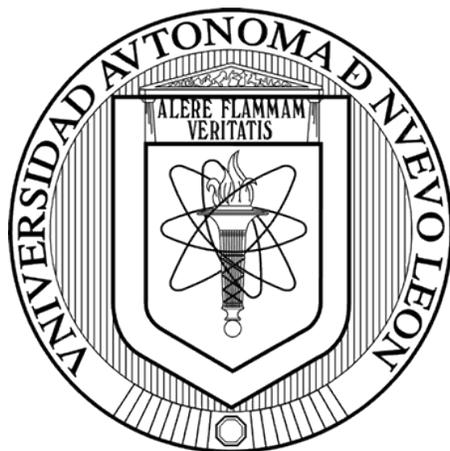


**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**  
**CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**



**TESIS**

**EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN  
OLIGOPOLIO MIXTO CON UNA ESTRUCTURA ESPECIAL**

**PRESENTA**

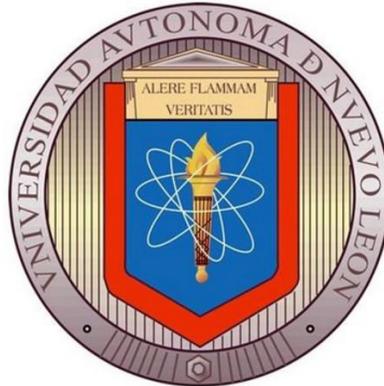
**DIEGO DE JESÚS HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ**

**EN OPCIÓN AL GRADO DE:**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN  
MATEMÁTICAS**

**SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L. DICIEMBRE 2014**

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN  
OLIGOPOLIO MIXTO CON UNA ESTRUCTURA ESPECIAL

PRESENTA

DIEGO DE JESUS HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

EN OPCION AL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L. DICIEMBRE 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS



EQUILIBRIOS CON VARIACIONES CONJETURADAS EN UN  
OLIGOPOLIO MIXTO CON UNA ESTRUCTURA ESPECIAL

PRESENTA

DIEGO DE JESÚS HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ

EN OPCION AL GRADO DE:

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON ORIENTACIÓN EN MATEMÁTICAS

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, N.L.    DICIEMBRE 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Los miembros de este comité recomendamos que la tesis: Equilibrios con variaciones conjeturadas en un oligopolio mixto con una estructura especial, presentado por el Lic. Diego de Jesús Hernández Rodríguez, sea aceptado como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias con Orientación en Matemáticas.

El Comité de Tesis

---

Dra. Nataliya Kalashnykova

Asesora

---

Dr. Viacheslav Kalashnikov

Co-asesor

---

Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco

Revisor

Vo. Bo.

---

Dr. José Fernando Camacho Vallejo

Coordinador del Posgrado en Ciencias con Orientación en Matemáticas

## **Agradecimientos:**

Primeramente quiero darle gracias a Dios por darme los ánimos y la fortaleza para poder seguir cumpliendo mis sueños y metas.

Quiero empezar a dar las gracias a la Dra. Nataliya Kalashnykova, mi asesora de tesis, por ver en mí algo que otros profesores no habían visto y darme la oportunidad de seguir aprendiendo como investigador. También les doy las gracias al Dr. Fernando Camacho Vallejo y al Dr. Álvaro Eduardo Cordero Franco por sus consejos y por compartirme sus experiencias durante mi estancia en la maestría.

Agradezco también a mi familia, a mis padres la Sra. Martha Margarita Rodríguez Cárdenas y el Sr. Julio César Hernández Castillo y a mis hermanos Julio César Hernández Rodríguez y Marco Andrés Hernández Rodríguez por siempre recibirme con cariño y los brazos abiertos cuando los visitaba en Linares, ayudándome a relajarme cuando me encontraba preocupado por cosas de la maestría.

Quiero también agradecer a mis compañeros de la maestría por su comprensión y apoyo durante mi estancia en la maestría, gracias a Elena Cristina Villanueva Guerra, Martha Selene Casas Ramírez, Sarahí Berenice Báez Viesca, Oscar de Jesús Trinidad Ovalle Reyna, Jorge Arturo Garza

Venegas, Gilberto Javier Tenorio Rodríguez, Rafael Muñoz Sánchez, Jonathan Ricardo Moller Garza, Luis Rodrigo López, Rodrigo Alejandro y Carmen Sayuri, agradecimientos especiales a Carlos Ernesto Mitsuo Nakashima Villarreal por brindarme apoyo especial centrado en el área de la investigación de la tesis y también a mis compañeros que juntos entramos a la maestría, Samuel Uriel Armendariz Hernández y Armando Ortega Rosales.

También agradezco a mis compañeros de generación de la licenciatura, por esas reuniones que teníamos para distraernos de nuestras actividades en las diferentes instituciones donde cursamos nuestros estudios de maestría, principalmente gracias a José Álvaro Gómez Pantoja, Eduardo López Aguilar, Edgar Camacho Esparza e Isaac Reyna Garza.

Pero como no todo es estudio también agradezco a varios de mis amigos del municipio de Linares, cuyas reuniones servían para olvidarse de todo y recargar baterías para el trabajo que se venía para todos en general, gracias a Zeferino Rodríguez, Guillermo Puentes, Ramiro Sotelo, Adrián Treviño, Juan López, Manuel Salazar, Alejandro Salazar, Eduardo Iglesias, Jorge Iglesias, Arturo Paz, Heber Camacho, Vanessa Villanueva, Rafael Romero, Isabella Hernández, Julio Guzmán, Héctor Torres, entre otros.

# Índice

<b>Capítulo 1: Introducción.....</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 2: Especificación del modelo .....</b>	<b>10</b>
<b>Capítulo 3: Equilibrio exterior.....</b>	<b>14</b>
<b>Capítulo 4: Equilibrio interior.....</b>	<b>21</b>
<b>Capítulo 5: La demanda es función lineal.....</b>	<b>27</b>
<b>Capítulo 6: Resultados numéricos.....</b>	<b>37</b>
<b>Capítulo 7: Conclusiones y trabajo futuro.....</b>	<b>55</b>
<b>Anexos.....</b>	<b>57</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1.Introducción

---

Los modelos de oligopolio han sido analizados durante más de 200 años, pero recientemente estos modelos empezaron tomar en cuenta los beneficios a la sociedad, en un acercamiento tales modelos se llaman el oligopolio mixto. Recordamos que un oligopolio mixto en un mercado de un bien homogéneo cuenta con una compañía (agente), la cual, en contraste a los agentes privados, maximiza no la función de su ganancia neta pero la función llamada bienestar doméstico social. En los últimos años, la investigación de patrones de comportamiento de los agentes en los mercados mixtos, se ha vuelto más y más popular.

Los primeros trabajos de oligopolios se pueden encontrar en [3], donde empiezan haciendo el análisis de cómo serían las utilidades de la empresa se privatizara siempre y cuando estuvieran compitiendo en un equilibrio de Cournot, en [4] consideran un sistema de compensaciones analizando un cambio en el equilibrio de Cournot y en [5] donde analizan un duopolio con una firma publica y una privada. En [18] se consideró el oligopolio mixto en el cual la firma publica maximiza el beneficio social y garantiza el agrado de su población, lo que no se considera en este artículo era que la firma publica podría tener beneficios negativos, es decir, se puede interesar tanto por el bienestar de la gente que puede salir con deudas en cuando a sus ganancias y provocar en si la bancarrota de la misma. Para las obras pioneras de los

oligopolios en común véase Bos [8] y [11]. Excelentes encuestas se pueden encontrar en [9], [10] y [12].

El interés en oligopolios mixtos es alto debido a su importancia para las economías de Europa (Alemania, Inglaterra y otros), Canadá y Japón (véase [16]). Hay ejemplos de oligopolios mixtos en los Estados Unidos tales como las industrias de paquetería y entrega nocturnas. Oligopolios mixtos son también comunes en la Europa del Este y la antigua Unión Soviética, donde la competencia entre las empresas públicas y privadas ha existido o aún existe en muchas industrias como la banca, préstamo hipotecarios, seguro de vida, líneas aéreas, telecomunicaciones, gas natural, energía eléctrica, ferrocarril, automóviles, el acero, la educación, hospitales, atención sanitaria, la radiodifusión, y servicios de entrega.

En los trabajos previamente citados los autores investigan el equilibrio en sentido de Cournot o Stackelberg. En el equilibrio de Cournot, nombre que se le atribuye a Antoine Augustin Cournot, las firmas buscan maximizar sus propios beneficios y toman su decisión sin saber la decisión que tomaron las otras firmas. Entre las características más comunes que comparte el equilibrio de Cournot son: hay más de una firma y todas fabrican el mismo producto, el número de firmas es fijo, ninguna firma esta aliada con otra, cada firma supone que solo los cambios de su volumen de producción afectará el volumen total del mercado, las firmas son racionales, es decir, buscaran maximizar sus beneficios individualmente y no tomaran decisiones que podrían llevarlos a la bancarrota.

En el equilibrio de Stackelberg, nombre que se le atribuye a Heinrich Freiherr von Stackelberg, en el cual el menciona que no necesariamente las

firmas eligen al mismo tiempo los volúmenes de producción, sino que la firma que más impacto tiene en el mercado elige su volumen de producción, a esta firma que tiene mayor impacto en el mercado se le llama firma “líder”, luego de que el líder escoge su volumen, las demás firmas que tienen un peso menor en el mercado escogen su volumen de producción en tomando como base la decisión de la firma “líder”, a estas firmas se les llama firmas “seguidor”. El primer modelo de Stackelberg fue visto en un duopolio. El líder siempre juega primero; por tanto, los seguidores siempre saben cuál es la primera jugada. El líder sabe que los seguidores observan su acción para determinar la suya y el líder sabe que los seguidores no tienen la opción de cambiar las reglas del juego (es decir, no pueden transformar el equilibrio de Stackelberg en algún otro tipo).

Los *equilibrios de variación conjetural* (CVE por sus siglas en inglés) fueron definidos por Bowley y Frisch ([1] y [2]) en donde definen otro concepto para entender y dar una solución posible a los juegos estáticos. En este concepto los jugadores elijen su estrategia óptima tomando en cuenta que la estrategia de cada rival es una *función conjeturada* de su propia estrategia.

En los trabajos de Bulavsky y Kalashnikov [17], [13] y [14] se fueron investigando nuevas formas de definir los equilibrios de variaciones conjeturadas para los modelos de oligopolio clásico.

Cuando se estudia al mercado de oligopolios en el enfoque de los modelos clásicos, en adición a las preguntas de la existencia de un equilibrio y su calculación, se pone mucha atención usualmente al compararlo con el

equilibrio de Cournot y de competencia perfecta. En las obras de Bulavsky y Kalashnikov [17], [13] y [14] los ambos modelos fueron incluidos en una clase uniforme de modelos de oligopolios en los cuales el grado de influencia de cada agente se modela por un parámetro especial (un coeficiente de influencia). En más detalles, en lugar de la hipótesis clásica de Cournot, fue asumido que cada productor usó las variaciones conjeturales del volumen total de mercado en función de variación de su propia producción como abajo:

$$G_i(\eta) = G + (\eta - q_i)w_i(G, q_i) \quad (1)$$

en donde:

- $G$  es el volumen total de producción del mercado;
- $q_i$  es la cantidad producida actualmente por el productor  $i$ ;
- $\eta$  es la cantidad esperada para producir por el productor  $i$ ;
- $G_i(\eta)$  es el volumen total conjeturado por el agente  $i$  por el cambio de su volumen de producción  $q_i$  a  $\eta$ .

La función de la conjetura  $w_i(G, q_i)$  en la formula (1) representa *el coeficiente de influencia* del productor  $i$ . En el modelo clásico de Cournot este coeficiente es igual a 1 y en el modelo de competencia perfecta es igual a cero. Bajo las suposiciones generales ha sido demostrado la existencia y unicidad de dichos equilibrios.

Un enfoque completamente nuevo fue propuesto por Bulavsky [15]. Se supone que cada jugador hace no conjeturas acerca de variación de volumen total en función de variaciones de su propio volumen de

producción, pero hace conjeturas acerca de las variaciones del precio de mercado en función de sus variaciones infinitesimales de la producción. Con este cambio la conjetura fue notada por  $v_i$  y una relación simple con la notación anterior  $w_i$ :

$$w_i = -\frac{v_i}{p'(G)}, i = 1, 2, \dots, n$$

Una vez que se conocen las conjeturas de todas las firmas (a las cuales también se les llaman coeficientes de influencia), cada firma realiza un procedimiento de verificación y comprueba si su coeficiente de influencia es coherente con los demás o no. La situación cuando los coeficientes de influencia de todas las firmas son coherentes entre si es natural considerar como equilibrio, estos coeficientes de influencia se llaman *consistentes* y equilibrio con conjeturas consistentes se llama *equilibrio consistente con variaciones conjeturadas* (CCVE por sus siglas en inglés).

