movimiento con la difusividad térmica. En el medio poroso la difusividad térmica se define de forma diferente, a aquella en el medio fluido, ver ecuación (1.45). Por lo tanto, el número de Prandtl es diferente y se conoce como número de Prandtl efectivo:

$$Pr_e = \frac{\nu}{\alpha_m}. \quad (1.48)$$

El número de Schmidt efectivo relaciona la viscosidad con la difusividad de masa del medio poroso y se define como:

$$Sc_e = \frac{\nu}{D_m}. \quad (1.49)$$

La relación de flotación se definió en la ecuación (1.21), y aplicada a un medio poroso no sufre modificaciones. Entonces, para problemas de transferencia de calor y masa en convección natural dentro de un medio poroso este parámetro queda definido sin cambios.

1.3.6. La dispersión hidrodinámica

La dispersión hidrodinámica es uno de los fenómenos que complican el estudio del flujo de fluidos en medios porosos. Para entender este fenómeno se consideró un flujo a través de un medio poroso saturado en donde una porción del dominio contiene una concentración de algún soluto. En este caso el soluto será considerado como un trazador. El trazador puede ser identificado de diferentes formas, por ejemplo con la densidad, el color, su conductividad eléctrica, etc. La experiencia muestra que conforme el trazador fluye, éste gradualmente se va extendiendo y ocupa una porción del dominio que siempre va incrementándose. Este fenómeno de extensión es llamado dispersión hidrodinámica. En la figura 1.8 se ilustra la dispersión hidrodinámica,

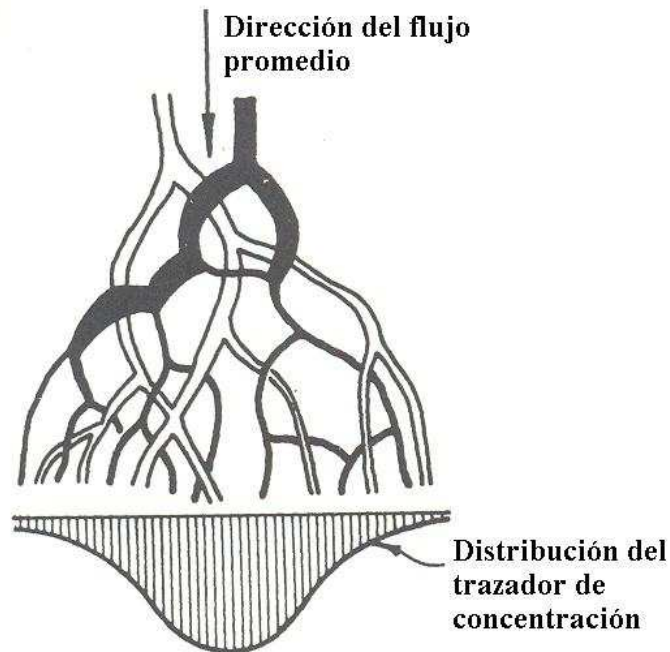


Figura 1.8: Distribución de un trazador de concentración en un medio poroso cuando la dispersión hidrodinámica es importante, considerada de Bear [10]

donde el trazador que fluye desde la parte superior del medio poroso se distribuye al final del medio poroso como lo indica la gráfica de la figura 1.8. Este fenómeno es de características transitorias y además es un proceso irreversible, en el sentido de que la distribución inicial del trazador no puede ser obtenido invirtiendo el flujo.

La dispersión hidrodinámica es el resultado macroscópico de los movimientos individuales de partículas del trazador a través de los poros y de varios fenómenos físicos y químicos que toman lugar dentro de los poros. En general, tales movimientos y fenómenos son el resultado de:

- Fuerzas externas actuando en el fluido.
- La geometría intrincada del sistema poroso.
- La difusión molecular causada por los gradientes de concentración
- La variación de las propiedades del fluido, como la densidad y la viscosidad, que afectan el flujo.

- Los cambios en la concentración del trazador debido a procesos físicos y químicos dentro del fluido.
- Las interacciones entre la fase fluida y la fase sólida.

La dispersión hidrodinámica causa un mejor mezclado del fluido y en problemas de convección de calor ocasiona la llamada dispersión térmica, la cual mejora la difusión de calor. En un proceso de transferencia de calor en un medio poroso saturado, la difusión de calor se modela mediante la expresión $\nabla \cdot (\alpha_m \nabla T)$, sin embargo, cuando existe la dispersión térmica es necesario reemplazar la expresión por $\nabla \cdot \bar{E} \cdot \nabla T$, donde \bar{E} es un tensor de segundo orden, llamado tensor de dispersión. Se sabe, que cuando el número de Péclet es pequeño la difusión de calor es dominada por el coeficiente de difusión térmica (α_m). Si el número de Péclet es grande la dispersión térmica se vuelve importante. Se ha encontrado que la dispersión térmica es muy importante para problemas de convección forzada o convección natural intensa. En el presente trabajo no se considera la dispersión térmica debido a que los parámetros estudiados, específicamente el Ra_D , corresponden a fenómenos de convección natural en régimen laminar y de muy baja velocidad, por lo que los efectos de la dispersión térmica e hidrodinámica se consideran despreciables.

1.3.7. La convección natural en medios porosos

El estudio de la convección natural en medios porosos tiene diversas aplicaciones en la ingeniería y recientemente se han realizado numerosas investigaciones sobre el tema. Un problema clásico consiste en la convección natural inducida por el calentamiento de una pared adyacente a un medio poroso saturado. Nawaf H. *et al.* [30] realizaron un estudio numérico donde una pared calentada de manera discreta a temperatura constante inducen movimiento por convección natural en un fluido, mientras el resto de la pared se considera adiabática. La convección natural es afectada por el número de Rayleigh, la distancia de separación entre los elementos, la razón de temperatura entre ellos y la longitud de los elementos. El autor reporta el número de Nusselt en función del número de Rayleigh para amplios rangos de los parámetros que gobiernan el problema. T.C. Jue *et al* [38] estudiaron numéricamente la convección tipo Bénard en régimen transitorio en una cavidad rectangular

parcialmente llena de un medio poroso saturado y una región de fluido libre con calentamiento por la pared horizontal inferior. En el fluido libre resolvieron las ecuaciones de Navier-Stokes, mientras que en el medio poroso se empleó el modelo general de Darcy-Brinkman-Forchheimer, adicionalmente, en ambas zonas se resolvió la ecuación de la energía. En el estudio se analizó el efecto que tiene el medio poroso en la transferencia de calor y masa, además, se estudió el historial de la dinámica del flujo. Los autores concluyeron que al disminuir la porosidad y la permeabilidad en el medio poroso decrece la cantidad de movimiento y la transferencia de calor, además, la evolución de la dinámica del fluido a través del tiempo se retarda. Gang Wang *et al* [41] estudiaron la transferencia de calor por convección natural en régimen transitorio en una cavidad porosa inclinada con temperatura periódica con el tiempo en una de sus fronteras. El ángulo de inclinación varía desde 0° hasta 80° . El movimiento del fluido en el medio poroso se modeló mediante la ecuación de Darcy-Brinkman. Se estudiaron los efectos combinados del ángulo de inclinación de la cavidad y la frecuencia de oscilación de la temperatura de la pared para $Ra = 10^3$, $Da = 10^{-3}$, $Pr = 1$. Los autores encontraron que la razón de transferencia de calor máxima se encuentra a una frecuencia $f = 46.7\pi$ y un ángulo de 42.2° . A.K. Singh *et al* [42] investigaron numéricamente la convección natural en una cavidad no-rectangular de forma arbitraria llena de un medio poroso saturado. Los autores obtuvieron resultados numéricos de la magnitud y dirección de las corrientes de convección y de los contornos de temperatura. Una de las variantes en las simulaciones fue la inclinación de la frontera superior; al aumentar el ángulo de inclinación incrementa en número de Nusselt. Yasin Varol *et al* [43] analizaron numéricamente el efecto que la inclinación tiene en la convección natural dentro de una cavidad triangular llena de un medio poroso saturado. En el análisis se consideró que una de las paredes del recinto se tiene una temperatura alta mientras otra se mantiene a temperatura baja, y la pared restante está aislada térmicamente. Para estudiar el efecto que tiene la inclinación, se varió el ángulo entre 0° y 360° , para números de Rayleigh entre 100 y 1000. Se concluyó que los números de Nusselt máximos y mínimos se encuentran en 330° y 210° , respectivamente. Un ángulo de 0° corresponde al caso en el que la pared vertical tiene una temperatura superior a la que tiene la pared horizontal. La relación de aspecto de la cavidad se consideró unitaria.

A. Bahlou *et al.* [39] estudiaron numéricamente la convección natural con doble

difusión en un cilindro muy largo que contiene un medio poroso anular en su interior. Como condiciones de frontera se definieron flujos de calor y masa en las paredes verticales del medio poroso anular. En el estudio se concluyó que cuando el cilindro es muy largo el flujo es paralelo. Con esta simplificación se desarrolló una solución analítica para el problema, con resultados aceptables sin la necesidad de desarrollar una solución numérica para determinar la transferencia de calor y masa en la cavidad. A.K. Singh *et al.* [40] analizaron numéricamente la transferencia de calor y masa por convección natural en una cavidad rectangular compuesta por un medio poroso saturado y una capa de fluido que se encuentra encima del medio poroso. El flujo en la región porosa se modeló con la ecuación de Darcy-Brinkman-Forchheimer. Como condiciones de frontera se consideraron temperaturas y concentraciones constantes en las paredes verticales y paredes horizontales adiabáticas. Las regiones de fluido y medio poroso se acoplaron igualando la velocidad y los esfuerzos en la interfaz. Los autores encontraron en los resultados numéricos que la penetración del fluido en la región porosa es altamente dependiente del número de Darcy y de los números de Rayleigh térmico y de concentración. Además, encontraron que el número de Nusselt promedio disminuye y el número de Sherwood aumenta con el incremento del número de Lewis. En la interfaz se encontró que la transferencia de calor y masa depende fuertemente del número de Darcy.

Z. Alloui *et al.* [32] utilizaron el modelo de Darcy y la aproximación de Boussinesq para estudiar la convección natural en un medio poroso saturado por un fluido binario. Consideraron una cavidad cuadrada con la pared inferior calentada a temperatura constante y la pared superior enfriada a temperatura constante. La flotación inducida por la concentración se debe a las concentraciones uniformes en las paredes superior e inferior; las demás paredes se consideraron adiabáticas e impermeables. Nelson Moraga B. *et al.* [33] realizaron un estudio tridimensional de la convección natural en estado transitorio con doble difusión en un medio poroso saturado con aire ubicado en el interior de una cavidad cúbica. Las ecuaciones que gobiernan el problema se resolvieron con el método de los volúmenes finitos. Las condiciones de frontera que se consideraron en el problema son un flujo de calor a través de las paredes horizontales y un flujo de masa en la dirección vertical. Los resultados de esta investigación numérica permiten describir el movimiento del fluido en el medio poroso mediante la evolución temporal de las líneas de trayectoria del fluido, las

isotermas, el número de Nusselt y las líneas de concentración y el número de Sherwood. Los parámetros que gobiernan el problema son la razón de flotación, el número de Rayleigh modificado, el número de Darcy y el número de Lewis. A.A. Mohamad *et al*[34] realizaron un estudio tridimensional de la convección con doble difusión en un recinto rectangular en estado permanente y con calentamiento lateral. El objetivo de esta investigación fue evaluar el efecto de la razón de aspecto lateral en el transporte de calor, masa y cantidad de movimiento.

Otra variante de la convección natural con doble difusión en medios porosos considera paredes onduladas con estratificación. B.V.Rathish *et al.* [35] analizaron la influencia combinada de la estratificación térmica y de masa en un medio poroso bajo convección natural con doble difusión provocada por una pared ondulada vertical que se encuentra a temperatura constante. En el estudio se llevaron a cabo simulaciones numéricas para solucionar las ecuaciones de capa límite y se analizó la influencia de: la amplitud, el número de Grashof, el parámetro de estratificación térmica, el parámetro de estratificación de concentración, la razón de flotación y el número de Lewis. La estratificación térmica y de masa disminuye el número de Nusselt y Sherwood en un proceso de convección natural a lo largo de una pared con superficie ondulada en una cavidad llena de un medio poroso saturado. Kumar y Murthy [36] analizaron los efectos de Soret y Dufour para estimar la transferencia de calor y masa por convección natural debido a una pared vertical con superficie ondulada en un medio poroso semi infinito saturado con un fluido newtoniano. Las soluciones numéricas también han sido utilizadas para estudiar la convección natural dentro de una cavidad inclinada, con una de sus paredes ondulada, y llena de un medio poroso saturado [37], encontrándose que la dinámica de fluidos y las estructuras térmicas son altamente dependientes de las características de la superficie ondulada cuando el ángulo de inclinación es menor a 45° , especialmente para altos números de Rayleigh.

1.4. Objetivo de la presente investigación

Este trabajo de tesis está enfocado en el análisis del efecto que tiene la pared ondulada en el transporte de calor y masa en una cavidad cilíndrica. Se evalúa la transferencia de calor y masa para diferentes condiciones de ondulación de la pared como la amplitud, la relación de aspecto y la longitud de onda adimensional. Además,

se estudia el efecto que tienen los parámetros adimensionales más importantes en las características del transporte de calor y masa en la cavidad.

Se consideran dos casos de gran relevancia, la cavidad llena de un fluido newtoniano y el caso en el que la cavidad está llena de un medio poroso saturado con un fluido newtoniano. Se analizaron tanto el estado permanente como el transitorio de los fenómenos de transporte en la cavidad.

CAPÍTULO 2

METODOLOGÍA

2.1. Métodos numéricos típicamente utilizados en la solución de problemas de convección

En el área de la transferencia de calor y la mecánica de fluidos es frecuente el uso de los métodos numéricos para solucionar problemas cuyas ecuaciones son imposibles de resolver por métodos analíticos. recientemente los métodos numéricos han cobrado importancia en un área donde tradicionalmente los métodos experimentales y analíticos han sido las herramientas primordiales para desarrollar nuevos diseños.

Para lograr una solución numérica de las ecuaciones de gobierno es necesario desarrollar ecuaciones discretizadas para reemplazar las ecuaciones diferenciales válidas en el medio continuo por expresiones algebraicas que se resuelven numéricamente. La Dinámica de Fluidos Computacional (CFD, por sus siglas en inglés) utiliza métodos de discretización para la obtención de soluciones aproximadas a las ecuaciones de gobierno de los problemas de dinámica de fluidos y transferencia de calor. La exactitud de la solución numérica depende en gran medida de la calidad del método de discretización utilizada. Existen diferentes métodos de discretización, los más populares son las diferencias finitas, el elemento finito y los volúmenes finitos. Existe una extensa literatura sobre estos métodos [44, 45, 46].

- **Método de diferencias finitas:** El método requiere que la ecuación de conservación se encuentre en su forma diferencial. El dominio de solución debe ser cubierto por una malla. Para cada punto de la malla la ecuación diferencial se resuelve reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones en diferencias de los valores nodales de las funciones. De éste modo se obtiene una

ecuación algebraica por cada nodo, que involucra el valor de la variable y de algunos nodos vecinos que son desconocidos. En principio el método puede ser aplicado para cualquier tipo de malla, sin embargo, en su gran mayoría los autores utilizan una malla estructurada. En este tipo de mallas el método de diferencias finitas es muy simple y efectivo. La desventaja del método es que la conservación de la propiedad no está impuesta y la restricción a geometrías simples es una desventaja para flujos complejos.

- **Método del Elemento Finito:** El dominio es discretizado en elementos generalmente no estructurados. Usualmente se utilizan triángulos o cuadriláteros en 2D y tetraedros o hexaedros para 3D. La característica principal del método es que las ecuaciones son multiplicadas por una función de ponderación antes de que la ecuación se integre en todo el dominio. Una ventaja importante de este método es su habilidad para tratar con geometrías complicadas, las mallas son fácilmente refinadas debido a que cada elemento es solamente subdividido. Su principal desventaja es que es difícil encontrar métodos numéricos de solución eficientes.
- **Método de los Volúmenes Finitos:** Este método utiliza las formas integrales de las ecuaciones de conservación como punto de partida. El dominio es subdividido en un número finito de volúmenes contiguos de control y las ecuaciones de conservación se aplican a cada volumen. El centroide de cada volumen de control es un nodo en el cual el valor de la variable debe ser calculado. Se utiliza la interpolación para expresar el valor de la variable en la superficie del volumen de control en términos del valor del nodo local. Se obtiene una ecuación algebraica por cada volumen de control en la cual están los valores de los nodos vecinos. Este método puede acoplarse a cualquier tipo de malla, por lo tanto, es aplicable a geometrías complejas. Esta aproximación es simple de entender y de programar y todos los términos que necesitan ser aproximados tienen significado físico, por tal razón es muy común entre los ingenieros.

2.2. Cavity cilíndrica llena de un fluido newtoniano

Considere la cavity axisimétrica mostrada en la Figura 2.1. La cavity tiene las paredes horizontales superior e inferior a temperaturas constantes T_1 y T_2 , respectivamente. La pared vertical es ondulada y se mantiene aislada térmicamente. El cilindro tiene una altura L , un radio promedio R y la pared ondulada tiene la forma de una función senoidal con longitud de onda λ y amplitud a . La cavity se encuentra llena de un fluido newtoniano con propiedades constantes, excepto la densidad, cuya variación es considerada en la ecuación de conservación de cantidad de movimiento mediante la aproximación de Boussinesq. En primer lugar se considera el caso donde la cavity es calentada desde la pared inferior y se enfría por la pared superior. Posteriormente se considera el caso opuesto. En primer lugar se analizó el estado permanente de la convección natural debido únicamente a gradientes térmicos. Posteriormente se estudia el efecto de la transferencia de masa, considerando que existe una alta concentración en la pared superior de la cavity cuando las demás paredes se consideran impermeables. Este último caso se estudia como un fenómeno transitorio en el que el fluido inicia con una concentración de $C = 0$, sin movimiento y con la temperatura igual a la temperatura media definida como:

$$T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{2.1}$$

2.2.1. Ecuaciones de gobierno

El problema de la cavity cilíndrica de la figura 2.1 tiene simetría con el eje vertical, lo que simplifica el análisis. Las ecuaciones de gobierno para el transporte de cantidad de movimiento, energía y masa en estado transitorio, coordenadas cilíndricas y utilizando la aproximación de Boussinesq son respectivamente:

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_r^*}{r^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} - \frac{v_r^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 v_r^*}{\partial z^{*2}} \right) \tag{2.3}$$

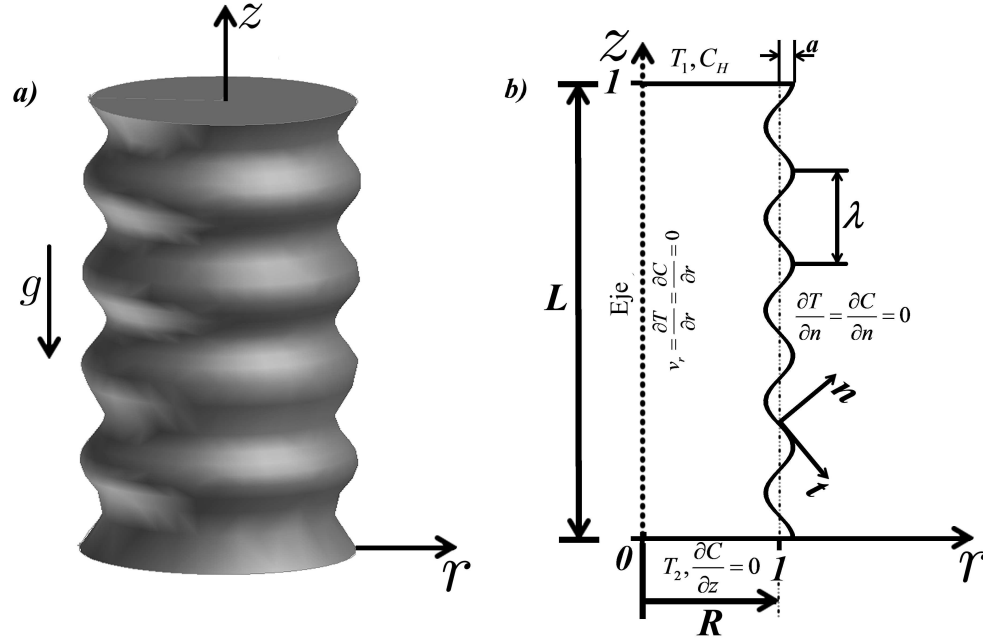


Figura 2.1: a) Esquema del problema tridimensional b) Esquema del problema axisimétrico del problema y sistema de referencia.

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 v_z^*}{\partial z^{*2}} \right) + g\beta\Delta T^* + g\beta_c\Delta C^*, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \alpha \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right], \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = D \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}} \right]. \quad (2.6)$$

En todas las ecuaciones, el asterisco (*) indica que son variables dimensionales, v_r y v_z son la velocidad radial y axial, respectivamente, T_m es la temperatura media.

2.2.2. Adimensionalización de las ecuaciones y cambio de coordenadas

Un análisis de escala muestra que las ecuaciones (2.3) a (2.6) pueden ser adimensionalizadas empleando las siguientes variables:

$$z = \frac{z^*}{L}; r = \frac{r^*}{R}; v_z = \frac{v_z^*}{v_{z,c}} = \frac{R^2}{\nu L} v_{z,c}^*; v_r = \frac{L}{R} \frac{v_r^*}{v_{z,c}} = \frac{R}{\nu} v_r^*; \quad (2.7)$$

$$\epsilon = \frac{R}{L}, \Lambda = \frac{\lambda}{L}; \theta = \frac{T^* - T_m}{T_2 - T_1}; \mathbb{C} = \frac{C^* - C_H}{C_H - C_0}; t = \frac{t^* \alpha}{R^2}$$

en donde $v_{z,c}$ es la velocidad característica en la dirección z , ϵ es la relación de aspecto, Λ es la longitud de onda adimensional, θ es la temperatura adimensional y \mathbb{C} es la concentración adimensional.

El problema se puede resolver empleando la función de corriente obteniéndose beneficios en el análisis, como el uso de una sola ecuación de movimiento, el cumplimiento de la ecuación de la continuidad, además de la eliminación de la dependencia explícita en la presión. Se introduce entonces la función de corriente $\psi^*(r, z)$ definida como:

$$\rho r^* v_z^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*}, \quad (2.8)$$

$$-\rho r^* v_r^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial z^*}, \quad (2.9)$$

y adimensionalizando con:

$$\psi = \frac{\psi^*}{\rho \nu L} \quad (2.10)$$

la función de corriente adimensional queda definida en términos de la velocidad adimensional como:

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2.11)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.2) a (2.6) se adimensionalizaron. Posteriormente se derivaron de forma cruzada las ecuaciones (2.3) y (2.4). Al restar las ecuaciones de cantidad de movimiento y sustituir la función de corriente definida en (2.11) y (2.12) se obtiene como resultado la siguiente ecuación para el movimiento:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^4} + \mathbb{B} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} + \mathbb{C} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \mathbb{D} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \mathbb{E} \frac{\partial^4 \psi}{\partial r^2 \partial z^2} + \mathbb{F} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r \partial z^2} + \mathbb{G} \frac{\partial^3 \psi}{\partial r^2 \partial z} \\ + \mathbb{H} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} + \mathbb{I} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \mathbb{J} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + \mathbb{K} \frac{\partial^4 \psi}{\partial z^4} = \mathbb{L} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mathbb{M} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} + \mathbb{MT}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

la ecuación de la energía es entonces:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbb{N} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mathbb{O} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mathbb{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \mathbb{Q} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0, \quad (2.14)$$

y la ecuación de la conservación de especies:

$$\mathbb{R}_t \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + \mathbb{R} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} + \mathbb{S} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} + \mathbb{T} \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial r^2} + \mathbb{U} \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial z^2} = 0 \quad (2.15)$$

donde los coeficientes A a U están definidos en el Apéndice A.

Se utilizó una transformación de coordenadas analítica para resolver las ecuaciones (2.13) a (2.15). El modelo presentado en la Figura 2.1b puede ser transformada en un cuadrado de lado unitario, como el que se muestra la figura 2.2, a través de una transformación de coordenadas definida como:

$$\xi = z, \quad (2.16)$$

$$\eta = \frac{r}{1 + \Gamma \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \xi\right)}, \quad (2.17)$$

donde Γ es la amplitud adimensional definida como

$$\Gamma = \frac{a}{R}, \quad (2.18)$$

entonces las ecuaciones en las nuevas coordenadas son

$$\begin{aligned} b \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + c \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^2} + d \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + e \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + f \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi^2 \partial \eta} + g \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^3} + h \frac{\partial^3 \psi}{\partial \xi \partial \eta^2} + \\ + i \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^3 \partial \xi} + j \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^2 \partial \xi^2} + k \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + l \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + m \frac{\partial^3 \psi}{\partial \eta^3} + n \frac{\partial^4 \psi}{\partial \eta^4} = m_t, \end{aligned} \quad (2.19)$$

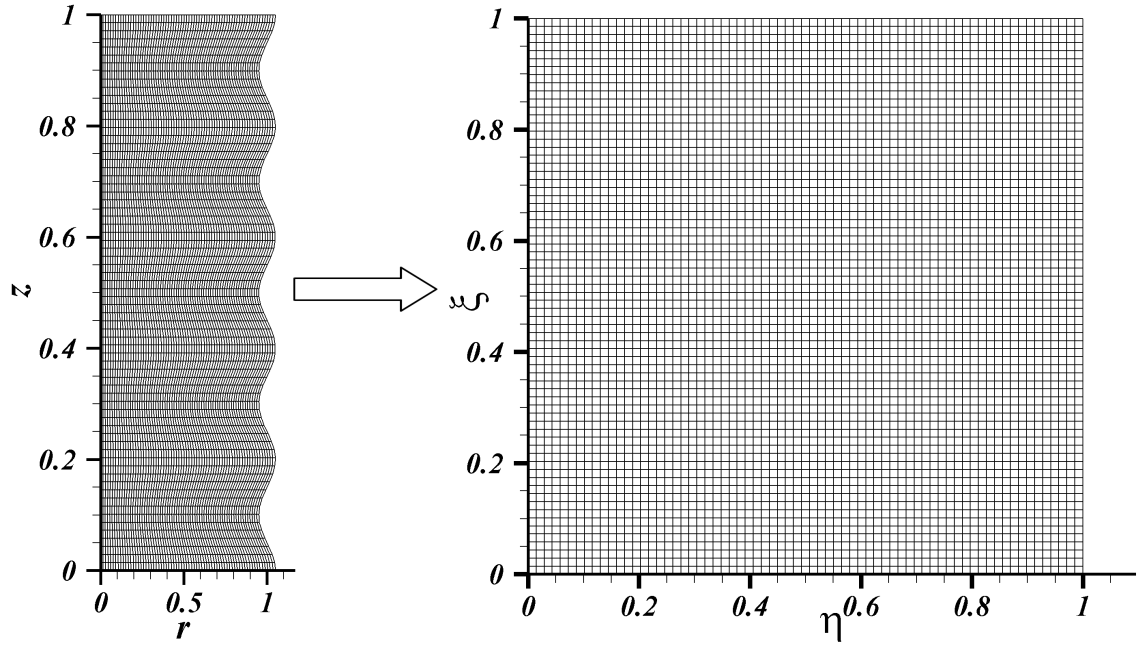


Figura 2.2: Mapeo de la geometría original a un cuadrado de lado unitario.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + o \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + p \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + q \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} + s \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + t \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.20)$$

$$\frac{S_c}{Pr} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + o_c \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \xi} + p_c \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \xi^2} + q_c \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \xi \partial \eta} + s_c \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \eta} + t_c \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \eta^2} = 0, \quad (2.21)$$

donde los coeficientes b a t_c están definidos en el Apéndice A.

2.2.3. Condiciones de frontera e iniciales

Convección térmica en estado permanente

Las condiciones de frontera impuestas en la cavidad son no deslizamiento en las paredes y valores nulos en la velocidad radial y esfuerzo cortante en el eje de simetría. Se impone una diferencia de temperaturas entre las paredes superior e inferior mientras la pared ondulada se encuentra aislada térmicamente. A continuación se detallan matemáticamente las condiciones de frontera:

$$v_r^* = v_z^* = 0, T^* = T_2 \quad \text{para } z^* = 0, 0 \leq r^* \leq R + a, \quad (2.22)$$

$$v_r^* = v_z^* = 0, T^* = T_1 \quad \text{para } z^* = L, 0 \leq r^* \leq R + a, \quad (2.23)$$

$$v_r^* = \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} = \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{para } r^* = 0, 0 < z^* < L, \quad (2.24)$$

$$v_n^* = v_t^* = \frac{\partial T^*}{\partial n} = 0 \quad \text{para } r^* = R + a \cos(2\pi z^*/\lambda), 0 < z^* < L, \quad (2.25)$$

donde n y t indican la dirección normal y tangencial a la pared ondulada, respectivamente.

Las condiciones de frontera en forma adimensional y en términos de la función de corriente en las nuevas coordenadas se expresan como:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \theta = 1 \quad \text{para } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.26)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \theta = -1 = 0 \quad \text{para } \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.27)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para } \eta = 0, 0 < \xi < 1, \quad (2.28)$$

$$\psi = A'' \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + B'' \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para } \eta = 1, 0 < \xi < 1, \quad (2.29)$$

Convección de calor y masa en estado transitorio

Además de las condiciones de frontera utilizadas en el caso de la convección térmica en estado permanente, para el estado transitorio, se impone una concentración constante en la pared superior y las demás paredes se consideran impermeables. A continuación se detallan matemáticamente las condiciones de frontera:

$$v_r^* = v_z^* = \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = 0, T^* = T_2 \quad \text{para } z^* = 0, 0 \leq r^* \leq R + a, \quad (2.30)$$

$$v_r^* = v_z^* = 0, T^* = T_1, C^* = C_H \quad \text{para } z^* = L, 0 \leq r^* \leq R + a, \quad (2.31)$$

$$v_r^* = \frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} = \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{\partial C^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{para } r^* = 0, 0 < z^* < L, \quad (2.32)$$

$$v_n^* = v_t^* = \frac{\partial T^*}{\partial n} = \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 \quad \text{para } r^* = R + a \cos(2\pi z^*/\lambda), 0 < z^* < L, \quad (2.33)$$

donde n y t indican la dirección normal y tangencial a la pared ondulada, respectivamente.

