1974 X ANIVERSARIO 1984

ALGEBRA I

1er. SEMESTRE

PRIMERA PARTE

Preparatoria

Num.

15

ALGEBRA I

1er. SEMESTRE

ADVERTENCIAS:

Cumple con el plazo, otros necesitarán el mismo libro.
Cuida los libros, son tuyos y de la Universidad. Si DA-
ÑAS UN LIBRO tienes que sustituirlo.

ÁLGEBRA I.

Ing. Miguel Angel Garza Tamez
Ing. José Luis Guerra Torres.
Ing. Pablo Rivera Carrillo.
Ing. Martha E. Martínez de Arizpe.

ÍNDICE.

PÁG.

PREFACIO. I

CAP.

I TEORÍA DE CONJUNTOS.

Lección 1.

1-1 Concepto de conjunto.---------- 1
1-2 Notación de conjuntos.---------- 2
1-3 Cardinalidad. ---------- 5
1-4 Conjuntos finitos e infinitos.---------- 5
1-5 Conjunto vacío.---------- 6
1-6 Conjunto universal.---------- 6
1-7 Conjuntos equivalentes.---------- 7
1-8 Conjuntos iguales.---------- 8
1-9 Subconjuntos.---------- 8
Respuestas a la autoevaluación de la lección 1. 15

Lección 2.

1-10 Operaciones con conjuntos.---------- 17
Respuestas a la autoevaluación de la lección 2. 27

Lección 3.

1-11 Diagramas de Venn.---------- 29
1-12 Una aplicación de la teoría de conjuntos. 34
1-13 Álgebra de conjuntos.---------- 38
Respuestas a la autoevaluación de la lección 3. 44

CAP.		PÁG.
II	NÚMEROS REALES.	
	Lección 1.	
2-1	Evolución de los números reales (R) y la recta numérica.	49
2-2	Proposiciones abiertas y variables.-----------	61
2-3	Gráficas de conjuntos de soluciones.----------	64
	Respuestas a las autoevaluaciones de la lección 1.----------------------------------	69
	Lección 2.	
2-4	Los números reales; un sistema educativo.-----	71
2-5	Propiedades de la igualdad (=).---------------	77
2-6	Operaciones binarias.-------------------------	79
2-7	Propiedades aditiva y multiplicativa de la igualdad.---------------------------------	81
2-8	Axiomas de campo de los números reales (R).---	85
2-9	Los axiomas de orden.-------------------------	95
III	CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CAMPO.	
3-1	Inducción y deducción.------------------------	101
3-2	La ley de la razón suficiente.----------------	102
3-3	Razonamiento correcto.------------------------	106
3-4	Bases para la selección de axiomas.-----------	108
3-5	Consecuencias.--------------------------------	113
3-6	Aplicaciones de los axiomas de campo de los números reales.--------------------------	123
	Respuestas a las autoevaluaciones de la lección 2.----------------------------------	127
BIBLIOGRAFÍA.		129

P R E F A C I O.

Las matemáticas, tienen como objetivo general, la formación integral del educando como persona, dándole las bases intelectuales para conformar su criterio de modo que éste le permita desenvolverse en el medio técnico y social que le rodea, de acuerdo con su capacidad y personalidad.

El objetivo particular de los cursos de matemáticas que con este libro se inicial, es el de desarrollar la habilidad en el uso diario y constante del razonamiento lógico deductivo, y además de introducirlo al lenguaje simbólico que utilizan las ciencias, proveerlo de los conocimientos fundamentales de todo sistema matemático, así como de las técnicas para manipular sus elementos.

El álgebra constituye una de las bases esenciales de todo el anlísis avanzado. En ocasiones se le ha llamado "alfabeto y gramática" de las matemáticas. Además, el estudiante encontrará que el álgebra, en sí, es un instrumento muy útil. Problemas extremadamente complejos se resuelven con facilidad, una vez que se plantean en forma algebraica. De ahí que una sólida base de álgebra, sea absolutamente necesaria para estudiar cualquier ciencia o técnica.