Las mismas formulas obtenidas por Bulavskiy [15] para el equilibrio consistente con variaciones conjeturadas fueron obtenidas por los chinos Liu Yuofei, Ni Y.X., Wu F.F., and Cai Bin [19]. Pero para obtención de estas formulas los chinos aplicaron una técnica de control óptimo que es mucho más complicada que la técnica de Bulavsky, además en [19] se usa la función de la demanda lineal y las funciones de costo cuadráticas, mientras que en [15] permitía funciones de demanda no lineales e incluso no diferenciales y funciones de costo no necesariamente cuadráticas, pero si convexas.

Pueden surgir unas preguntas:

¿Cuál es la diferencia principal entre el equilibrio consistente de variaciones conjetural (CCVE) y el equilibrio clásico Cournot-Nash?

En modelo clásico Cournot-Nash cada agente supone que solo él puede cambiar su volumen de producción  $q_i$  y los demás no, es decir su conjetura es  $w_i = \frac{\delta G}{\delta q_i} = 1$ . En contraste con el modelo de Cournot-Nash, en el caso de CCVE, los coeficientes de influencia  $v_i$  se encuentran como una solución de un sistema de ecuaciones, por ejemplo, en el caso cuando la demanda  $G(p)$  es continuamente diferenciable con la derivada negativa  $G'(p) < 0$  y las funciones de costos son cuadráticas de la forma

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2}a_i q_i^2 + b_i q_i$$

donde

$$a_i > 0, b_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$$

se genera el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$v_i = \frac{1}{\sum_{j \neq i}^n \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)}, j = 1, \dots, n$$

¿Por qué los modelos con equilibrio consistente de variaciones conjeturales (CCVE) son interesantes?

1.- Los modelos del equilibrio conjeturado forman una clase uniforme. Dentro de esta clase están los modelos de Cournot y competencia perfecta, es decir, este concepto es más general que el equilibrio de Cournot-Nash.

2.- En muchas aplicaciones, los modelos de CCVE nos dan resultados más eficientes y atractivos que los modelos clásicos (ver [19] y [18]). En particular, cuando aplicaron el concepto de CCVE a mercado de electricidad (ver [18]),

el equilibrio consistente conjeturado condujo a mejores resultados para los productores y consumidores.

Los resultados de Bulavsky [15] fueron extendidos por V. Kalashnikov, N. Kalashnykova, etc. en el trabajo [18], en donde consideran un oligopolio mixto con no menos que tres productores que fabrican un producto homogéneo con funciones de costo cuadráticas

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i$$

donde

$a_i > 0, b_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$  y  $q_i$  es el volumen de producción de la firma  $i$ . La firma  $i = 0$  es considerada como firma pública y las otras firmas  $i = 1, \dots, n$  como privadas. La firma pública maximiza el excedente social (Domestic Social Surplus):

$$S(p, q_0, q_1, \dots, q_n) = \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2$$

y las firmas privadas buscan maximizar sus ganancias netas:

$$\pi_i(p, q_i) = p \cdot q_i - f_i(q_i).$$

Bajo las suposiciones generales se demuestra la existencia y unicidad del equilibrio exterior para cualquier coeficiente de influencia  $v_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$  y la existencia del equilibrio interior o consistente.

En este trabajo extendemos los resultados de [18] para el caso de oligopolio mixto, en donde la firma pública maximiza una combinación

convexa de sus intereses propios, es decir, su utilidad neta con los intereses de su población, es decir, el excedente social, más exacto:

$$\begin{aligned}
 & S(p, q_0, q_1, \dots, q_n) \\
 &= \beta \left( \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2 \right) \\
 &+ (1 - \beta) \left( p q_0 - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2 \right)
 \end{aligned}$$

donde  $0 < \beta \leq 1$ , es decir, podemos considerar  $\beta$  como “grado de la socialización”. No consideramos el caso  $\beta = 0$  porque este valor corresponde al caso del oligopolio clásico, y en esta tesis trabajamos con oligopolio mixto. El ejemplo para los resultados numéricos es tomado de [18] en el mercado de la electricidad pero adaptados a este modelo.

El resto de la tesis está organizada de la siguiente manera. En el capítulo 2 planteamos el modelo, formulamos las hipótesis y consideraciones para el funcionamiento del modelo. En el capítulo 3 definimos el equilibrio exterior para los coeficientes de influencia dados y demostramos el teorema de existencia y unicidad del equilibrio exterior. En el capítulo 4 definimos el criterio de consistencia y el equilibrio interior, también demostramos la existencia de dicho equilibrio. En el capítulo 5 consideramos el caso particular con la función de la demanda lineal, también demostramos la existencia y unicidad del equilibrio interior y demostramos el comportamiento monótono respecto al parámetro  $\beta$  de los coeficientes de influencia. En el capítulo 6 utilizamos los datos del ejemplo numérico de [18],

realizamos los experimentos numéricos para búsqueda de tres tipos de equilibrios para nuestro modelo:

1.- equilibrio conjeturado y consistente calculado por las fórmulas que se desarrollan en esta tesis;

2.- equilibrio de Cournot;

3.- equilibrio de competencia perfecta, es decir, cuando los coeficientes de influencia son ceros.

Analizamos y comparamos los resultados obtenidos entre sí. Además, proponemos para los ejemplos considerados un criterio para elegir el valor óptimo para el parámetro  $\beta$ . En el capítulo 7 están las conclusiones sobre la investigación realizada y mis planes para el trabajo futuro.

# Capítulo 2. Especificación del modelo

---

Consideraremos no menos de tres productores en un mercado de oligopolio mixto de un bien homogéneo con funciones de costo  $f_i(q_i), i = 0, 1, \dots, n, n \geq 2$  donde  $q_i$  es la producción del productor  $i$ . Consideraremos la demanda de dos tipos: la demanda pasiva  $G(p)$  y la demanda activa  $D$  que no depende del precio  $p$  y es no negativa.

Relacionaremos el equilibrio entre la demanda y los suministros para el precio  $p$  con la siguiente ecuación de balance

$$\sum_{i=0}^n q_i = G(p) + D \quad (2)$$

Para el modelo nosotros asumiremos los siguientes supuestos.

**A1.** La función de demanda pasiva  $G(p)$  está definida para los precios,  $p \in (0, +\infty)$  es continuamente diferenciable, no creciente con  $G'(p) < 0$ .

**A2.** Para cada  $i = 0, 1, \dots, n$  la función de costos  $f_i(q_i)$  es cuadrática, es decir,

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i \quad (3)$$

donde

$$a_i > 0, b_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$$

También, asumiremos que

$$b_0 \leq \max_{1 \leq i \leq n} b_i \quad (4)$$

Los productores  $i, i = 1, \dots, n$  son privados y eligen su volumen de producción  $q_i$  maximizando su función de utilidad neta  $\pi_i(p, q_i) = p \cdot q_i - f_i(q_i)$ . El productor  $i = 0$ , llamado público, selecciona su volumen de producción  $q_0$  maximizando la función que es la combinación convexa de la función de beneficio social y utilidad neta

$$\begin{aligned} S(p, q_0, q_1, \dots, q_n) \\ = \beta \left( \int_0^{\sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - p \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2 \right) \\ + (1 - \beta) \left( p q_0 - b_0 q_0 - \frac{1}{2} a_0 q_0^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $0 < \beta \leq 1$ .

Ahora diremos que cada agente (tanto públicos como privados) asumen la decisión de sus volúmenes de producción afectaran el precio  $p$ . En este caso la condición necesaria de optimalidad de primer orden para el agente público ( $i = 0$ ) toma la forma siguiente

$$\frac{\partial S}{\partial q_0} = p - \left[ (1 - \beta) q_0 + \beta \sum_{i=1}^n q_i \right] \frac{\partial p}{\partial q_0} - b_0 - a_0 q_0 \begin{cases} = 0, & \text{si } q_0 > 0; \\ \leq 0, & \text{si } q_0 = 0; \end{cases} \quad (6)$$

y para los agentes privados ( $i = 1, \dots, n$ )

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = p + q_i \frac{\partial p}{\partial q_i} - f'_i(q_i) \begin{cases} = 0, & \text{si } q_i > 0; \\ \leq 0, & \text{si } q_i = 0; \end{cases} \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (7)$$

Para describir el comportamiento de los agentes necesitamos evaluar el comportamiento de la derivada  $\frac{\partial p}{\partial q_i} = -v_i$  antes de la dependencia de  $p$  sobre  $q_i$ . Introduciremos el signo negativo con el objetivo de poder trabajar con los valores no negativos de  $v_i$ . La dependencia  $p$  respecto a  $q_i$  debe probar (al menos localmente) concavidad del beneficio del  $i$ -ésimo agente en función de su propia producción  $q_i$ . De otra manera no podemos garantizar que el beneficio sea maximizado (pero no minimizado). Como hemos supuesto que las funciones de costo  $f_i(q_i)$  son cuadráticas y estrictamente convexas, entonces, para la concavidad de la función  $\pi_i(q_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  es suficiente obtener la concavidad del producto  $p \cdot q_i$ . Si asumimos que el coeficiente  $v_i$  (al cual ahora nos referiremos como el **coeficiente de influencia** del agente  $i$ -ésimo) es no negativo y constante. Entonces, la dependencia local de la utilidad neta  $\pi_i(q_i)$  respecto al volumen de producción  $\eta_i$  tiene la forma  $[p - v_i(\eta_i - q_i)]\eta_i - f_i(\eta_i)$  y la condición (7) para  $\eta_i = q_i$  se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{cases} p = v_i q_i + b_i + a_i q_i, & \text{si } q_i > 0; \\ p \leq b_i, & \text{si } q_i = 0; \end{cases} \text{ para } i = 1, \dots, n \quad (8)$$

y se usa como la condición suficiente.

Similarmente, las conjeturas de la dependencia local de la función de beneficio de la compañía pública ( $i = 0$ ) respecto a su volumen de producción  $\eta_0$  está dada de la forma siguiente

$$\beta \left( \int_0^{\eta_0 + \sum_{i=0}^n q_i} p(x) dx - [p - v_0(\eta_0 - q_0)] \left( \sum_{i=1}^n q_i \right) - f'_0(\eta_0) \right) \quad (9)$$

$$+ (1 - \beta)[p - v_0(\eta_0 - q_0)]\eta_0 - f'_0(\eta_0)$$

Lo que permite escribir la condición de optimalidad de primer orden cuando  $\eta_0 = q_0$  en la forma como sigue:

$$\begin{cases} p = -\beta v_0 \sum_{i=1}^n q_i + (1 - \beta)v_0 q_0 + b_0 + a_0 q_0, & \text{si } q_0 > 0; \\ p \leq -\beta v_0 \sum_{i=1}^n q_i + b_0, & \text{si } q_0 = 0; \end{cases} \quad (10)$$

y usar (10) como la condición suficiente. Si las conjeturas de los agentes eran dadas exógenamente tan como en papeles de Bulavsky y Kalashnikov ([13], [14]), en este caso los valores  $v_i$ , en general, dependen del volumen de producción del agente  $i$  y del precio del mercado, es decir, sean funciones de  $q_i$  y  $p$ , pero, puede ser, que  $v_i$  depende también y de volumen total del mercado. Sin embargo, en este trabajo usaremos el enfoque propuesto por Bulavsky ([15]), donde las conjeturas  $v_i$  están incluidas en el equilibrio y son determinadas simultáneamente con el precio  $p$  y los volúmenes de producción  $q_i$ . En el último caso, los coeficientes de influencia son parámetros escalares determinados solo por el equilibrio. Más adelante tal equilibrio es descrito por  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$  y se llama **interior**.

# Capítulo 3. Equilibrio Exterior

---

Para poder proseguir lo anterior necesitamos definir otra noción de equilibrio llamado **exterior** ([15]) con coeficientes de influencia  $v_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$  dados de forma exógena.

**Definición:** el conjunto  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  es llamado **equilibrio exterior**, para los coeficientes de influencia  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  si el mercado es balanceado, es decir, la condición (2) se satisface, y para cada agente las condiciones (8) y (10) son válidas.