Las condiciones de frontera en forma adimensional y en términos de la función de corriente en las nuevas coordenadas se expresan como:

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial\xi} = 0, \theta = 1 \quad \text{para} \quad \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.34)$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = 0, \theta = -1, \mathbb{C} = 0 \quad \text{para} \quad \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.35)$$

$$\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial\eta} = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 0, 0 < \xi < 1, \quad (2.36)$$

$$\psi = A'' \frac{\partial\psi}{\partial\eta} + B'' \frac{\partial\psi}{\partial\xi} = \frac{\partial\theta}{\partial\eta} = \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial\eta} = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 1, 0 < \xi < 1, \quad (2.37)$$

Condiciones iniciales

Para el problema transitorio las condiciones iniciales son velocidad cero en toda la cavidad, fluido a una temperatura inicial T_m y una concentración cero. Estas condiciones se expresan matemáticamente como:

$$v_z^* = v_r^* = C^* = C_0 = 0; T^* = T_m \quad \text{para} \quad t^* = 0, 0 \leq r^* \leq R + a, 0 < z^* < L \quad (2.38)$$

y en forma adimensional:

$$\psi = \mathbb{C} = -1; \theta = 0 \quad \text{para} \quad t = 0, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \xi < 1 \quad (2.39)$$

2.2.4. Número de Nusselt promedio

La transferencia de calor total a través de las paredes horizontales se calcula como:

$$q_w = \int dq_w = \int q'' dA \quad (2.40)$$

$$q_w = -2\pi k \int_0^{R+a} \left[\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right]_{z^*=L} r^* dr^*. \quad (2.41)$$

Si h_p es el coeficiente de transferencia de calor promedio a través de las paredes, entonces el número de Nusselt promedio, $Nu_p = h_p L/k$, se calcula como:

$$Nu_p = -2 \int_0^1 \left[\eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} d\eta. \quad (2.42)$$

2.2.5. Número de Sherwood promedio

La transferencia de masa total a través de las paredes horizontales se calcula como:

$$J_w = \int dJ_w = \int J'' dA \quad (2.43)$$

$$J_w = -2\pi D \int_0^{R+a} \left[\frac{\partial C^*}{\partial z^*} \right]_{z^*=L} r^* dr^*. \quad (2.44)$$

Si $h_{m,p}$ es el coeficiente de transferencia de masa promedio a través de las paredes, entonces el número de Sherwood promedio, $Sh_p = h_{m,p} L/D$, se calcula como:

$$Sh_p = -2 \int_0^1 \left[\eta \frac{\partial C}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} d\eta. \quad (2.45)$$

2.2.6. Discretización de las ecuaciones

Las ecuaciones (2.19), (2.20) y (2.21) se discretizan utilizando el método de diferencias finitas. Se generó una malla de 100×100 nodos, las ecuaciones fueron resueltas aplicando el método de inversión de matriz tipo LU codificado en una programa en lenguaje FORTRAN 95 y resuelto en una estación de trabajo marca *DELL* con dos procesadores tipo Xeon con cuatro núcleos cada uno y 64 GB de memoria RAM.

2.2.7. Discretización de la variable temporal

Debido a las características del fenómeno de transporte estudiado, es necesario tener alta resolución en el tiempo en los primeros instantes del fenómeno. Debido a estas exigencias el tiempo fue discretizado mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta t^n = t - t_0, \quad (2.46)$$

donde Δt^n es el paso de tiempo n -ésimo, $t_0 = 0$ es el instante inicial del paso de tiempo n -ésimo y

$$t = t_{max} \left(\frac{t_n}{st} \right)^{1.5} \quad (2.47)$$

donde t_{max} es el tiempo adimensional máximo, t_n es el paso de tiempo actual y st es la cantidad total de pasos de tiempo.

2.2.8. Algoritmo de solución

El algoritmo de solución se codificó en el lenguaje FORTRAN 95 y consiste en resolver la ecuación de movimiento (2.19) mediante un método de inversión de matriz tipo LU . Se realizan diez iteraciones para encontrar la solución de la ecuación de movimiento, ya que dicha ecuación es no lineal y de cuarto orden. La solución de la ecuación de movimiento se utiliza para resolver la ecuación de la energía (2.20), realizando cinco iteraciones entre la solución de la ecuación de movimiento y la de la energía. Para la solución del problema del transporte simultáneo de calor y masa la solución de la ecuación de movimiento también se utiliza para obtener la solución de la ecuación de la conservación de especies (2.21); en este caso también se realizan cinco iteraciones es entre las solución de la ecuación de movimiento y de conservación de especies antes avanzar un paso de tiempo. Para el problema de transporte de calor y masa en estado transitorio, una vez que se resuelve favorablemente las ecuaciones de conservación, las soluciones se utilizan para calcular las Heatlines y las Masslines. La diferencia en el tiempo entre una iteración y otra se calcula mediante las ecuaciones (2.46) y (2.47).

2.2.9. Heatlines y Masslines

Las *Heatlines* fueron propuestas en 1983 por Kimura y Bejan [47] como una herramienta adecuada para el análisis y la visualización de la transferencia de calor por convección. Las *Masslines* o líneas de masa son sus equivalentes en el estudio de la transferencia de masa por convección, y fueron propuestas en 1987 por Trevisan y Bejan [48]. Estas herramientas han demostrado ser muy útiles y su uso se ha generalizado con el transcurso del tiempo. La base del método de las *Heatlines* y

Masslines se estableció en la década de 1980; con el tiempo se han añadido algunas variantes para incrementar su campo de aplicación. En la actualidad el método se utiliza en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas, para problemas transitorios y en estado permanente, incluso en problemas de convección en medios porosos o con fluidos con reacciones químicas [49].

El análisis de las *Heatlines* y *Masslines* en coordenadas cilíndricas en las direcciones radial y axial que se presenta a continuación está basado en los artículos publicados por V.A.F. Costa [49, 50] donde se hace un estudio buscando la unificación de las *Streamlines*, *Heatlines* y *Masslines*.

La idea de las *Heatlines* y *Masslines* tiene su origen en la función de corriente (*streamline*) y su análisis es análogo a ésta. Al igual que en la función de corriente, el análisis comienza con la ecuación de la continuidad, que en coordenadas cilíndricas es:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v_r) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = 0. \quad (2.48)$$

Además, la ecuación de la energía se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\rho r v_r C_p (T - T_m) - kr \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho v_z C_p (T - T_m) - k \frac{dT}{dz} \right] = 0. \quad (2.49)$$

La *Heatline* se define de forma análoga a la función de corriente [8], y queda como:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \rho r v_r C_p (T - T_m) - kr \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2.50)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial r} = \rho v_z C_p (T - T_m) - k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.51)$$

donde H es la *heatline*. En este análisis las ecuaciones (2.50) y (2.51) se adimensionalizan con las variables definidas en (2.7) y la *Heatline* adimensional se define como:

$$H = \frac{H^*}{k \Delta T L}, \quad (2.52)$$

de tal manera que H satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = rPrv_r\theta - r\frac{\partial\theta}{\partial r} \quad (2.53)$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -Prv_zr\theta + \epsilon r\frac{\partial\theta}{\partial z}. \quad (2.54)$$

Para resolver el problema y obtener un campo de *Heatlines* en la cavidad podemos hacer uso del laplaciano en coordenadas cilíndricas aplicado a una *Heatline*:

$$\nabla^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}. \quad (2.55)$$

Empleando las ecuaciones (2.53) y (2.54) y la función de corriente adimensional definida en (2.11) y (2.12), la ecuación de la *Heatline* es:

$$\begin{aligned} \nabla^2 H = \text{Pr} \left[-\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\theta}{\partial r} - \theta \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \right] - \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \theta\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] \\ - \frac{2\text{Pr}\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \epsilon^2 \left[r\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial\theta}{\partial z} \right] - r\frac{\partial^2\theta}{\partial r\partial z}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Para cada paso de tiempo se conoce ψ y θ una vez que se han resuelto las ecuaciones de transporte. La ecuación (2.56) es de segundo orden y para resolverla emplean condiciones de frontera, que satisfacen localmente lo establecido en (2.53) y (2.54):

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \epsilon^2 r \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad \text{para} \quad z = 0, 0 \leq r \leq 1, \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \epsilon^2 r \frac{\partial\theta}{\partial z} \quad \text{para} \quad z = 1, 0 \leq r \leq 1 \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad \text{para} \quad r = 0, 0 < z < 1 \quad (2.59)$$

$$H = 0 \quad \text{para} \quad r = 1 + \Gamma \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right), 0 < z < 1 \quad (2.60)$$

de tal manera que las condiciones de frontera en las nuevas coordenadas $\eta - \xi$ son:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \epsilon^2 \gamma^2 \eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad \text{para } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \epsilon^2 \gamma^2 \eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \quad \text{para } \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para } \eta = 0, 0 < \xi < 1 \quad (2.63)$$

$$H = 0 \quad \text{para } \eta = 1, 0 < \xi < 1. \quad (2.64)$$

De manera semejante a la *Heatline*, el análisis de la *Massline* comienza con la ecuación de la continuidad definida en (2.48), adicionalmente, se considera la ecuación de especies escrita de una manera conveniente como sigue:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[v_r r \rho (C - C_0) - D_c \rho \left(r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[v_z \rho (C - C_0) - D_c \rho \frac{\partial C}{\partial z} \right] = 0, \quad (2.65)$$

entonces la *Massline* satisface las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial M^*}{\partial z} = v_r^* r^* \rho (C^* - C_0) - D_c \rho r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \quad (2.66)$$

y

$$-\frac{1}{r^*} \frac{\partial M^*}{\partial z} = v_z^* \rho (C^* - C_0) - D_c \rho \frac{\partial C^*}{\partial r^*}. \quad (2.67)$$

Adimensionalizando (2.66) y (2.67) con las variables definidas en (2.7) y definiendo la *Massline* adimensional como:

$$M = \frac{M^*}{D_c \rho \Delta C L}, \quad (2.68)$$

obtenemos que:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = S c v_r r C - r \frac{\partial C}{\partial r}, \quad (2.69)$$

$$-\frac{\partial M}{\partial r} = S c v_z C r - \epsilon^2 r \frac{\partial C}{\partial z}. \quad (2.70)$$

Para determinar M se hace uso del laplaciano de M en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla^2 M = \frac{\partial^2 M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} + \frac{\partial^2 M}{\partial z^2}. \quad (2.71)$$

Sustituyendo (2.69) y (2.70) en (2.71) y aplicando la función de corriente definida en (2.11) y (2.12) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla^2 M = Sc \left[-\frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial r} - \mathbb{C} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} \right] - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial z} - \mathbb{C} \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right] \\ - \frac{2Sc\mathbb{C}}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} + \epsilon^2 \left[r \frac{\partial^2\mathbb{C}}{\partial r\partial z} + 2 \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial z} \right] - r \frac{\partial^2\mathbb{C}}{\partial r\partial z}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

El lado derecho de la ecuación 2.72 es conocida para cada paso de tiempo una vez que se han resuelto las ecuaciones de transporte. La ecuación (2.72) se resuelve para obtener la distribución de la *massline* sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$\frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad \text{para} \quad z = 0, 0 \leq r \leq 1 \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = \epsilon^2 r \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial z} \quad \text{para} \quad z = 1, 0 \leq r \leq 1 \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial M}{\partial r} = 0 \quad \text{para} \quad r = 0, 0 < z < 1 \quad (2.75)$$

$$M = 0 \quad \text{para} \quad r = 1 + \Gamma \cos(\Omega z), 0 < z < 1, \quad (2.76)$$

y en términos de las nuevas coordenadas:

$$M = 0 \quad \text{para} \quad \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = \epsilon^2 \gamma^2 \eta \frac{\partial\mathbb{C}}{\partial \xi} \quad \text{para} \quad \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1 \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial M}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 0, 0 < \xi < 1 \quad (2.79)$$

$$M = 0 \quad \text{para} \quad \eta = 1, 0 < \xi < 1. \quad (2.80)$$

2.3. Cavidad cilíndrica llena de un medio poroso saturado

Considere que la cavidad axisimétrica de la Figura 2.3 está llena de un medio poroso saturado con un fluido newtoniano. Las paredes horizontales superior e inferior tienen temperaturas constantes T_1 y T_2 , respectivamente, mientras la pared

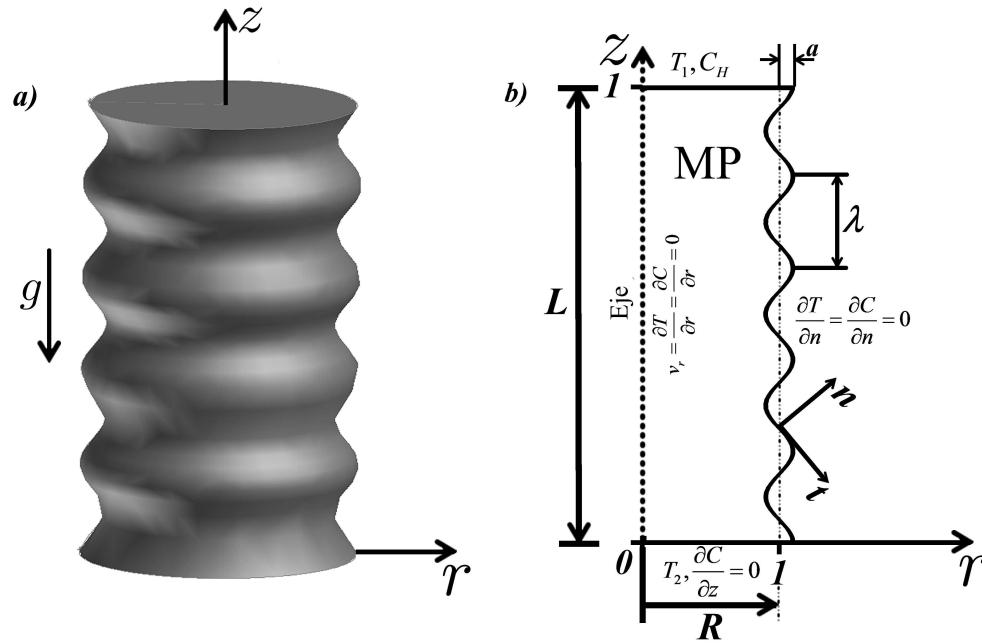


Figura 2.3: Convección natural de calor y masa en una cavidad cilíndrica con paredes onduladas llena de un medio poroso saturado

ondulada se mantiene aislada térmicamente. La pared superior tiene una concentración constante C_H y las demás paredes se consideran impermeables. El medio poroso se considera isotrópico en todas sus propiedades y el fluido tiene propiedades constantes, excepto la densidad, cuya variación es considerada únicamente mediante la aproximación de Boussinesq. En este análisis se considera el caso en donde la cavidad es calentado por la superficie inferior en estado transitorio. El fenómeno comienza cuando la temperatura en toda la cavidad es T_m , la concentración es despreciable y el fluido se encuentra en reposo.

2.3.1. Ecuaciones de gobierno

En el caso de flujo axisimétrico las ecuaciones que modelan el problema son la conservación de masa, la ley de Darcy, la ecuación de la energía y la conservación de especies, que se expresan respectivamente como:

$$\frac{\partial v_r^*}{\partial r^*} + \frac{v_r^*}{r^*} + \frac{\partial v_z^*}{\partial z^*} = 0, \quad (2.81)$$

$$v_r = -\frac{K}{\mu} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (2.82)$$

$$v_z = -\frac{K}{\mu} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} + [\rho g (1 - \beta \Delta T - \beta_c \Delta C)] \right\}, \quad (2.83)$$

$$\sigma \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} = \alpha_m \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{2*}} \right], \quad (2.84)$$

$$\varphi \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + v_r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} + v_z^* \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = D_m \left[\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{2*}} \right], \quad (2.85)$$

donde el superíndice (*) indica que son variables dimensionales.

La ecuación de Darcy en la dirección axial, (2.83), considera dos términos de flotación debidos a los gradientes térmicos y de concentración. En la ecuación (2.84) del transporte de energía σ es una relación de calores específicos definida como:

$$\sigma = \frac{(\rho_s C_s)}{(\rho C_p)_f}, \quad (2.86)$$

donde los subíndices s y f corresponden a las propiedades de la matriz sólida y al fluido, respectivamente, además, la difusividad del medio poroso α_m es igual a $(k_m/k_f) \alpha_f$. En la ecuación de transporte de especies, (2.85), φ es la porosidad del medio y D_m es el coeficiente de difusión de masa en el medio poroso.

Si se derivan de forma cruzada las dos ecuaciones de Darcy y se restan entre sí, se obtiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\frac{\partial v_z^*}{\partial r^*} - \frac{\partial v_r^*}{\partial z^*} = \frac{g\beta K}{\nu} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} + \frac{g\beta_c K}{\nu} \frac{\partial C^*}{\partial r^*}, \quad (2.87)$$

en donde se ha eliminado la dependencia explícita con la presión.

2.3.2. Adimensionalización de las ecuaciones y cambio de coordenadas

Mediante un análisis de escala de las ecuaciones de gobierno se encontró que las variables adimensionales adecuadas son:

$$v_z = v_z^*/v_c; v_r = v_r^*/v_c; r = r^*/R; z = z^*/L; \theta = \frac{T^* - T_m}{T_2 - T_1}; \mathbb{C} = \frac{C^* - C_H}{C_H - C_0} \quad (2.88)$$

donde $v_c = \nu/L$, y $v_{cr} = (R/L)v_c = R\nu/L^2$, de tal forma que la ecuación de movimiento adimensional queda expresada como:

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} - \epsilon^2 \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{Ra_D}{Pr_e} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{Ra_D N}{Pr_e} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r}, \quad (2.89)$$

donde ϵ es la relación de aspecto, Ra_D es el número de Rayleigh-Darcy y se define como:

$$Ra_D = \frac{g\beta K \Delta T L}{\nu \alpha_m}, \quad (2.90)$$

y Pr_e es el número de Prandtl efectivo del medio poroso y es igual a ν/α_m .

La ecuación de la energía adimensional queda definida como:

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial t} + \epsilon^2 v_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \epsilon^2 v_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{Pr_e} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right]. \quad (2.91)$$

Por su parte, la ecuación de conservación de especies adimensional es:

$$\varphi \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + \epsilon^2 v_r \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} + \epsilon^2 v_z \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} = \frac{1}{Sc_e} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial z^2} \right]. \quad (2.92)$$

En este caso el número de Schmidt efectivo del medio poroso está definido como la relación entre la viscosidad cinemática y el coeficiente de difusión de masa en el medio poroso, $Sc_e = \nu/D_m$. Aplicando las definiciones (2.8) y (2.9), y adimensionalizando con las variables de (2.88), y empleando $\psi = \psi^*/(\rho\nu L)$, las ecuaciones de gobierno quedan como:

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = \frac{Ra_D}{Pr_e} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{Ra_D N}{Sc_e} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r}, \quad (2.93)$$

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial t} + \epsilon Pr_e \left[\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \frac{1}{Pr_e} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \quad (2.94)$$

$$\varphi \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + \epsilon^2 Pr_e \left[\left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial z} \right] = \frac{Pr_e}{Sc_e} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial z^2} \right]. \quad (2.95)$$

Aplicando el cambio de coordenadas definido en (2.16) y (2.17), las ecuaciones en las nuevas coordenadas son:

$$A' \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + B' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + C' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + D' \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} = E' \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + F' \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \eta} = 0, \quad (2.96)$$

$$G' \frac{\partial \theta}{\partial t} + H' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + I' \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + J' \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + K' \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + L' \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (2.97)$$

$$M' \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial t} + N' \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \xi} + O' \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \eta} + P' \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \eta^2} + Q' \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \xi^2} + R' \frac{\partial^2 \mathbb{C}}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad (2.98)$$

donde los coeficientes $A'-R'$ están definidos en el Apéndice A.

2.3.3. Condiciones de frontera e iniciales

Las condiciones de frontera impuestas en la cavidad se expresan matemáticamente como:

$$v_z^* \neq 0, \frac{\partial C^*}{\partial z^*} = 0, T^* = T_2 \quad \text{para } z^* = 0, 0 \leq r^* \leq R + a, \quad (2.99)$$

$$v_z^* \neq 0, T^* = T_1, C^* = C_H \quad \text{para } z^* = L, 0 \leq r^* \leq R + a, \quad (2.100)$$

$$v_r^* = \frac{\partial T^*}{\partial r^*} = \frac{\partial C^*}{\partial r^*} = 0 \quad \text{para } r^* = 0, 0 < z^* < L, \quad (2.101)$$

$$v_n^* = \frac{\partial T^*}{\partial n} = \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0 \quad \text{para } r^* = R + a \cos\left(\frac{2\pi z^*}{\lambda}\right), 0 < z^* < L, \quad (2.102)$$

donde n es la dirección normal a la pared ondulada.

Las condiciones de frontera en forma adimensional y en términos de la función de corriente en las nuevas coordenadas se expresan como:

$$\psi = \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \xi} = 0, \theta = 1 \quad \text{para } \xi = 0, 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.103)$$

$$\psi = 0, \theta = -1, \mathbb{C} = 0 \quad \text{para } \xi = 1, 0 \leq \eta \leq 1, \quad (2.104)$$

$$\psi = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para } \eta = 0, 0 < \xi < 1, \quad (2.105)$$

$$\psi = \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para } \eta = 1, 0 < \xi < 1, \quad (2.106)$$

Condiciones iniciales

Para el problema transitorio las condiciones iniciales son velocidad cero en toda la cavidad, fluido a una temperatura inicial T_m y concentración cero. Estas condiciones se expresan matemáticamente como:

$$v_z^* = v_r^* = C^* = 0; T^* = T_m \quad \text{para} \quad t^* = 0, 0 \leq r^* \leq R + a, 0 < z^* < L \quad (2.107)$$

y en forma adimensional:

$$\psi = 0, \mathbb{C} = -1; \theta = 0 \quad \text{para} \quad t = 0, 0 \leq \eta \leq 1, 0 < \xi < 1 \quad (2.108)$$

2.3.4. Número de Nusselt promedio Nu_p

La transferencia de calor total a través de la pared superior se expresa en la ecuación 2.40, y se calcula como:

$$q_{w,m} = -2\pi k_m \int_0^{R+a} \left[\frac{\partial T}{\partial z^*} \right]_{z^*=L} r^* dr^*. \quad (2.109)$$

Si h_p es el coeficiente de transferencia de calor promedio a través de las paredes, entonces el número de Nusselt promedio, $Nu_p = h_p L / k_m$, se calcula como:

$$Nu_p = -2 \int_0^1 \left[\eta \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} d\eta. \quad (2.110)$$

2.3.5. Número de Sherwood promedio Sh_p

La transferencia de masa total a través de la pared superior se expresa en la ecuación 2.43, y se calcula como:

$$J_{w,m} = -2\pi D_m \int_0^{R+a} \left[\frac{\partial C}{\partial z^*} \right]_{z^*=L} r^* dr^*. \quad (2.111)$$

Si $h_{m,p}$ es el coeficiente de transferencia de masa promedio a través de las paredes, entonces el número de Sherwood promedio, $Sh_p = h_{m,p} L / D_m$, se calcula como:

$$Sh_p = -2 \int_0^1 \left[\eta \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} d\eta. \quad (2.112)$$

2.3.6. Discretización de las ecuaciones

Las ecuaciones (2.96), (2.97) y (2.98) se discretizaron utilizando el método de diferencias finitas. Se generó una malla de 100×100 nodos y las ecuaciones fueron resueltas con el método de inversión de matriz tipo LU codificado en un programa en lenguaje FORTRAN 95 y resuelto en una estación de trabajo marca *DELL* con dos procesadores tipo Xeon con cuatro núcleos cada uno y 64 GB de memoria RAM.

2.3.7. Discretización de la variable temporal

La discretización de la variable temporal utilizada para modelar el problema transitorio de la transferencia de calor y masa en un medio poroso saturado requiere características similares al fenómeno transitorio en un fluido libre, por lo que el tiempo se discretizó para este caso como se describió en las ecuaciones (2.46) y (2.47)

2.3.8. Algoritmo de solución

El algoritmo de solución utilizado para resolver las ecuaciones del problema de la transferencia de calor y masa en un medio poroso es similar al mencionado en la sección 2.2.8, con la diferencia que en este caso no se resolvieron las *heatlines*, ni las *masslines*.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados numéricos del transporte de calor en una cavidad llena con un fluido libre en estado permanente y sometida solamente a gradientes térmicos. Se estudian dos casos importantes, la cavidad calentada desde la superficie inferior y la cavidad calentada desde la superficie superior. Posteriormente, se presentan los resultados de las simulaciones para el régimen transitorio, la cavidad se ve afectada por la combinación de los gradientes térmico y de concentración, se considera solamente el caso de la cavidad calentada desde la superficie inferior. Finalmente, se presentan los resultados de las simulaciones para una cavidad llena de un medio poroso saturado afectado por gradientes térmicos y de concentración en régimen transitorio. Se considera solamente el caso de la cavidad calentada desde la superficie inferior. En todos los análisis se hace énfasis en el efecto que tienen los parámetros adimensionales característicos en las isothermas, la función de corriente, las líneas de isoconcentración, el número de Nusselt y Sherwood promedio. Los parámetros adimensionales estudiados incluyen la longitud de onda adimensional Λ , la relación de aspecto ϵ , la amplitud adimensional Γ , el número de Rayleigh Ra , o en su caso el número de Rayleigh-Darcy Ra_D , el número de Schmidt Sc , o Schmidt efectivo Sc_e , la porosidad φ . El número de Prandtl se considera constante e igual a 7 para el fluido libre; el número de Prandtl efectivo en el medio poroso es constante con valor 10 para el medio poroso, la relación de calores específicos es constante $\sigma = 0.6$. Adicionalmente se incluyen las *Heatlines* y *Masslines* para el caso del transporte transitorio en un fluido libre.

3.1. Convección térmica de un fluido libre

La cavidad cilíndrica es sometida a una diferencia de temperatura entre sus paredes horizontales. Se analizaron dos casos, el primero con calentamiento en la pared inferior, y el segundo con calentamiento por la pared superior. Se estudió el número de Rayleigh en el rango de 10^3 a 10^6 , la longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/10, 1/5, 1/3$, la amplitud de onda $\Gamma = 0.05, 0.1, 0.3$, la relación de aspecto $\epsilon = 0.1, 0.3, 0.5$, y el número de Prandtl se consideró constante e igual a 7. Los análisis se realizaron para el estado permanente. A continuación se presenta una discusión de los efectos que los parámetros adimensionales tienen en el transporte de calor y el flujo en la cavidad.

3.1.1. Calentamiento desde la superficie inferior

En este caso la cavidad es sometida a una diferencia de temperaturas entre las superficies horizontales $T_2 > T_1$, mientras la pared ondulada se mantiene adiabática.

Efecto del número de Rayleigh

La Figura 3.1 muestra la distribución de la temperatura y la función de corriente para diferentes números de Rayleigh ($Ra = (g\beta\Delta TL^3)/(\nu\alpha)$). Las gráficas corresponden a una longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/5$, amplitud adimensional $\Gamma = 0.1$, una relación de aspecto $\epsilon = 0.3$ y número de Prandtl $Pr = 7$. Las gráficas están divididas por el eje de axisimetría $r = 0$; en el lado izquierdo se muestran las isotermas y en el lado derecho la función de corriente. Las Figuras 3.1a y 3.1b muestran un comportamiento similar, mantienen una estratificación térmica en toda la cavidad. Es muy importante destacar que, debido a que la pared ondulada se encuentra aislada térmicamente, las isotermas se curvan de tal manera que llegan en dirección perpendicular a la pared ondulada, i.e. cumplen la condición que establece que la derivada en la dirección normal a la pared es igual a cero, $\partial T/\partial n = 0$. La condición de aislamiento térmico de la pared lateral provoca gradientes locales de temperatura en las direcciones radial y axial que favorecen la formación de pequeñas celdas convectivas. Sin la presencia de la pared ondulada las pequeñas celdas de convección no existirían. Las celdas que se muestran en el lado derecho de la figura 3.1a

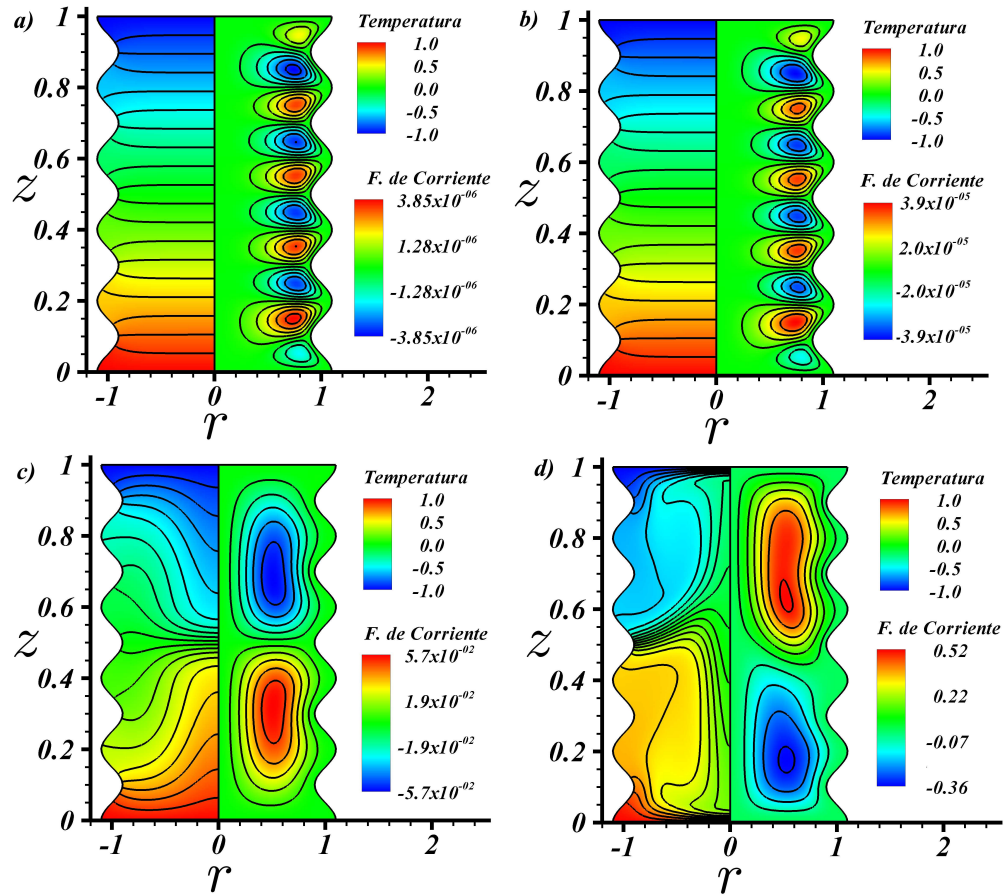


Figura 3.1: Distribuciones de la temperatura y la función de corriente para diferentes números de Rayleigh, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Ra = 10^3$, b) $Ra = 10^4$, c) $Ra = 10^5$, d) $Ra = 10^6$.

y 3.1b, lucen iguales en general; en ambos casos el movimiento del fluido tiene poca velocidad y no alcanza a alterar la estratificación térmica presente en la cavidad. Se deduce que la velocidad en la Figura 3.1a es menor que la velocidad en la figura 3.1b por los valores de la función de corriente, cuyos gradientes aumentan un orden de magnitud aproximadamente de una figura a otra.

Al aumentar el número de Rayleigh a $Ra = 10^5$ las pequeñas celdas convectivas evolucionan para dar su lugar a un par de celdas convectivas con la cantidad de movimiento suficiente para romper la estratificación térmica. En este caso la convección térmica se vuelve importante y se observa en las isotermas que el gradiente de temperatura aumenta en las superficies superior e inferior. Al aumentar un orden de magnitud más el número de Rayleigh, las celdas convectivas se vuelven más in-

tensas, como lo muestra la Figura 3.1d. La cavidad presenta dos celdas convectivas principales, la celda superior con mayor velocidad que la inferior. El movimiento del fluido ocasiona que las isothermas se distribuyen de forma poco uniforme, además, la cantidad de movimiento es lo suficientemente intensa como para ocasionar un comportamiento de capa límite térmica en las paredes superior e inferior, donde los gradientes térmicos son mucho más intensos que en los casos anteriores.