En el primer capítulo, se estudian los principios generales de la teoría de conjuntos y sus aplicaciones. La idea de conjunto, es en sí, intuitiva y muy antigua; es muy importante su comprensión, pues sirve como base para unificar y dar cohesión al estudio de los siguientes capítulos, proporcionando un medio intuitivo y gráfico para la introducción de conceptos abstractos. No se espera la memorización de las ideas principales de la teoría, sino más bien la comprensión y aprecio de su importancia a medida que se vayan aplicando.

Tanto en su vida diaria como, sobre todo, en la investigación científica, el hombre debe muchos de sus éxitos o fracasos a la eficacia de sus argumentos. Cuando construye "buenos" argumentos, éstos le permiten conocer mejor la realidad, en tanto que un "mal" argumento, con frecuencia le hace más largo el camino hacia el conocimiento verdadero.

En los capítulos 2 y 3 se estudian los números reales y los axiomas de campo.

La mayor parte del álgebra elemental, está íntimamente ligada al sistema que forman los números reales. Los elementos de conjuntos y lógica de los capítulos anteriores, nos capacitan para estudiar la "estructura" del sistema de números reales y comprender las propiedades fundamentales que lo caracterizan como un campo, de manera que, sin prescindir de las habilidades desarrolladas en aritmética, las podemos generalizar y perfeccionar, comprendiendo que siempre son válidas. No se desconoce la importancia de la mecanización para agilizar las operaciones con los números, pero ésta, no nos enseña cómo aplicar las operaciones en los problemas de la vida real, es más bien, el conocimiento de la estructura de los números, lo que nos permitirá aplicarlos a situaciones reales por analogía.

Esperamos que el estudiante sienta el placer de explorar las matemáticas, al igual que muchos lo han sentido y le deseamos al igual que los demás, mucho éxito.

CAPÍTULO I

TEORIA DE CONJUNTOS.

(Parte I).

INTRODUCCION.

Es maravilloso ser el creador, el inventor, de un nuevo ingenio tal como la televisión. Es aún más interesante crear una nueva idea. Pocos matemáticos han originado una idea de tanto alcance como lo hizo el matemático alemán George Cantor, quien vivió de 1845 a 1918. Cuando tenía 30 años, enunció una nueva teoría matemática, la teoría de los conjuntos. Como sucede a menudo con las nuevas ideas y sus creadores, los colegas de Cantor se mofaron de él, quienes encontraron las ideas revolucionarias e inaceptables. Una de las críticas más fuertes a su teoría, se refirió al proceso matemático que él seguía para llegar al concepto de infinito.

El carácter moderado de Cantor, le impidió polemizar en apoyo de su teoría. La oposición llegó a ser tan fuerte que la Universidad de Berlín rechazó su contrato. Sin embargo, Cantor vivió para ver que los matemáticos de todo el mundo reconocían su trabajo.

El gran avance de las matemáticas en este siglo descansa en los fundamentos que estableció este genio brillante. En esta unidad I empezaremos a familiarizarnos con algunas de las ideas básicas y más sencillas de esta teoría. Un estudio completo de la teoría se llevará a cabo en cursos universitarios, cuando se haya alcanzado la madurez necesaria. A medida que se progresa en este campo de estudios se aprecia mejor la verdad de las palabras de Cantor: La esencia de las matemáticas radica en su libertad.

Al término de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

1.- Aplicar correctamente el lenguaje simbólico que se requiere en el trabajo y estudio de la teoría de conjuntos.

2.- Discriminar entre una lista de conjuntos dados aquellos que estén bien definidos.

3.- Transformar conjuntos en la forma descriptiva a la forma tabular y viceversa.

4.- Definir y determinar la cardinalidad de un conjunto.