A continuación, vamos a considerar solo el caso en el que el conjunto de productores está fijo, es decir, no depende de los valores de los coeficientes de influencia  $v_i$ . Para eso suponemos lo siguiente:

**A3.** Para el precio  $p_0 = \max_{1 \leq j \leq n} b_j$ , la siguiente desigualdad se cumple:

$$\sum_{i=0}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} < G(p_0) \quad (11)$$

La suposición anterior, junto con las suposiciones **A1** y **A2**, garantiza que para todos los valores no negativos de  $v_i, i = 1, \dots, n$  y para cualquier valor de  $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$  donde

$$0 < \bar{v}_o = \begin{cases} a_0 \left[ \frac{G(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i}} - 1 \right], & \text{si } \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} > 0 \\ +\infty, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (12)$$

existe una solución óptima para las condiciones (8) y (10) que satisface la ecuación de balance (2), es decir, un equilibrio exterior. Y además, las condiciones (2), (8) y (10) se cumplen simultáneamente si y solo si  $p > p_0$ , esto es, si y solo si todos los volúmenes de producción  $q_i$  son estrictamente positivos para  $i = 1, \dots, n$ . En efecto, si  $p > p_0$ , entonces las desigualdades  $p \leq b_i, i = 1, \dots, n$  dadas por (8) y  $p \leq -v_0 \sum_{i=1}^n q_i + b_0$  dadas por (10) no son posibles, lo que significa que todos  $q_i, i = 0, 1, \dots, n$  son positivos. Si todos volúmenes de producción  $q_i > 0, i = 0, 1, \dots, n$ , entonces para las condiciones dadas por (8) tenemos que

$$p = v_i q_i + b_i + a_i q_i > b_i, i = 1, \dots, n$$

entonces

$$p > \max_{1 \leq j \leq n} b_j = p_0$$

**Teorema 1.** Con las suposiciones **A1**, **A2** y **A3** y para cualquier  $D \geq 0, v_i \geq 0, i = 1, \dots, n$  y  $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$  existe un único equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  que depende continuamente de los parámetros  $(D, v_0, v_1, \dots, v_n)$ . El precio del equilibrio  $p = p(D, v_0, v_1, \dots, v_n)$  como función de esos parámetros es diferenciable respecto a  $D$  y  $v_i, i = 0, 1, \dots, n$ . Además,  $p(D, v_0, v_1, \dots, v_n) > p_0$  y

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p)} \quad (13)$$

### Demostración.

Sea  $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)^T \geq 0$ , utilizando las ecuaciones de optimas de un equilibrio exterior (8) y (10), vamos a definir las funciones de los volúmenes de producción de cada productor  $q_i = q_i(p, v_0, \dots, v_n)$  en el intervalo  $[p_0, +\infty)$ , estas funciones son continuamente diferenciables con respecto a  $p$  y están dadas de la siguiente manera:

$$q_0 = \frac{p - b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{\beta v_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{v_i + a_i} \quad (14)$$

y

$$q_i = \frac{p - b_i}{v_i + a_i}, i = 1, \dots, n \quad (15)$$

Como son continuamente diferenciales con respecto a  $p$ , vamos a analizar sus derivadas parciales, esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_0}{\partial p} &= \frac{1}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{\beta v_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} \geq \\ &\geq \frac{1}{a_0 + (1 - \beta)v_0} > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

y

$$\frac{\partial q_i}{\partial p} = \frac{1}{v_i + a_i} > 0, i = 1, \dots, n \quad (17)$$

Ahora introduciremos la función  $Q(p; v_0, v_1, \dots, v_n) = \sum_{j=0}^n q_j(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$  la cual es continuamente diferenciable y estrictamente creciente y tiende a  $+\infty$  cuando  $p \rightarrow +\infty$ . Basado sobre (14), (15) y la suposición **A3** en el caso si  $\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} > 0$  para cualquier  $v_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$  tenemos que

$$\begin{aligned}
& Q(p_0; v_0, v_1, \dots, v_n) \\
&= \frac{p_0 - b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} \\
&< \frac{p_0 - b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{\bar{v}_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} \\
&\leq \frac{p_0 - b_0}{a_0} + \left[ \frac{G(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0}}{\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i}} - 1 \right] \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{a_i} \\
&= \frac{p_0 - b_0}{a_0} + G(p_0) - \frac{p_0 - b_0}{a_0} = G(p_0)
\end{aligned}$$

y en el caso si  $\sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} = 0$  tenemos:

$$\begin{aligned}
& Q(p_0; v_0, v_1, \dots, v_n) = \\
&= \frac{p_0 - b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{\beta v_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} \\
&+ \frac{p_0 - b_i}{v_i + a_i} = \frac{p_0 - b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \leq \frac{p_0 - b_0}{a_0} < G(p_0)
\end{aligned}$$

Entonces existe único valor  $p_* > p_0$  tal que:

$$Q(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n) = G(p_*) + D$$

Para este valor  $p_*$ , calculamos los volúmenes de producción  $q_i^* = q_i(p_*; v_0, v_1, \dots, v_n)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  utilizando las formulas (14) y (15). Entonces está demostrada la existencia y unicidad del equilibrio exterior  $(p_*, q_0^*, q_1^*, \dots, q_n^*)$  para cualquier parámetro dado  $v_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , y  $D$ .

Ahora demostramos que el precio  $p_*$  del equilibrio exterior continuamente diferenciable respecto a los parámetros  $(D, v_0, \dots, v_n)$ . Para esto, vamos a

sustituir en las expresiones (14) y (15) para  $q_i = q_i(p; v_0, v_1, \dots, v_n)$  en la ecuación de balance (2) y obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 & q_0 + \sum_{i=1}^n q_i - G(p) - D \\
 &= \left( \frac{p - b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{\beta v_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{v_i + a_i} \right) + \frac{p - b_i}{v_i + a_i} \\
 &\quad - G(p) - D = \\
 &= p \left( \frac{1}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{v_i + a_i} \right) \\
 &\quad - \frac{b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} - \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{v_i + a_i} \\
 &\quad - G(p) - D = 0
 \end{aligned} \tag{18}$$

Ahora vamos a introducir una función

$$\begin{aligned}
 & \Gamma(p; v_0, v_1, \dots, v_n) \\
 &= p \left( \frac{1}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{p - b_i}{v_i + a_i} \right) - \frac{b_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \\
 &\quad - \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{v_i + a_i} - G(p) - D
 \end{aligned} \tag{19}$$

Y vamos a reescribir la igualdad (18) como una ecuación funcional

$$\Gamma(p; v_0, v_1, \dots, v_n, D) = 0 \tag{20}$$

Vamos a analizar el comportamiento de la derivada parcial con respecto a  $p$ :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} = \frac{1}{a_0 + (1 - \beta)v_0} + \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p) \geq \frac{1}{a_0 + (1 - \beta)v_0} > 0$$

Observamos que la derivada parcial siempre es estrictamente positiva, dada esta condición, podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita para concluir que el precio  $p$  considerado como función  $p = p(v_0, v_1, \dots, v_n, D)$  es diferenciable con respecto a todos los parámetros  $v_0, v_1, \dots, v_n, D$ , más importante, la derivada parcial del precio del equilibrio  $p$  con respecto a  $D$  puede ser encontrada de la ecuación

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial D} + \frac{\partial \Gamma}{\partial D} = 0$$

Lo que finalmente lleva a

$$\frac{\partial p}{\partial D} = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=0}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p)}$$

Y con esto la demostración esta completa.

# Capítulo 4. Equilibrio Interior

---

Para poder describir el equilibrio interior, primero describiremos el procedimiento de verificación de los coeficientes de influencia  $v_i$  como fueron descritos por Bulavsky [15]. Supongamos que tenemos un equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  que ocurrió para algunos  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  y una  $D$ . Uno de los productores, digamos el  $k$ , temporalmente cambia su comportamiento absteniéndose de maximizar sus ganancias y haciendo pequeñas variaciones sobre su volumen de producción  $q_k$ . En términos matemáticos es equivalente a restringir a los agentes del subconjunto  $i \neq k$  con su producción  $q_k$  substraída desde la demanda activa.

La variación del volumen de producción del agente  $k$  es equivalente a la variación de la demanda activa en la forma  $D_k = D - q_k$ . Si Consideramos que estas variaciones son infinitesimales, entonces, el agente  $k$  puede estimar la derivada del precio del equilibrio con respecto a la demanda activa, es decir, sus coeficientes de influencia.

Aplicando la formula (13) del Teorema 1 para calcular las derivadas, debemos de recordar que el agente  $k$  esta temporalmente ausente del modelo en equilibrio, por lo tanto uno a si excluido de todas las sumas con el numero  $i = k$ . Teniendo esto a considerar, tenemos el siguiente criterio.

**Criterio de Consistencia:** Dado un equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$ , los coeficientes de influencia  $v_k, k = 0, 1, \dots, n$  se referirán como **consistentes** si las siguientes ecuaciones se cumplen:

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - G'(p)} \quad (21)$$

y

$$v_i = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)}, i = 1, \dots, n \quad (22)$$

Nota: si todos los agentes maximizan su producción como compañías privadas, entonces las formulas (21)-(22) se reducen a una única fórmula:

$$v_i = \frac{1}{\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - G'(p)}, i = 0, 1, \dots, n$$

Ahora podemos definir con detalle que es un equilibrio interior.

**Definición 1:** La colección  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$  donde  $v_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n$  es un **equilibrio interior** si la colección  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  es el equilibrio exterior para los coeficientes de influencia dados  $v_k \geq 0, k = 0, 1, \dots, n$  y el criterio de consistencia se satisface para todo  $k$ .

**Teorema 2.** Con las suposiciones **A1, A2 y A3**, existe un equilibrio interior.

## Demostración

Vamos a demostrar que existen  $v_0 \in [0, \bar{v}_0)$ ,  $v_i \geq 0$ ,  $q_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $p > p_0$  tal que el vector  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$  es un equilibrio exterior y las ecuaciones (21) y (22) se satisfacen. Para trabajar de una manera más sencilla y eficiente, vamos a introducir un parámetro  $\alpha$  de tal manera que  $G'(p) = \frac{\alpha}{1+\alpha}$  donde  $\alpha \in [-1, 0]$ , e introducimos las funciones siguientes:

$$F_0(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \alpha} \quad (23)$$

y

$$F_i(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} - \alpha}, \quad (24)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Como  $v_i \geq 0$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $\alpha \in [-1, 0]$ , las funciones  $F_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  están bien definidas y son continuas con respecto a sus argumentos sobre el dominio correspondiente.

Ahora introduzcamos una función auxiliar  $\Phi: [-1, 0] \times \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow [-1, 0]$  de la manera siguiente. Para un valor arbitrario  $\alpha \in [-1, 0]$  y  $(v_0, v_1, \dots, v_n) \in [0, \bar{v}_0) \times \mathbb{R}_+^n$ , se encontrará el único vector del equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  (existe por el Teorema 1) y luego se calculará el valor de la derivada  $G'(p)$  en el punto de equilibrio  $p$ . Luego definiremos el valor de la función  $\Phi$  como sigue:

$$\Phi(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \hat{\alpha} = \frac{G'(p)}{1 - G'(p)} \in [-1, 0]. \quad (25)$$

Cuando definimos esta función auxiliar, nosotros no indicamos la dependencia sobre  $D$ , porque no va a variar para nada en la demostración. Como la derivada  $G'(p)$  es continua con respecto a  $p$  (esto por **A1**) y el precio del equilibrio  $p = p(v_0, v_1, \dots, v_n)$ , esta vez, es una función continua (esto usando el Teorema 1), entonces la función  $\Phi$  es continua por ser una composición de funciones continuas (nótese que la dependencia sobre  $\alpha$  es ficticia).