Efecto de la longitud de onda adimensional (Λ)

La Figura 3.2 muestra la gráfica del número de Nusselt promedio (Nu_p) como función del número de Rayleigh (Ra) cuando la longitud de onda adimensional es $\Lambda = 1/10, 1/5, 1/3$, la amplitud $\Gamma = 0.1$, la relación de aspecto $\epsilon = 0.3$ y el número de Prandtl $Pr = 7$. El número de Nusselt promedio se calcula en la pared superior de acuerdo a la ecuación (2.42). Para bajos números de Rayleigh, i.e. menor a 10^3 , la transferencia de calor es principalmente difusiva con $Nu_p \approx 1.5$. En la gráfica se observa que cuando la longitud de onda adimensional es pequeña se necesita un mayor número de Rayleigh para que el efecto convectivo se haga presente y modifique el número de Nusselt promedio. En efecto, para los casos $\Lambda = 1/3, 1/5$ el transporte convectivo cobra importancia cuando Ra del orden 10^4 , sin embargo, para $\Lambda = 1/10$ el efecto convectivo se vuelve importante hasta que ra supera 10^5 . Las curvas muestran cambios en el comportamiento del número de Nusselt promedio provocados por la evolución de la función de corriente con el aumento del número de Rayleigh.

La Figura 3.3 muestra el efecto que tiene la longitud de onda adimensional en la función de corriente y en las isothermas dentro de la cavidad. Las gráficas muestran que cuando la longitud de onda adimensional es corta, la estratificación se intensifica y se evita el movimiento del fluido, lo que conduce a una disminución en la convección de calor. La Figura 3.3a muestra una cavidad con una longitud de onda adimensional corta, que desfavorece el movimiento del fluido, y se estratifica térmicamente. La función de corriente muestra pares de celdas convectivas de baja cantidad de movimiento, adyacentes a la pared ondulada. La Figura 3.3b, muestra las isothermas y la función de corriente para una longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/3$ y número de Rayleigh 10^5 . Se observa que la convección de calor se ve favorecida por la presencia de un par de celdas convectivas principales que modifican las isothermas

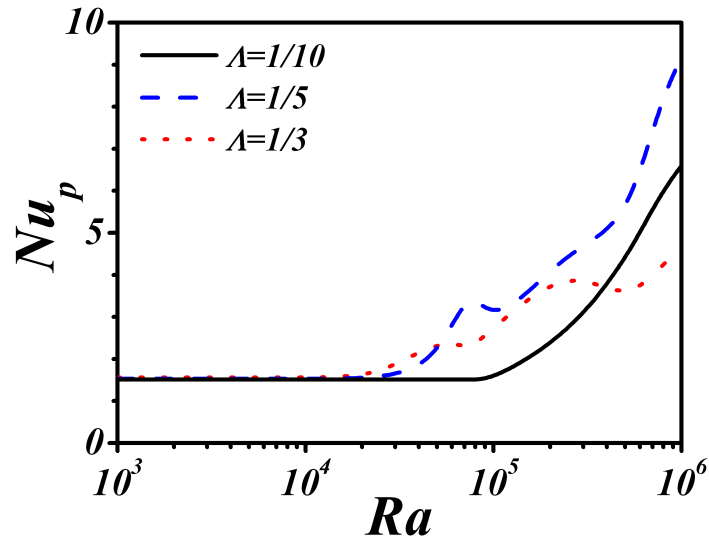


Figura 3.2: Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh y la longitud de onda adimensional. Los demás parámetros son $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$

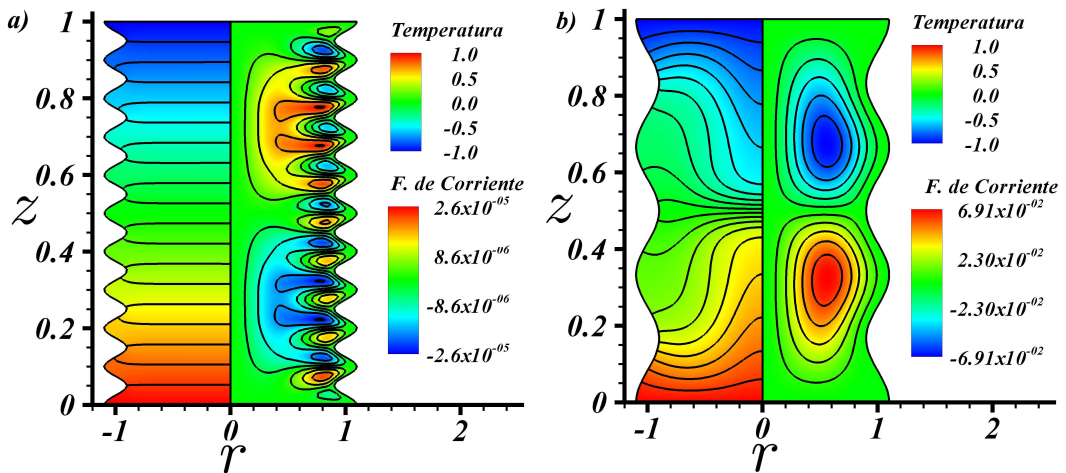


Figura 3.3: Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Lambda = 1/3$ y b) $\Lambda = 1/10$. Los demás parámetros son $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$

en el fluido, como se muestra en el lado izquierdo de la gráfica. Este comportamiento confirma lo observado en la gráfica 3.2, donde se muestra que la convección aparece al superar $Ra = 10^5$.

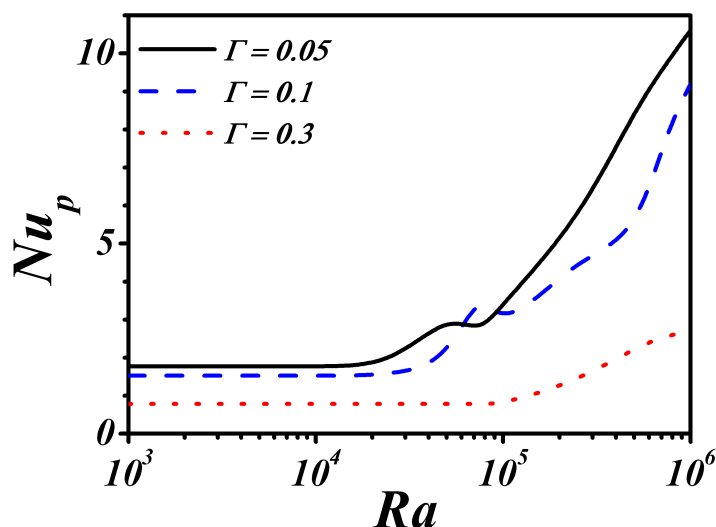


Figura 3.4: Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes amplitudes. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$.

Efecto de la amplitud adimensional (Γ)

El efecto que tiene la amplitud adimensional en el número de Nusselt se muestra en la Figura 3.4. Se observa que cuando la amplitud de la onda es grande la convección tiene efectos importantes en la transferencia de calor hasta que Ra es mayor que 10^5 ; para amplitudes menores el efecto convectivo aparece cuando Rayleigh es del orden de 10^4 . Para bajos números de Rayleigh la transferencia de calor es básicamente por difusión, y el número de Nusselt promedio tiene un valor constante. La gráfica muestra que el número de Nusselt promedio es mayor, en general, cuando la amplitud de onda es menor, i.e. la condición parecida a un cilindro con paredes verticales sin ondulación. Este efecto es más evidente para números de Rayleigh altos como $Ra = 10^6$, donde para un amplitud de $\Gamma = 0.05$ el número de Nusselt promedio es aproximadamente tres veces mayor comparado con el caso de $\Gamma = 0.3$. En la gráfica también se observan variaciones en el comportamiento del número de Nusselt debido a la evolución del flujo convectivo.

En la Figura 3.5 se muestran las distribuciones de la temperatura y la función de corriente para un número de Rayleigh $Ra = 10^5$. La Figura 3.5a corresponde a una amplitud de onda adimensional grande $\Gamma = 0.3$. En este caso la ondulación representa una obstrucción importante para el movimiento vertical del fluido, además,

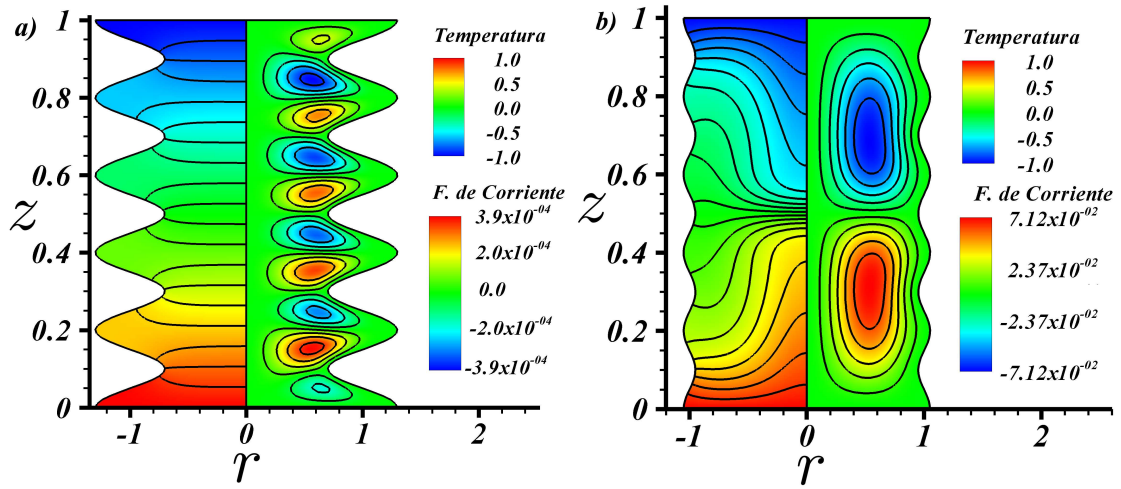


Figura 3.5: Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Gamma = 0.3$ y b) $\Gamma = 0.05$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$.

múltiples celdas convectivas afectan prácticamente toda la cavidad, sin embargo, no favorecen que la convección de calor sea importante y la cavidad presenta estratificación térmica. La transferencia de calor es principalmente por difusión, como puede comprobarse en la Figura 3.4. La Figura 3.5b corresponde a una amplitud adimensional $\Gamma = 0.05$, una ondulación de pequeña amplitud que presenta poca restricción al movimiento libre del fluido. En este caso existen un par de celdas suficientemente intensas como para favorecer la convección de calor en toda la cavidad. El movimiento del fluido elimina la estratificación que típicamente está presente a bajos números de Rayleigh. Adicionalmente, existen gradientes térmicos intensos en las superficies superior e inferior. Las distribuciones de temperatura y función de corriente son congruentes con lo observado en el número de Nusselt promedio de la figura 3.4, donde es evidente que las amplitudes grandes desfavorecen la convección de calor.

Efecto de la relación de aspecto (ϵ)

En la figura 3.6 se muestra el comportamiento del número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes relaciones de aspecto, que considera un cilindro muy largo ($\epsilon = 0.1$) a un cilindro ancho ($\epsilon = 0.5$) para una longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/5$, una amplitud adimensional $\Gamma = 0.1$, y número de Prandtl $Pr = 7$. Se aprecia que cuando el cilindro es muy largo la transferencia de

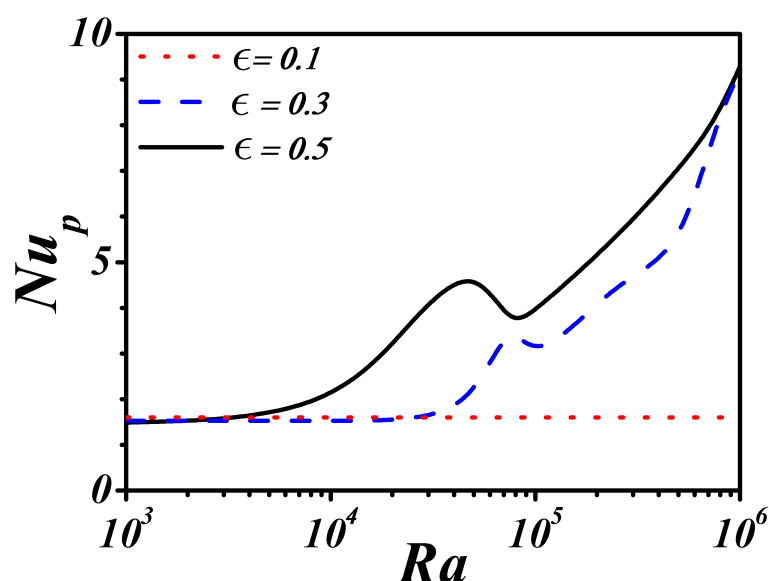


Figura 3.6: Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes relaciones de aspecto. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$

calor es dominada por la difusión y en el rango del número de Rayleigh estudiado la convección es despreciable. Por el contrario, cuando el cilindro es muy ancho la convección se vuelve importante aún para números de Rayleigh moderadamente bajos, del orden 10^3 . Cuando el cilindro tiene una relación de aspecto $\epsilon = 0.3$ la convección de calor cobra importancia cuando el número de Rayleigh es del orden 10^4 , es decir, con el aumento de la relación de aspecto se favorece la convección de calor.

La figura 3.7 muestra una comparación de las distribuciones de temperatura y función de corriente para dos cavidades con diferentes relaciones de aspecto, $\epsilon = 0.1$ y a $\epsilon = 0.5$. Para ambas cavidades el número de Rayleigh es $Ra = 10^5$. La figura 3.7a presenta una estratificación térmica en toda la cavidad, y la función de corriente describe pares de celdas convectivas de baja cantidad de movimiento que afectan toda la cavidad. Bajo estas condiciones la transferencia de calor en la cavidad ocurre principalmente por difusión. Por el contrario, en la figura 3.7b se observa un comportamiento dominado por la convección. La función de corriente muestra un par de celdas convectivas principales, que benefician la convección de calor. Se aprecia

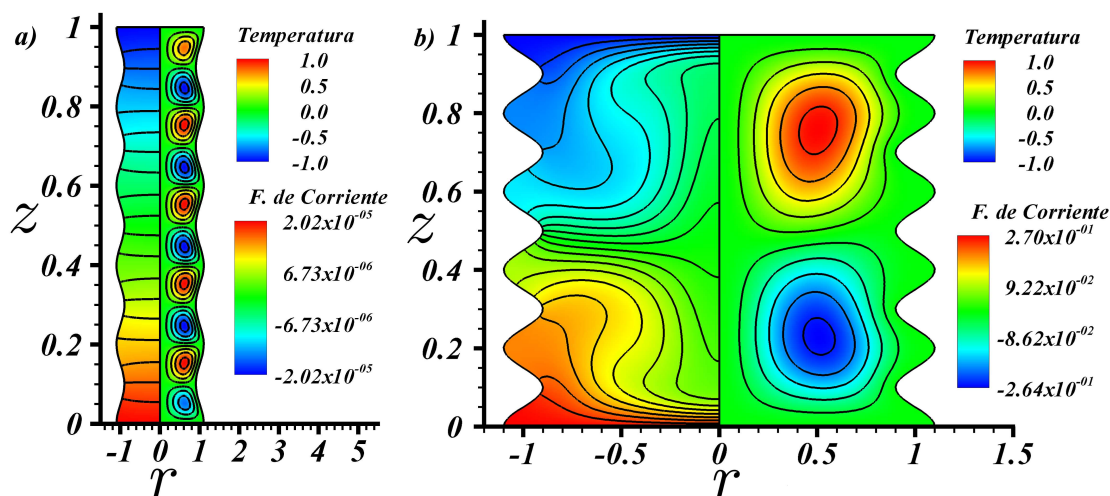


Figura 3.7: Contornos de temperatura y función de corriente. a) $\epsilon = 0.1$ y b) $\epsilon = 0.5$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$

poco movimiento en la zona adyacente a la pared ondulada. El aumento en la relación de aspecto ϵ favorece la presencia de la convección en la cavidad.

3.1.2. Calentamiento desde la pared superior

Para el caso en que el calentamiento ocurre a través de la pared superior, es decir, $T_1 > T_2$, es importante mencionar que si la pared vertical no presentara ondulación el transporte de calor ocurriría por conducción debido a que en tal situación la distribución de temperatura consiste en una estratificación estable. La pared ondulada al estar aislada térmicamente produce gradientes térmicos locales en las direcciones radial y axial que favorecen la convección; dichas condiciones no existen en cilindros rectos.

Efecto del número de Rayleigh (Ra)

En la figura 3.8 se presentan las distribuciones de temperatura y de función de corriente cuando el número de Rayleigh se encuentra entre 10^3 y 10^6 . En las figuras 3.8a y 3.8b, se observa una estratificación térmica en la cavidad y pares de celdas convectivas cercanas a la pared ondulada, al igual que en el caso del calentamiento por la pared inferior, sin embargo, los giros de estas celdas se presentan en el sentido contrario. Este último aspecto ocurre debido a que los gradientes térmicos locales

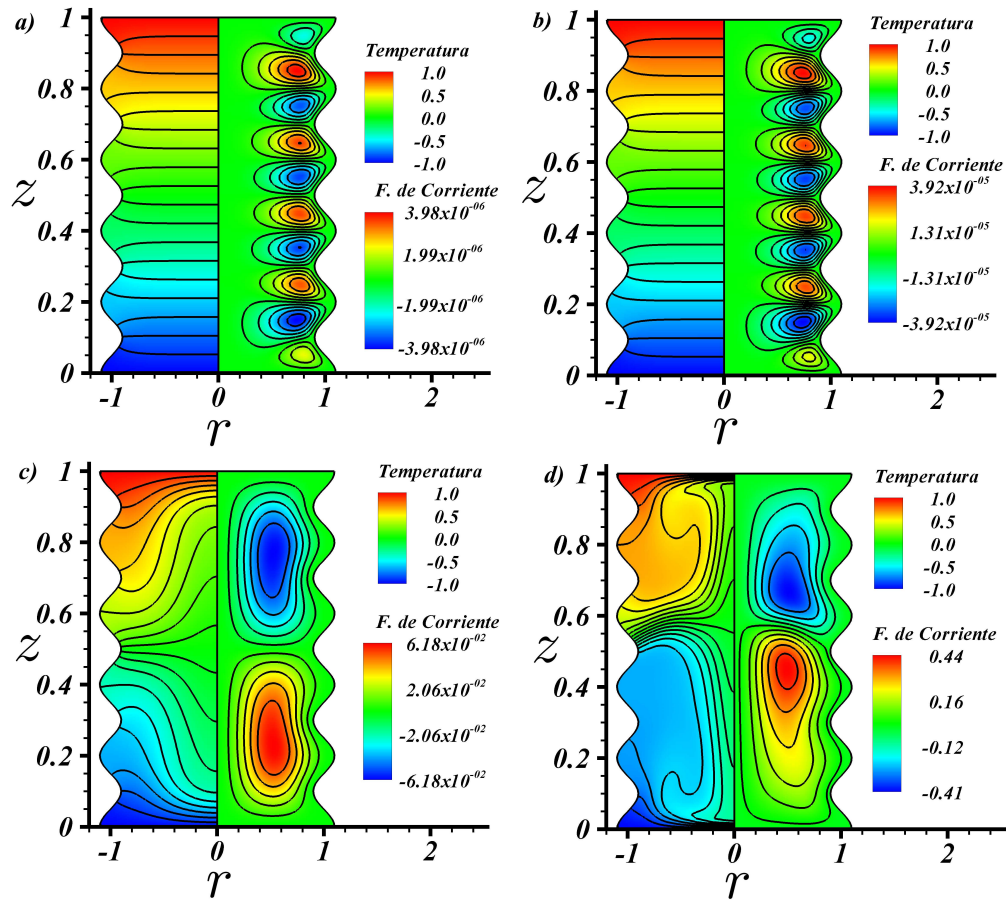


Figura 3.8: Campos de temperatura y función de corriente para diferentes números de Rayleigh, para $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Ra = 10^3$, b) $Ra = 10^4$, c) $Ra = 10^5$, d) $Ra = 10^6$.

en la dirección radial apuntan en sentido opuesto. Al incrementar el número de Rayleigh de 10^3 a 10^4 aumenta un orden el valor de la función de corriente. Cuando el número de Rayleigh es del orden 10^5 , la convección de calor cobra importancia formándose un par de celdas convectivas principales y la estratificación desaparece, además, el gradiente térmico en las superficies superior e inferior es intenso. En la figura 3.8d se observan dos celdas convectivas no uniformes, la velocidad del flujo en ambas celdas es aproximadamente igual y aumenta en el centro de la cavidad. Las isothermas muestran un comportamiento de capa límite térmica en las paredes superior e inferior, además, el gradiente térmico cerca de éstas es muy grande.

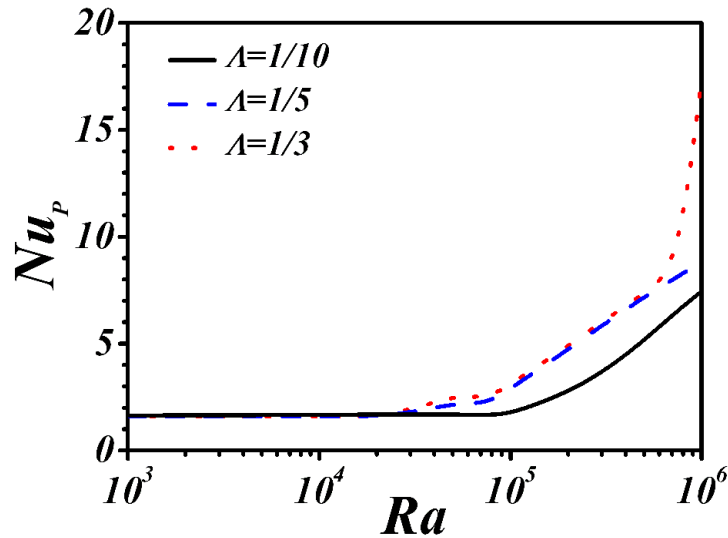


Figura 3.9: Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes valores de longitud de onda adimensional. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$.

Efecto de la longitud de onda adimensional (Λ)

En la figura 3.9 se presenta el comportamiento del número de Nusselt promedio (Nu_p) en función del número de Rayleigh (Ra), para tres longitudes de onda adimensional diferentes. En particular, se presentan las curvas para $\Lambda = 1/10, 1/5, 1/3$. Se observa que cuando la longitud de onda adimensional es grande ($\Lambda = 1/3$ y $\Lambda = 1/5$) la convección cobra importancia cuando el número de Rayleigh es del orden 10^4 , mientras que para una longitud de onda adimensional pequeña, $\Lambda = 1/10$, la transferencia de calor continúa siendo dominada por la difusión. Cuando $\Lambda = 1/10$ la convección se manifiesta hasta que el número de Rayleigh es mayor a 10^5 . Es evidente que el número de Nusselt promedio en la cavidad para la longitud de onda menor es siempre mas bajo.

La figura 3.10 muestra las distribuciones de temperatura y función de corriente para $\Lambda = 1/10, \Lambda = 1/3$. En la figura 3.10a se observa estratificación térmica en la cavidad. Si se compara con el caso del calentamiento por la pared inferior, figura 3.3, se observa que en este caso las celdas convectivas adyacentes cerca de la pared ondulada tienen muy poca interacción entre ellas. En el caso de la longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/3$, existe un par de celdas convectivas, que giran en el mismo

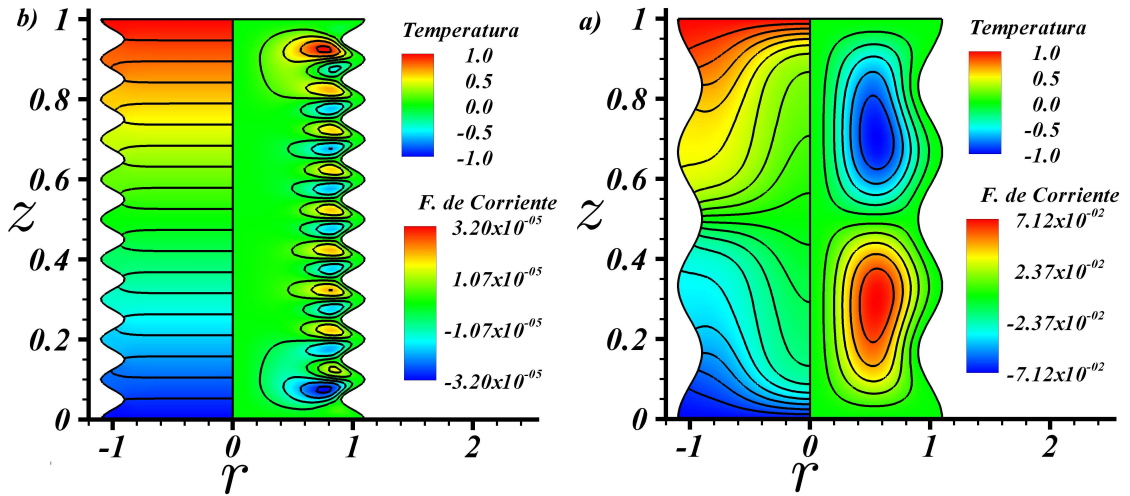


Figura 3.10: Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Lambda = 3$ y b) $\Lambda = 10$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$.

sentido que en el caso del calentamiento por la pared inferior de la figura 3.3. Esto se cumple gracias a que las isotermas se deforman en sentido contrario y los gradientes térmicos en la cavidad favorecen que se mantenga el sentido de giro. Además, los gradientes térmicos son máximos en las paredes superior e inferior.

Efecto de la amplitud adimensional (Γ)

La figura 3.11 muestra el número de Nusselt promedio (Nu_p) en función del número de Rayleigh para diferentes valores de amplitud adimensional. En este caso se observa que el número de Nusselt promedio disminuye al aumentar la amplitud. Para números de Rayleigh pequeños la transferencia de calor ocurre por el mecanismo de la difusión. La transferencia de calor por convección para amplitudes pequeñas ($\Gamma = 0.05, 0.1$) inicia cuando el número de Rayleigh es del orden 10^4 , mientras que con amplitudes grandes ($\Gamma = 0.3$) la convección de calor se presenta cuando Rayleigh es del orden 10^5 . Además, el valor de número de Nusselt promedio es siempre menor para el caso de mayor amplitud.

En la figura 3.12 se muestra la distribución de la temperatura y la función de corriente para las amplitudes adimensionales $\Gamma = 0.3, 0.05$, y $Ra = 10^5$. En la figura citada se observa un comportamiento muy similar al observado en la figura 3.5, donde la cavidad con mayor amplitud de onda presenta estratificación térmica, y la

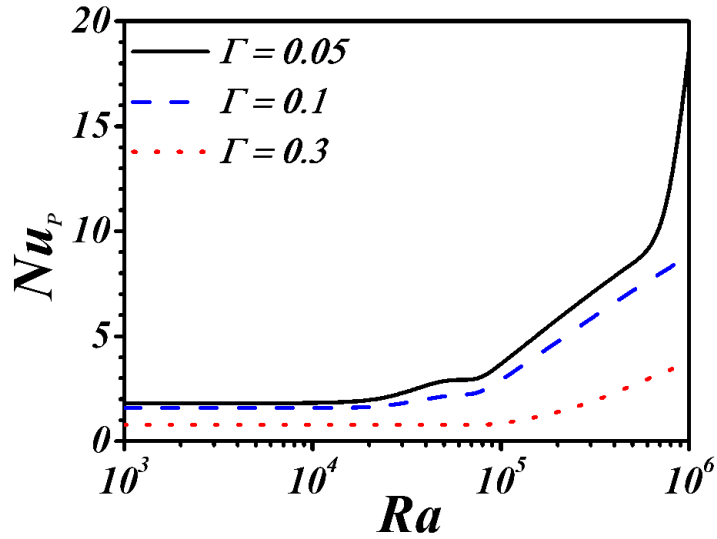


Figura 3.11: Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes amplitudes. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$.

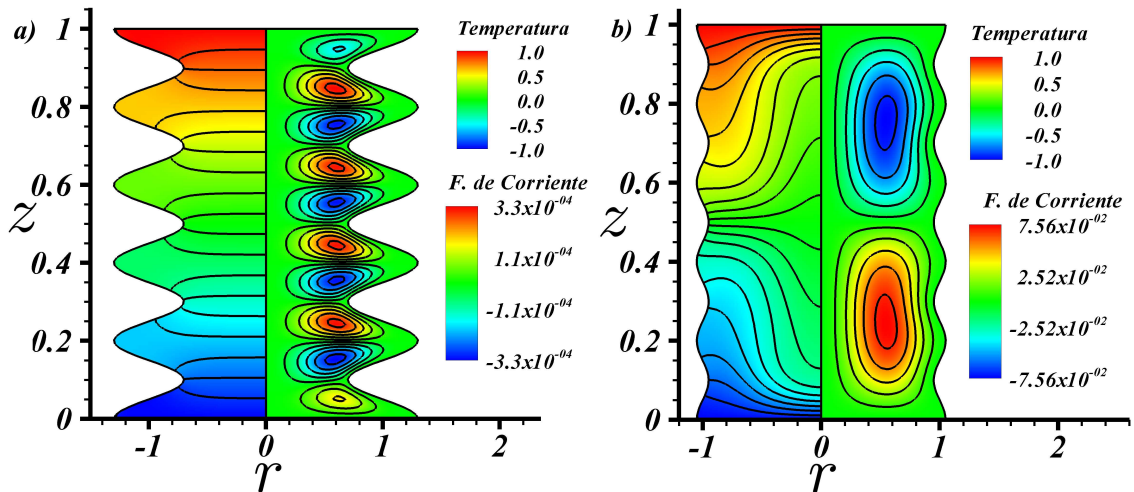


Figura 3.12: Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Gamma = 0.3$ y b) $\Gamma = 0.05$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$.

de menor amplitud presenta convección térmica. La diferencia principal es que en la figura 3.12a el giro de las celdas convectivas ocurre en sentido contrario al de la figura 3.5, como consecuencia de que los gradientes térmicos en dirección vertical son opuestos entre sí. La figura 3.12b presenta el mismo sentido de giro en sus celdas convectivas comparada con la figura 3.5b, esto ocurre debido a que los gradientes de

temperatura en la dirección radial es semejante en ambos casos. Además es evidente que existe un gradiente térmico considerable en las paredes superior e inferior de la cavidad.

Efecto de la relación de aspecto (ϵ)

La figura 3.13 muestra el número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes relaciones de aspecto. La gráfica muestra que, al igual que en el caso del calentamiento por abajo (figura 3.6), la relación de aspecto es un parámetro importante que define la condición para la cual la convección de calor cobra importancia. Así, para una relación de aspecto $\epsilon = 0.5$, la convección se vuelve importante cuando el número de Rayleigh es del orden 10^3 . Para $\epsilon = 0.3$, la convección aparece cuando el Rayleigh es del orden 10^4 , y para $\epsilon = 0.1$, el fenómeno es principalmente difusivo en todo el rango del número de Rayleigh estudiado. El aumento en la relación de aspecto favorece la convección de calor. Esto se observa en el comportamiento del número de Nusselt promedio, donde a mayor relación de aspecto mayor número de Nusselt promedio. Cabe mencionar que el incremento abrupto en el número de Nusselt promedio para una relación de aspecto $\epsilon = 0.5$ ocurre cuando el número de Rayleigh es del orden 10^5 , como consecuencia de una evolución en el flujo convectivo, que favorece el aumento de los gradientes térmicos cerca de la pared.

La figura 3.14 muestra las distribuciones de la temperatura y la función de corriente para la relación de aspecto $\epsilon = 0.1, 0.5$, y para un número de Rayleigh $Ra = 10^5$. La figura 3.14a corresponde a una relación de aspecto $\epsilon = 0.1$, y en ésta se observa estratificación térmica en la cavidad, la diferencia principal respecto a la figura 3.7a consiste en que los sentidos de giro de las celdas convectivas son opuestas. Las celdas convectivas afectan toda la cavidad, no solamente la zona adyacente a la pared ondulada. La figura 3.14b muestra las isotermas y la función de corriente para una relación de aspecto $\epsilon = 0.5$. Existe un par de celdas convectivas, con los sentidos de giro contrarios a los de la figura 3.7b. Además, las celdas son más simétricas que en el caso calentado por abajo. La velocidad del fluido cerca de la pared ondulada es insignificante y las isotermas muestran un gradiente térmico importante en las zonas adyacentes a las paredes superior e inferior de la cavidad.