5.- Definir conjunto finito e infinito; y distinguirlos a partir de una lista de conjuntos dados.

6.- Definir conjunto vacío y conjunto universal; y dar ejemplos que los muestren.

7.- Definir conjuntos equivalentes, conjuntos iguales, conjuntos diferentes, conjuntos ajenos y subconjuntos; y distinguirlos a partir de una lista de parejas de conjuntos dados.

8.- Enlistar todos los subconjuntos de un conjunto dado.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Para el objetivo 1 estudia la lista de símbolos adjuntos a la lección 1 del capítulo I para que puedas familiarizarte con los símbolos utilizados en la teoría de conjuntos y procura memorizarla. Con dichos símbolos lo que se persigue básicamente es representar las ideas con sencillez, claridad y exactitud. Resuelve también los problemas del 11 al 20 de la autoevaluación de la lección 1.

2.- Para el objetivo 2 estudia la sección 1-1 de tu texto, donde se aclara que, aunque no hay una definición formal de conjunto, se puede decir que un conjunto está bien definido, cuando se puede decidir qué elementos pertenecen a dicho conjunto y cuáles no.

3.- Para el objetivo 3 estudia la sección 1-2 de tu texto y resuelve los problemas del 21 al 30 de la autoevaluación de la lección 1. Un conjunto puede especificarse dando una lista de sus elementos (forma tabular) o bien, enunciando alguna propiedad común a todos sus elementos (forma descriptiva).

4.- Para el objetivo 4 estudia la sección 1-3 de tu texto y resuelve los problemas 61 y 62 de la autoevaluación de la lección 1. La cardinalidad de un conjunto está determinado por el número de elementos contenidos en ese conjunto.

5.- Para el objetivo 5 estudia la sección 1-4 de tu texto y resuelve los problemas del 71 al 80 de la autoevaluación de la lección 1.. Si los elementos de un conjunto pueden enlistarse del primero al último decimos que el conjunto es finito, de otro modo el conjunto es infinito.

6.- Para el objetivo 6 estudia las secciones 1-5 y 1-6 de tu texto. El conjunto que no tiene elementos es llamado conjunto vacío y se denota por $\emptyset$. Y el conjunto que consiste en la totalidad de los elementos bajo consideración en una discusión particular es llamado conjunto universal y se representa comúnmente mediante la letra U.

7.- Para el objetivo 7 y 8 estudia las secciones 1-7, 1-8 y 1-9 de tu texto y resuelve los problemas del 1 al 10, del 31 al 70 y del 81 al 90 de la autoevaluación de la lección 1. Se dice que dos conjuntos: son equivalentes si tienen la misma cardinalidad, dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos, son diferentes si tienen elementos que los distinguen, son ajenos si no tienen ningún elemento en común y se dice que un conjunto es un subconjunto de otro si cada elemento del primero es también elemento del segundo conjunto.

8.- Una vez que creas dominar tus objetivos comenta la unidad con tus compañeros más aventajados, para que entre todos tengan un mejor aprendizaje. Consulta tus dudas con tu maestro asesor:

9.- Como ritmo de trabajo te sugerimos el siguiente:

1er. día	Objetivos 1, 2 y 3
2o. día	Objetivos 4, 5 y 6
3er. día	Objetivos 7, 8
4o. día	Resolución del Laboratorio.

10.- Como requisito para tener derecho a presentar la unidad I, deberás entregar a tu maestro asesor, el laboratorio de esta unidad resuelto correctamente.

AUTOEVALUACIÓN.

1.- Conjuntos que tienen tantos elementos que el proceso de contarlos nunca llega a su fin.

0) Ajenos. 1) Finitos. 2) Equivalentes.
3) Infinitos.

2.- Conjunto que consta de la totalidad de los elementos considerados para determinada operación, es el conjunto:

0) Infinito. 1) Finitos. 2) Universal.
3) Vacío.