Para terminar con la demostración, vamos a definir el siguiente mapeo  $H = (\Phi, F_0, F_1, \dots, F_n): [-1, 0] \times \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow [-1, 0] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$  y luego seleccionamos un conjunto compacto que  $H$  mapea a sí mismo. A continuación vamos a encontrar cotas para todas las funciones que definimos en las formulas (23) y (24). Para eso definamos  $s = \max\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ . En las formulas (23) y (24) se cumplen las siguientes relaciones: si  $\alpha = -1$  entonces

$$F_0(-1, v_0, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad (26)$$

$$F_i(-1, v_0, v_1, \dots, v_n) = 0, i = 1, \dots, n \quad (27)$$

mientras que para  $\alpha \in (-1, 0]$  se obtiene

$$0 \leq F_0(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \alpha} \leq \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + s}} \quad (28)$$

y

$$\begin{aligned}
0 &\leq F_i(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) \\
&= \frac{1 + \alpha}{(1 + \alpha) \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} - \alpha} \\
&\leq \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i}} \quad (29) \\
&\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + s}}, \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned}$$

Las relaciones (26) – (29) se observa que para cualquier  $\alpha \in [-1,0]$  si  $0 \leq v_j \leq \frac{s}{n-1}, j = 0,1, \dots, n$  entonces los valores de  $F_j(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n), j = 0,1, \dots, n$  caen en el mismo intervalo cerrado  $\left[0, \frac{s}{n-1}\right]$ . Por lo tanto, establecimos que el mapeo continuo  $H = (\Phi, F_0, F_1, \dots, F_n)$  mapea el conjunto compacto  $[-1,0] \times \left[0, \frac{s}{n-1}\right]^{n+1}$ . Entonces, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, el mapeo  $H$  tiene un punto fijo  $(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n)$ , este es,

$$\begin{cases}
\Phi(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = \alpha, \\
F_0(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = v_0, \\
F_1(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = v_1, \\
\vdots \\
F_n(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n) = v_n.
\end{cases} \quad (30)$$

Para el punto fijo  $(\alpha, v_0, v_1, \dots, v_n)$  por el Teorema 1, podemos encontrar único equilibrio exterior  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n)$  para los coeficientes de influencia

$(v_0, v_1, \dots, v_n) \in [0, \overline{v_0}) \times \mathbb{R}_+^n$  del punto fijo. Del sistema (30) y de la definición de la función  $\Phi$  los coeficientes de influencia  $(v_0, v_1, \dots, v_n)$  satisfacen las condiciones (21) y (22). Por lo tanto, de acuerdo a la definición 1, en consecuencia el vector construido  $(p, q_0, q_1, \dots, q_n, v_0, v_1, \dots, v_n)$  es el equilibrio interior deseado. Y con esto la demostración está completa.

# Capítulo 5. La demanda es función lineal

---

Consideramos el caso particular cuando la demanda es la función lineal  $G(p) = -Kp + T$  con  $K > 0, T > 0$  y demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 3.** Para cada  $0 < \beta \leq 1$  existe único equilibrio interior  $(p^*(\beta), q_0^*(\beta), q_1^*(\beta), \dots, q_n^*(\beta), v_0^*(\beta), v_1^*(\beta), \dots, v_n^*(\beta))$ . Los coeficientes de influencia  $v_i^*(\beta), i = 0, 1, \dots, n$  son diferenciables dentro del intervalo  $0 < \beta \leq 1$  y monótonamente decrecientes dentro del intervalo

$$\frac{1}{1 + a_0 \frac{(n-1)^2}{ns}} < \beta \leq 1$$

donde  $s = \max\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ .

## Demostración

De manera similar a la demostración 2, definiremos las siguientes funciones

$$\hat{F}_0(\beta, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i + a_i} + K} = v_0 \quad (31)$$

y

$$\hat{F}_i(\beta, v_0, v_1, \dots, v_n) = \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} + K} = v_i, \quad (32)$$

$$i = 1, \dots, n$$

y sea el conjunto  $s = \max\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  y definamos el vector – función  $\hat{\Gamma} = (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)$ , usando la misma construcción del teorema 2, se observa que para cualquier valor de  $\beta \in (0,1]$  y  $v_0 \geq 0$  el vector – función mapea el cubo  $n$  – dimensional  $M = \left[0, \frac{s}{n-1}\right]^n$  sobre si mismo. Ahora demostraremos que el subsistema (32) tiene una solución única  $v(v_0, \beta) = (v_1(v_0, \beta), \dots, v_n(v_0, \beta))^t$  para cualquier  $\beta \in (0,1]$  y  $v_0 \geq 0$ , por otra parte, la función  $v(v_0, \beta)$  es continuamente diferenciable con respecto a ambas variables.

Para proseguir con la demostración vamos a utilizar la matriz Jacobiana del mapeo  $\hat{\Gamma} = (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)$ , esto es, la matriz  $\hat{j} = \left(\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial v_j}\right)_{i=1, j=1}^{n, n}$  la cual tiene los siguientes valores:

$$\frac{\partial \hat{F}_i}{\partial v_j} = \begin{cases} 0, & \text{si } j = i; \\ \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \frac{\hat{F}_i^2}{(v_j + a_j)^2}, & j \neq i. \end{cases} \quad (33)$$

Así, la matriz  $\hat{j}$  es no negativa y no descomponible. Ahora calculemos las sumas de los elementos de la matriz en cada fila  $i = 1, 2, \dots, n$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \frac{\partial \widehat{F}_i}{\partial v_k} &= \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \widehat{F}_i^2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2} \\
&\leq \frac{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2}}{\left( \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)} \right)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0}} \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2}}{\left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)} \right)^2} \\
&\leq \frac{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)^2}}{\left( \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{(v_k + a_k)} \right)^2} = R_i(v_1, \dots, v_n; v_0) < 1
\end{aligned} \tag{34}$$

Para cada valor fijo  $v_0 \geq 0$  (esto es tratado como parámetro) las funciones mencionadas arriba  $R_i(v_1, \dots, v_n; v_0), i = 1, \dots, n$  están definidas en el cubo  $M$ , dependen de las variables  $v_1, \dots, v_n$  y solo toman valores menores que 1. Por lo tanto, sus máximos valores en el cubo son estrictamente menos que 1, lo que implica que la matriz  $I - \hat{J}$  tiene inversa positiva ( $I$  es la matriz identidad de dimensión  $n$ ) y el mapeo  $\hat{\Gamma} = (\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_n)$  definido en  $M$  es contracción estricta en una norma cubica (es decir, la norma del supremo  $\|\cdot\|_\infty$ )

Lo obtenido anteriormente dice que para cualquier valor fijo de  $\beta \in (0,1]$  y  $v_0 \geq 0$  el subsistema de ecuaciones (32) tiene una única solución

$$v(v_0, \beta) = (v_1(v_0, \beta), \dots, v_n(v_0, \beta))^t \tag{35}$$

Como  $\det(I - \hat{f}) \neq 0$  para cualquier  $\beta \in (0,1]$  y  $v_0 \geq 0$ , el Teorema de la Función Implícita garantiza que  $v(v_0, \beta)$  es continuamente diferenciable sobre ambas variables.

Para establecer que la solución  $v(v_0, \beta)$  del subsistema (32) es monótona respecto a  $\beta$  para cada valor fijo  $v_0 \geq 0$  derivamos (32) respecto a  $\beta$ , lo que nos lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = -\widehat{F}_i^2 & \left[ \left( 1 + (v_0 + a_0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} \right) (a_0 + (1 - \beta)v_0)^{-2} v_0 \right. \\ & \left. + \left( \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \right) \left( \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{-\frac{\partial v_j}{\partial \beta}}{(v_j + a_j)^2} \right) \right], i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (36)$$

Re-escribimos (36) en forma vectorial

$$v'_\beta = \hat{f} v'_\beta - \widehat{F}^2 \left[ v_0 + v_0(v_0 + a_0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} ((a_0 + (1 + \beta)v_0)^{-2}) \right] \quad (37)$$

donde

$$v'_\beta = \left( \frac{\partial v_1}{\partial \beta}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial \beta} \right)^T$$

y

$$\widehat{F}^2 = (\widehat{F}_1^2, \dots, \widehat{F}_n^2)^T > 0. \quad (38)$$

Como todos los elementos de la matriz  $(I - \hat{f})$  son no negativos y la matriz inversa  $(I - \hat{f})^{-1}$  no tiene columnas de ceros, entonces (37) – (38) implican que

$$v'_\beta = -(I - \hat{f})^{-1} \widehat{F^2} \left[ \frac{v_0 + v_0(v_0 + a_0) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j}}{(a_0 + (1 + \beta)v_0)^2} \right] < 0. \quad (39)$$

Entonces, la función  $v(v_0, \beta)$  es estrictamente decreciente respecto a  $\beta$  para cualquier valor fijo de  $v_0 \geq 0$ .

Para probar que la solución  $v(v_0, \beta)$  es monótona respecto a  $v_0 \geq 0$ , para cada valor fijo de  $\beta \in (0,1]$ , derivamos (32) respecto a  $v_0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial v_0} &= F_i^2 \left( \frac{v_0 + a_0}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \right) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\frac{\partial v_k}{\partial v_0}}{(v_k + a_k)^2} \\ &+ \frac{F_i^2}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \left[ 1 - \beta - a_0 \beta \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_k} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Re-escribimos (40) en forma vectorial

$$v'_{v_0} = J v'_{v_0} - Q, \quad (41)$$

donde

$$v'_{v_0} = \left( \frac{\partial v_1}{\partial v_0}, \dots, \frac{\partial v_n}{\partial v_0} \right)^T \quad (42)$$

y  $Q \in R^+$  es el vector con los componentes

$$Q_i = \frac{F_i^2}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \left[ 1 - \beta - a_0\beta \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{1}{v_k + a_k} \right] \quad (43)$$

$i = 1, \dots, n.$

De (41) sigue que  $v'_{v_0} = -(I - J)^{-1}Q < 0$  para los parámetros  $\beta$  dentro del siguiente intervalo

$$\frac{1}{1 + a_0 \frac{(n-1)^2}{ns}} < \beta \leq 1. \quad (44)$$

Lo que significa que cada componente de  $v(v_0, \beta)$  es una función estrictamente decreciente respecto a  $v_0$  para cada parámetro  $\beta$  dentro del intervalo (44).

Ahora podemos establecer la existencia y unicidad de la solución

$$v(\beta) = (v_0(\beta), \dots, v_n(\beta))^t$$

del sistema (31) – (32) para cada valor fijo de  $\beta \in (0,1]$ . Para esto sustituimos las soluciones (35) de (32) en (31)

$$v_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \beta) + a_i} + K} \quad (45)$$

Para cada valor fijo  $\beta \in (0,1]$  introducimos la función

$$\widehat{\Psi}(v_0) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \beta) + a_i} + K} \quad (46)$$

Como habíamos establecido que

$$0 \leq v_i(v_0, \beta) \leq \frac{s}{n-1}, i = 1, \dots, n, \quad (47)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}(v_0) &\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \beta) + a_i}} \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i(v_0, \beta) + s}} \\ &\leq \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{s}{n-1} + s}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{n-1}{ns}} = \frac{s}{n-1}, \end{aligned} \quad (48)$$

lo que significa que para cualquier parámetro fijo  $\beta \in (0,1]$  la función  $\widehat{\Psi}(v_0)$  mapea el intervalo cerrado  $[0, \frac{s}{n-1}]$  en si mismo. Por lo tanto, usando el Teorema del Punto fijo de Brouwer, existe un punto fijo  $v_0 = \widehat{\Psi}(v_0)$  dentro de este intervalo.

Ahora vamos a probar que este punto fijo es único para cada parámetro  $\beta$  dentro del intervalo (44). En efecto, las funciones  $v_i(v_0, \beta), i = 1, \dots, n$  dentro de este intervalo son estrictamente decrecientes respecto a  $v_0 \geq 0$  entonces,  $\frac{1}{v_i(v_0, \beta) + a_i}$  es estrictamente creciente. Ahora deducimos que la función  $\widehat{\Psi}(v_0)$  para cada parámetro  $\beta$  dentro del intervalo (44) es estrictamente decreciente respecto a  $v_0 \geq 0$ , lo que significa que el punto fijo  $v_0 = \widehat{\Psi}(v_0)$  es único. Diferenciando la función bien definida  $v_0 = v_0(\beta)$  respecto a  $\beta$  dentro del intervalo (44) y utilizando el Teorema de la función implícita obtuvimos

$$\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial v_0} = \hat{\Psi}^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_i(v_0, \beta) + a_i)^2} < 0 \quad (49)$$

para cada parámetro  $\beta$  dentro del intervalo (44).

Para establecer la monotonía de  $v_0 = v_0(\beta)$  respecto a  $\beta$  dentro del intervalo (44), derivamos (45) – (46)

$$\frac{dv_0}{d\beta} = \left( \Psi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_i + a_i)^2} \right) \frac{dv_0}{d\beta} + \Psi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\frac{dv_i}{d\beta}}{(v_i + a_i)^2} \quad (50)$$

De (50)

$$\frac{dv_0}{d\beta} = \frac{B}{A'} \quad (51)$$

donde

$$A = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial v_i}{\partial v_0}}{(v_i + a_i)^2} > 0, \quad (52)$$

debido a (44), y

$$B = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\frac{dv_i}{d\beta}}{(v_i + a_i)^2} \right] < 0 \quad (53)$$

Entonces,  $\frac{dv_0}{d\beta} < 0$  y por lo tanto la función  $v_0 = v_0(\beta)$  es estrictamente decreciente dentro del intervalo (44).