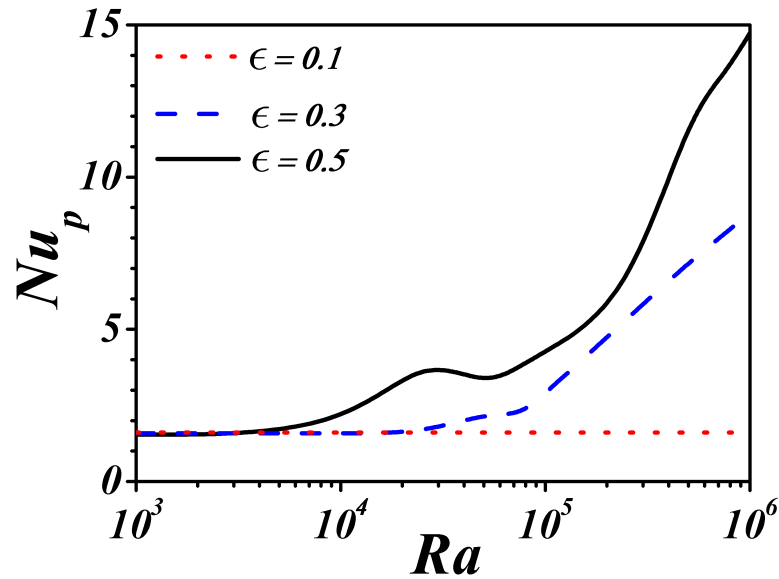


Figura 3.13: Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes relaciones de aspecto. Los parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$.

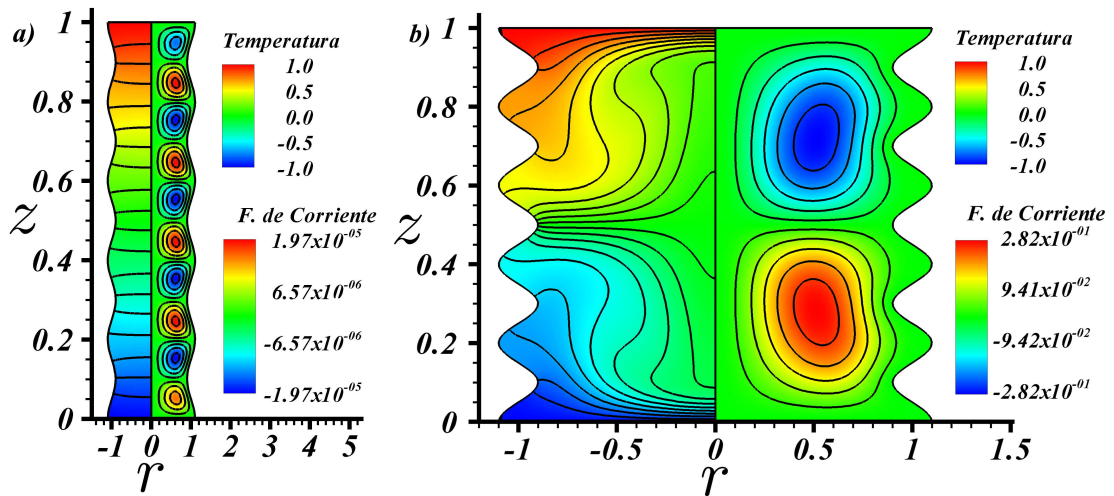


Figura 3.14: Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\epsilon = 0.1$ y b) $\epsilon = 0.5$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$.

3.2. Transferencia de calor y masa en un fluido libre

Para estudiar el problema de la transferencia de calor y masa esquematizado en la figura 2.1 se resolvió el problema transitorio definido por las ecuaciones (2.19) y

(2.21). Se realizó la simulación para diferentes parámetros adimensionales entre ellos el número de Rayleigh (Ra), la relación de flotación (N), el número de Schmidt (Sc) y algunos parámetros geométricos como la relación de aspecto (ϵ). En los resultados del régimen permanente de convección térmica (sección 3.1) claramente se observa que para bajos números de Rayleigh el transporte de calor ocurre por difusión, mientras que para altos números de Rayleigh la convección de calor se vuelve importante. Para estudiar el régimen transitorio se eligieron los números de Rayleigh 10^3 y 10^5 debido a que dichos valores son característicos del transporte difusivo y convectivo, respectivamente. Para la relación de flotación se eligieron los valores $N = 5, -5$, ambas condiciones son comunes en problemas de aplicación práctica y en fenómenos naturales. De acuerdo con la revisión de la literatura especializada para el transporte de masa en gases el número de Schmidt se encuentra entre los valores de 0.1 y 1, mientras que para líquidos y sólidos se encuentra entre 500 y 1000. Estos cuatro valores se utilizan en las simulaciones numéricas de este estudio. Finalmente, se realiza un análisis para determinar los parámetros geométricos más importantes que modifican el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood. El número de Prandtl se mantiene en $Pr = 7$.

3.2.1. Efecto del número de Rayleigh Ra y relación de flotación N

En la figura 3.15 se muestra el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio para bajos números de Rayleigh y Schmidt. Los números de Nusselt y Sherwood promedio se calculan en la pared superior de la cavidad con la ecuación (2.42). Las figuras 3.15a y 3.15b muestran el comportamiento para $N = -5$ y $N = 5$, respectivamente; ambos corresponden a $Ra = 10^3$ y $Sc = 0.1$. Se observa que la transferencia de masa es más intensa que la transferencia de calor aproximadamente un orden de magnitud. Tanto el número de Nusselt como el número de Sherwood comienzan con un valor muy grande y rápidamente disminuyen. Esto se debe a que al inicio los gradientes térmico y de concentración son muy grandes cerca de la pared superior. El efecto de la razón de flotación es despreciable, según lo muestra el comportamiento de las gráficas. Para tiempos adimensionales del orden 1, el número de Nuseselt se vuelve constante del orden de la unidad. Las figuras

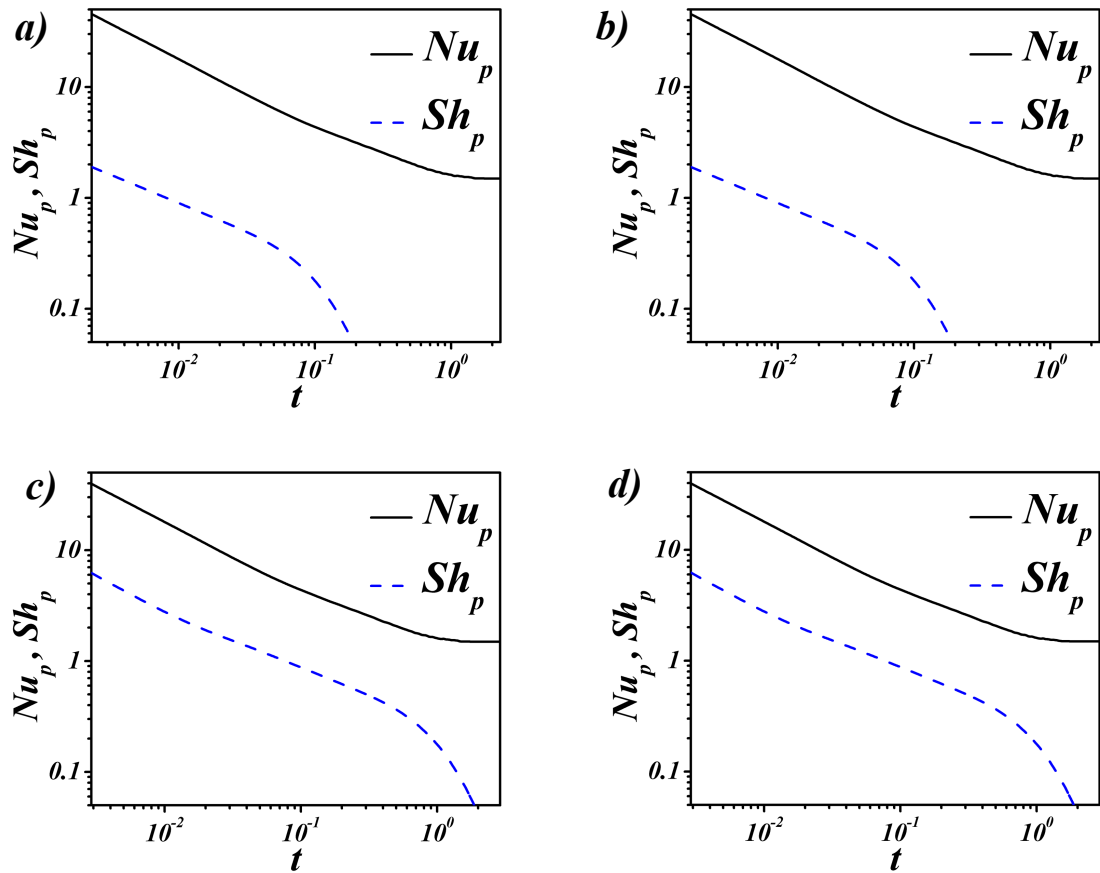


Figura 3.15: Número de Nusselt y Sherwood promedio para bajos números de Rayleigh y bajos números de Schmidt. Todas la gráficas corresponden a $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Sc = 0.1$ y $N = -5$. b) $Sc = 0.1$ y $N = 5$. c) $Sc = 1$ y $N = -5$. d) $Sc = 1$ y $N = 5$.

3.15c y 3.15d muestran los números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo para el caso de $Sc = 1$ y $Ra = 10^3$. En esta ocasión los incisos c) y d) corresponden a $N = -5$ y $N = 5$, respectivamente. Se observa que la transferencia de calor tarda aproximadamente lo mismo en volverse constante que la transferencia de masa en cesar, es decir, en comparación con el caso $Sc = 0.1$, la transferencia de masa tarda un orden de magnitud más en volverse despreciable. En este caso el efecto de la relación de flotación N tampoco es relevante.

En la figura 3.16 se muestran las distribuciones de temperatura, concentración y función de corriente para $Ra = 10^3$ y $Sc = 0.1$, en diferentes tiempos adimensionales que ejemplifican el comportamiento térmico e hidrodinámica de la cavidad.

Además, se muestran las *heatlines* y las *masslines* con el objeto de permitir una mejor visualización de los resultados. En la figura 3.16 se muestran los contornos de temperatura y las líneas de calor (izquierda), en un tiempo muy cercano al inicio del fenómeno ($t = 0.01$). Se observa que los contornos de temperatura están horizontales y las *heatlines* son totalmente perpendiculares a dichos contornos por lo que se puede concluir que la transferencia de calor se lleva a cabo por difusión en los primeros instantes del fenómeno. Para este tiempo el gradiente de temperatura en las superficies superior e inferior es muy intenso, como consecuencia el número de Nusselt promedio es grande, figura 3.15a. Se muestran los contornos de concentración (centro) y sus respectivas *masslines*. Es evidente que los contornos de concentración han recorrido una mayor distancia que los contornos de temperatura confirmando que para este caso el transporte de masa es más intenso que la transferencia de calor. Aún así, existen gradientes de concentración importantes en la mitad superior de la cavidad, mientras en la mitad inferior el gradiente es insignificante. Finalmente, la función de corriente muestra una celda principal que gira en contra de las manecillas del reloj con muy poca cantidad de movimiento. El flujo tiene mayor movimiento en la mitad superior de la cavidad, además, existe una pequeña celda secundaria en la parte superior de la cavidad.

Una evolución importante en el comportamiento ocurre cuando la transferencia de masa es menos intensa, como se puede observar en los contornos de temperatura, concentración y función de corriente correspondientes al tiempo $t = 0.19$. En este instante las *heatlines* indican que la cavidad tiende a estratificarse térmicamente, mientras los contornos de concentración presentan un gradiente muy pequeño. Esto indica que el flujo en la cavidad está a punto de alcanzar la concentración de la pared superior, por lo que la transferencia de masa es ya muy pequeña. La función de corriente ha evolucionado en dos celdas principales con giros contrarios de baja cantidad de movimiento. Existe mayor velocidad en las regiones superior e inferior de la cavidad y en el centro el movimiento es despreciable. Finalmente, los contornos para un tiempo $t = 1.93$ muestran que la cavidad se encuentra estratificada térmicamente, las *heatlines* lucen visiblemente perpendiculares a las isoterms, es decir, la transferencia de calor es dominada por la conducción. Para $t = 0.19$ el gradiente de concentración es notable únicamente en la región superior y sólo en esta región existe transferencia de masa, por lo tanto, el movimiento del fluido en la cavidad

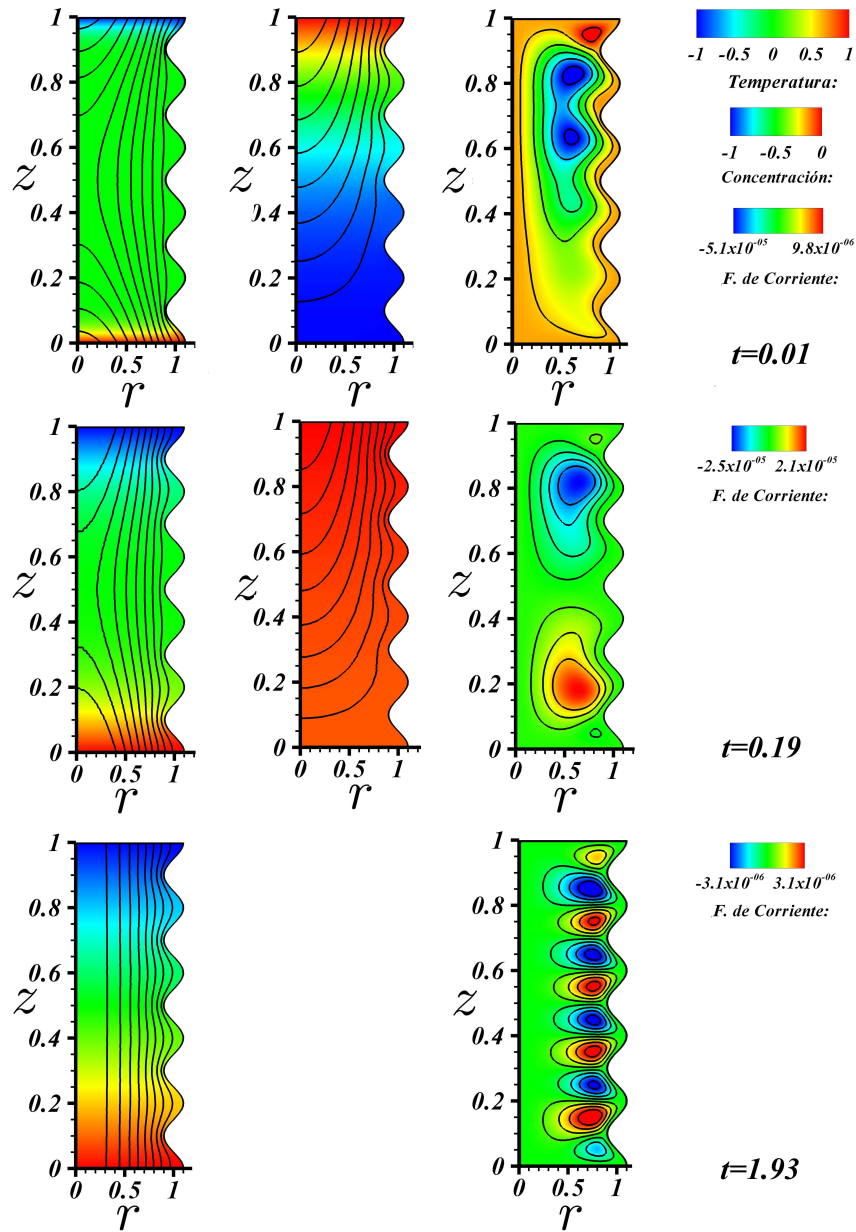


Figura 3.16: Secuencia de contornos de temperatura, isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $Sc = 0.1$, $N = -5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. En líneas continuas se indican las *heatlines*, *masslines* y líneas de corriente. Para $t = 0.01$: $\Delta H = 0.085$, $\Delta M = 8.93 \times 10^{-3}$, $\Delta \psi = 1.21 \times 10^{-5}$. Para $t = 0.19$: $\Delta H = 0.015$, $\Delta M = 4.84 \times 10^{-4}$, $\Delta \psi = 6.56 \times 10^{-5}$. Para $t = 1.93$: $\Delta H = 8.37 \times 10^3$, $\Delta \psi = 8.73 \times 10^{-7}$.

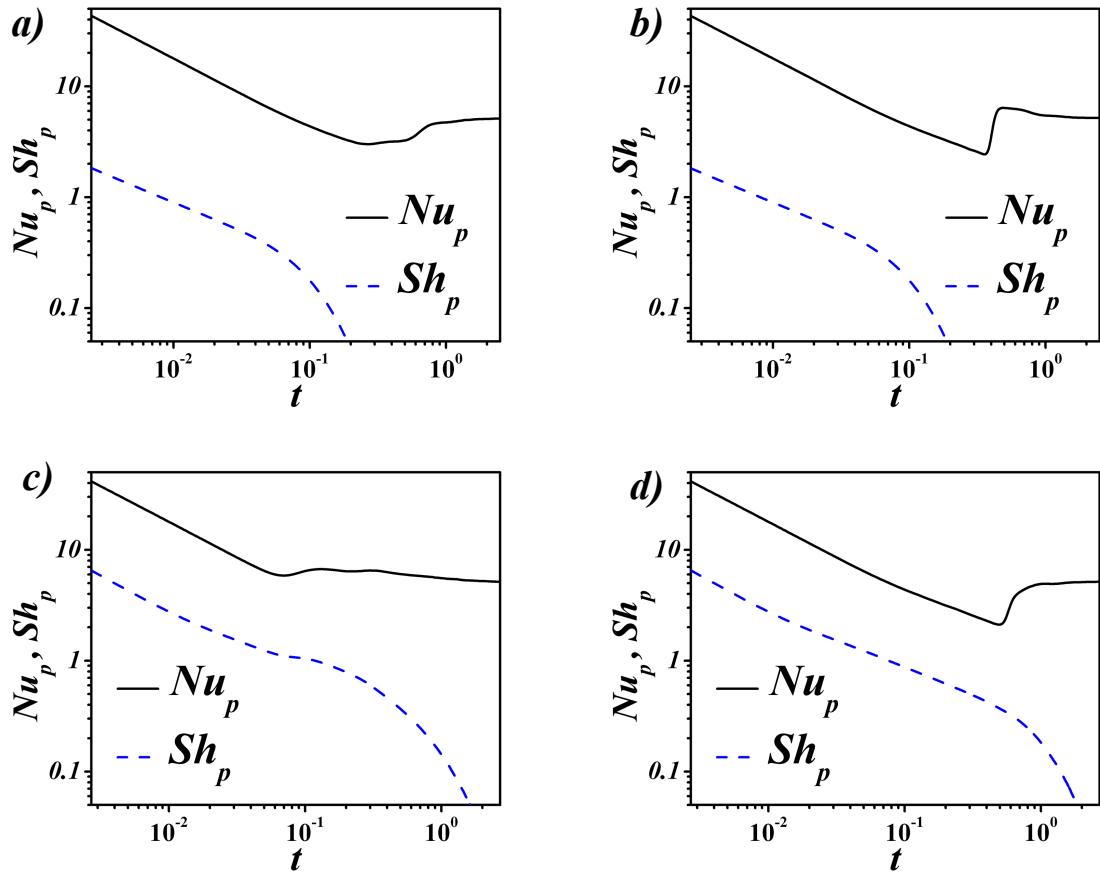


Figura 3.17: Números de Nusselt y Sherwood promedio para $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Sc = 0.1$ y $N = -5$. b) $Sc = 0.1$ y $N = 5$. c) $Sc = 1$ y $N = -5$. d) $Sc = 1$ y $N = 5$.

sólo depende de los gradientes de temperatura. Finalmente, cuando $t = 1.93$ se logra la solución de estado permanente mostrada anteriormente, donde existen pares de celdas convectivas de muy baja cantidad de movimiento en la vecindad de la pared ondulada.

La figura 3.17 muestra el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio para un número de Rayleigh de 10^5 . Para el caso $Sc = 0.1$ el proceso de transporte de masa es más rápido comparado con el transporte de calor. La condición final para la transferencia de calor se alcanza cuando el tiempo adimensional es cercano a la unidad, y en este caso el valor del número de Nusselt promedio es mayor al mostrado en la figura 3.15. Esto se debe a que la transferencia de calor por

convección es importante para números de Rayleigh moderadamente altos como este. Las figuras 3.17a y 3.17b muestran una evolución en el comportamiento del número de Nusselt promedio, que repentinamente aumenta su valor cuando $t \sim 1$. La razón de flotación positiva ocasiona un cambio más intenso en el número de Nusselt promedio cuando la transferencia de masa se vuelve despreciable y la transferencia de calor alcanza el estado permanente. En estas circunstancias la convección únicamente es afectada por gradientes térmicos debido a que los gradientes de concentración son insignificantes. Las figuras 3.17c y 3.17d corresponden a el número de Schmidt 1. La transferencia de calor alcanza el estado permanente aproximadamente en el mismo tiempo en el que la transferencia de masa en la cavidad se vuelve despreciable. La figura 3.17 muestra que el cambio del número de Nusselt promedio es más intenso cuando la razón de flotación es positiva. Además, la cavidad tarda aproximadamente un orden de magnitud más en alcanzar la concentración de la pared superior cuando $Sc = 1$, comparado con el caso $Sc = 0.1$.

En la figura 3.18 se muestra una secuencia de la distribución de la temperatura, concentración y función de corriente para un número de Rayleigh de 10^5 , número Schmidt de 0.1 y una relación de flotación de $N = -5$. Además, se muestran las *heatlines* y *masslines* para una mejor visualización de los resultados. Se observa que para un tiempo muy cercano al inicio del fenómeno ($t = 0.03$), el calor se transporta por difusión, como se puede ver en los contornos de temperatura y las *heatlines*. La distribución de la concentración y las *masslines* muestran que la alta concentración en la pared superior afectan más rápido al fluido en la cavidad que las condiciones de frontera térmicas. Este efecto puede verse también en el comportamiento del número de Sherwood mostrado en las gráficas de la figura 3.17. En la mitad superior de la cavidad existe un gradiente importante de concentración, mientras en la mitad inferior los gradientes de concentración son despreciables. La función de corriente para $t = 0.03$ muestra una celda de convección que gira en contra de las manecillas del reloj con baja cantidad de movimiento, misma que interactúa con celdas secundarias pequeñas. El flujo se mueve con mayor velocidad en la mitad inferior de la cavidad y en la celda secundaria que se forma en la zona superior derecha del gráfico. Aún así, el movimiento no es suficiente para que sea importante el mecanismo de la convección en el transporte de calor y masa.

Los contornos para un tiempo adimensional $t = 0.19$ corresponden al momento

en el que la transferencia de masa es muy pequeña respecto a la transferencia de calor. En este momento ocurre un cambio en el comportamiento debido a que los gradientes térmicos comienzan a dominar. Como se observa, las *heatlines* ya no son necesariamente perpendiculares a las isotermas como sucede cuando la transferencia de calor es dominada por la difusión. En los contornos de concentración se observa que toda la cavidad ha alcanzado una alta concentración y que el gradiente es ya muy pequeño. El comportamiento de la función de corriente muestra que comienza a formarse en la parte superior de la cavidad una celda principal que gira en contra de las manecillas del reloj y existe muy poco movimiento en la mitad inferior de la cavidad. Finalmente, en $t = 1.75$, la cavidad ha alcanzado la concentración de la pared superior y los efectos de los gradientes de concentración son despreciables, por lo que el mecanismo de transferencia de calor dominante es la convección. La función de corriente muestra una celda convectiva principal que gira en contra de las manecillas del reloj. Para este tiempo el fenómeno alcanza el estado permanente y la velocidad cerca de la pared es muy pequeña.

Como se observó en las gráficas de la figura 3.17, para altos números de Rayleigh el efecto de la razón de flotación cobra importancia, principalmente en el comportamiento del número de Nusselt promedio. En la figura 3.19 se muestra una secuencia de la distribución de temperatura, *heatlines*, campos de concentración, *masslines* y la función de corriente para un número de Rayleigh de 10^5 , número de Schmidt de 1 y una razón de flotación $N = 5$. En este caso se pueden observar las diferencias en el comportamiento al cambiar el signo de la relación de flotación y el retraso que experimenta la transferencia de masa causada por un número de Schmidt mayor.

En la figura 3.19 se observa que la transferencia de calor en un tiempo muy cercano al inicio del fenómeno es por pura difusión, $t = 0.07$. En este momento existe un gradiente de temperatura importante en las superficies superior e inferior de la cavidad. Además, la concentración de masa ha afectado aproximadamente la mitad de la cavidad, donde existen gradientes importantes. En la mitad inferior de la cavidad, los gradientes de concentración son despreciables. El transporte de masa en este momento ocurre principalmente por difusión. La celda convectiva principal que se forma en la cavidad, que en este momento tiene muy poca cantidad de movimiento, gira a favor de las manecillas del reloj, es decir, en sentido contrario al caso que se muestra en la figura 3.18. Cuando el tiempo adimensional alcanza $t = 0.48$ el mecan-

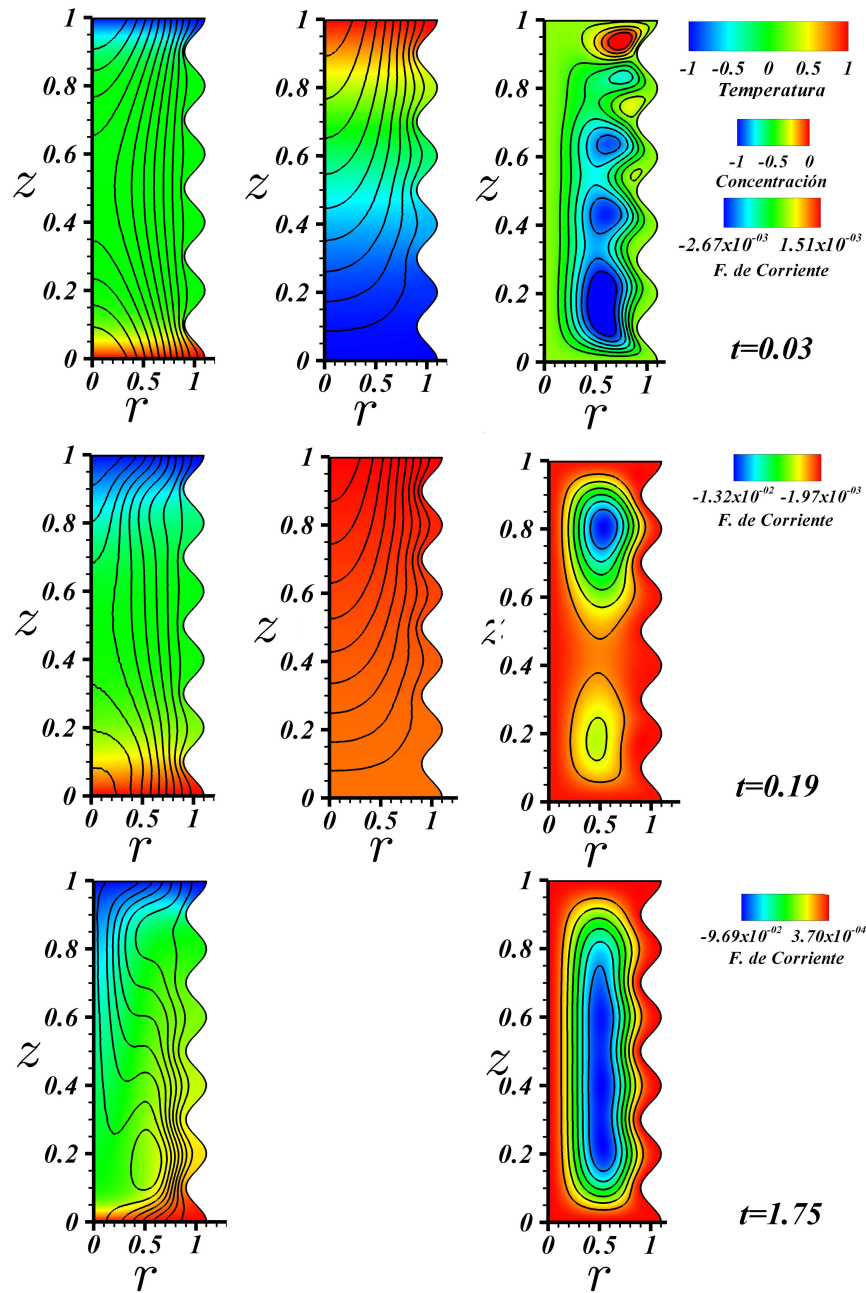


Figura 3.18: Secuencia de isotermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $Sc = 0.1$, $N = -5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. Además, se muestran en línea continua las *heatlines*, *masslines* y líneas de corriente. Para $t = 0.03$: $\Delta H = 0.034$, $\Delta M = 4.46 \times 10^{-3}$, $\Delta \psi = 4.4 \times 10^{-4}$. Para $t = 0.19$: $\Delta H = 0.047$, $\Delta M = 8.61 \times 10^{-4}$, $\Delta \psi = 2.23 \times 10^{-3}$. Para $t = 1.75$: $\Delta H = 0.528$, $\Delta \psi = 0.013$.