3.- Convierte el conjunto $\{x/x$ es entero par y $6 < x < 12\}$ a la forma tabular.

0) $\{6,8,10,12\}$ 1) $\{8,10\}$ 2) $\{2,4,14,16,18\}$
3) $\{2,4,6,8,10\}$

4.- Determina la cardinalidad del conjunto $\{1,2,4,5,6\}$

0) 1 1) 6 2) 4
3) 5

Escribe las siguientes afirmaciones usando la simbología adecuada.

5.- "x" no es elemento de B.

0) $x \neq B$ 1) $x \not\subset B$ 2) $x \nmid 6$
3) $x \notin B$

6.- "A" es subconjunto de B.

0) $A \neq B$ 1) $A \subset B$ 2) $A \supset B$
3) $A \in B$

Si $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{1,2,3\}$; $C = \{a,b,c\}$; decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

7.- $\{1,2,3\} \subset A$

0) Verdadera. 1) Falsa.

8.- $B \in A$

0) Verdadera. 1) Falsa.

9.- $B \not\subset A$

0) Verdadera. 1) Falsa.

Entre los pares de conjunto siguietes, determina cuáles son iguales o diferentes.

10.- $\{x/x$ es un entero y $2 < x < 6\}$ y $\{3,4,5\}$

0) Iguales. 1) Diferentes.

11.- $\{x/x$ es un entero y $0 < x < 5\}$ y $\{0,1,2,3,4,5\}$

0) Iguales. 1) Diferentes.

12.- $\{1,2,3,4,5...\}$ y $\{2,4,6,8,10...\}$

0) Iguales. 1) Diferentes.

Determina si los pares de conjuntos siguientes son equivalentes o no.

13.- $\{x/x$ es vocal del abecedario$\}$ y $\{0,1,2,3,4\}$

0) Equivalentes. 1) No equivalentes.

14.- $\{a,b,c\}$ y $\{x,y,z\}$

0) Equivalentes. 1) No equivalentes.

Determina si los siguientes conjuntos son finitos o infinitos.

15.- $\{0,1,2,3,4,5,6,...,99,100\}$

0) Finitos. 1) Infinitos.

16.- $\{x/x$ es un entero positivo y $x > 10\}$

0) Finitos. 1) Infinitos.

Determina si los siguientes conjuntos son ajenos o nó.

17.- $\{x,y,z\}$ y $\{a,b,c\}$

0) Ajenos. 1) No ajenos.

18.- $\{1,2,3\}$ y $\{3,4,5\}$

0) Ajenos. 1) No ajenos.

LISTA DE SÍMBOLOS:

$\in$	es elemento de
$\notin$	no es elemento de
$\mid$	tal que
N	conjunto de los números naturales
Z	conjunto de los números enteros
$>$	es mayor que
$<$	es menor que
$\not>$	no es mayor que
$\not<$	no es menor que
$=$	igual a
$\neq$	es diferente
#	cardinalidad de
Ø	conjunto vacío
U	conjunto universal
$\leftrightarrow$	es equivalente a
$\subset$	es subconjunto de
$\not\subset$	no es subconjunto de
$\cup$	unión
$\cap$	intersección
'	complemento
-	diferencia
x	producto cartesiano

TEORÍA DE CONJUNTOS.

LECCIÓN 1.

1-1 CONCEPTO DE CONJUNTO.

Como se hace con una nueva asignatura, empezaremos el estudio de las matemáticas discutiendo los términos técnicos - nuevos que debemos introducir. Nuestra intuición nos dice que cada uno de estos términos tendrá una definición, pero más tarde encontraremos que las posteriores definiciones se tendrán que apoyar en las primeras y esto nos puede llevar a un círculo vicioso, en el que no aclararemos la verdadera significación de los conceptos.