Derivamos (39) respecto a  $\beta$  dentro del intervalo (44) tomando en cuenta que  $v_0 = v_0(\beta)$

$$\begin{aligned}
\frac{dv_i}{d\beta} = -F_i^2 & \left[ \frac{v_0}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} - \frac{\frac{dv_0}{d\beta} [1 - \beta - a_0\beta]}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \right. \\
& \left. + \frac{v_0(v_0 + a_0)}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} \right] \\
& + \frac{F_i^2(v_0 + a_0)}{a_0 + (1 - \beta)v_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\frac{dv_j}{d\beta}}{(v_j + a_j)^2}, i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{54}$$

Utilizando las notaciones  $v = (v_1, \dots, v_n)$  y  $F^2 = (F_1^2, \dots, F_n^2)$  re- escribimos (54):

$$\begin{aligned}
\frac{dv}{d\beta} = J \frac{dv}{d\beta} - F^2 & \left[ \frac{v_0}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} - \frac{\frac{dv_0}{d\beta} [1 - \beta - a_0\beta]}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \right. \\
& \left. + \frac{v_0(v_0 + a_0)}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} \right]
\end{aligned}$$

de donde encontramos la derivada  $\frac{dv}{d\beta}$

$$\frac{dv}{d\beta} = -(I - J)^{-1}F^2 \left[ \frac{v_0}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} - \frac{\frac{dv_0}{d\beta} [1 - \beta - a_0\beta]}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} + \frac{v_0(v_0 + a_0)}{(a_0 + (1 - \beta)v_0)^2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{v_j + a_j} \right] < 0$$

es decir,  $v_i = v_i(\beta)$ ,  $i = 1, \dots, n$  monótonamente decrece para los parámetros  $\beta$  que satisfacen (44). La demostración está completa.

# Capítulo 6. Resultados numéricos

---

En esta sección nos basamos en los resultados de los experimentos numéricos aplicados a un ejemplo sacado del trabajo de Liu [19], calculamos y comparamos entre sí tres tipos del equilibrio: equilibrio consistente con variaciones conjeturadas (CCVE), equilibrio en sentido de Cournot y equilibrio de Competencia Perfecta. Los coeficientes de influencia se determinan para el CCVE mediante las formulas obtenidas en este trabajo [(20), (21)], para el equilibrio de Cournot ( $w_i = 1$ ), los coeficientes de influencia son iguales a  $v_i = -p'(G)$  y para el equilibrio de Competencia Perfecta tienen valor de cero.

A continuación describimos en detalles el ejemplo sacado de [19]:

la función de la demanda inversa está dada por

$$p(G) = 50 - 0.02Q = 50 - 0.02 \sum_{i=0}^5 q_i$$

los costos de los agente ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) son cuadráticos

$$f_i(q_i) = \frac{1}{2} a_i q_i^2 + b_i q_i,$$

donde  $a_i > 0$ ,  $b_i > 0$ , y sus valores están en la Tabla 1

**Tabla 1.** Valores de las funciones de costo de las firmas

Firma	0	1	2	3	4	5
$b_i$	2	1.75	3	3	1	3.25
$a_i$	0.02	0.0175	0.025	0.025	0.0625	0.00834

Consideramos

Caso 1: dentro de este caso la firma  $i = 0$  es pública y maximiza la función del excedente social y las firmas  $i = 1, \dots, 5$  son privadas.

Con el fin de simplificar las notaciones para las tablas de los resultados, introduciremos las siguientes notaciones:

- M1 para el modelo de oligopolio mixto con variaciones conjeturadas consistentes (CCVE);
- M2 para el modelo de oligopolio mixto con equilibrio de Cournot;
- M3 para el modelo de Competencia Perfecta.

El procedimiento para analizar los resultados será el siguiente, lo que hare será comparar los valores obtenidos en cada modelo (M1, M2 y M3) respectivamente.

Iniciemos con los coeficientes de influencia. En la Tabla 2 presentamos los coeficientes de influencia para todas las firmas en el caso M1, en donde los coeficientes de influencia están dados por la fórmula que se añade en su tabla.

**Tabla 2.** Coeficientes de influencia de las firmas (Caso 1: M1)

Firma:	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Coeficientes de influencia $w_i = -\frac{v_i}{p'(G)}, i = 0,1, \dots, 5$					
0.05	0.1925085	0.1948635	0.186146	0.186146	0.1733565	0.2223555
0.1	0.1922625	0.193378	0.184702	0.184702	0.17199	0.2208005
0.15	0.1920165	0.1918925	0.1832585	0.1832585	0.1706245	0.2192445
0.2	0.19177	0.1904075	0.181816	0.181816	0.1692605	0.2176875
0.25	0.191523	0.1889225	0.1803735	0.1803735	0.1678965	0.2161295
0.3	0.191276	0.187439	0.1789325	0.1789325	0.166535	0.2145715
0.35	0.1910285	0.185956	0.1774925	0.1774925	0.165174	0.213013
0.4	0.190781	0.184473	0.1760535	0.1760535	0.163815	0.2114535
0.45	0.1905325	0.182991	0.1746155	0.1746155	0.1624565	0.2098935
0.5	0.190282	0.1815135	0.1731815	0.1731815	0.1611025	0.2083335
0.55	0.1900375	0.1800295	0.171743	0.171743	0.159745	0.2067725
0.6	0.1897875	0.1785495	0.1703075	0.1703075	0.15839	0.20521
0.65	0.189538	0.17707	0.1688735	0.1688735	0.1570375	0.203648
0.7	0.1892885	0.175592	0.167441	0.167441	0.155686	0.2020855
0.75	0.189039	0.1741145	0.1660095	0.1660095	0.1543365	0.200523
0.8	0.1887885	0.172638	0.1645795	0.1645795	0.1529885	0.1989595
0.85	0.188538	0.171163	0.1631505	0.1631505	0.151642	0.197396
0.9	0.1882885	0.169685	0.16172	0.16172	0.150294	0.1958295
0.95	0.1880365	0.1682105	0.1602925	0.1602925	0.1489495	0.1942645
1	0.187786	0.1667435	0.1588725	0.1588725	0.147613	0.1927045

En el equilibrio de Cournot el coeficiente de influencia es igual a uno, es decir,  $w_i = 1$ , lo que corresponde en el modelo M2 a coeficiente de influencia  $v_i = 0.02$ . En el equilibrio de Competencia Perfecta el coeficiente de influencia es igual a cero, es decir,  $w_i = 0$  y  $v_i = 0$ .

En la Tabla 3 mostramos los volúmenes de producción de cada firma en el modelo M1, en la Tabla 4 mostramos los volúmenes de producción de cada firma en el modelo M2.

**Tabla 3.** Volúmenes de producción de las firmas (Caso 1: M1)

Firma:	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Volúmenes de Producción $q_i$					
0.05	366.891	402.806	256.553	256.553	142.024	556.727
0.1	380.393	400.487	254.667	254.667	141.15	553.263
0.15	393.912	398.165	252.78	252.78	140.277	549.787
0.2	407.447	395.839	250.891	250.891	139.403	546.3
0.25	420.998	393.509	249	249	138.529	542.8
0.3	434.566	391.175	247.107	247.107	137.656	539.289
0.35	448.148	388.838	245.213	245.213	136.783	535.766
0.4	461.746	386.497	243.317	243.317	135.91	532.232
0.45	475.358	384.152	241.419	241.419	135.037	528.685
0.5	488.985	381.803	239.52	239.52	134.165	525.128
0.55	502.628	379.452	237.619	237.619	133.293	521.557
0.6	516.283	377.097	235.717	235.717	132.421	517.976
0.65	529.953	374.738	233.813	233.813	131.55	514.383
0.7	543.636	372.376	231.908	231.908	130.679	510.778
0.75	557.332	370.011	230.001	230.001	129.808	507.162
0.8	571.042	367.643	228.094	228.094	128.938	503.534
0.85	584.764	365.271	226.185	226.185	128.068	499.894
0.9	598.499	362.897	224.275	224.275	127.199	496.244
0.95	612.245	360.519	222.363	222.363	126.33	492.581
1	626.006	358.138	220.451	220.451	125.462	488.905

**Tabla 4.** Volúmenes de producción de las firmas (Caso 1: M2)

Firma:	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Volúmenes de Producción $q_i$					
0.05	357.667	340.889	256.296	256.296	164.040	398.142
0.1	396.778	334.700	251.139	251.139	161.227	389.952
0.15	436.404	325.429	245.913	245.913	158.377	381.655

0.2	476.556	322.075	240.618	240.618	155.489	373.247
0.25	517.244	315.637	235.253	235.253	152.562	364.728
0.3	558.479	309.112	229.815	229.815	149.596	356.094
0.35	600.272	302.498	224.304	224.304	146.590	347.343
0.4	642.634	295.795	218.718	218.718	143.543	338.473
0.45	685.578	288.999	213.055	213.055	140.454	329.481
0.5	729.114	282.110	207.314	207.314	137.323	320.365
0.55	773.256	275.125	201.493	201.493	134.148	311.122
0.6	818.016	268.042	195.591	195.591	130.928	301.750
0.65	863.407	260.059	189.605	189.605	127.663	292.245
0.7	909.442	253.275	183.534	183.534	124.352	282.606
0.75	956.137	246.186	177.377	177.377	120.993	272.829
0.8	1003.504	238.690	171.131	171.131	117.586	262.911
0.85	1051.559	231.086	164.794	164.794	114.130	252.8489
0.9	1100.316	223.370	158.364	158.364	110.623	242.639
0.95	1149.791	215.541	151.840	151.840	107.064	232.280
1	1200	207.596	145.219	145.219	103.453	221.767

En el modelo de competencia perfecta para cualquier  $0 < \beta \leq 1$  los volúmenes de producción son iguales a 348.427, 412.488, 238.741, 238.741, 127.496 y 685.676 respectivamente para las firmas 0,1,...,5. Observando los resultados podemos ver que en general, para los modelos M1 y M2, el volumen de producción de la firma publica aumenta mientras que el de las privadas disminuye conforme beta tiende a uno, observamos también que los volúmenes de producción de la firma publica son mayores cuando se usan los CCVE en comparación al equilibrio de Cournot, destacamos los resultados de los volúmenes de producción de las firmas en el modelo M3 que permanecen constantes aun cuando beta siga oscilando entre 0 y 1, dando a comprender la idea general del equilibrio de competencia perfecta.

En la Tabla 5 están dados los valores del precio y volumen para el modelo M1, en la Tabla 6 para el modelo M2. Para el modelo M3 el precio vale 8.969 y el volumen total de producción vale 2051.572754.

**Tabla 5.** Precio y volumen de producción (Caso 1: M1)

$\beta$	Precio	Volumen Total
0.05	10.369	1981.553
0.1	10.307	1984.628
0.15	10.246	1987.701
0.2	10.185	1990.770
0.25	10.123	1993.837
0.3	10.062	1996.900
0.35	10.001	1999.960
0.4	9.94	2003.017
0.45	9.879	2006.071
0.5	9.818	2009.121
0.55	9.757	2012.167
0.6	9.696	2015.210
0.65	9.635	2018.249
0.7	9.574	2021.284
0.75	9.514	2024.316
0.8	9.453	2027.344
0.85	9.393	2030.367
0.9	9.332	2033.386
0.95	9.272	2036.401
1	9.212	2039.412

**Tabla 6.** Precio y volumen de producción (Caso 1: M2)

$\beta$	Precio	Volumen Total
0.05	14.533	1773.332397
0.1	14.301	1784.937012
0.15	14.066	1796.694458
0.2	13.828	1808.607666
0.25	13.586	1820.679932
0.3	13.342	1832.914429

0.35	13.094	1845.314575
0.4	12.842	1857.883545
0.45	12.587	1870.625000
0.5	12.329	1883.542236
0.55	12.067	1896.639404
0.6	11.802	1909.919922
0.65	11.532	1823.387573
0.7	11.259	1937.046638
0.75	10.982	1950.900879
0.8	10.701	1964.955078
0.85	10.416	1979.213135
0.9	10.126	1993.679443
0.95	9.833	2008.358643
1	9.535	2023.256104

En base a los resultados observamos que el precio en el modelo M3 es el mejor en comparación a los otros 2 modelos, pero no es viable por los pocos volúmenes de producción que fabricarían. El precio en el modelo M1 es mejor que en el modelo M2 para todo valor de beta (mejor en el sentido para los consumidores, no para las firmas) y el volumen total de producción es mayor en el modelo M1 que en el modelo M2 para todo valor de beta.