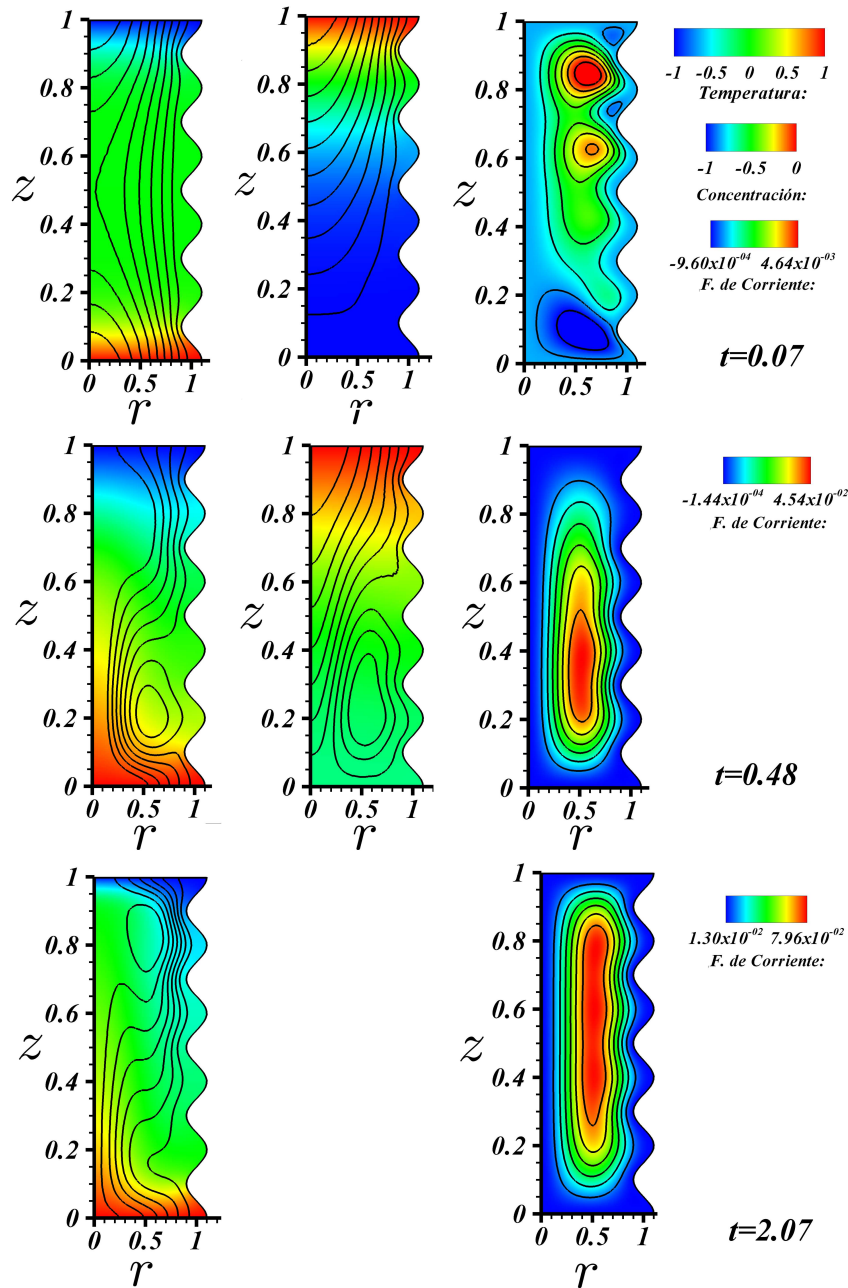


Figura 3.19: Secuencia de isotermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $Sc = 1$, $N = 5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. Además, se muestran en línea continua las *heatlines*, *masslines* y líneas de corriente. Para $t = 0.07$: $\Delta H = 0.03$, $\Delta M = 0.01$, $\Delta\psi = 8.0 \times 10^{-4}$. Para $t = 0.48$: $\Delta H = 0.219$, $\Delta M = 0.031$, $\Delta\psi = 6.5 \times 10^{-3}$. Para $t = 2.07$: $\Delta H = 0.55$, $\Delta\psi = 0.013$.

ismo de la convección ya es importante y domina el transporte de calor y masa en la cavidad. La función de corriente presenta una celda convectiva principal a favor de las manecillas del reloj con cantidad de movimiento considerable. La celda convectiva que se formó en la parte inferior de la cavidad ha crecido y domina el movimiento del fluido. Por último, cuando el tiempo adimensional es $t = 2.07$, la transferencia de masa es despreciable y el fenómeno comienza a comportarse en régimen permanente. En este tiempo el mecanismo de transferencia de calor dominante es la convección debida a una celda convectiva principal presente en la cavidad que gira a favor de las manecillas del reloj.

3.2.2. Efecto de altos números de Schmidt

La figura 3.20 muestra los números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo para $Ra = 10^3$, $Sc = 500$, y dos distintos valores de la relación de flotación N .

El transporte de masa en líquidos típicamente tiene un valor del número de Schmidt en el rango $10^2 < Sc < 10^3$. La transferencia de masa es hasta tres ordenes de magnitud más lenta que la transferencia de calor. Al igual que los casos anteriores, la transferencia de calor alcanza el estado permanente al rebasar el tiempo adimensional unitario. El efecto de la razón de flotación se observa claramente en las dos gráficas mostradas en la figura 3.20. En la figura 3.20b se observa que la transferencia de masa decrece de forma monótona a través de todo el tiempo, mientras que la gráfica 3.20a muestra alteraciones provocadas por la convección de masa.

En la figura 3.21 se muestran los contornos de temperatura, concentración y función de corriente para diferentes tiempos, además, se muestran las *heatlines* y *masslines*. Los contornos corresponden a $Sc = 500$, relación de flotación de $N = -5$, $Ra = 10^3$. Para un tiempo adimensional de $t = 1.1$, la cavidad presenta estratificación térmica, por su parte, la transferencia de masa es más lenta y ocurre por difusión. En el gráfico de la función de corriente se observa que los gradientes de concentración afectan en gran medida la convección. Los gradientes intensos de concentración en la parte superior de la cavidad ocasionan la formación de una celda convectiva. Un aspecto importante de la gráfica de la figura 3.20a es la evolución que presenta el número de Sherwood. Existe una notable diferencia con la gráfica de la figura

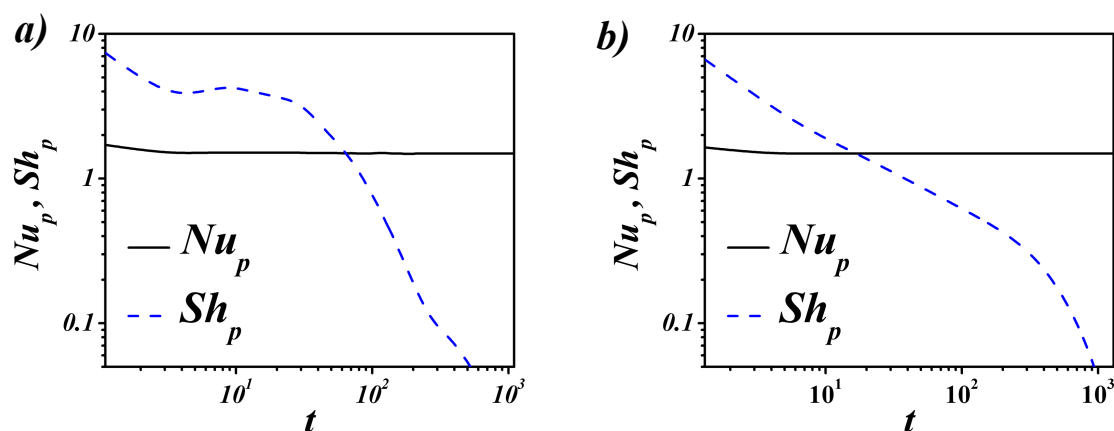


Figura 3.20: Números de Nusselt y Sherwood promedio para $Sc = 500$, $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $N = -5$. b) $N = 5$.

3.20b, donde el número de Sherwood decrece de forma monótona; cabe recordar que la diferencia entre los dos casos es el signo de la relación de flotación. En el tiempo $t = 24.8$ el comportamiento del flujo cambia, la función de corriente evolucionó a una celda convectiva principal que gira a favor de las manecillas del reloj, esto ocasiona que el transporte convectivo se vuelva importante. Los contornos de temperatura y las *heatlines* permiten observar el efecto convectivo; las *heatlines* se curvan indicando el flujo de calor en la cavidad. Por su parte, la transferencia de masa muestra un mayor cambio en su comportamiento. La convección de masa es significativa, por tal razón el número de Sherwood incrementa su valor. Los campos para $N = 5$ no se muestran ya que la única diferencia significativa es que para ese caso toda la transferencia de calor y masa se da por pura difusión a través de todo el tiempo.

Conforme transcurre el tiempo y el fluido en la cavidad aumenta su concentración, los gradientes térmicos dominan. La celda principal comienza a dividirse en pares de celdas convectivas debido a los gradientes locales que se encuentran cerca de la pared ondulada. En la figura 3.21 se presentan los campos de temperatura y función de corriente para $t = 939.2$, un tiempo lo suficientemente largo en donde se observa que el flujo en la cavidad se encuentra en estado permanente. En los campos correspondientes al tiempo $t = 939.2$ se observa que la transferencia de calor es dominada por la difusión, aunque existen pares de celdas convectivas de velocidad baja cercanas a la pared ondulada.

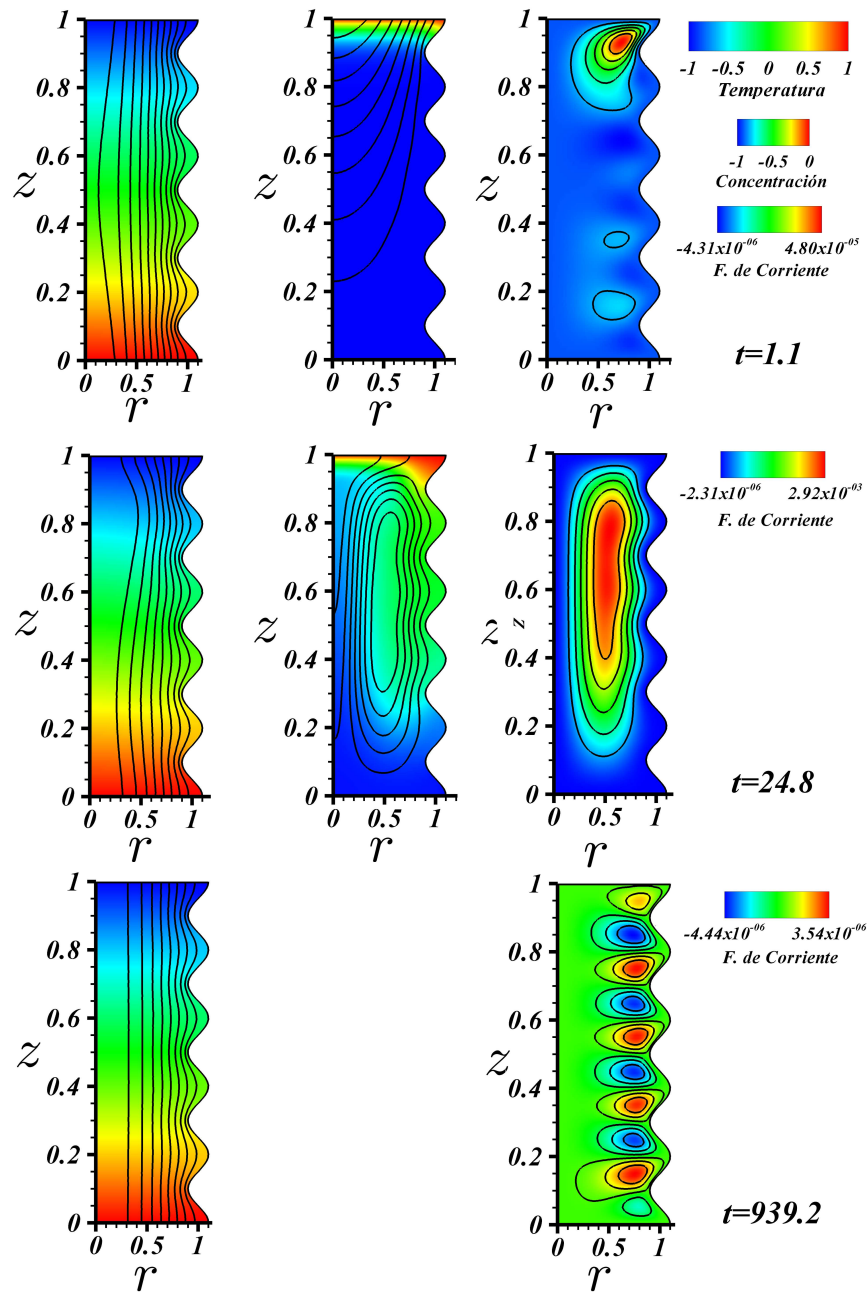


Figura 3.21: Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $Sc = 500$, $N = -5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. En línea continua las *heatlines* y *masslines*. Para $t = 1.1$: $\Delta H = 8.45 \times 10^{-3}$, $\Delta M = 8.91 \times 10^{-2}$, $\Delta \psi = 8.71 \times 10^{-6}$. Para $t = 24.8$: $\Delta H = 9.17 \times 10^{-3}$, $\Delta M = 0.151$, $\Delta \psi = 4.87 \times 10^{-4}$. Para $t = 939.2$: $\Delta H = 9.11 \times 10^{-3}$, $\Delta \psi = 1.14 \times 10^{-6}$.

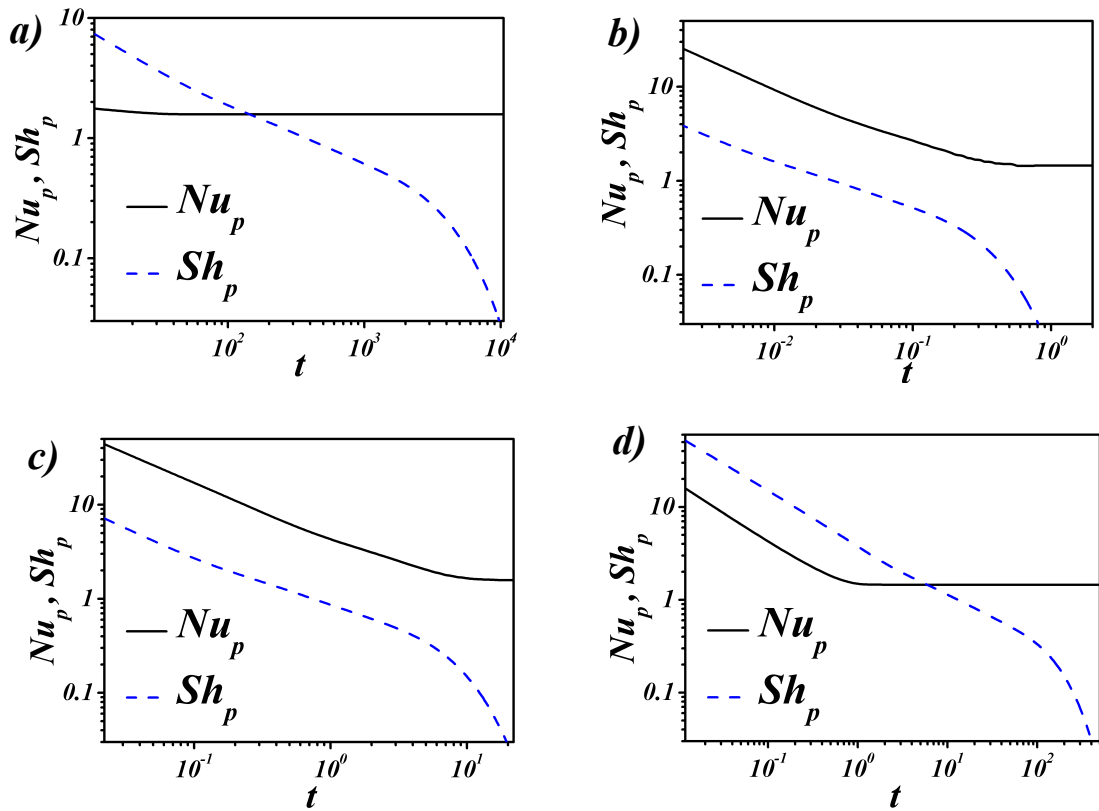


Figura 3.22: Números de Nusselt y Sherwood promedio para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $n = 5$ y $\Gamma = 0.1$. a). $Sc = 1$ y $\epsilon = 0.1 = 5$. b) $Sc = 1$ y $\epsilon = 0.5$. c) $Sc = 500$ y $\epsilon = 0.1$. d) $Sc = 500$ y $\lambda = 0.5$.

3.2.3. Efecto de la relación de aspecto

Se realizaron diferentes simulaciones a bajos números de Rayleigh variando los parámetros geométricos importantes. Se encontró que la longitud de onda y la amplitud adimensionales, no tienen un efecto importante en la transferencia de calor y masa. Por el contrario, la relación de aspecto sí tiene un efecto importante, como lo muestran las gráficas de la figura 3.22.

El efecto de la relación de aspecto para bajos números de Schmidt se muestra en las figuras 3.22a y 3.22b. La primera figura muestra los números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo para una relación de aspecto de $\epsilon = 0.1$, número de Rayleigh de 10^3 , número de Schmidt 1. Se observa que el tiempo necesario para que la transferencia de masa cese es mucho mayor que el necesario para que

la transferencia de calor alcance el estado final. Por el contrario, en la figura 3.22*b*, que corresponde a una relación de aspecto de $\epsilon = 0.5$, se observa que la transferencia de masa es más rápida comparada con la transferencia de calor. En ambos casos los dos fenómenos de transporte presentan un comportamiento monótono, es decir, los efectos convectivos no modifican la tendencia del fenómeno. Si se aumenta el número de Schmidt hasta un valor de 500, con una relación de aspecto de $\epsilon = 0.1$, y se mantienen los demás parámetros constantes, la figura 3.22*c* ilustra que se reduce notablemente el tiempo del fenómeno, es decir la transferencia de masa se vuelve más rápida. Por su parte, si la relación de aspecto es $\epsilon = 0.5$ y $Sc = 500$, el tiempo necesario para que finalice el fenómeno es 300 unidades de tiempo adimensional más, aproximadamente, comparado con el caso de Schmidt pequeño ($Sc = 1$).

En la figura 3.23 se muestran los contornos de temperatura, concentración y función de corriente para diferentes tiempos para el caso de $Sc = 500$ y $\epsilon = 0.1$. En la secuencia de imágenes se observa que en la cavidad la transferencia de calor y masa es dominada por difusión y las celdas convectivas se ven afectadas tanto por los gradientes térmicos como por los gradientes de concentración. La secuencia permite observar los cambios que tiene la función de corriente con el tiempo y la manera en la que la transferencia de masa evoluciona. A un tiempo muy corto de iniciado el fenómeno, $t = 0.91$, la transferencia de calor y masa son dominadas por el mecanismo de la difusión. Existen importantes gradientes térmicos en las zonas cercanas a las paredes superior e inferior de la cavidad, mientras que el centro de la cavidad no presenta gradientes considerables. En el caso de la transferencia de masa, se observa que la alta concentración impuesta en la pared superior de la cavidad ha afectado la mitad superior de la cavidad; la zona inferior no presenta gradientes importantes. La función de corriente muestra que los gradientes de concentración y térmicos provocan mayor movimiento del fluido en la parte superior de la cavidad, formándose pares de celdas convectivas a lo largo de la cavidad hasta desaparecer lentamente por debajo de la mitad de la cavidad. La cantidad de movimiento de las celdas convectivas es muy pequeña. En la zona adyacente a la superficie inferior de la cavidad se forman celdas convectivas de baja velocidad que hasta este instante de tiempo solo son afectadas por gradientes térmicos.

Posteriormente, para un tiempo $t = 10.22$, el gradiente de concentración en la cavidad es muy pequeño y comienzan a dominar los gradientes térmicos. En este

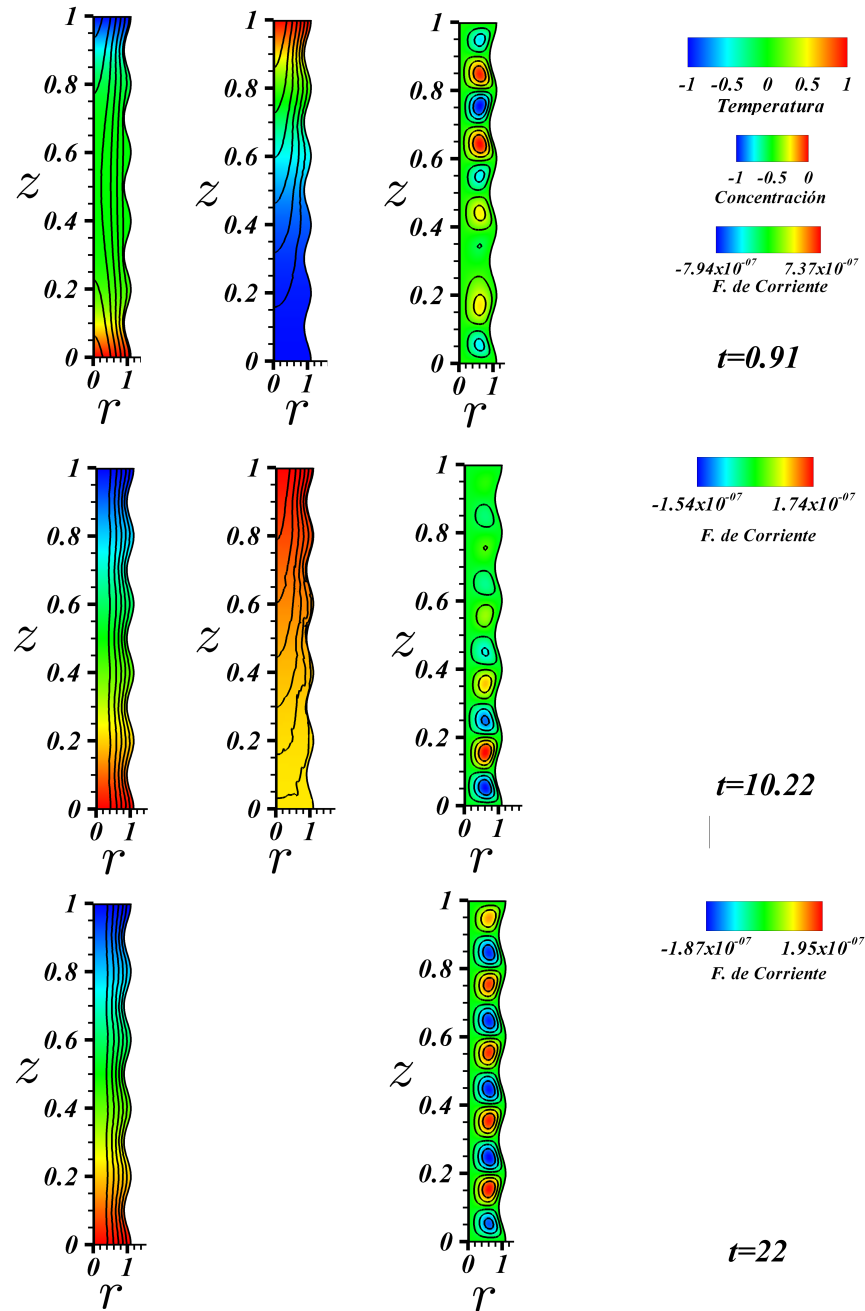


Figura 3.23: Secuencia de isothermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $Sc = 500$, $N = 5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.1$. En línea continua las *heatlines* y *masslines*. Para $t = 0.91$: $\Delta H = 4.66 \times 10^{-3}$, $\Delta M = 1.55 \times 10^{-3}$, $\Delta\psi = 2.18 \times 10^{-7}$. Para $t = 10.22$: $\Delta H = 1.65 \times 10^{-3}$, $\Delta M = 2.75 \times 10^4$, $\Delta\psi = 4.68 \times 10^{-8}$. Para $t = 22$: $\Delta H = 1.6 \times 10^{-3}$, $\Delta\psi = 5.45 \times 10^{-8}$.

momento los intensos gradientes de concentración que estaban presentes en la pared superior ha disminuido notablemente. Ahora se comienzan a formar otras celdas convectivas en la pared inferior, además, comienzan a aparecer celdas en la parte superior de la cavidad, dando paso a la estratificación térmica. Finalmente, a un tiempo $t = 22$, los efectos de los gradientes de concentración son despreciables ya que toda la cavidad ha alcanzado prácticamente la concentración de la pared superior. Por lo tanto, solamente los gradientes térmicos son importantes. La cavidad se encuentra estratificada térmicamente y el flujo consiste en pares de celdas convectivas de baja cantidad de movimiento en toda la cavidad, no solamente a la zona adyacente a la pared ondulada.

3.3. Transferencia de calor y masa en un medio poroso

En este trabajo se estudió el caso de una cavidad cilíndrica con paredes onduladas llena de un medio poroso isotrópico y saturado con un fluido newtoniano. En el modelo se resolvieron las ecuaciones (2.96), (2.97) y (2.98). Los parámetros característicos importantes son la longitud de onda adimensional (Λ), la amplitud de onda adimensional (Γ) y la relación de aspecto (ϵ) que tienen que ver con parámetros geométricos. Además, se estudian los efectos del número de Rayleigh-Darcy (Ra_D), el número de Prandtl efectivo (Pr_e), el número de Schmidt efectivo (Sc_e), la porosidad (φ), la relación de calores específicos (σ) y la relación de flotación (N). El estudio numérico se realiza a bajos números de Rayleigh y se desprecian los efectos de la dispersión hidrodinámica.

3.3.1. Efecto del número de Schmidt Sc y la porosidad φ

Para identificar el efecto del número de Schmidt se presentan dos simulaciones, una para un bajo número de Schmidt efectivo $Sc_e = 1$, y otra para un alto número de Schmidt efectivo $Sc_e = 750$. Ambos casos mantienen en común un número de Rayleigh-Darcy de 0.1, número de Prandtl efectivo de 10, porosidad de 0.3, relación de calores específicos de 0.6, longitud de onda adimensional de $1/5$, amplitud adimensional de 0.1 y una relación de aspecto 0.3. En la figura 3.24a se muestran los

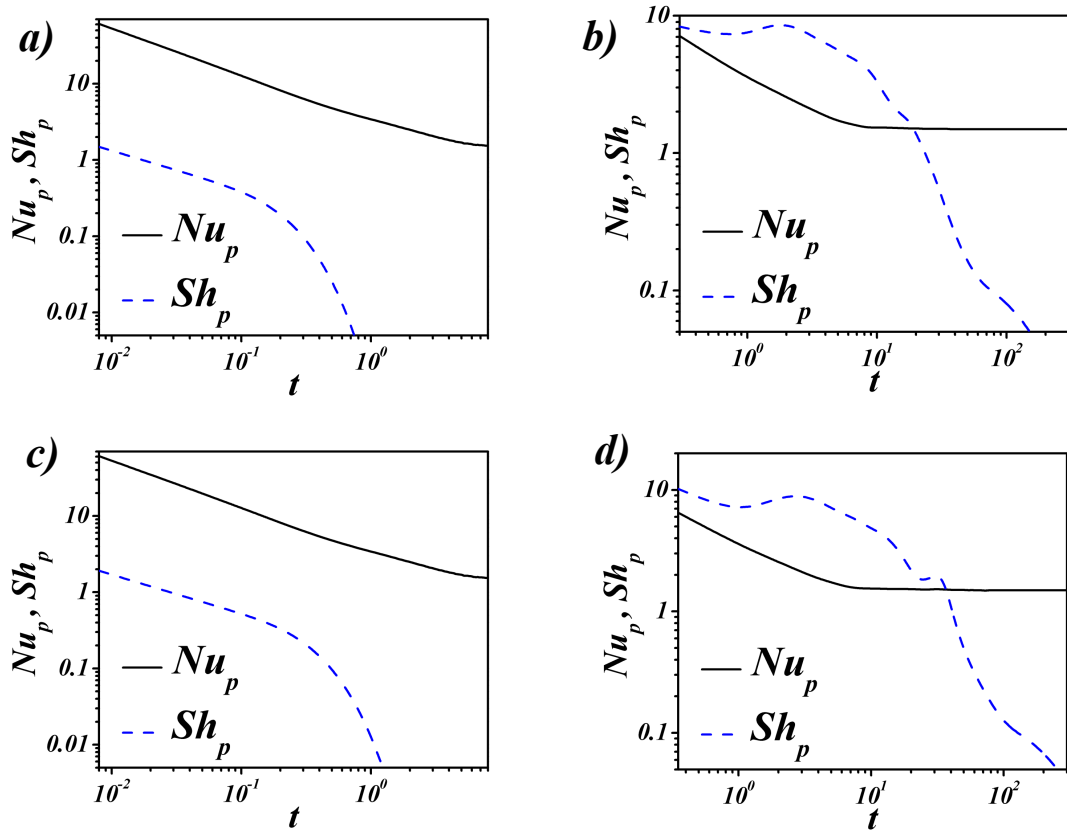


Figura 3.24: Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\Lambda = 1/5$, $\epsilon = 0.3$, $\Gamma = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Ra_D = 0.1$, $\sigma = 0.6$. a) $\varphi = 0.3$, $Sc_e = 1$ b) $\varphi = 0.3$, $Sc_e = 750$, c) $\varphi = 0.5$, $Sc_e = 1$, d) $\varphi = 0.5$, $Sc_e = 750$.

números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo. Se observa que la transferencia de masa es más rápida que la transferencia de calor. En efecto, la transferencia de masa es muy grande al principio del fenómeno y rápidamente disminuye hasta volverse despreciable antes de llegar a una unidad del tiempo, mientras que la transferencia de calor continua cambiando, y tiende alcanzar el estado permanente cerca de $t = 7$. Por su parte, la gráfica para el caso de altos números de Schmidt, figura 3.24b, muestra un comportamiento diferente en la transferencia de masa. En este caso la transferencia de masa es menos intensa que la transferencia de calor. Esta última se comporta aproximadamente igual, alcanzando el estado permanente cerca de $t = 7$. Se observa que la transferencia de masa además de ser más lenta no mantiene una tendencia descendente en toda la gráfica, tiene evoluciones conforme

avanza el tiempo. Las evoluciones tienen origen en el comportamiento del movimiento del fluido en la cavidad, finalmente el número de Sherwood se vuelve despreciable al rebasar el tiempo $t = 10^2$.

La figura 3.24 permite observar los efectos que tiene la porosidad en el transporte de calor y masa. La figura 3.24c tiene los mismos parámetros de simulación de la figura 3.24a, con la única diferencia que en 3.24c se simuló con una porosidad de $\varphi = 0.5$. En general se observa un comportamiento muy similar en ambas gráficas, sin embargo, cuando $\varphi = 0.5$ la evolución de la transferencia de masa es más lenta; se vuelve muy pequeña y despreciable cuando rebasa una unidad de tiempo. En las figuras 3.24b y 3.24d se observa que al aumentar la porosidad de 0.3 a 0.5, manteniendo $Ra_D = 0.1$ y $Sc_e = 750$, la transferencia de masa se retrasa y se vuelve despreciable hasta que rebasa $t = 2 \times 10^2$.

Para ilustrar mejor el comportamiento de la transferencia de calor y masa por convección en la cavidad, se presentan los contornos de temperatura, concentración y función de corriente para una porosidad $\varphi = 0.3$, y un número de Schmidt efectivo de $Sc_e = 1$. En la figura 3.25 se observan las secuencias de las isotermas (izquierda), las líneas de isoconcentración (centro) y función de corriente (derecha) para tres tiempos diferentes. Estos tiempos muestran diferentes comportamientos que ocurren en la cavidad. La gráfica de la figura 3.24 mostró que los números de Nusselt y Sherwood promedio no presentan cambios o evoluciones en su comportamiento a través del tiempo. En la secuencia de gráficos de la figura 3.25 se observa la razón de esto. Para un tiempo $t = 2.26 \times 10^{-2}$ los gradientes térmicos en las paredes superior e inferior son muy grandes mientras que en el centro de la cavidad el gradiente es muy pequeño y se puede considerar insignificante. Sin embargo, las líneas de isoconcentración en la cavidad muestran que la alta concentración de la pared superior ya ha afectado gran parte de la cavidad y existen gradientes importantes por lo menos en la mitad superior de ésta. En los campos de la función de corriente se observan celdas convectivas originadas principalmente por los gradientes de concentración. Con el transcurso del tiempo la alta concentración en la parte superior de la cavidad genera pares de celdas convectivas de baja cantidad de movimiento. La transferencia de calor y masa suceden principalmente por el mecanismo de difusión. Un cambio en el comportamiento del flujo ocurre cuando los gradientes de concentración cesan, lo que ocurre aproximadamente en el tiempo $t = 1.24$, de tal manera que los únicos gra-

dientes presentes son los térmicos, mismos que resultan especialmente importantes en las partes superior e inferior de la cavidad. En ese tiempo, toda la cavidad ha alcanzado una alta concentración. El flujo presenta un par de celdas convectivas en las partes superior e inferior de la cavidad. Cerca del eje de la cavidad la velocidad del fluido es muy pequeña. Conforme el efecto térmico avanza hacia el centro de la cavidad se forman más celdas convectivas de baja cantidad de movimiento cerca de la pared ondulada. La transferencia de calor ocurre principalmente debido a la difusión. Finalmente, la cavidad termina con un gradiente térmico constante vertical en toda la cavidad, de tal forma que muestra el comportamiento típico de la transferencia de calor por difusión. En el tiempo $t = 8.0$, la cavidad ha alcanzado el estado permanente.