El único camino para evitar estas definiciones circulares en matemáticas o en otras asignaturas, es el de tomar un pequeño número de palabras como "indefinibles"; y todas las demás palabras matemáticas se definirán en función de ellas. No es fácil decidirse y escoger entre las palabras que se van a dejar como indefinibles o como definidas, y después definir éstas en función de las primeras. Como se puede escoger de muchas maneras, la elección la debemos hacer teniendo en cuenta principalmente la sencillez y la elegancia.

Para empezar vamos a introducir un término que satura todas las matemáticas; es el concepto de "conjunto".

Todos estamos acostumbrados a tratar con conjuntos, por ejemplo, escribimos usando un conjunto de letras llamado abecedario, efectuamos operaciones de conteo y medición usando un conjunto de números, participamos deportiva y socialmente en conjuntos llamados equipos o clubes, hablamos del conjunto de artículos de la Constitución Mexicana, del conjunto de estudiantes de la U.A.N.L., de colecciones de estampillas, etc.

sin embargo, el significado del término "conjunto" no es fácil de explicar o de entender.

Aunque intuitivamente podemos considerar un "conjunto" como una colección o agregado de objetos o ideas de cualquier especie, siempre y cuando éstos estén claros como para decidir si pertenecen o nó al conjunto; sin embargo, esta consideración es vaga y no se puede aceptar como una definición formal. Por lo tanto, el concepto de "conjunto" es una noción primitiva que no puede definirse empleando palabras más simples, o sea, "conjunto" es un término "indefinible".

1-2 NOTACIÓN DE CONJUNTOS.

Los objetos o ideas que forman un conjunto se denominan "elementos" del conjunto. Por ejemplo, todos los profesores de la preparatoria forman un conjunto, y un profesor de matemáticas de la misma es un elemento que pertenece a dicho conjunto. En cambio, un agricultor, la letra b y el número 3, no son elementos del conjunto de profesores de la preparatoria.

Para describir un conjunto, normalmente se emplean llaves a fin de encerrar los elementos pertenecientes a él, por ejemplo, un conjunto de cinco elementos formado por los números: 1,3,5,7 y 9, se escribe como:

$$\{1,3,5,7,9\}$$

(Los elementos de un conjunto son separados por comas y no se puede escribir un mismo elemento repetidas veces). Usualmente, los conjuntos son nombrados por medio de letras mayúsculas, de ésta manera el conjunto anterior puede ser escrito como:

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$

(Aquí la letra A está empleada como un nombre para el conjunto) En este conjunto, se puede ver que el número 5 es un elemento del conjunto A y este hecho se puede expresar como:

$$5 \in A$$

(El símbolo $\in$, se utiliza para expresar: "es elemento de", o bien, "pertenece a"). Por el contrario, se puede ver, también,

que el número 4 no es un elemento del conjunto A, entonces ésto se expresa así:

$$4 \notin A$$

(Es costumbre en matemáticas poner una línea oblicua "/" tachando un símbolo, para indicar lo opuesto o la negación del significado del símbolo).

Observación 1. Los símbolos " $\in$" y "$\notin$" son usados únicamente para expresar la relación que hay de un elemento a un conjunto; y no la relación de un conjunto a un elemento, o entre dos conjuntos, o entre dos elementos.

Un conjunto puede determinarse de dos formas distintas: una sería enumerando o enlistando todos sus elementos, a esta forma se le llama "tabular" o "por extensión", o bien, enunciando alguna propiedad que deban de tener todos y cada uno de los elementos del conjunto dado, a esta forma se le llama "descriptiva" o "por comprensión"; en esta forma se emplea una letra minúscula, (no importa que letra se utilice) que por lo general es "x" y que representa un elemento cualquiera del conjunto, para enunciar la propiedad de todos los elementos del conjunto.