La Tabla 7 muestra el valor de la función de beneficio del modelo M1, la Tabla 8 del modelo M2 y la Tabla 9 del modelo M3.

**Tabla 7.** Beneficio de cada firma (Caso 1: M1)

Firma	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Beneficio					
0.05	3687.6741	2052.0483	1067.7798	1067.7798	700.2762	2670.8359
0.1	5651.8506	2023.729	1050.2708	1050.2708	691.1403	2628.1794
0.15	7622.957	1995.618	1032.9177	1032.9177	682.0723	2585.8525
0.2	9600.9902	1967.7152	1015.7205	1015.7205	673.0721	2543.856
0.25	11585.9482	1940.021	998.6791	998.6791	664.1398	2502.1912

0.3	13577.8252	1912.5382	981.7952	981.7952	655.2762	2460.8621
0.35	15576.6191	1885.265	965.0675	965.0675	646.4807	2419.8672
0.4	17582.3242	1858.2021	948.4963	948.4963	637.7533	2379.2078
0.45	19594.9375	1831.3512	932.0825	932.0825	629.0944	2338.8872
0.5	21614.4434	1804.7155	915.8284	915.8284	620.5056	2298.9136
0.55	23640.8574	1778.2839	899.7255	899.7255	611.9818	2259.2629
0.6	25674.1602	1752.0685	883.7824	883.7824	603.5279	2219.9629
0.65	27714.3438	1726.0659	867.9967	867.9967	595.1426	2181.0046
0.7	29761.17	1700.2767	852.36	852.36	586.82	2142.39
0.75	31815.34	1674.7	836.89	836.89	578.58	2104.12
0.8	33876.14	1649.34	821.58	821.58	570.4	2066.19
0.85	35943.8	1624.2	806.42	806.42	562.28	2028.62
0.9	38018.31	1588.25	791.42	791.42	554.24	1991.38
0.95	40099.66	1574.53	776.58	776.58	546.26	1954.5
1	42187.8	1550.03	761.9	761.9	538.36	1917.98

**Tabla 8.** Beneficio de cada firma (Caso 1: M2)

Firma	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Beneficio					
0.05	4451.9951	3340.9087	2134.8589	2134.8589	1379.1024	3831.3606
0.1	5767.6670	3220.6978	2049.8027	2049.8027	1332.2065	3675.3657
0.15	6996.9326	3101.1492	1965.3893	1965.3893	1285.5200	3520.6223
0.2	8135.5366	2982.3210	1881.6663	1881.6663	1239.0635	3367.2207
0.25	9179.0420	2864.2747	1798.6846	1798.6846	1192.8590	3215.2566
0.3	10122.8232	2747.0740	1716.4969	1716.4969	1146.9293	3064.8306
0.35	10962.0537	2630.7852	1635.1583	1635.1583	1101.2982	2916.0461
0.4	11691.6982	2515.4788	1554.7262	1554.7262	1055.9907	2769.0125
0.45	12306.5068	2401.2283	1475.2614	1475.2614	1011.0331	2623.8445
0.5	12800.9961	2288.1104	1396.8269	1396.8269	966.4529	2480.6614
0.55	13169.4463	2176.2058	1319.4890	1319.4890	922.2791	2339.5884
0.6	13405.8896	2065.5984	1243.3169	1243.3169	878.5416	2200.7563
0.65	13504.0859	1956.3772	1168.3829	1168.3829	835.2723	2064.3027
0.7	13457.5352	1848.6346	1094.7634	1094.7634	792.5044	1930.3710
0.75	13259.4297	1742.4683	1022.5380	1022.5380	750.2728	1799.1121
0.8	12902.6748	1637.9797	951.7899	951.7899	708.6143	1670.6863
0.85	12379.8477	1535.2762	882.6067	882.6067	667.5669	1545.2507

0.9	11683.1982	1434.4691	815.0796	815.0796	627.1710	1422.9857
0.95	10804.6211	1335.6766	749.3048	749.3048	587.4689	1304.0708
1	9735.6484	1239.0220	685.3831	685.3831	548.5051	1188.6959

**Tabla 9.** Beneficio de cada firma (Caso 1: M3)

Firma	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Beneficio					
0.05	3318.490	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.1	5422.966	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.15	7527.441	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.2	9631.916	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.25	11736.392	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.3	13840.867	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.35	15945.343	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.4	18049.818	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.45	20154.293	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.5	22258.769	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.55	24363.244	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.6	24363.244	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.65	28572.195	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.7	30676.670	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.75	32781.146	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.8	34885.621	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.85	36990.096	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.9	39094.572	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
0.95	41199.047	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369
1	43303.522	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	1960.5369

Los resultados numéricos para el Caso 1 muestran que para grados inferiores de la socialización  $0 < \beta \leq 0.75$ , los productores privados ganan más en el equilibrio de Cournot que en el CCVE, pero para  $0.8 \leq \beta \leq 1$ , ganan más en el equilibrio CCVE que en el Cournot. En la Tabla 10 mostramos esto más detallado.

**Tabla 10.** Utilidades netas de firmas privadas en ambos modelos.

beta	M1			M2		
$\beta$	Beneficio de la firma $i=0$	La utilidad neta total para las firmas privadas	Precio	Beneficio de la firma $i=0$	La utilidad neta total para las firmas privadas	Precio
0.05	3687.6741	7558.72	10.369	4451.9951	<b><u>12821.0895</u></b>	14.533
0.1	5651.8506	7443.5903	10.307	5767.667	<b><u>12327.8754</u></b>	14.301
0.15	7622.957	7329.3782	10.246	6996.9326	<b><u>11838.0701</u></b>	14.066
0.2	9600.9902	7216.0843	10.185	8135.5366	<b><u>11351.9378</u></b>	13.828
0.25	11585.9482	7103.7102	10.123	9179.042	<b><u>10869.7595</u></b>	13.586
0.3	13577.8252	6992.2669	10.062	10122.8232	<b><u>10391.8277</u></b>	13.342
0.35	15576.6191	6881.7479	10.001	10962.0537	<b><u>9918.4461</u></b>	13.094
0.4	17582.3242	6772.1558	9.94	11691.6982	<b><u>9449.9344</u></b>	12.842
0.45	19594.9375	6663.4978	9.879	12306.5068	<b><u>8986.6287</u></b>	12.587
0.5	21614.4434	6555.7915	9.818	12800.9961	<b><u>8528.8785</u></b>	12.329
0.55	23640.8574	6448.9796	9.757	13169.4463	<b><u>8077.0513</u></b>	12.067
0.6	25674.1602	6343.1241	9.696	13405.8896	<b><u>7631.5301</u></b>	11.802
0.65	27714.3438	6238.2065	9.635	13504.0859	<b><u>7192.718</u></b>	11.532
0.7	29761.17	6134.2067	9.574	13457.5352	<b><u>6761.0368</u></b>	11.259
0.75	31815.34	6031.18	9.514	13259.4297	<b><u>6336.9292</u></b>	10.982
0.8	33876.14	<b><u>5929.09</u></b>	9.453	12902.6748	5920.8601	10.701
0.85	35943.8	<b><u>5827.94</u></b>	9.393	12379.8477	5513.3072	10.416
0.9	38018.31	<b><u>5716.71</u></b>	9.332	11683.1982	5114.785	10.126
0.95	40099.66	<b><u>5628.45</u></b>	9.272	10804.6211	4725.8259	9.833
1	42187.8	<b><u>5530.17</u></b>	9.212	9735.6484	4346.9892	9.535

Estos resultados numéricos también nos proporcionaron ideas para poder determinar un posible valor “óptimo” para el parámetro  $\beta$ . Asumimos que un gobierno socialmente responsable (municipalidad) decide entregar subsidios a los productores con el objetivo de inclinarlos para cambiar el equilibrio de Cournot por CCVE, o a los consumidores, con un objetivo de compensarlos el precio de equilibrio más alto que en el equilibrio de Cournot. Nuestros experimentos realizados muestran que los subsidios para productores son inferiores que los subsidios para los consumidores. De ahí

podemos proponer la elección de un valor óptimo para el parámetro  $\beta$  tal que el gobierno no debe pagar a nadie, ni a los productores privados ni a los consumidores ya que desaparece la diferencia en los precios para dos tipos de equilibrio. Para el Caso 1, entonces,  $0.75 < \beta_{\text{óptimo}} < 0.80$ .

Consideramos

Caso 2: dentro de este caso la firma  $i = 5$ , la cual es más fuerte que la firma  $i = 0$ , es pública y las firmas  $i = 0, 1, \dots, 4$  son privadas.

El análisis de este caso se realizara de manera similar a la utilizada en el caso 1.

En la Tabla 11 presentamos los coeficientes de influencia para todas las firmas en el caso M1, en donde los coeficientes de influencia están dados por la fórmula que se añade en su tabla.

**Tabla 11.** Coeficientes de influencia de las firmas (Caso 2: M1)

Firma:	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Coeficientes de influencia $w_i = -\frac{v_i}{p'(G)}, i = 0, 1, \dots, 5$					
0.05	0.1897855	0.1933535	0.184668	0.184668	0.1719445	0.22352
0.1	0.186809	0.1903485	0.1817385	0.1817385	0.1691605	0.223128
0.15	0.1838255	0.1873355	0.1788025	0.1788025	0.1663715	0.222735
0.2	0.180834	0.184314	0.17586	0.17586	0.164078	0.22234
0.25	0.1777835	0.181284	0.1729105	0.1729105	0.16078	0.2219435
0.3	0.174829	0.1782465	0.1699555	0.1699555	0.1579785	0.221546
0.35	0.171816	0.1752015	0.1669945	0.1669945	0.155173	0.221147
0.4	8.4398	0.1721485	0.1640275	0.1640275	0.152364	0.2207465
0.45	0.165769	0.1690875	0.1610545	0.1610545	0.149551	0.2203445
0.5	0.162736	0.16602	0.1580765	0.1580765	0.146735	0.2199415

0.55	0.1596965	0.1629445	0.1550935	0.1550935	0.143916	0.219537
0.6	0.1566505	0.1598625	0.1521045	0.1521045	0.1410935	0.219131
0.65	0.1535985	0.156773	0.149111	0.149111	0.138268	0.2187235
0.7	0.15054	0.18677	0.1461125	0.1461125	0.13544	0.2183145
0.75	0.1474775	0.150575	0.14311	0.14311	0.1326105	0.217905
0.8	0.1444085	0.147466	0.140103	0.140103	0.129778	0.217494
0.85	0.141334	0.144351	0.1370915	0.1370915	0.126944	0.2170815
0.9	0.1382545	0.14123	0.1340765	0.1340765	0.124108	0.216668
0.95	0.1351705	0.138103	0.1310575	0.1310575	0.12127	0.216253
1	0.1320815	0.1349705	0.128035	0.128035	0.118431	0.2158375

En el modelo M2 los coeficiente de influencia son iguales a  $v_i = 0.02$  y en M2 son iguales a cero.

Continuamos a realizar el análisis sobre los volúmenes de producción. En la Tabla 12 mostramos los volúmenes de producción de cada firma en el modelo M1, en la Tabla 13 mostramos los volúmenes de producción de cada firma en el modelo M2.