La figura 3.26 muestra una secuencia de contornos de temperatura, concentración y función de corriente, cuando el número de Schmidt efectivo es $Sc_e = 750$. Los parámetros son iguales a los utilizados en la secuencia de la figura 3.25. Para un tiempo $t = 0.35$ la transferencia de masa es más lenta, comparada con la transferencia de calor. Las isotermas muestran una penetración en la cavidad mucho mayor que los contornos de concentración. Sin embargo, los gradientes que tienen mayor efecto sobre el flujo son los de concentración. Para este tiempo se ha formado una sola celda convectiva en la parte superior de la cavidad muy cerca de la pared ondulada. En la figura 3.26, correspondiente a un tiempo $t = 12.76$, se muestran isotermas que tienden a la estratificación. Las líneas de isoconcentración muestran gradientes importantes en la cavidad y la función de corriente presenta una celda principal que gira a favor de las manecillas del reloj. La cantidad de movimiento es mayor en la parte superior de la cavidad, condición que favorece la transferencia de masa por convección. Esta situación ocasiona que el número de Sherwood tenga cambios en su comportamiento con el tiempo, aumentando por momentos. Con el transcurso del tiempo, el fluido en la cavidad se satura y alcanza una concentración $C = 0$, de tal manera que los gradientes de concentración se vuelven despreciables. Como consecuencia, las isotermas se estratifican y la celda principal se rompe formando diversas celdas convectivas que al final se mantienen en pares. En la figura 3.26 también se muestran las isotermas estratificadas y la función de corriente en $t = 293.86$. Se observa la formación de celdas convectivas de baja cantidad de movimiento muy creca de la pared ondulada.

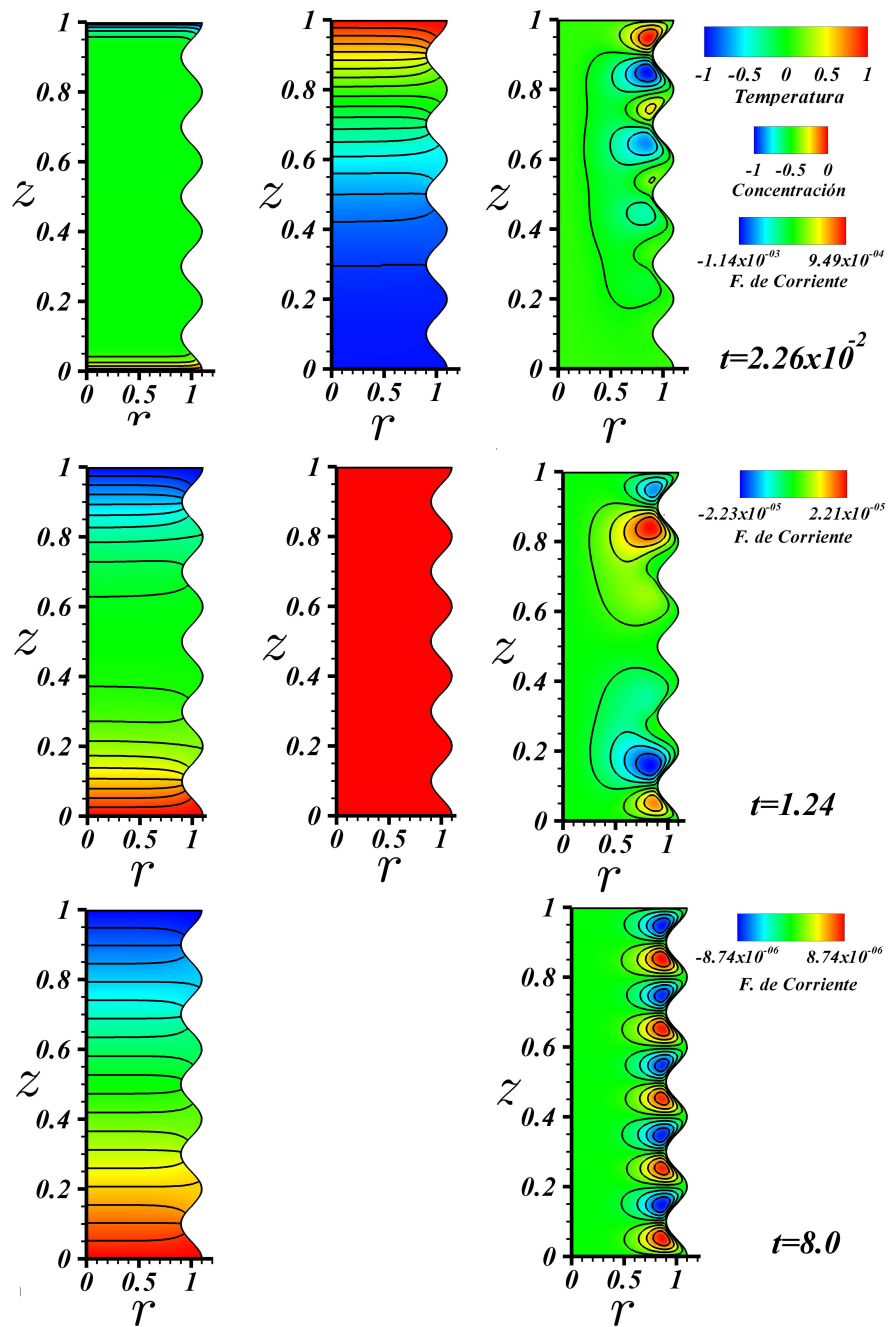


Figura 3.25: Secuencia de isothermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Sc_e = 1$, $N = 5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$.

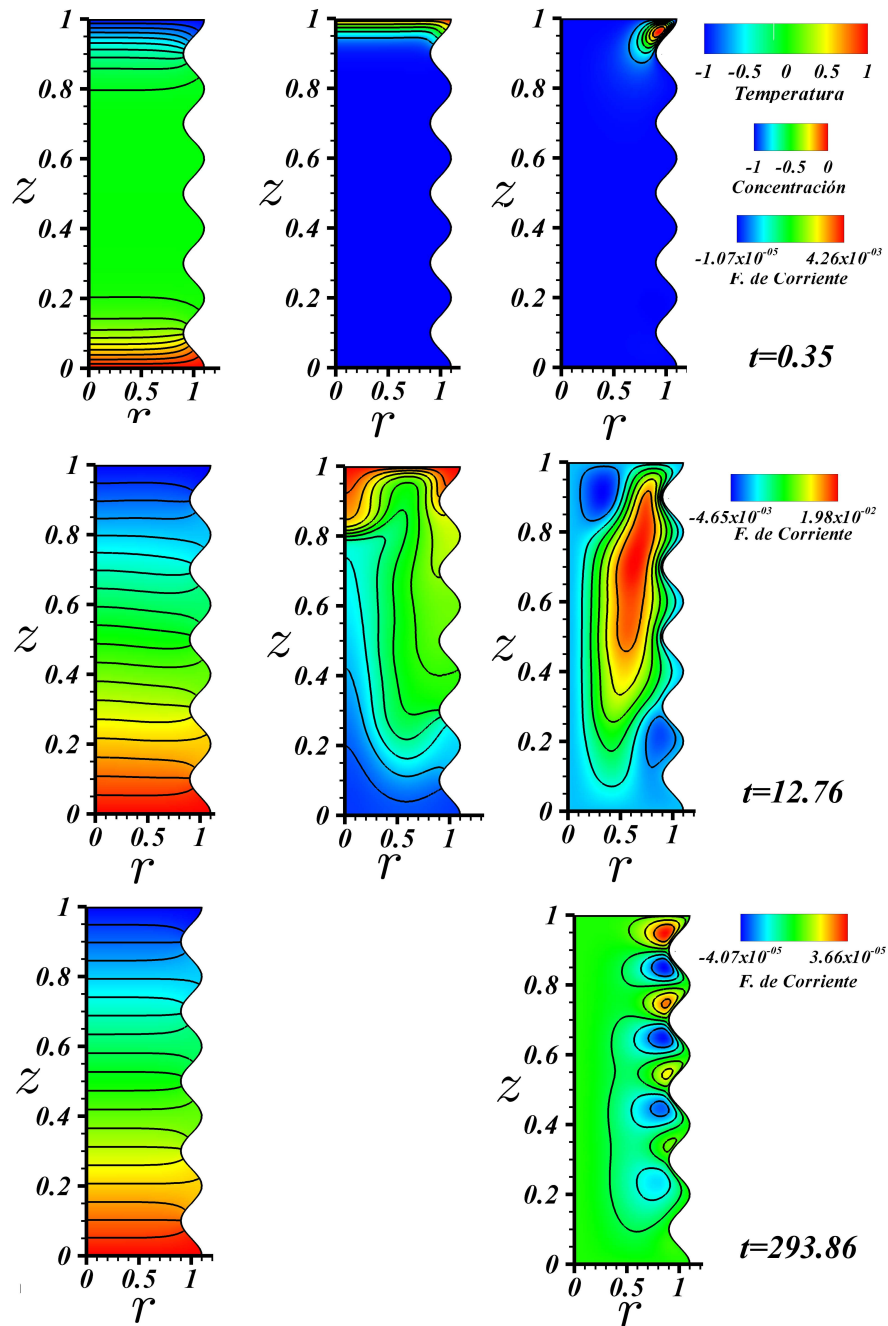


Figura 3.26: Secuencia de isotérmicas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 1$, $Pr_e = 10$, $Sc_e = 750$, $N = 5$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$.

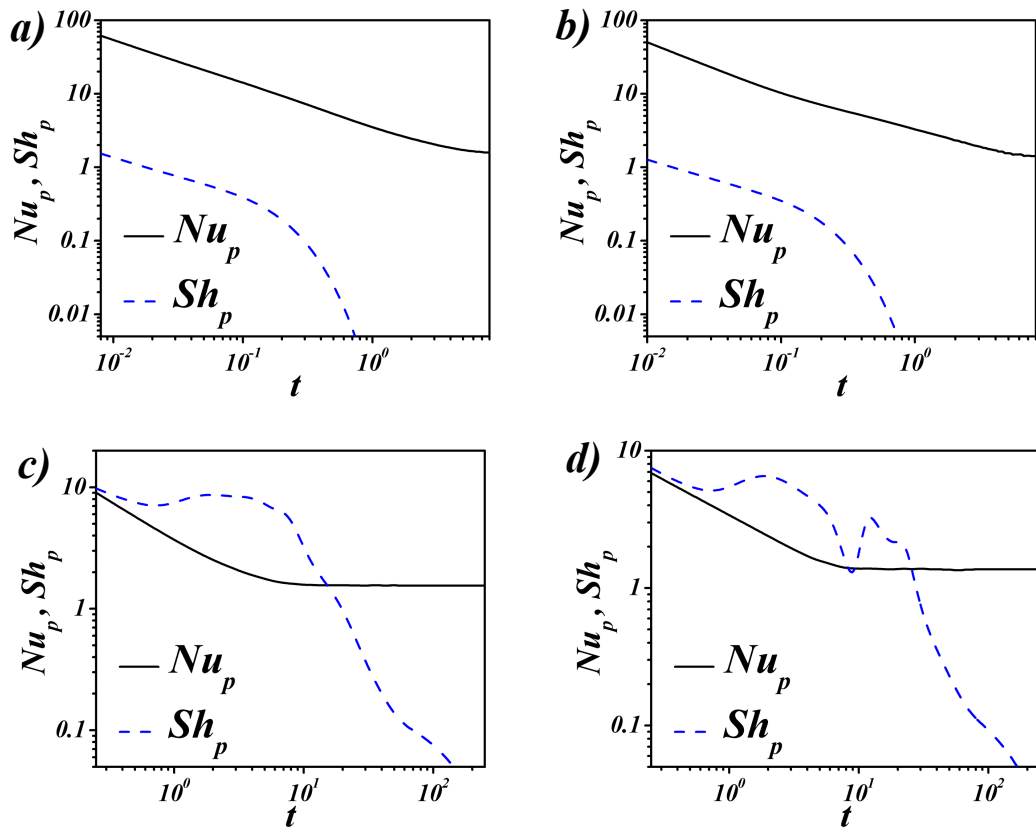


Figura 3.27: Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\epsilon = 0.3$, $\Gamma = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Ra_D = 0.1$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$. a) $\Lambda = 1/3$, $Sc_e = 1$ b) $\Lambda = 1/10$, $Sc_e = 1$, c) $\Lambda = 1/3$, $Sc_e = 750$, d) $\Lambda = 1/10$, $Sc_e = 750$.

3.3.2. Efecto de la longitud de onda adimensional (Λ)

En esta sección se presentan los resultados para una longitud de onda adimensional de $1/3$ y $1/10$, para bajos y altos números de Schmidt efectivo. El número de Rayleigh-Darcy es $Ra_D = 0.1$, el número de Prandtl efectivo, $Pr_e = 10$, la relación de flotación $N = 5$, la porosidad $\varphi = 0.3$, la relación de calores específicos $\sigma = 0.6$, la amplitud de onda adimensional $\Gamma = 0.1$ y la relación de aspecto $\epsilon = 0.3$.

En la figura 3.27 se muestran cuatro gráficas con el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo. Las figuras 3.27a y 3.27b muestran los resultados para un bajo número de Schmidt efectivo, $Sc_e = 1$. La gráfica de la figura 3.27a corresponde a una longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/3$.

La transferencia de masa es muy intensa al inicio y rápidamente decrece hasta que se vuelve despreciable, es decir, la cavidad alcanza el valor de la concentración de la pared superior. Por otro lado, la transferencia de calor alcanza el estado permanente hasta que se rebasa el tiempo adimensional $t = 7$. Se muestra también el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio para la longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/10$. Se observa que los comportamientos de la transferencia de calor y masa no tienen modificaciones importantes con la variación de Λ cuando Sc_e es pequeño. Sin embargo, el efecto de la longitud de onda adimensional a altos números de Schmidt sí afecta la transferencia de calor y de masa. Tal efecto se muestra en los gráficos 3.27c y 3.27d, ambos correspondientes a un número de Schmidt efectivo de $Sc_e = 750$. La figura 3.27c, donde $\Lambda = 1/3$, muestra que la transferencia de calor alcanza el estado permanente cuando el tiempo adimensional es 10, por su parte, la transferencia de masa muestra evolución temporal en su comportamiento hasta que finalmente se vuelve despreciable, al rebasar el tiempo de $t = 10^2$. Cuando la longitud de onda adimensional es $\Lambda = 1/10$ la transferencia de masa muestra una evolución temporal más complicada, además, es menos intensa y requiere más tiempo para que el interior de la cavidad alcance una concentración cercana a la de la pared superior y cese la transferencia de masa.

3.3.3. Efecto de la amplitud (Γ)

En este trabajo se estudió el efecto que tiene la amplitud de onda adimensional sobre la transferencia de calor y masa a bajos y altos números de Schmidt efectivos. Los parámetros que se mantienen constantes en esta ocasión son el número de Rayleigh $Ra_D = 0.1$, el número de Prandtl efectivo $Pr_e = 10$, la porosidad $\varphi = 0.3$, la relación de calores específicos $\sigma = 0.6$, la relación de flotación $N = 5$, la longitud de onda adimensional $\Lambda = 1/5$ y la relación de aspecto $\epsilon = 0.3$. En la figura 3.28 se muestran cuatro gráficas que ilustran el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo. El objetivo es observar el efecto de la amplitud a bajos y altos números de Schmidt efectivo. Las figuras 3.28a y 3.28b muestran el efecto de la amplitud a un bajo número de Schmidt efectivo $Sc_e = 1$. La figura 3.28a corresponde a una amplitud adimensional pequeña $\Gamma = 0.05$, y la figura 3.28b a una amplitud grande $\Gamma = 0.3$. En ambas gráficas se observa que los

números de Nusselt y Sherwood promedio mantienen una tendencia más o menos monótona y sin evoluciones o cambios importantes en su comportamiento. Se observa que para una mayor amplitud la transferencia de masa se retarda ligeramente. En las gráficas 3.28*c* y 3.28*d* se muestra el efecto que tiene la amplitud a un alto número de Schmidt efectivo, $Sc_e = 750$, en la transferencia de calor y de masa. La figura 3.28*c* corresponde a una pequeña amplitud $\Gamma = 0.05$ y la figura 3.28*d* a $\Gamma = 0.3$, manteniendo el valor del número de Schmidt. Comparando las figuras 3.28*a* y 3.28*c* se observa que la transferencia de calor tiene un comportamiento muy semejante para altos y bajos números de Sc_e , siempre que la amplitud sea pequeña ($\Gamma = 0.05$). Por su parte, la transferencia de masa tiene evolución temporal distinta y es menos intensa cuando el número de Schmidt es alto ($Sc_e = 750$). Al aumentar la amplitud a $\Gamma = 0.3$, según se observa en la figura 3.28*d*, la transferencia de calor tarda más en lograr el estado permanente comparado con el caso correspondiente a un bajo número de Schmidt efectivo. Por su parte, el número de Sherwood promedio presenta cambios notables en forma oscilatoria en su evolución temporal comparada con el caso de poca amplitud, figura 3.28*c*. Cuando es grande la amplitud el efecto de los gradientes de concentración tienen mayor duración y el número de Sherwood descende más lentamente en comparación con el caso de baja amplitud. En consecuencia, mientras mayor es la amplitud, el proceso de transferencia de masa es más largo.

Como se observa en la figura 3.28, para un número de Schmidt efectivo bajo, los números de Nusselt y Sherwood promedio presentan un comportamiento descendente y sin cambios importantes. Esto se debe a que el transporte de calor y masa es dominado por el mecanismo de difusión. Al aumentar el número de Schmidt efectivo, el número de Sherwood promedio presenta cambios importantes con el transcurso del tiempo. Las evoluciones mostradas en las figuras 3.28*c* y 3.28*d* se deben a que el flujo en el interior de la cavidad favorece la convección de masa y dicho flujo evoluciona con el tiempo. Para ilustrar mejor este comportamiento, la figura 3.29 muestra una secuencia de los contornos de temperatura, isoconcentración y la función de corriente para el caso de una amplitud grande, $\Gamma = 0.3$, y número de Schmidt efectivo $Sc_e = 750$. Para un tiempo $t = 0.37$ se observa que las isothermas han tenido una mayor penetración en la cavidad comparado con las líneas de isoconcentración. Existen gradientes térmicos muy importantes en la zonas cercanas a la paredes superior

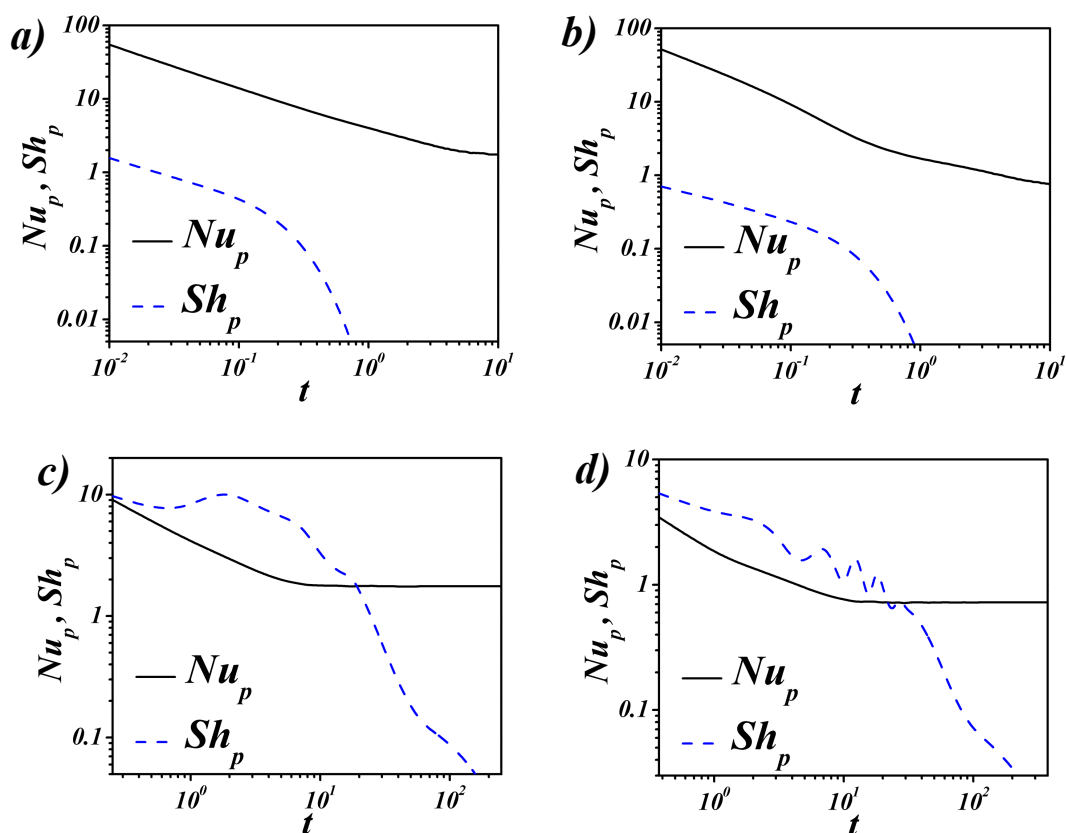


Figura 3.28: Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\Lambda = 1/5$, $\epsilon = 0.3$, $Pr_e = 10$, $Ra_D = 0.1$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$. a) $\Gamma = 0.05$, $Sc_e = 1$ b) $\Gamma = 0.3$, $Sc_e = 1$, c) $\Gamma = 0.05$, $Sc_e = 750$, d) $\Gamma = 0.3$, $Sc_e = 750$.

e inferior, mientras que los gradientes en el centro de la cavidad son despreciables. La concentración alta de la pared superior no ha afectado de forma importante el interior de la cavidad, sin embargo, en la zona adyacente a la pared superior existe un alto gradiente de concentración. El gradiente de concentración en el resto de la cavidad es despreciable. Por su parte, la función de corriente muestra una sola celda convectiva de baja velocidad en la parte superior de la cavidad que gira a favor de las manecillas del reloj. El resto de la cavidad no muestra movimiento importante. El comportamiento del transporte de calor y masa en la cavidad es muy similar al mostrado en la figura 3.26, sin embargo, en esta ocasión los gradientes en la dirección radial son mayores debido a que la amplitud de la pared ondulada es mayor. Con el transcurso del tiempo la cavidad tiende a estratificarse térmicamente, como se puede

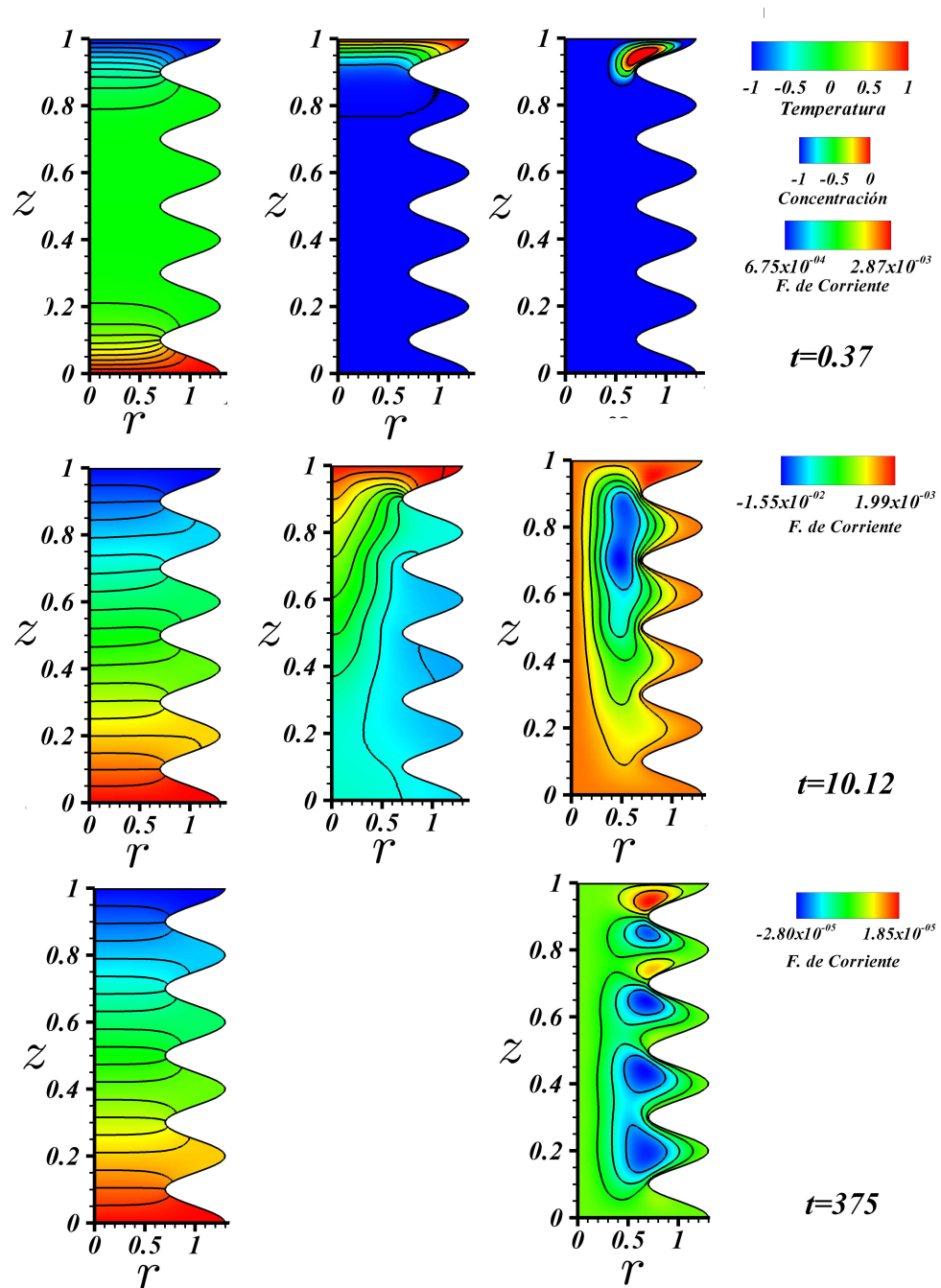


Figura 3.29: Secuencia de isothermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Sc_e = 750$, $N = 5$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.3$ y $\epsilon = 0.3$.

ver en la figura 3.29 que corresponde a un tiempo $t = 10.12$. Por su parte, las líneas de isoconcentración muestran que la convección de masa es intensa. La función de corriente presenta una sola celda convectiva que gira en contra de las manecillas del reloj y tiene la suficiente cantidad de movimiento para modificar la transferencia de masa y provocar que las líneas de isoconcentración pierdan la estratificación presente en los casos en donde la transferencia de masa es dominada por difusión. La función de corriente muestra que existe mayor movimiento en la parte superior de la cavidad. Este comportamiento evoluciona con el tiempo y produce los cambios en el número de Sherwood promedio que se observa en la gráfica de la figura 3.28*d*. A tiempos suficientemente largos la cavidad alcanza alta concentración, las isoterms tienden a alcanzar la estratificación, y la función de corriente, que anteriormente mostraba una sola celda principal, forma pares de celdas convectivas muy cerca de la pared ondulada. En la figura 3.29 se muestran los contornos de temperatura y de función de corriente para un tiempo $t = 375$. La cavidad está totalmente estratificada y existen gradientes de temperatura muy importantes cerca de la pared ondulada, mismos que promueven la formación de pares de las celdas convectivas cerca de esta pared.

3.3.4. Efecto de la relación de aspecto (ϵ)

El parámetro geométrico que modifica y afecta más a la transferencia de calor y masa en la cavidad es la relación de aspecto. La figura 3.30*a* muestra el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio para una relación de aspecto $\epsilon = 0.1$, es decir, un cilindro alto. Por su parte la figura 3.30*b* muestra los números de Nusselt y Sherwood promedio en función del tiempo para el mismo número de Schmidt efectivo, pero para una relación de aspecto de $\epsilon = 0.5$, es decir, para un cilindro de poca altura. Si se comparan las figuras 3.30*a* y 3.30*b* se observa que para una baja relación de aspecto (cilindro alto) la transferencia de calor requiere más tiempo para lograr el estado permanente. Igualmente, la transferencia de masa se ve afectada. En particular cuando el cilindro es alto, $\epsilon = 0.1$, existe transporte considerable hasta el tiempo $t = 3$, aproximadamente. Después de este valor la transferencia de masa es despreciable. Por su parte, cuando el cilindro es de baja altura ($\epsilon = 0.5$) la transferencia de masa es más intensa y cesa cuando $t = 0.3$, aproximadamente. Cuando el número de Schmidt es bajo, la transferencia de calor

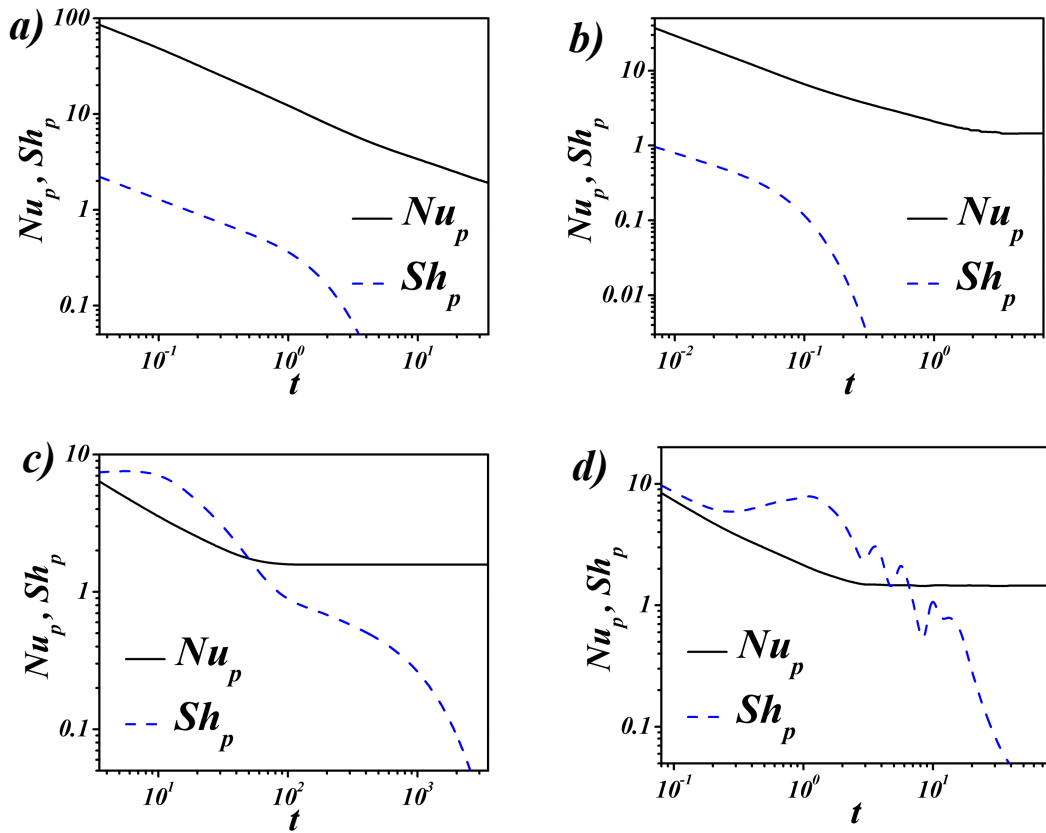


Figura 3.30: Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Ra_D = 0.1$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$. a) $\epsilon = 0.1$, $Sc_e = 1$ b) $\epsilon = 0.5$, $Sc_e = 1$, c) $\epsilon = 0.1$, $Sc_e = 750$, d) $\epsilon = 0.5$, $Sc_e = 750$.

y masa es más intensa con el aumento de la relación de aspecto. En el caso de la relación de aspecto pequeña, la transferencia de calor y de masa se retarda considerablemente. Cabe destacar que cuando Sc_e es pequeño los números de Nusselt y Sherwood promedio no presentan cambios ni evoluciones importantes en su comportamiento con el transcurso del tiempo. Como en los casos anteriores, para bajos números de Schmidt el mecanismo principal de transporte de calor y masa ocurre principalmente por difusión.