**Tabla 12.** Volúmenes de producción de las firmas (Caso 2: M1)

Firma:	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Volúmenes de Producción					
0.05	348.971	400.337	254.554	254.554	141.100	585.279
0.1	344.510	395.521	250.652	250.652	139.297	610.496
0.15	340.022	390.674	246.728	246.728	137.488	635.830
0.2	335.505	385.793	242.784	242.784	135.674	661.279
0.25	330.961	380.880	238.819	238.819	133.855	686.844
0.3	326.390	375.935	234.833	234.833	132.030	712.525
0.35	321.790	370.957	230.826	230.826	130.200	738.319
0.4	317.163	365.945	226.798	226.798	128.365	764.228
0.45	312.508	360.901	222.750	222.750	126.525	790.250
0.5	307.826	355.824	218.681	218.681	124.680	816.385
0.55	303.115	350.714	214.592	214.592	122.830	842.632
0.6	298.377	345.571	210.482	210.482	120.975	868.990
0.65	293.612	340.395	206.352	206.352	119.116	895.459

0.7	288.818	335.185	202.202	202.202	117.253	922.038
0.75	283.997	329.942	198.032	198.032	115.385	948.727
0.8	279.149	324.666	193.842	193.842	113.513	975.524
0.85	274.273	319.357	189.632	189.632	111.637	1002.430
0.9	269.369	314.014	185.402	185.402	109.756	1029.442
0.95	264.438	308.638	181.153	181.153	107.872	1056.561
1	259.480	303.229	176.884	176.884	105.984	1083.784

**Tabla 13.** Volúmenes de producción de las firmas (Caso 2: M2)

Firma:	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Volúmenes de Producción					
0.05	310.956	338.353	254.183	254.183	162.888	457.527
0.1	302.700	329.546	246.844	246.844	158.885	509.781
0.15	294.289	320.575	239.368	239.368	154.807	563.014
0.2	285.719	311.434	231.750	231.750	150.652	617.255
0.25	276.986	302.118	223.987	223.987	146.417	672.533
0.3	268.084	292.623	216.074	216.074	142.101	728.876
0.35	259.008	282.942	208.007	208.007	137.701	786.317
0.4	249.754	273.071	199.782	199.782	133.214	844.887
0.45	240.317	263.005	191.393	191.393	128.638	904.621
0.5	230.690	252.736	182.835	182.835	123.971	965.554
0.55	220.868	242.259	174.104	174.104	119.209	1027.721
0.6	210.844	231.567	165.195	165.195	114.349	1091.161
0.65	200.614	220.655	156.101	156.101	109.388	1155.914
0.7	190.169	209.514	146.817	146.817	104.324	1222.020
0.75	179.504	198.138	137.337	137.337	99.154	1289.522
0.8	168.612	186.519	127.655	127.655	93.872	1358.465
0.85	157.484	174.649	117.763	117.763	88.477	1428.896
0.9	146.113	162.521	107.656	107.656	82.964	1500.863
0.95	134.492	150.125	97.326	97.326	77.329	1574.417
1	122.612	137.452	86.766	86.766	71.569	1649.612

En el modelo de competencia perfecta para cualquier  $0 < \beta \leq 1$  los volúmenes de producción son iguales a 348.427, 412.488, 238.741, 238.741, 127.496 y 685.676 respectivamente para las firmas 0,1,...,5.

Proseguimos con el precio y volumen total de producción. En la Tabla 14 mostramos los datos para el modelo M1. En la Tabla 15 mostramos los resultados para el modelo M2. En el modelo de competencia perfecta el precio tomo un valor de 8.969 y el volumen total de producción tomo un valor de 2051.572754.

**Tabla 14.** Precio y volumen de producción (Caso 2: M1)

$\beta$	Precio	Volumen Total
0.05	10.304	1984.798
0.1	10.177	1991.131
0.15	10.051	1997.473
0.2	9.924	2003.823
0.25	9.796	2010.181
0.3	9.669	2016.547
0.35	9.542	2022.920
0.4	9.414	2029.300
0.45	9.286	2035.687
0.5	9.158	2042.079
0.55	9.030	2048.477
0.6	8.902	2054.880
0.65	8.774	2061.289
0.7	8.646	2067.701
0.75	8.518	2074.118
0.8	8.389	2080.539
0.85	8.261	2086.962
0.9	8.132	2093.388
0.95	8.004	2099.817
1	7.875	2106.247

**Tabla 15.** Precio y volumen de producción (Caso 2:M2)

$\beta$	Precio	Volumen Total
0.05	14.438	1778.0887
0.1	14.108	1794.6004
0.15	13.772	1811.4217

0.2	13.429	1828.5614
0.25	13.079	1846.0286
0.3	12.723	1863.8325
0.35	12.360	1881.9832
0.4	11.990	1900.4910
0.45	11.613	1919.3670
0.5	11.228	1938.6206
0.55	10.835	1958.2649
0.6	10.434	1978.311
0.65	10.025	1998.773
0.7	9.607	2019.6614
0.75	9.180	2040.9912
0.8	8.744	2062.7771
0.85	8.299	2085.0324
0.9	7.845	2107.7734
0.95	7.380	2131.0161
1	6.904	2154.7768

La Tabla 16 se muestra el valor de la función de beneficio para el modelo M1, la Tabla 17 para el modelo M2 y la Tabla 18 para el modelo M3.

**Tabla 16.** Beneficio de cada firma (Caso 2: M1)

Firma	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Beneficio					
0.05	1680.0581	2022.1338	1049.2982	1049.2982	690.6359	4669.8491
0.1	1630.3153	1964.3805	1013.6921	1013.6921	672.0162	6639.5566
0.15	1581.2103	1907.3251	978.6318	978.6318	653.6234	8622.9883
0.2	1532.7505	1850.9764	944.1229	944.1229	635.4596	10620.1855
0.25	1484.9432	1795.3435	910.1707	910.1707	617.5267	12631.1924
0.3	1437.7982	1740.4375	876.7822	876.7822	599.8277	14656.0508
0.35	1391.3213	1686.2655	843.9614	843.9614	582.3640	16694.7988
0.4	1345.5210	1632.8379	811.7144	811.7144	565.1380	18747.4727
0.45	1300.4033	1580.1620	780.0455	780.0455	548.1513	20814.1094
0.5	1255.9767	1528.2474	748.9607	748.9607	531.4063	22894.7422
0.55	1212.2477	1477.1027	718.4644	718.4644	514.9047	24989.4063
0.6	1169.2227	1426.7352	688.5610	688.5610	498.6481	27098.1328
0.65	1126.9094	1377.1545	659.2559	659.2559	482.6387	29220.9492

0.7	1085.3142	1328.3682	630.5535	630.5535	466.8781	31357.8828
0.75	1044.4429	1280.3835	602.4576	602.4576	451.3679	33508.9609
0.8	1004.3020	1233.2085	574.9727	574.9727	436.1097	35674.2109
0.85	964.8978	1186.8508	548.1028	548.1028	421.1051	37853.6484
0.9	926.2355	1141.3171	521.8514	521.8514	406.3554	40047.3080
0.95	888.3216	1096.6152	496.2228	496.2228	391.8623	42255.1797
1	851.1606	1052.7509	471.2198	471.2198	377.6268	44477.3086

**Tabla 17.** Beneficio de cada firma (Caso 2: M2)

Firma	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Beneficio					
0.05	2900.803	3291.374	2099.789	2099.789	1359.784	5826.806
0.1	2748.815	3122.275	1980.293	1980.293	1293.774	7672.103
0.15	2598.183	2954.590	1862.155	1862.155	1228.214	9523.838
0.2	2449.066	2788.494	1745.519	1745.519	1163.168	11381.388
0.25	2301.633	2624.168	1630.535	1630.535	1098.699	13244.073
0.3	2156.067	2461.805	1517.365	1517.365	1034.879	15111.157
0.35	2012.560	2301.619	1406.180	1406.180	971.780	16981.836
0.4	1871.319	2143.830	1297.164	1297.164	909.485	18855.242
0.45	1732.564	1988.677	1190.512	1190.512	848.077	1732.564
0.5	1596.532	1836.415	1086.434	1086.434	787.648	22606.375
0.55	1463.474	1687.317	985.152	985.152	728.297	24481.971
0.6	1333.659	1541.672	886.904	886.904	670.126	26356.014
0.65	1207.376	1399.793	791.945	791.945	613.249	28227.205
0.7	1084.930	1262.012	700.546	700.546	557.784	30094.137
0.75	966.653	1128.685	612.998	612.998	503.861	966.653
0.8	852.895	1000.193	529.611	529.611	451.615	33808.996
0.85	744.034	876.943	450.716	450.716	401.194	35653.496
0.9	640.472	759.374	376.670	376.670	352.755	37486.852
0.95	542.643	647.952	307.853	307.853	306.467	39306.969
1	451.008	543.178	244.670	244.670	362.510	41111.602

**Tabla 18.** Beneficio de cada firma (Caso 2: M3)

Firma	0	1	2	3	4	5
$\beta$	Beneficio					
0.05	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	4065.0125
0.1	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	6169.4878
0.15	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	8273.964

0.2	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	10378.4385
0.25	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	12482.9141
0.3	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	14587.3896
0.35	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	16691.8652
0.4	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	18796.3418
0.45	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	20900.8184
0.5	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	23005.2930
0.55	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	25109.7695
0.6	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	27214.2461
0.65	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	29318.7207
0.7	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	31423.1973
0.75	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	33527.6719
0.8	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	35632.1484
0.85	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	37736.6250
0.9	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	39841.1016
0.95	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	41945.5781
1	1214.0155	1488.7826	712.4706	712.4706	507.9817	44050.0508

Los resultados numéricos para el Caso 1 muestran que para grados inferiores de la socialización  $0 < \beta \leq 0.70$ , los productores privados ganan más en el equilibrio de Cournot que en el CCVE, pero para  $0.75 \leq \beta \leq 1$ , ganan más en el equilibrio CCVE que en el Cournot. En la Tabla 19 mostramos esto más detallado.

**Tabla 19.** Utilidades netas de firmas privadas en ambos modelos

Beta	M1			M2		
$\beta$	Beneficio de la firma i=5	La utilidad neta total para las firmas privadas	Precio	Beneficio de la firma i=5	La utilidad neta total para las firmas privadas	Precio
0.05	585.279	6491.4242	10.304	457.527	<b><u>11751.539</u></b>	14.438
0.1	610.496	6294.0962	10.177	509.781	<b><u>11125.45</u></b>	14.108
0.15	635.83	6099.4224	10.051	563.014	<b><u>10505.297</u></b>	13.772
0.2	661.279	5907.4323	9.924	617.255	<b><u>9891.766</u></b>	13.429
0.25	686.844	5718.1548	9.796	672.533	<b><u>9285.57</u></b>	13.079

0.3	712.525	5531.6278	9.669	728.876	<b><u>8687.481</u></b>	12.723
0.35	738.319	5347.8736	9.542	786.317	<b><u>8098.319</u></b>	12.36
0.4	764.228	5166.9257	9.414	844.887	<b><u>7518.962</u></b>	11.99
0.45	790.25	4988.8076	9.286	904.621	<b><u>6950.342</u></b>	11.613
0.5	816.385	4813.5518	9.158	965.554	<b><u>6393.463</u></b>	11.228
0.55	842.632	4641.1839	9.03	1027.721	<b><u>5849.392</u></b>	10.835
0.6	868.99	4471.728	8.902	1091.161	<b><u>5319.265</u></b>	10.434
0.65	895.459	4305.2144	8.774	1155.914	<b><u>4804.308</u></b>	10.025
0.7	922.038	4141.6675	8.646	1222.02	<b><u>4305.818</u></b>	9.607
0.75	948.727	<b><u>3981.1095</u></b>	8.518	1289.522	3825.195	9.18
0.8	975.524	<b><u>3823.5656</u></b>	8.389	1358.465	3363.925	8.744
0.85	1002.43	<b><u>3669.0593</u></b>	8.261	1428.896	2923.603	8.299
0.9	1029.442	<b><u>3517.6108</u></b>	8.132	1500.863	2505.941	7.845
0.95	1056.561	<b><u>3369.2447</u></b>	8.004	1574.417	2112.768	7.38
1	1083.784	<b><u>3223.9779</u></b>	7.875	1649.612	1846.036	6.904

Para el Caso 2, entonces,  $0.70 < \beta_{optimo} < 0.75$  .

# Capítulo 7. Conclusiones y trabajo futuro

---

Consideramos un oligopolio mixto (con más de 2 productores) en un mercado de un bien homogéneo con la estructura especial del agente público. Recordamos que un oligopolio mixto cuenta con una compañía (agente) pública, la cual, en contraste a los agentes privados, maximiza no la función de su ganancia neta pero tan llamado bienestar doméstico social. Teoremas de existencia de equilibrios exteriores e interiores con variaciones conjeturadas (CVE por sus siglas en inglés) en tal modelo de oligopolio mixto han sido derivados en los trabajos previos por Nataliya I. Kalashnykova y sus coautores.

En nuestro modelo, el productor público combina en forma convexa las funciones de bienestar doméstico social y de la ganancia neta. Bajo suposiciones generales, demostramos la existencia y la unicidad del equilibrio exterior (definido por las conjeturas fijas de los agentes dadas en forma exógena), así como la existencia de por lo menos uno equilibrio interior (o bien, consistente), en los cuales las conjeturas (coeficientes de influencia) de los agentes se encuentran en el proceso de la búsqueda del equilibrio mismo. Finalmente, analizamos el comportamiento de ciertos parámetros del equilibrio interior (consistente) en dependencia del coeficiente de la combinación convexa de las funciones objetivos en la meta del agente público.