Las figuras 3.30c y 3.30d muestran el efecto de la relación de aspecto para un alto número de Schmidt efectivo, $Sc_e = 750$. La figura 3.30c muestra los números de Nusselt y el número de Sherwood promedio para una relación de aspecto pequeña $\epsilon = 0.1$. Típicamente, la transferencia de masa se retarda mucho al incrementarse el

número de Schmidt, además, el número de Sherwood promedio muestra evoluciones en el comportamiento. Si la figura 3.30c se compara con la 3.30d se observa una gran diferencia en los tiempos de duración del fenómeno. Cuando la relación de aspecto es $\epsilon = 0.1$ el número de Sherwood promedio se vuelve despreciable hasta que $t = 2 \times 10^3$, aproximadamente. Es claro entonces que la relación de aspecto afecta considerablemente el tiempo de la duración del fenómeno de transporte de masa en la cavidad.

Cuando el número de Schmidt efectivo es alto, $Sc_e = 750$, los patrones de flujo en la cavidad tienen un comportamiento diferente según la relación de aspecto. En este documento se presentan dos secuencias para ilustrar las diferencias en los contornos correspondientes a dos relaciones de aspecto. Como se dijo anteriormente, para un alto número de Schmidt efectivo y una relación de aspecto pequeña, la duración del fenómeno aumenta considerablemente. Cuando el tiempo es $t = 18.18$ el fluido al interior de la cavidad tiende a la estratificación térmica. En este momento el efecto de la alta concentración en la pared superior no se ha hecho presente en toda la cavidad; solamente en un tercio de la cavidad y las líneas de isoconcentración no muestran estratificación, muestran un comportamiento característico de la convección de masa. En la parte superior de la cavidad los gradientes de concentración son muy intensos y provocan que se forme una celda convectiva en esa región que gira a favor de las manecillas del reloj. En el resto de la cavidad los gradientes de concentración son insignificantes al igual que el movimiento del fluido. Con el transcurso del tiempo la cavidad alcanza la estratificación térmica y los gradientes de concentración intensos que existían en la parte superior de la cavidad disminuyen. Esto desfavorece el transporte de masa y el proceso es dominado por la difusión. En la figura 3.31, los campos que corresponden a $t = 361.16$ muestran que existe estratificación térmica y de concentración en la cavidad. La función de corriente muestra que al desaparecer los intensos gradientes de concentración en la región superior, la celda convectiva que se formaba inicialmente ha desaparecido dando lugar a pares de celdas convectivas de baja cantidad de movimiento. Es notable que estas celdas convectivas tienen menor cantidad de movimiento en la parte inferior de la cavidad. Posteriormente, la transferencia de masa ocurre principalmente por difusión, hasta que cesa. En tal situación los gradientes térmicos son los que gobiernan el movimiento en la cavidad, se alcanza la estratificación térmica definitiva y aparecen múltiples celdas convectivas de baja

cantidad de movimiento formando el patrón ya conocido. Cabe destacar que debido a la baja relación de aspecto de la cavidad, existe flujo cerca del eje de la cavidad.

Con el aumento de la relación de aspecto, el comportamiento de los contornos cambia considerablemente, además, el tiempo de duración del fenómeno es mucho más corto. En la figura 3.32 se muestra una secuencia de contornos para una relación de aspecto grande, $\epsilon = 0.5$ y número de Schmidt efectivo grande, $Sc_e = 750$. Para un tiempo $t = 0.41$ el transporte de calor ocurre más rápido comparado con el transporte de masa. La cavidad presenta gradientes térmicos importantes en la zona adyacente a las paredes superior e inferior, al tiempo que en el centro los gradientes son despreciables. Las líneas de isoconcentración muestran que el transporte convectivo es importante, especialmente cerca de la pared ondulada. El gradiente de concentración es muy intenso en la zona cercana a la pared superior, y en el resto de la cavidad los gradientes de concentración son despreciables. La función de corriente muestra una sola celda que gira a favor de las manecillas del reloj y tiene presencia solamente cerca de la pared ondulada. Cabe recordar que los gradientes importantes en la dirección radial ocurren cerca de la pared ondulada, lo que la convierte en una zona propicia para generar celdas convectivas. Con el transcurso del tiempo la convección de masa alcanza toda la cavidad; para $t = 8.82$ las isoterms muestran ya una tendencia hacia la estratificación con un ligero efecto de la convección. Se presenta ya una alta concentración en la cavidad, y aún se observa el efecto convectivo en las líneas de isoconcentración. La función de corriente muestra una celda convectiva principal que gira en contra de las manecillas del reloj y que favorece el transporte de calor y masa en toda la cavidad. Adicionalmente, existe una pequeña celda convectiva en la parte superior de la cavidad muy cerca de la pared ondulada. Estas dos celdas evolucionan con el tiempo provocando cambios notorios en la transferencia de masa, como lo refleja el número de Sherwood en la figura 3.30*d*. Finalmente, la cavidad alcanza la concentración de la pared superior, los gradientes de concentración son despreciables y entonces los únicos gradientes importantes son los térmicos. En la cavidad sólo queda la inercia del movimiento provocado por los gradientes de concentración que anteriormente estaban presentes, por lo tanto, la celda principal observada inicialmente comienza a perder cantidad de movimiento hasta romperse y formar múltiples celdas convectivas. Es interesante observar en la figura 3.32 que para $t = 54.05$, la celda comienza a perder cantidad de movimiento

y la mayor velocidad se presenta cerca de la pared ondulada. Adicionalmente, en la parte superior de la cavidad se comienzan a formar celdas convectivas con sentido contrario que finalmente formarán múltiples celdas convectivas de baja cantidad de movimiento.

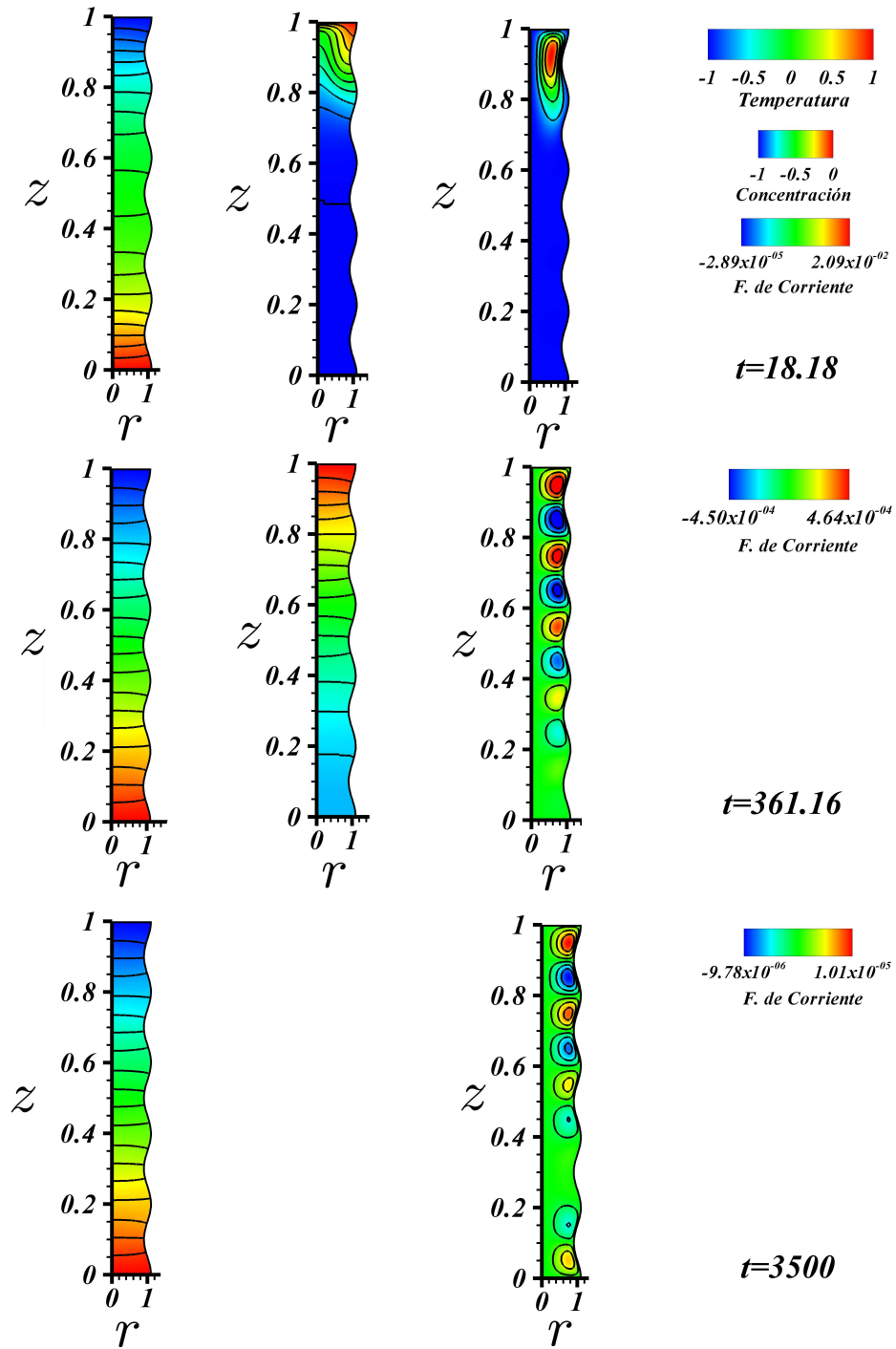


Figura 3.31: Secuencia de isothermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Sc_e = 750$, $N = 5$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.1$.

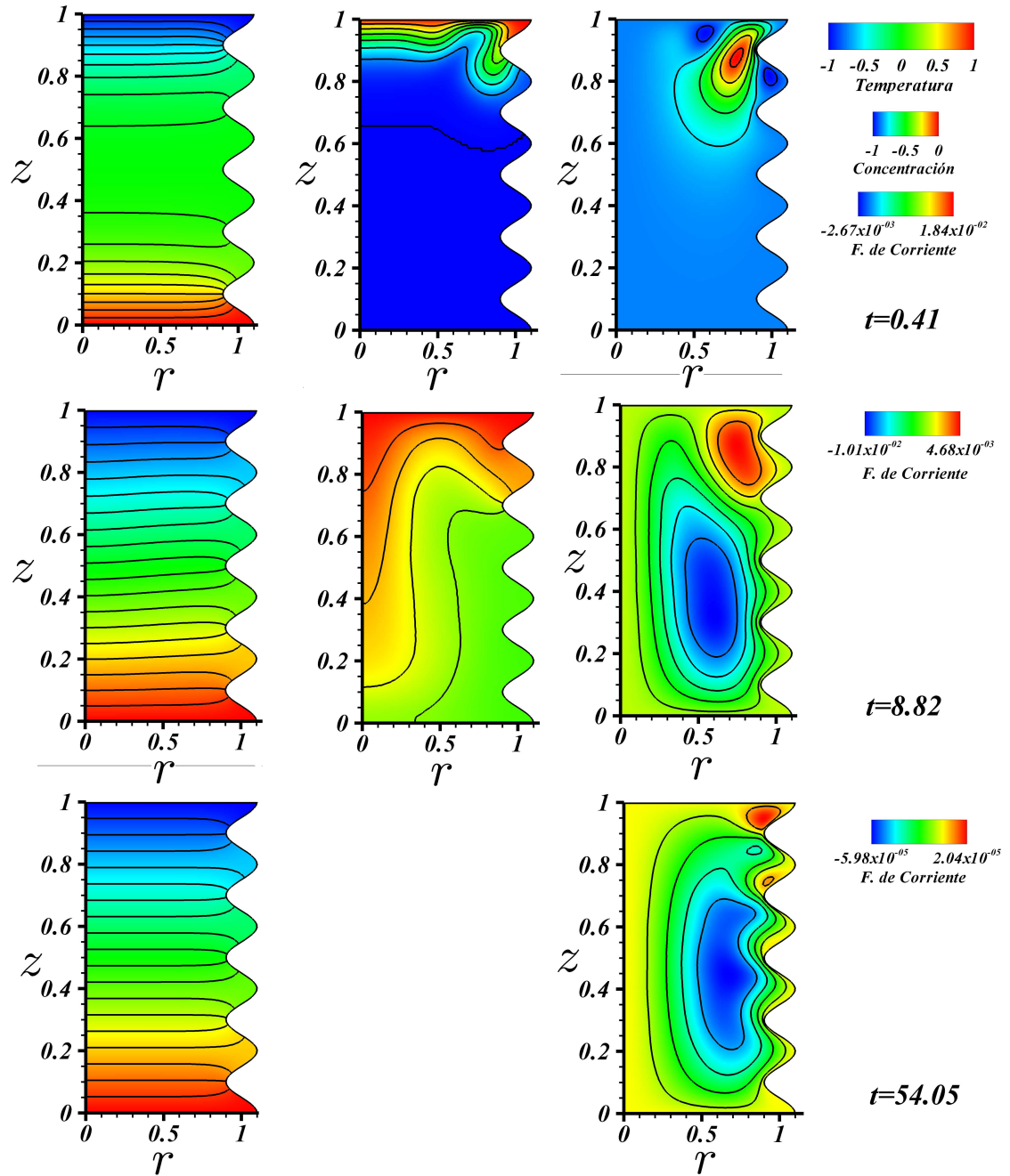


Figura 3.32: Secuencia de isotermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Sc_e = 750$, $N = 5$, $\varphi = 0.3$, $\sigma = 0.6$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.5$.

CAPÍTULO 4

CONCLUSIONES

Se realizó un estudio numérico del transporte de calor y masa por convección natural en una cavidad cilíndrica con la pared vertical ondulada. Se evaluó el efecto de la ondulación de la pared en los fenómenos de transporte en la cavidad. Se consideró una cavidad cilíndrica bidimensional axisimétrica llena de un fluido newtoniano con propiedades constantes, excepto la densidad, que fue calculada mediante la aproximación de Boussinesq. También, se consideró el caso de la cavidad llena de un medio poroso isotrópico saturado de un fluido newtoniano de Boussinesq con propiedades constantes. Primeramente se aborda el problema del transporte de calor en estado permanente para la cavidad llena de un fluido. Se analizan dos casos importantes, la cavidad calentada desde la superficie inferior y el caso del calentamiento desde la pared superior, ambos a temperatura constante. En todos los casos la pared ondulada se encuentra aislada térmicamente. Posteriormente, se estudió el estado transitorio en donde se incluyen de forma simultánea los efectos de los gradientes térmicos y de concentración. En el régimen transitorio se consideró el caso con el calentamiento desde abajo y el enfriamiento desde arriba a temperatura constante. La condición que se estudió considera una alta concentración en la pared superior, la pared vertical ondulada es adiabática, todas las paredes son impermeables. Como condiciones iniciales se impone una temperatura uniforme media al fluido, con una concentración de especies de cero y velocidad cero en toda la cavidad. Para la cavidad llena de un medio poroso saturado sólo se considera el estado transitorio y se imponen las mismas condiciones que el caso de la cavidad llena de fluido. Un análisis adimensional demostró que para el caso de la cavidad llena de fluido los parámetros adimensionales que gobiernan el problema son los números de Rayleigh, Prandtl, Schmidt y la relación de flotación. Por otra parte, en el caso de la cavidad llena de un

medio poroso saturado, los parámetros adimensionales importantes, son los números de Rayleigh-Darcy, Prandtl efectivo, Schmidt efectivo, la relación de flotación, la relación de calores específicos y la porosidad. En cuanto a los factores geométricos de la cavidad, se evaluó el efecto de la longitud de onda adimensional, la amplitud adimensional y la relación de aspecto de la cavidad. Los resultados muestran el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio evaluados en la pared superior de la cavidad. Se estudió el efecto de los diferentes parámetros mencionados sobre la transferencia de calor y masa en la cavidad. Para ilustrar el comportamiento de la cavidad se crearon mapas de las isothermas, las líneas de isoconcentración y la función de corriente para los diferentes casos analizados. Adicionalmente, se muestran las *heatlines* y *masslines*.

Las ecuaciones de transporte que modelan los diferentes fenómenos que ocurren en la cavidad, son la continuidad, la cantidad de movimiento, la ecuación de la energía y la ecuación de la conservación de especies. Para resolver el problema se realizó un mapeo de la geometría del cilindro axisimétrico con paredes onduladas a un cilindro axisimétrico de radio y altura unitaria. Se utilizó la función de corriente para eliminar la dependencia explícita con la presión. Las ecuaciones resultantes después de utilizar la función de corriente y del mapeo se adimensionalizaron con parámetros característicos del fenómeno. Posteriormente las ecuaciones se discretizaron mediante el método de diferencias finitas y se malló el dominio de cálculo con 100×100 nodos. Las ecuaciones discretizadas se resolvieron mediante un método de inversión de matriz tipo LU y se empleó un método iterativo entre la solución de la ecuación de conservación de movimiento, la energía y conservación de especies, debido al acoplamiento y no linealidad de las ecuaciones.

El análisis detallado de los resultados obtenidos permite establecer las siguientes conclusiones:

4.1. Convección térmica en estado permanente

Para el caso de la cavidad en estado permanente se considera solamente los efectos de los gradientes térmicos. Se analizaron dos casos, el primero con calentamiento desde la pared inferior y el segundo desde la pared superior. Se evaluaron los efectos del número de Rayleigh, la longitud de onda adimensional, la amplitud adimensional

y la relación de aspecto sobre el flujo de convección, distribución de temperatura y transferencia de calor.

Los resultados indican que para bajos números de Rayleigh; i.e. 10^3 a 10^4 , la transferencia de calor ocurre por el mecanismo de difusión, principalmente. Existe estratificación térmica prácticamente en toda la cavidad, sin embargo, la condición adiabática impuesta en la pared ondulada obliga a las isotermas a desviarse y llegar de forma perpendicular a ésta, generando gradientes térmicos importantes en la dirección radial. Los gradientes locales cerca de la pared favorecen la aparición de múltiples celdas convectivas de baja cantidad de movimiento que no afectan de manera considerable la transferencia de calor. Al aumentar en un orden de magnitud el número de Rayleigh también aumenta la velocidad. Si el número de Rayleigh es del orden de 10^5 a 10^6 se forma un par de celdas convectivas que muestran cantidad de movimiento considerable que benefician la convección de calor y la estratificación térmica desaparece, dando lugar a un gradiente térmico importante cerca de las paredes superior e inferior de la cavidad. Este gradiente aumenta con el número de Rayleigh generando un incremento del número de Nusselt promedio.

Se evaluó el efecto de la longitud de onda adimensional y se encontró que cuando la longitud de onda es pequeña la transferencia de calor ocurre principalmente por difusión y el número de Nusselt promedio es pequeño. Por el contrario, al aumentar la amplitud de onda adimensional la convección de calor se vuelve importante y aumenta considerablemente el número de Nusselt. Por otra parte, se encontró que cuando la amplitud adimensional es grande se favorece la transferencia de calor por difusión y el número de Nusselt promedio es pequeño. Cuando la amplitud adimensional es pequeña el número de Nusselt aumenta debido a que la transferencia de calor es dominada por la convección. Este último caso se aproxima a la condición en la que el cilindro no tiene en sus paredes ondulación alguna o rugosidad. Se encontró además que para una relación de aspecto pequeña, es decir, un cilindro muy alto comparado con su radio medio, la transferencia de calor por difusión es la que domina y la cavidad se estratifica térmicamente. En este último caso se forman pares de celdas convectivas que ocupan gran parte de la cavidad, no sólo la zona adyacente a la pared. Por su parte, cuando la relación de aspecto de la cavidad es grande, es decir, la cavidad tiene un amplio radio medio comparado con su altura, la convección de calor se beneficia, aún para bajos números de Rayleigh, y el número de Nusselt

promedio aumenta.

En base a los resultados obtenidos se encontró que la pared ondulada beneficia la estratificación térmica y la formación de múltiples celdas convectivas de baja velocidad que no benefician la convección de calor lo cual refleja una baja transferencia de calor en la cavidad.

4.2. Transporte de calor y masa en estado transitorio

Para el estudio de la convección de calor y masa en régimen transitorio, se consideró sólo la situación de la cavidad calentada desde la superficie inferior. Se impuso una condición de frontera de alta concentración en la superficie superior, mientras las demás paredes se consideran impermeables. La pared ondulada se mantiene aislada térmicamente. Se estudiaron los efectos de los números de Rayleigh, Schmidt, y la relación de flotación. El número de Prandtl se considera constante e igual a 7. Respecto a los parámetros geométricos, se estudiaron los efectos de la longitud de onda adimensional, la amplitud adimensional y la relación de aspecto.

La revisión de los resultados numéricos permite concluir que para bajos números de Rayleigh (10^3) y bajos números de Schmidt (0.1, 1), el transporte de calor y de masa ocurren en su mayoría por el mecanismo de difusión. El efecto del signo de la relación de flotación ($N > 0$ ó $N < 0$) no es relevante para la transferencia de calor y masa en la cavidad para $Sc = 0.1, 1$ y $Ra = 10^3$. Se observó que para bajos números de Schmidt la transferencia de masa es un poco más rápida que la transferencia de calor. Al aumentar el número de Schmidt de 0.1 a 1, la transferencia de masa se retarda aproximadamente en un orden de magnitud. Es importante destacar que las isoterms y las líneas de isoconcentración indican un comportamiento dominado por la difusión durante todo el fenómeno. La función de corriente muestra evoluciones, desde una sola celda principal que evoluciona a un par de celdas, hasta que finalmente se forman múltiples celdas convectivas en la vecindad de la pared ondulada. Condición que surge cuando la cavidad alcanza la estratificación térmica en el estado permanente. En esta situación los gradientes de concentración ya no son importantes.

Si se considera un número de Rayleigh alto, e.g. $Ra = 10^5$ y se mantiene un número de Schmidt pequeño, e.g. $Sc = 0.1, 1$, en los primeros instantes los fenómenos

de transporte de calor y masa ocurren por el mecanismo de difusión, posteriormente la convección de calor cobra importancia. Se encontró que la transferencia de masa ocurre con relativa rapidez para bajos números de Schmidt. Cuando Ra es del orden de 10^5 el valor de la relación de flotación es importante, ya que el cambio de régimen difusivo a convectivo en la transferencia de calor ocurre de forma gradual para una relación de flotación positiva, según lo indican los gráficos del número de Nusselt promedio. Por su parte relaciones de flotación negativas causan un cambio abrupto en la transición del régimen difusivo al convectivo. Los contornos de temperatura, concentración y función de corriente, presentan un comportamiento semejante cuando Ra es del orden 10^3 y 10^5 , sin embargo en el último caso, al final del fenómeno se forma una sola celda convectiva principal con cantidad de movimiento considerable que beneficia la convección de calor. Adicionalmente, se observa que la celda convectiva final gira en contra de las manecillas del reloj cuando la relación de flotación es negativa, y a favor de las manecillas para valores positivos.

Se analizó el transporte de calor y masa cuando Sc es alto ($Sc = 500$), situación común en líquidos. Si el número de Rayleigh es 10^3 , se concluye que la transferencia de masa es muy lenta comparada con la transferencia de calor. Los resultados indican que el signo de la relación de flotación es muy importante. Para valores negativos el transporte de masa inicia siendo difusivo y evoluciona a un transporte convectivo. Para valores positivos el transporte de calor y masa es difusivo en todo el proceso. Finalmente, cuando la cavidad alcanza el valor de la concentración de la pared superior y solamente los gradientes térmicos son importantes, se forman pares de celdas convectivas.

Cuando el número de Rayleigh es 10^3 y 10^5 la amplitud adimensional (Γ) y la longitud de onda adimensional (Λ) no afectan en gran medida la transferencia de calor y masa, según indican los números de Nusselt y Sherwood promedio en el régimen transitorio. Sin embargo, la relación de aspecto sí afecta en gran medida el proceso transitorio de la transferencia de calor y masa.

Para un número de Rayleigh pequeño $Ra = 10^3$, número de Schmidt pequeño $Sc = 1$ y relación de aspecto $\epsilon = 0.1$, la transferencia de masa es más lenta que la transferencia de calor y además es dominada por la difusión. Al aumentar la relación de aspecto a $\epsilon = 0.5$, es decir, una cavidad ancha, la transferencia de masa es más rápida y se reduce el tiempo necesario para alcanzar el valor de la concentración de

la pared superior. En este último caso la transferencia de calor y masa también es dominada por la difusión, como es característico en los casos con bajos números de Schmidt. Al aumentar el número de Schmidt a $Sc = 500$, con una relación de aspecto $\epsilon = 0.1$, la cavidad rápidamente alcanza el valor de la concentración en la pared superior, mientras que para una relación de aspecto de $\epsilon = 0.5$, la transferencia de masa es muy lenta. En ambos casos el transporte ocurre principalmente por el mecanismo de difusión. La función de corriente muestra cambios y evoluciones del flujo en la cavidad según evolucionan los gradientes en cada instante de tiempo. Finalmente se logra la solución del estado permanente donde múltiples celdas convectivas se hacen presentes en toda la cavidad.

4.3. Transporte de calor y masa en estado transitorio en el medio poroso

El estudio de la convección de calor y masa dentro de una cavidad cilíndrica con paredes onduladas llena de un medio poroso se realizó para el régimen transitorio. Se evaluó los efectos de la longitud de onda adimensional, la amplitud adimensional y la relación de aspecto sobre los números de Nusselt y Sherwood promedio. Además, se evaluaron los efectos del número de Schmidt efectivo y la porosidad.

Los contornos de temperatura, concentración y función de corriente, muestran un comportamiento difusivo para bajos números de Schmidt. Inicialmente se forma una serie de celdas convectivas de baja velocidad debido a los efectos de los gradientes de concentración. Posteriormente, se forman dos celdas convectivas, una superior y otra inferior, afectadas principalmente por los gradientes térmicos. Finalmente, la cavidad se estratifica y se forman pares de celdas convectivas de baja velocidad muy cercanas a la pared ondulada. Por otra parte, los contornos muestran que para un alto número de Schmidt, la transferencia de calor y masa inicialmente ocurre por difusión y el flujo es gobernado principalmente por los gradientes de concentración presentando una sola celda convectiva en la parte superior de la cavidad muy cerca de la pared ondulada. Rápidamente la transferencia de masa se vuelve convectiva y se forma una celda principal que gira a favor de las manecillas del reloj. Cuando la cavidad alcanza la concentración de la pared superior, sólo los gradientes térmicos son importantes y la cavidad se estratifica térmicamente. Entonces, comienzan a formarse pares de

celdas convectivas muy cerca de la pared ondulada. Adicionalmente se concluye que mayores porosidades retardan un poco la transferencia de masa bajo los parámetros simulados, aunque el retraso es pequeño.

Para bajos números de Schmidt efectivos ($Sc_e = 1$) no existen efectos notables al variar la longitud de onda adimensional entre $1/10$ a $1/3$ de tal manera que el comportamiento de los números de Nusselt y Sherwood promedio son iguales para altos o bajos valores de la longitud de onda adimensional. Para valores bajos del número de Schmidt efectivo la transferencia de calor y masa ocurre puramente por difusión. Al aumentar el número de Schmidt efectivo a 750 la transferencia de masa es dominada por la convección, el número de Sherwood promedio muestra transiciones a través del tiempo y el transporte de masa es más lento comparado con la transferencia de calor.

Cuando el valor del número de Schmidt efectivos es bajo, el efecto de la amplitud es muy pequeño, sin embargo, la transferencia de masa es ligeramente más rápida para valores bajos de la amplitud. En este caso el transporte de calor y masa es dominado por la difusión. Por otra parte, para altos números de Schmidt el aumento en la amplitud retrasa un poco la transferencia de masa. Adicionalmente, al aumentar la amplitud los contornos de temperatura, concentración y función de corriente muestran comportamientos que ilustran la transición de los procesos de la convección de calor y masa durante el fenómeno. Para un alto número de Schmidt efectivo y una alta amplitud de onda la transferencia de calor y masa es dominada por la difusión, para los primeros instantes del fenómeno, y se forma una sola celda convectiva de baja velocidad en la zona superior muy cerca de la pared ondulada. Este movimiento ocurre por los efectos de los gradientes de concentración. Posteriormente, la transferencia de calor y masa se ve dominada por el mecanismo de la convección y se forma una sola celda convectiva que gira en contra de las manecillas del reloj. Finalmente, la cavidad alcanza la concentración de la pared y los gradientes de concentración son insignificantes, por lo que la cavidad se estratifica térmicamente y se generan pares de celdas convectivas muy cerca de la pared ondulada.

La relación de aspecto es el factor geométrico que afecta más el transporte en la cavidad. Un bajo número de Schmidt y un baja relación de aspecto promueven que la transferencia de calor y masa sea muy lenta comparado con el caso correspondiente a una relación de aspecto grande, donde el transporte es más rápido, aproximadamente

un orden de magnitud. Para un número de Schmidt alto ($Sc_e = 750$) y una relación de aspecto $\epsilon = 0.1$, la transferencia de masa es muy lenta en comparación con el caso de $\epsilon = 0.5$, aproximadamente dos ordenes de magnitud. De manera semejante, la transferencia de calor es más lenta cuando $\epsilon = 0.1$; el estado permanente requiere de un tiempo adimensional mayor en dos ordenes de magnitud comparado con el caso de $\epsilon = 0.5$. Adicionalmente, el transporte de masa presenta evoluciones a lo largo del proceso. Para un alto número de Schmidt y una baja relación de aspecto la corriente se ve afectada principalmente por los gradientes de concentración y se forman celdas convectivas conforme aumenta la concentración en la cavidad. Posteriormente, el flujo en la cavidad se ve afectada solamente por los gradientes térmicos y la cavidad se estratifica dando lugar a pares de celdas convectivas que viajan prácticamente a través de toda la cavidad. Por otra parte para un alto número de Schmidt y una alta relación de aspecto el fluido tiene poca restricción al flujo y el transporte ocurre por convección. El flujo en la cavidad presenta diversas evoluciones mientras dura la transferencia de masa, hasta que finalmente los gradientes de concentración se vuelven despreciables. En ese momento, la cavidad se estratifica térmicamente y se forman pares de celdas convectivas muy cerca de la pared.

NOMENCLATURA

Números adimensionales

Gr	Número de Grashof.
Le	Número de Lewis.
N	Relación de flotación.
Nu	Número de Nusselt.
Nu_p	Número de Nusselt promedio.
Pr	Número de Prandtl.
Pr_e	Número de Prandtl efectivo
Ra	Número de Rayleigh.
Ra_{cr}	Número de Rayleigh crítico.
Ra_c	Número de Rayleigh de concentración.
Ra_{DC}	Número de Rayleigh-Darcy de concentración.
Ra_D	Número de Rayleigh-Darcy.
Sc	Número de Schmidt.
Sc_e	Número de Schmidt efectivo.
Sh	Número de Sherwood.
Sh_p	Número de Sherwood promedio.

Griegas

α	Coefficiente de difusividad térmica.
α_f	Coefficiente de difusividad térmica del fluido.
α_m	Coefficiente de difusividad térmica en un medio poroso.
β	Coefficiente de expansión térmica.
β_c	Coefficiente de flotación por concentración.
γ	Coefficiente geométrico definido en el Apéndice A.
Γ	Amplitud adimensional.