Para trabajos futuros consideraremos el modelo de oligopolio mixto con la función de la demanda pasiva  $G(p)$  discontinua. Estamos planeando dar análisis teórico para las ideas de elección de valor óptimo para el parámetro  $\beta$  en la función objetivo del agente público.

# Anexos. Código en Dev-C++

---

```
#include<stdio.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>

float Col_ai[10][1],Col_bi[10][1],Col_wi[10][1],Col_vi[10][1],Col_qi[10][1],Col_beneficio[10][1];
float beta,aux,aux2,aux3,aux4,aux5,aux6,aux7,aux10;
float Col_parametro[5][1],maximo,A[50];
float precio,aux_precio1,aux_precio2,aux_precio3,aux_precio4,aux_precio5,aux_q0;
float VolumenG,Volumen_MagnitudG,aux_beneficio,Razniza,aux_razniza;
int i,k,j,m,n,iteraciones;

main()
{
    for(k=0;k<=5;k++)
    {
        printf("Inserte a%d\n",k);scanf("%f",&Col_ai[k][1]); // escaneo las a
    }
    for(k=0;k<=5;k++)
    {
        printf("Inserte b%d\n",k);scanf("%f",&Col_bi[k][1]); // escaneo las b
    }
    for(k=0;k<=5;k++)
    {
```

```

    Col_wi[k][1]=0; Col_beneficio[k][1]=0; //asigno ceros a los elementos de las columnas
}
for(k=0;k<=5;k++)
{
    Col_vi[k][1]=0; // asigno ceros a los elementos de la columna de las v
}
iteraciones=0;
beta=0.05;
do
{
    precio=0,aux_precio1=0,aux_precio2=0,aux_precio3=0,aux_precio4=0,aux_precio5=0,aux_q0=0;
    do
    {
        aux=0,aux2=0,aux3=0,aux4=0,aux5=0,aux6=0,aux7=0,aux10=0;
        for(i=0;i<=5;i++)
        {
            Col_wi[i][1]=Col_vi[i][1];
        }
        for(j=1;j<=5;j++)
        {
            aux+= 1/(Col_ai[j][1]+Col_wi[j][1]);
        }
        Col_vi[0][1]= 1/(aux +50);
        aux2=(Col_wi[0][1]+Col_ai[0][1])/(Col_ai[0][1]+(1-beta)*(Col_wi[0][1]));
        //para sacar la v1

        aux3=(1/(Col_wi[0][1]+Col_ai[0][1]))+(1/(Col_wi[2][1]+Col_ai[2][1]))+(1/(Col_wi[3][1]+Col_ai[3][1]))
        )+(1/(Col_wi[4][1]+Col_ai[4][1]))+(1/(Col_wi[5][1]+Col_ai[5][1]));
    }
}

```

```
Col_vi[1][1]= 1/(((aux2*aux3) +50));
```

```
//para obtener la v2
```

```
aux4=(1/(Col_wi[0][1]+Col_ai[0][1]))+(1/(Col_wi[1][1]+Col_ai[1][1]))+(1/(Col_wi[3][1]+Col_ai[3][1]))+(1/(Col_wi[4][1]+Col_ai[4][1]))+(1/(Col_wi[5][1]+Col_ai[5][1]));
```

```
Col_vi[2][1]= 1/(((aux2*aux4) +50));
```

```
//para obtener la v3
```

```
aux5=(1/(Col_wi[0][1]+Col_ai[0][1]))+(1/(Col_wi[1][1]+Col_ai[1][1]))+(1/(Col_wi[2][1]+Col_ai[2][1]))+(1/(Col_wi[4][1]+Col_ai[4][1]))+(1/(Col_wi[5][1]+Col_ai[5][1]));
```

```
Col_vi[3][1]= 1/(((aux2*aux5) +50));
```

```
// para obtener la v4
```

```
aux6=(1/(Col_wi[0][1]+Col_ai[0][1]))+(1/(Col_wi[1][1]+Col_ai[1][1]))+(1/(Col_wi[2][1]+Col_ai[2][1]))+(1/(Col_wi[3][1]+Col_ai[3][1]))+(1/(Col_wi[5][1]+Col_ai[5][1]));
```

```
Col_vi[4][1]= 1/(((aux2*aux6) +50));
```

```
//para obtener la v5
```

```
aux7=(1/(Col_wi[0][1]+Col_ai[0][1]))+(1/(Col_wi[1][1]+Col_ai[1][1]))+(1/(Col_wi[2][1]+Col_ai[2][1]))+(1/(Col_wi[3][1]+Col_ai[3][1]))+(1/(Col_wi[4][1]+Col_ai[4][1]));
```

```
Col_vi[5][1]= 1/(((aux2*aux7) +50));
```

```
for(k=0;k<=5;k++)
```

```
{
```

```
Col_parametro[k][1]=fabs(Col_vi[k][1]-Col_wi[k][1]);
```

```
}
```

```

for(i=0;i<=5;i++)
{
    A[i]=Col_parametro[i][1];
}
for(i=0;i<=n-1;i++)
{
    for(j=0;j<=n-1;j++)
    {
        if(A[j]>A[j+1])
        {
            aux10=A[j];
            A[j]=A[j+1];
            A[j+1]=aux10;
        }
    }
}
iteraciones++;
aux=0;aux10=0;

}while(A[5]>.0000001);

```

```

for(i=0;i<=5;i++)
{
    A[i]=0;
}

```

// vamos a sacar el valor de P

---

```

aux_precio1=Col_bi[0][1]/ (Col_ai[0][1] + ((1-beta)*(Col_vi[0][1]]));
aux_precio2=(Col_vi[0][1]+Col_ai[0][1])/ (Col_ai[0][1] + ((1-beta)*(Col_vi[0][1]]));

```

```

aux_precio3=1/(Col_ai[0][1] + ((1-beta)*(Col_vi[0][1]]));
for(i=1;i<=5;i++)
{
    aux_precio4+= Col_bi[i][1]/(Col_vi[i][1]+Col_ai[i][1]);
}
for(i=1;i<=5;i++)
{
    aux_precio5+= 1/(Col_vi[i][1]+Col_ai[i][1]);
}
precio= (aux_precio1 + (((aux_precio2*aux_precio4)+2500)) / ((aux_precio3) +
((aux_precio2*aux_precio5)+50)));
//_____
for(i=1;i<=5;i++)
{
    aux_q0+=(precio-Col_bi[i][1])/((Col_vi[i][1]+Col_ai[i][1]));
}
Col_qi[0][1]= (precio-Col_bi[0][1]+(beta*Col_vi[0][1]*aux_q0))/(Col_ai[0][1]+ (1-
beta)*(Col_vi[0][1]));

for(i=1;i<=5;i++)
{
    Col_qi[i][1]= (precio-Col_bi[i][1])/((Col_vi[i][1]+ Col_ai[i][1]));
}
for(i=0;i<=5;i++)
{
    VolumenG+=Col_qi[i][1];
}

Volumen_MagnitudG=(50-precio)/.02;

```

```
// Ahora vamos al paso 4
```

---

```
for(i=1;i<=5;i++)
{
    aux_beneficio+=Col_qi[i][1];
}

Col_beneficio[0][1]= beta*((50)*VolumenG -.01*VolumenG*VolumenG -
precio*aux_beneficio) -Col_bi[0][1]*Col_qi[0][1] - (.5*Col_ai[0][1]*Col_qi[0][1]*Col_qi[0][1]) + ((1-
beta)*precio*Col_qi[0][1]);

for(i=1;i<=5;i++)
{

    Col_beneficio[i][1]= precio*Col_qi[i][1] -Col_bi[i][1]*Col_qi[i][1]-
.5*Col_ai[i][1]*Col_qi[i][1]*Col_qi[i][1];
}

for(i=1;i<=5;i++)
{
    aux_rzniza+=Col_beneficio[i][1];
}

Rzniza= Col_beneficio[0][1]-aux_rzniza;

printf("Tabla de resultados para Beta=%.2f\n\n",beta);

printf(" vi      qi      precio  Beneficio  Rzniza\n\n");

for(i=0;i<=5;i++)
{

printf("%.8f      %.6f      %.3f      %.4f
%.2f\n",Col_vi[i][1],Col_qi[i][1],precio,Col_beneficio[i][1],Rzniza);

}

printf("Volumen de G con suma de qi=%.6f\n\n Volumen de Magnitud de G
=%.6f\n\n",VolumenG,Volumen_MagnitudG);

getch();

printf("_____
_\n\n");
```

```
    beta=beta+.05;
aux=0;iteraciones=0;VolumenG=0;aux_beneficio=0;Volumen_MagnitudG=0;aux_rzniza=0;aux_beneficio=0;

    aux_precio4=0;aux_q0=0;
    for(i=0;i<=5;i++)
    {
        Col_wi[i][5]=0;Col_vi[i][1]=0;Col_qi[i][1]=0;Col_beneficio[i][1]=0;Col_parametro[i][1]=0;
    }
    }while(beta<1.05);
}
```

```
// Final del código
```

---

---

# Referencias

---

- [1] Bowley AL. The mathematical groundwork of economics. Oxford University Press: Oxford; 1924.
- [2] Frisch R. Monopole, polypole – La notion de force en économie. Nationaløkonomisk Tidsskrift 1933; 71; 241 – 259 (reprinted: Monopoly, polypoly: The concept of force in the economy. International Economic Papers 1951; 1; 23 – 36.)
- [3] Merrill W, Schneider N. Government firms in oligopoly industries: A shortrun analysis. Quarterly Journal of Economics 1966; 80; 400 – 412.
- [4] Ruffin R.J. Cournot oligopoly and competitive behavior. *Rev. Econ. Studies*. 1971. V. 38(4). N. 116.
- [5] Harris RG, Wiens EG. Government enterprise: An instrument for the internal regulation of industry. Canadian Journal of Economics 1980; 13; 125 – 132.
- [6] Sherali H.D., Soyster A.L. and Murphy F.H. Stackelberg -Nash-Cournot equilibria: characterizations and computations. *Oper. Res.* 1983. V. 31. N.2

- [7] Novshek W. On the existence of Cournot equilibrium. *Rev. Econ. Studies*. 1985. V. 52(1). N. 168.
- [8] Bös D. Public enterprise economics. North-Holland: Amsterdam; 1986.
- [9] Vickers J, Yarrow G. Privatisation – an economic analysis. MIT Press: Cambridge, MA; 1988.
- [10] De Fraja G, Delbono F. Game theoretic models of mixed oligopoly. *Journal of Economic Surveys* 1990; 4; 1 – 17.
- [11] Bös D. Privatization: A theoretical treatment. Clarendon Press: Oxford; 1991.
- [12] Nett L. Mixed oligopoly with homogeneous goods. *Annals of Public and Cooperative Economics* 1993; 64; 367 – 393.
- [13] Bulavsky, V.A., Kalashnikov, V.V. One-Parametric Method to Study an Equilibrium. *Economics and Mathematical methods*. 1994. V. 30. N. 4. (In Russian).
- [14] Bulavsky, V.A., Kalashnikov, V.V. Equilibrium in Generalized Cournot and Stackelberg Models. *Economics and Mathematical methods*. 1995. V. 31. N. 3. (In Russian).
- [15] Bulavsky VA. Structure of demand and equilibrium in a model of oligopoly, *Economics and Mathematical Methods (Economika I*

Matematicheskie Metody) 1997; 33; 112 – 124 (*in Russian*).

- [16] Matsushima N, Matsumura T. Mixed oligopoly and spatial agglomeration. *Canadian Journal of Economics* 2003; 36; 62 – 87.
- [17] Kalashnikov, Vyacheslav, and Vitaly Kalashnikov (2005a), Conjectural variations equilibrium in a duopoly with a competitor maximizing domestic social surplus. Proceedings of the 2005 International Applied Business Research Conference (IABR'2005), Puerto Vallarta, México, March 14-18, 2005. –12 p.
- [18] Vyacheslav V. Kalashnikov, Vladimir A. Bulavsky, Nataliya I. Kalashnykova, Felipe J. Castillo Pérez. Mixed Oligopoly with Consistent Conjectures. – *European Journal of Operational Research*, 2011, Vol. 210, Issue 3, pp. 729– 735; ISSN 0377-2217
- [19] Liu Yuofei, Ni Y.X., Wu F.F., and Cai Bin (2007), Existence and uniqueness of consistent conjectural variations equilibrium in electricity markets, *International Journal of Electric Power and Energy Systems*, 29, pp. 455 – 461.