δ_T	Espesor de la capa límite térmica.
Δ	Diferencia.
ϵ	Relación de aspecto.
η	Coordenada radial.
θ	Temperatura adimensional.
θ_1	Temperatura adimensional de la pared inferior.
θ_2	Temperatura adimensional de la pared superior.
λ	Longitud de onda.
Λ	Longitud de onda adimensional.
μ	Viscosidad dinámica.
$\bar{\mu}$	Coefficiente efectivo de viscosidad.
ν	Viscosidad cinemática.
ξ	Coordenada axial.
π	Valor de la constante matemática π .
ρ	Densidad.
ρ_f	Densidad del fluido.
ρ_s	Densidad de la matriz sólida.
ρ_m	Densidad del medio poroso.
ρ_0	Densidad de referencia.
σ	Relación de calores específicos.
φ	Porosidad.
ψ	Función de corriente.

Operadores

∇	Operador Gradiente.
∇^2	Operador Laplaciano.

Mayúsculas

$A'' - B''$	Coefficientes
$A - M$	Coefficientes de la ecuación del movimiento.
$A_t - C_t$	Coefficientes de la ecuación del movimiento.
C	Concentración de especies.
C	Concentración adimensional.
C_w	Concentración de especies en la pared.
C_s	Calor específico de la matriz sólida.
C_F	Coefficiente de Forchheimer.
ΔC	Diferencia de concentración.

D/Dt	Derivada material.
D_p	Diámetro efectivo.
D_e	Diámetro equivalente.
D	Coefficiente de difusión molecular.
D_m	Coefficiente de difusión molecular en el medio poroso.
\bar{E}	Tensor de dispersión.
\bar{F}	Vector de fuerza.
H	Heatline.
H'	Altura de una cavidad rectangular.
J	Flujo de masa.
K	Permeabilidad.
L	Altura de la cavidad.
L'	Anchura de una cavidad rectangular.
M	Massline.
MP	Medio Poroso.
$N - Q$	Coefficientes.
N-S	Ecuaciones de Navier-Stokes.
P	Presión.
R	Radio promedio.
$R - U$	Coefficientes.
R_t	Coefficientes.
REV	Volumen Representativo Elemental.
T	Temperatura.
T_h	Temperatura de la superficie caliente.
T_c	Temperatura de la superficie fría.
T_s	Temperatura de la fase sólida.
T_f	Temperatura de la fase fluida.
T_0	Temperatura de referencia.
T_m	Temperatura promedio.
T_1	Temperatura superior de la cavidad.
T_2	Temperatura inferior de la cavidad.
ΔT	Diferencia de temperatura.
U_∞	Velocidad de la corriente libre.
\bar{V}	Vector de velocidad promedio intrínseca.
V_m	Volumen de un espacio compuesto por una matriz sólida y fluido.
V_f	Volumen ocupado por el fluido.

Minúsculas

a	Amplitud de onda.
$b - t$	Coefficientes.
cp	Calor específico a presión constante.
d	Diámetro.
g	Aceleración de la gravedad.
h	Coefficiente de transferencia de calor por convección.
h_m	Coefficiente de transferencia de masa por convección.
h_p	Coefficiente de transferencia de calor por convección promedio.
h_{Dp}	Función de densidad.
h_t	Altura.
k	Conductividad térmica.
k_s	Conductividad térmica de la matriz sólida
k_f	Conductividad térmica del fluido.
k_m	Conductividad térmica del medio poroso.
n	Vector unitario en la dirección normal a una superficie.
$o_c - t_c$	Coefficientes.
q''	Flujo de calor.
q_s'''	Generación de calor en la matriz sólida.
q_f'''	Generación de calor en el fluido.
q_m'''	Generación de calor en el medio poroso.
q_w	Transferencia de calor a través de la pared.
r	Coordenada radial.
st	Cantidad total de pasos de tiempo.
t	Tiempo.
t	Vector unitario en la dirección tangencial a una superficie.
t_{max}	Tiempo adimensional máximo.
t_0	Tiempo de inicial.
t_n	Paso de tiempo actual.
Δt^n	Paso de tiempo n -ésimo.
u	Componente de la velocidad en la coordenada x .
\bar{u}	Vector de velocidad.
v	Componente de la velocidad en la coordenada y .
v_z	Componente de la velocidad en la dirección axial.
v_r	Componente de la velocidad en la dirección radial.
$v_{z,c}$	Velocidad característica en la dirección axial.
\bar{v}	Vector de velocidad promedio en un medio poroso. Velocidad de Darcy.
w	Espesor.
x	Coordenada longitudinal.
y	Coordenada transversal.
z	Coordenada axial.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Donald A. Nield, Adrian Bejan**, *Convection in porous media*, Ed. Springer, Tercera edición, 2006.
- [2] **Adrian Bejan**, *Convection heat transfer*, Ed. Wiley, Tercera edición, 2004.
- [3] **Williams Kays, Michael Crawford, Bernahard Weigand**, *Convective heat and mass transfer*, Mc. Graw Hill, Ed. Cuarta Edición, 2005.
- [4] **Oleg G. Martyneko, Pavel P. Khramtsov**, *Free-Convective heat transfer*, Ed. Springer, Primera Edición, 2010.
- [5] **Latif M. Jiji**, *Heat convection*, Ed. Springer, Primera Edición, 2006.
- [6] **Frank M. White**, *Viscous fluid flow*, Tercera edición, Mc. Graw Hill, 2005.
- [7] **I. G. Currie**, *Fundamental mechanics of fluids*, Ed. CRC Press, Tercera edición, 2002.
- [8] **Frank M. White**, *Fluid mechanics*, Mc. Graw Hill, Sexta edición, 2006.
- [9] **Jacob Bear, Chin-Fu Tsang, Ghislain de Marsily**, *Flow and contaminant transport in fractured rock*, Ed. Academic Press, Primera edición, 1993.
- [10] **Jacob Bear**, *Dynamics of fluids in porous media*, Ed. Dover Publications, Primera edición, 1988.
- [11] **Kambiz Vafai**, *Handbook of porous media*, CRC Press, Segunda edición, 2005.
- [12] **P. Dietrich, R. Helmig, M. Sauter, H. Hötzl, J. Köngeter, G. Teutsch**, *Flow and transport in fractured porous media*, Springer, Primera Edición, 2005.

-
- [13] **Clifford K. Ho, Stephen W. Webb**, *Gas transport in porous media*, Springer, Primera Edición, 2006.
- [14] **M. Kazmierczak, D. Poulikakos**, *Transient double-diffusive convection experiments in a horizontal fluid layer extending over a bed of spheres*, Physics of Fluids, 3, 1989.
- [15] **Hong Tao Qiu**, *Natural convection in non-homogeneous enclosure*, 2008.
- [16] **Y.M. Chen, C.K. Liu**, *Double-Diffusive convective for a heated cylinder submerged in a salt stratified fluid layer*, Heat and Mass Transfer, 33, 1997.
- [17] **Ashjaee, M., Amiri, M., Rostami, J.**, *A correlation for free convection heat transfer from vertical wavy surfaces*, Heat and Mass Transfer, 44, 2007.
- [18] **M.A. Hossain, D.A.S Bath**, *Combined heat and mass transfer in natural convection flow from a vertical wavy surface*, Acta Mechanica, 136, 1999.
- [19] **Mamum Molla, Anwar Hossain, Lun-Shin Yao**, *Natural-Convection flow along a vertical complex wavy surface with uniform heat flux*, Journal of Heat Transfer, 129, 2007.
- [20] **Javad Rostami**, *Unsteady natural convection in an enclosure with vertical wavy walls*, Heat and Mass Transfer, 44, 2008
- [21] **Amaresh Dalal, Manab Kumar Das**, *Laminar natural convection in an inclined complicated cavity with spatially variable wall temperatura*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 48, 2004.
- [22] **L. Adjlout, O. Imine, A. Azzi, M. Belkadi**, *Laminar natural convection in an inclined cavity with a wavy wall*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 45, 2001.
- [23] **Rostami, J.**, *Unsteady natural convection in an enclosure with vertical wavy walls*, Heat and Mass Transfer, 44, 1999.
- [24] **Dalal, A., Das, M.K.**, *Natural convection in a cavity with a wavy wall heated from below and uniformly cooled from the top and both sides*, J. of Heat Transfer, 128, 2006.

-
- [25] **M. Aounallah, Y. Addad, S. Benhamadouche, O. Imine, L. Adjlout, D. Laurence.**, *Numerical investigation of turbulent natural convection in an inclined square cavity with a hot wavy wall*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 50, 2006.
- [26] **H. F. Woollard, J. Billingham, O. E. Jensen, G. Lian**, *A multi-scale model for solute transport in a wavy-walled channel*, J. Eng. Math, 64, 2008.
- [27] **Nasser S. Elgazery, Nader Y. Abd Elazem**, *The effects of variable properties on MHD unsteady natural convection heat and mass transfer over a vertical wavy surface*, Acta Mecanica, 44, 2009.
- [28] **Yunus A. Cengel**, *Transferencia de calor y masa. Un enfoque práctico*, Mc. Graw Hill, Tercera Edición, 2007.
- [29] **O. Laguerre, S. Ben Amara, G. Álvarez, D. Flick**, *Transient heat transfer by free convection in a packed bed of spheres: comparison between two modelling approaches and experimental results*, Applied Thermal Engineering, Marzo 2007.
- [30] **Nawaf H. Saeid**, *Natural convection from two thermal sources in a vertical porous layer*, Journal of heat transfer, 128, enero 2006. Enero 2006.
- [31] **Qi-Hong Deng, Jiemin Zhou, Chi Mei, Yong-ming Shen**, *Fluid, heat and contaminant transport structures of laminar double-diffusive mixed convection in a two-dimensional ventilated enclosure*, International Journal of Heat and Mass Transfer, 47, Agosto 2004.
- [32] **Z. Alloui, L. Dufau, H. Beji, P. Vasseur**, *Multiple states in a porous enclosure partially heated and fully salted from below*, International Journal of Thermal Sciences, 48, Mayo 2008.
- [33] **Nelson Moraga B., Marcelo Figueroa C. y Claudio Valencia Ch.** *Transporte 3D de fluidos, calor y materia por difusión y convección natural en cavidad con material poroso no darciano*. Congreso CONAMET/SAM 2004.
- [34] **A.A. Mohamad, R. Bennacer, J. Azaiez**, *Double diffusion natural convection in a rectangular enclosure filled with binary fluid saturated porous media: The effect of lateral aspect ratio*, American Institute of Physics, 16, Enero 2004.

-
- [35] **B. V. Rathish Kumar, Shalini Gupta**, *Combined influence of mass and thermal stratification on double-diffusion non-darcian natural convection from a wavy vertical wall to porous media*, Journal of Heat Transfer, 127, Junio 2005.
- [36] **B. V. Rathish Kumar, S. V. S. S. N. V. G. Krishna Murthy**, *Soret and Dufour effects on Double-Diffusive Free Convection From a Corrugated Vertical Surface in a Non-Darcy Porous Medium*, Transp. Porous Media, 128, 2010.
- [37] **Misirlioglu, A.; Baytas, A.C. Pop, I.**, *Natural convection inside an inclined wavy enclosure filled with a porous media*, Transport in Porous Media, 64, 2006.
- [38] **T.C. Jue, Yunlin, Taiwan**, *Analysis of Bérnard convection in rectangular cavities filled whith a porous media*, Acta Mechanica, 146, 2001.
- [39] **A.Bahloul, M.A.Yahiaoui, P. Vasseur, R.Bennacer, H. Beji** *Natural convection of two-component fluid in porous media bounded by tall concentric vertical cylinders*, Journal of Applied Mechanics, 73, Enero 2006.
- [40] **A.K. Singh, T. Paul, G.R. Thorpe**, *Natural convection due to heat and mass transfer in a composite system* Heat and Mass Transfer, 35, 1999.
- [41] **Gang Wang, Qiuwang Wang, Min Zeng, Hiroyuki Ozoe**, *Numerical study of natural convection heat transfer in an inclined porous cavity with time-periodic Boundary Condition* Transport of Porous Media, 74, 2008.
- [42] **A.K. Singh, T. Paul, G.R. Thorpe**, *Natural convection in a non-rectangular porous enclosure*, Forschung im Ingenieurwesen, 65, 2000
- [43] **Yasin Varol, Hakan F. Oztop, Ioan Pop** *Influence of inclination angle on buoyancy-driven convection in triangular enclosure filled whith a fluid-saturated porous medium*, Heat and mass transfer, 44, 2007.
- [44] **SSuhas V. Patankar**, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Ed. Taylor & Francis, Primera Edición, 1980.
- [45] **J.H. Ferziger, M. Perić** *Computational methods for fluid dynamics*, Ed. Springer, Tercera Edición, 2001.

- [46] **H.K. Versteeg, W. Malalasekera**, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. Primera Edición.
- [47] **S. Kimura, A. Bejan**, *The "Heatline" visualization of convective heat transfer*, J. of Heat Transfer, 105, Noviembre 1983.
- [48] **O.V Trevisan, A. Bejan**, *Combined heat and mass transfer by natural convection in a vertical enclosure*, J. of Heat Transfer, 109, Febrero 1987.
- [49] **V.A.F. Costa**, *Bejan's heatlines and masslines for convection visualization and analysis*, ASME Applied Mechanics Review, 59, Mayo 2006.
- [50] **V.A.F. Costa**, *Unification of the streamline, heatline and massline methods for the visualization of two-dimensional transport phenomena*, Int. J. of Heat and Mass Transfer, 42, No.1, Abril 1998.

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Convección natural en una cavidad rectangular calentada lateralmente. Considerada de Bejan [2].	7
1.2. Regímenes de convección natural en cavidades rectangulares, considerada de Bejan [2]	8
1.3. Comportamiento del flujo para los diferentes regímenes en convección natural en cavidades rectangulares. Considerada de Bejan [2]	9
1.4. Convección natural de Bénard, considerada de Bejan [2]	10
1.5. Esquema que muestra la formación de la capa límite de concentración en una placa plana con concentración constante, considerada de Bejan [2]	11
1.6. Volumen Representativo Elemental (REV). Extraída de Dietrich [12]	18
1.7. Convección natural en una cavidad rectangular llena de un Medio Poroso Saturado calentada lateralmente, considerada de Nield [1]	24
1.8. Distribución de un trazador de concentración en un medio poroso cuando la dispersión hidrodinámica es importante, considerada de Bear [10]	27
2.1. a) Esquema del problema tridimensional b) Esquema del problema axisimétrico del problema y sistema de referencia.	36
2.2. Mapeo de la geometría original a un cuadrado de lado unitario.	39
2.3. Convección natural de calor y masa en una cavidad cilíndrica con paredes onduladas llena de un medio poroso saturado	48
3.1. Distribuciones de la temperatura y la función de corriente para diferentes números de Rayleigh, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Ra = 10^3$, b) $Ra = 10^4$, c) $Ra = 10^5$, d) $Ra = 10^6$	56

3.2. Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh y la longitud de onda adimensional. Los demás parámetros son $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$	58
3.3. Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Lambda = 1/3$ y b) $\Lambda = 1/10$. Los demás parámetros son $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$	58
3.4. Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes amplitudes. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$	59
3.5. Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Gamma = 0.3$ y b) $\Gamma = 0.05$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$	60
3.6. Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes relaciones de aspecto. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$	61
3.7. Contornos de temperatura y función de corriente. a) $\epsilon = 0.1$ y b) $\epsilon = 0.5$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$	62
3.8. Campos de temperatura y función de corriente para diferentes números de Rayleigh, para $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Ra = 10^3$, b) $Ra = 10^4$, c) $Ra = 10^5$, d) $Ra = 10^6$	63
3.9. Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes valores de longitud de onda adimensional. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$	64
3.10. Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Lambda = 3$ y b) $\Lambda = 10$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$	65
3.11. Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes amplitudes. Los demás parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$	66
3.12. Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\Gamma = 0.3$ y b) $\Gamma = 0.05$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\epsilon = 0.3$	66
3.13. Número de Nusselt promedio en función del número de Rayleigh para diferentes relaciones de aspecto. Los parámetros se mantienen en $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$	68
3.14. Contornos de temperatura y función de corriente para a) $\epsilon = 0.1$ y b) $\epsilon = 0.5$. Los demás parámetros se mantienen constantes en $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$ y $\Gamma = 0.1$	68

3.15. Número de Nusselt y Sherwood promedio para bajos números de Rayleigh y bajos números de Schmidt. Todas la gráficas corresponden a $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Sc = 0.1$ y $N = -5$. b) $Sc = 0.1$ y $N = 5$. c) $Sc = 1$ y $N = -5$. d) $Sc = 1$ y $N = 5$	70
3.16. Secuencia de contornos de temperatura, isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $Sc = 0.1$, $N = -5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. En líneas continuas se indican las <i>heatlines</i> , <i>masslines</i> y líneas de corriente. Para $t = 0.01$, $t = 0.19$ y $t = 1.93$	72
3.17. Números de Nusselt y Sherwood promedio para $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $Sc = 0.1$ y $N = -5$. b) $Sc = 0.1$ y $N = 5$. c) $Sc = 1$ y $N = -5$. d) $Sc = 1$ y $N = 5$	73
3.18. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $Sc = 0.1$, $N = -5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. Además, se muestran en línea continua las <i>heatlines</i> , <i>masslines</i> y líneas de corriente. Para $t = 0.03$, $t = 0.19$ y $t = 1.75$	76
3.19. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^5$, $Pr = 7$, $Sc = 1$, $N = 5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. Además, se muestran en línea continua las <i>heatlines</i> , <i>masslines</i> y líneas de corriente. Para $t = 0.07$, $t = 0.48$ y $t = 2.07$	77
3.20. Números de Nusselt y Sherwood promedio para $Sc = 500$, $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. a) $N=-5$. b) $N=5$	79
3.21. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $Sc = 500$, $N = -5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$. En línea continua las <i>heatlines</i> y <i>masslines</i> . Para $t = 1.1$, $t = 24.8$ y $t = 939.2$	80
3.22. Números de Nusselt y Sherwood promedio para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $n = 5$ y $\Gamma = 0.1$. a). $Sc = 1$ y $\epsilon = 0.1 = 5$. b) $Sc = 1$ y $\epsilon = 0.5$. c) $Sc = 500$ y $\epsilon = 0.1$. d) $Sc = 500$ y $\lambda = 0.5$	81
3.23. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra = 10^3$, $Pr = 7$, $Sc = 500$, $N = 5$, $\Lambda = 1/5$, $\Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.1$. En línea continua las <i>heatlines</i> y <i>masslines</i> . Para $t = 0.91$, $t = 10.22$ y $t = 22$	83
3.24. Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\Lambda = 1/5$, $\epsilon = 0.3$, $\Gamma = 0.1$, $Pr_e = 10$, $Ra_D = 0.1$, $\sigma = 0.6$. a) $\varphi = 0.3$, $Sc_e = 1$ b) $\varphi = 0.3$, $Sc_e = 750$, c) $\varphi = 0.5$, $Sc_e = 1$, d) $\varphi = 0.5$, $Sc_e = 750$	85

3.25. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1, Pr_e = 10, Sc_e = 1, N = 5, \Lambda = 1/5, \Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$ 88

3.26. Secuencia de isotermas, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 1, Pr_e = 10, Sc_e = 750, N = 5, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6, \Lambda = 1/5, \Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.3$ 89

3.27. Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\epsilon = 0.3, \Gamma = 0.1, Pr_e = 10, Ra_D = 0.1, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6$. a) $\Lambda = 1/3, Sc_e = 1$ b) $\Lambda = 1/10, Sc_e = 1$, c) $\Lambda = 1/3, Sc_e = 750$, d) $\Lambda = 1/10, Sc_e = 750$ 90

3.28. Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\Lambda = 1/5, \epsilon = 0.3, Pr_e = 10, Ra_D = 0.1, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6$. a) $\Gamma = 0.05, Sc_e = 1$ b) $\Gamma = 0.3, Sc_e = 1$, c) $\Gamma = 0.05, Sc_e = 750$, d) $\Gamma = 0.3, Sc_e = 750$ 93

3.29. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1, Pr_e = 10, Sc_e = 750, N = 5, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6, \Lambda = 1/5, \Gamma = 0.3$ y $\epsilon = 0.3$ 94

3.30. Número de Nusselt y Sherwood en función del tiempo para $\Lambda = 1/5, \Gamma = 0.1, Pr_e = 10, Ra_D = 0.1, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6$. a) $\epsilon = 0.1, Sc_e = 1$ b) $\epsilon = 0.5, Sc_e = 1$, c) $\epsilon = 0.1, Sc_e = 750$, d) $\epsilon = 0.5, Sc_e = 750$ 96

3.31. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1, Pr_e = 10, Sc_e = 750, N = 5, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6, \Lambda = 1/5, \Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.1$ 100

3.32. Secuencia de isoterms, líneas de isoconcentración y función de corriente para $Ra_D = 0.1, Pr_e = 10, Sc_e = 750, N = 5, \varphi = 0.3, \sigma = 0.6, \Lambda = 1/5, \Gamma = 0.1$ y $\epsilon = 0.5$ 101

APÉNDICE A

COEFICIENTES

Coeficientes de las ecuaciones (2.13) a (2.15)

Nombre	Valor del coeficiente	Nombre	Valor del coeficiente
A	$-\frac{1}{r}$	K	$-\frac{\epsilon^4}{r}$
B	$\frac{2}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z}$	L	$\frac{Ra\epsilon^4}{Pr}$
C	$\frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{3}{r^3}$	N	$\frac{Pr}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$
D	$-\frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{3}{r^4}$	O	$-\frac{1}{r} (Sc \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1)$
E	$-\frac{2\epsilon^2}{r}$	P	-1
F	$-\frac{\epsilon^2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\epsilon^2}{r^2}$	Q	$-\epsilon^2$
G	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}$	R	$\frac{Sc}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$
H	$-\frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r}$	S	$-\frac{1}{r} (Sc \frac{\partial \psi}{\partial z} + 1)$
I	$\frac{2\epsilon^2}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z}$	T	-1
J	$\frac{\epsilon^2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}$	U	$-\epsilon^2$
MT	$-\frac{1}{\Delta t Pr} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_0 - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right)_0 - \dots \right]$ $\left[\dots - \frac{\epsilon^2}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_0 \right]$	\mathbb{R}_t	$\frac{Sc}{Pr}$

Coeficientes de las ecuaciones (2.19) a (2.21)

Nombre	Valor del coeficiente
b	\mathbb{I}
c	\mathbb{J}
d	\mathbb{K}
e	$\mathbb{F} \frac{2\Omega\Gamma \sin(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{\mathbb{H}}{\gamma} + \mathbb{I} \frac{2\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma} + \mathbb{J} \left[\frac{3\eta\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma} + \frac{6\eta\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right] +$ $+ \mathbb{K} \left[\frac{-4\eta\Gamma\Omega^3 \sin(\Omega\xi)}{\gamma} + \frac{24\eta\Gamma^2\Omega^3 \cos(\Omega\xi) \sin(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{24\eta\Gamma^3\Omega^3 \sin^3(\Omega\xi)}{\gamma^3} \right]$
f	$\frac{\mathbb{F}}{\gamma} + \mathbb{J} \frac{3\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma} + \mathbb{K} \left[\frac{6\eta\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma} + \frac{12\eta\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right]$
g	$\mathbb{K} \frac{4\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma}$
h	$\mathbb{E} \frac{4\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \mathbb{F} \frac{2\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{\mathbb{G}}{\gamma^2} + \mathbb{J} \frac{3\eta^2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \mathbb{K} \left[\frac{12\eta^2\Gamma^2\Omega^3 \sin(\Omega\xi) \cos(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{24\eta^2\Gamma^3\Omega^3 \sin^3(\Omega\xi)}{\gamma^3} \right]$
i	$\mathbb{E} \frac{2\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \mathbb{K} \frac{4\eta^3\Gamma^3\Omega^3 \sin^3(\Omega\xi)}{\gamma^3}$
j	$\frac{\mathbb{E}}{\gamma^2} + \mathbb{K} \frac{6\eta^2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2}$

Coeficientes de las ecuaciones (2.19) a (2.21) (cont.)

Name	Coefficient
k	$\frac{\mathbb{D}}{\gamma} + \mathbb{F} \left[\frac{\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^3} \right] + \mathbb{H} \frac{\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \mathbb{I} \left[\frac{\eta\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma} + \frac{2\eta\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right] +$ $\mathbb{J} \left[\frac{-\eta\Gamma\Omega^3 \sin(\Omega\xi)}{\gamma} + \frac{6\eta\Gamma^3\Omega^3 \sin^3(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \frac{6\eta\Gamma^2\Omega^3 \cos(\Omega\xi) \sin(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right] +$ $\mathbb{K} \left[\frac{-\eta\Gamma\Omega^4 \cos(\Omega\xi)}{\gamma} - \frac{8\eta\Gamma^2\Omega^4 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{36\eta\Gamma^3\Omega^4 \sin^2(\Omega\xi) \cos(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \frac{24\eta\Gamma^4\Omega^4 \sin^4(\Omega\xi)}{\gamma^4} + \frac{6\eta\Gamma^2\Omega^4 \cos^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right]$
l	$\frac{\mathbb{C}}{\gamma^2} + \mathbb{E} \left[\frac{6\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^4} + \frac{2\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma^3} \right] + \mathbb{F} \left[\frac{\eta\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{4\eta\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^3} \right] + \mathbb{G} \frac{2\Omega\Gamma \sin(\Omega\xi)}{\gamma^3} +$ $\mathbb{H} \frac{\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \mathbb{I} \frac{\eta^2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \mathbb{J} \left[\frac{6\eta^2\Gamma^3\Omega^3 \sin^3(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \frac{3\eta^2\Gamma^2\Omega^3 \sin(\Omega\xi) \cos(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right] +$ $\mathbb{K} \left[\frac{3\eta^2\Gamma^2\Omega^4 \cos^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} - \frac{4\eta^2\Gamma^2\Omega^4 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{36\eta^2\Gamma^3\Omega^4 \sin^2(\Omega\xi) \cos(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \frac{36\eta^2\Gamma^4\Omega^4 \sin^4(\Omega\xi)}{\gamma^4} \right]$
m	$\frac{\mathbb{B}}{\gamma^3} + \mathbb{E} \left[\frac{\eta\Gamma\Omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \frac{6\eta\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^4} \right] + \mathbb{F} \frac{\eta^2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \mathbb{G} \frac{\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \mathbb{J} \frac{\eta^3\Gamma^3\Omega^3 \sin^3(\Omega\xi)}{\gamma^3} +$ $\mathbb{K} \left[\frac{6\eta^3\Gamma^3\Omega^4 \sin^2(\Omega\xi) \cos(\Omega\xi)}{\gamma^3} + \frac{12\eta^3\Gamma^4\Omega^4 \sin^4(\Omega\xi)}{\gamma^4} \right]$
n	$\frac{\mathbb{A}}{\gamma^4} + \mathbb{E} \frac{\eta^2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^4} + \mathbb{K} \frac{\eta^4\Gamma^4\Omega^4 \sin^4(\Omega\xi)}{\gamma^4}$
o	N
p	Q
q	$\mathbb{Q} \frac{2\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma}$

Coeficientes de las ecuaciones (2.19) a (2.21) (cont.)

Name	Coefficient
m_t	$\frac{\mathbb{L}}{\gamma} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\mathbb{M}}{\gamma} \frac{\partial C}{\partial \eta} + - \left\{ \frac{1}{\gamma^3 \eta^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_0 - \frac{1}{\eta \gamma^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right)_0 - \frac{\epsilon^2}{\eta \gamma} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \right)_0 + \frac{2\eta \Gamma \Omega \sin(\Omega \xi)}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right)_0 + \frac{\eta^2 \Gamma^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega \xi)}{\gamma^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right)_0 + \dots \right] \right\}$ $\left\{ \left[\dots + \left(\frac{2\eta \Gamma^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega \xi)}{\gamma^2} + \frac{\eta \Gamma \Omega^2 \cos(\Omega \xi)}{\gamma} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)_0 \right] \right\}$
s	$\mathbb{N} \frac{\eta \Omega \Gamma \sin(\Omega \xi)}{\gamma} + \frac{\mathbb{O}}{\gamma} + \mathbb{Q} \left[\frac{\eta \Gamma \Omega^2 \cos(\Omega \xi)}{\gamma} + \frac{2\eta \Gamma^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega \xi)}{\gamma^2} \right]$
t	$\mathbb{P} \frac{1}{\gamma^2} + \mathbb{Q} \frac{\eta^2 \Gamma^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega \xi)}{\gamma^2}$
o_c	\mathbb{R}
p_c	\mathbb{U}
q_c	$\mathbb{U} \frac{2\eta \Gamma \Omega \sin(\Omega \xi)}{\gamma}$
s_c	$\mathbb{R} \frac{\eta \Omega \Gamma \sin(\Omega \xi)}{\gamma} + \frac{\mathbb{S}}{\gamma} + \mathbb{U} \left[\frac{\eta \Gamma \Omega^2 \cos(\Omega \xi)}{\gamma} + \frac{2\eta \Gamma^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega \xi)}{\gamma^2} \right]$
t_c	$\mathbb{T} \frac{1}{\gamma^2} + \mathbb{U} \frac{\eta^2 \Gamma^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega \xi)}{\gamma^2}$

 Coeficientes de la ecuación (2.29)

Name	Coefficient
A''	$\frac{\eta\Gamma^2\epsilon^2\Omega^2\sin^2(\Omega\xi)+1}{\gamma}$
B''	$\Gamma\epsilon^2\Omega\sin(\Omega\xi)$

 Coeficientes de las ecuaciones (2.96) a (2.98)

Name	Coefficient
A'	$\frac{\eta\Gamma\Omega^2\cos(\Omega\xi)}{\gamma} + \frac{2\eta\Gamma^2\Omega^2\sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{1}{\eta^2\gamma^3\epsilon}$
B'	$\frac{1}{\eta\gamma^3\epsilon^2} + \frac{\eta^2\Gamma^2\Omega^2\sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2}$
C'	$\frac{1}{\eta\gamma}$
D'	$\frac{2\eta\Gamma\Omega\sin(\Omega\xi)}{\eta\gamma^2}$
E'	$\frac{Ra_D}{Pr_e\gamma}$
F'	$\frac{Ra_D N}{Pr_e\gamma}$
G'	σ
H'	$\frac{\epsilon^2}{\eta\gamma^2} \frac{\partial\psi}{\partial\eta}$
I'	$-\frac{\epsilon^2}{Pr_e}$
J'	$-\frac{\epsilon^2}{\eta\gamma^2} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} - \frac{1}{Pr_e} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\epsilon^2\eta\Gamma\omega^2\cos(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{2\epsilon^2\eta\Gamma^2\Omega^2\sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right]$
K'	$-\frac{1}{Pr_e} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\epsilon^2\eta^2\Gamma^2\Omega^2\sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right]$
L'	$-\frac{\epsilon^2}{Pr_e} \frac{2\eta\Gamma\Omega\sin(\Omega\xi)}{\gamma}$
M'	φ

 Coeficientes de las ecuaciones (2.96) a (2.98) (cont.)

Name	Coefficient
N'	$\frac{\epsilon^2}{\eta\gamma^2} \frac{\partial\psi}{\partial\eta}$
O'	$-\frac{\epsilon^2}{Sc_e}$
P'	$-\frac{\epsilon^2}{\eta\gamma^2} \frac{\partial\psi}{\partial\xi} - \frac{1}{Sc_e} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\epsilon^2\eta\Gamma\omega^2 \cos(\Omega\xi)}{\gamma^2} + \frac{2\epsilon^2\eta\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right]$
Q'	$-\frac{1}{Sc_e} \left[\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\epsilon^2\eta^2\Gamma^2\Omega^2 \sin^2(\Omega\xi)}{\gamma^2} \right]$
R'	$-\frac{\epsilon^2}{Sc_e} \frac{2\eta\Gamma\Omega \sin(\Omega\xi)}{\gamma}$