Ejemplos:

Si B es el conjunto formado por las vocales del abecedario, entonces:

$B = \{a,e,i,o,u\}$ —— forma tabular
$B = \{x|x \text{ es vocal del abecedario}\}$ ——forma descriptiva

Este conjunto B expresado en forma descriptiva, se lee como: "B es el conjunto formado por equis, tal que, equis es vocal del abecedario". Téngase en cuenta que la barra vertical, - "|", cuando está entre llaves, se lee: "tal que" o "tales que".

Si C es el conjunto formado por los números enteros mayores que 3 y menores que 8, entonces:

$C = \{4,5,6,7\}$ —— forma tabular
$C = \{x|x \text{ es entero y } 3<x<8\}$ —— forma descriptiva

Los símbolos $<$ y $>$ significan, respectivamente, "es menor que" y "es mayor que". Así, el conjunto consiste en todos los números enteros mayores que 3 ($x > 3$) y menores que 8 ($x < 8$).

Observación 2. Las llaves simbolizan un conjunto y lo que encerramos con ellas son sus elementos o una descripción de ellos.

En matemáticas generalmente se trabaja con conjuntos de números. Hay varios conjuntos que ya conoces y que tienen un símbolo especial para ser representados. Así:

N : es el conjunto de los números enteros positivos (números naturales). $N = \{1,2,3,4,5,6,7,...\}$

Z : es el conjunto de los números enteros (los negativos cero y los positivos).
$Z = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$

(En estos conjuntos, los tres puntos significan que los conjuntos contienen más elementos que aquellos que se han enlistado. Estos tres puntos son un signo para todos los elementos que no han sido incluidos, pero que podemos enlistar ya que es posible encontrar un patrón y con él conocer los elementos que son omitidos).

Ahora podemos definir mucho más conjuntos que antes de una manera simplificada. Por ejemplo, si D es el conjunto de números naturales menores que 100; este conjunto se puede obtener en la forma descriptiva a partir del conjunto N con una condición: ser menor que 100. Se puede simplificar la representación utilizando símbolos matemáticos, así:

$$D = \{x \in N \mid x < 100\}$$

Y si ahora, E es el conjunto de los números enteros mayores que -5, entonces E se puede simbolizar en la forma descriptiva como:

$$E = \{x \in Z \mid x > -5\}$$

Observación 3. Los conjuntos expresados en forma descriptiva, algunas veces, nos evita escribir conjuntos que poseen una gran cantidad de elementos.

1-3 CARDINALIDAD.

El número de elementos contenidos en un conjunto determinan la "cardinalidad" del conjunto.

En el caso del conjunto $A = \{1,3,5,7,9\}$ su cardinalidad será 5 y la expresamos así:

$$\#(A) = 5$$

que se lee: "la cardinalidad del conjunto A es igual a 5".

En el conjunto D, donde $D = \{x \in N \mid x < 100\}$, la cardinalidad será 99 y la expresamos como :

$$\#(D) = 99$$

1-4 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS.

Los conjuntos pueden ser "finitos o infinitos". Los conjuntos A, B, C y D enumerados anteriormente tienen una propiedad común: todos son conjuntos finitos. El término "conjunto finito" debe definirse muy cuidadosamente, aunque en nuestro caso resulta suficiente decir que un conjunto es finito si sus elementos pueden enlistarse del primero al último, es decir, si el proceso de contar los diferentes elementos del conjunto puede acabar, (o sea, si su cardinalidad es cero o bien un número natural).

Un conjunto que no es finito se dice que es infinito. Los conjuntos

$$F = \{0,1,2,3,4,5...\}$$
$$G = \{x \in N \mid x \text{ es par}\}$$
$$H = \{5,10,15,20,25...\}$$

son ejemplos de conjuntos infinitos.

1-5 CONJUNTO VACIO.

De gran utilidad en las operaciones con conjuntos es el concepto de "conjunto vacío".

El conjunto "vacío" o "nulo" es el conjunto para el cual ningún elemento satisface la condición dada, por lo tanto, carece de elementos y se representa por el símbolo $\emptyset$, o bien, { }. Los conjuntos

$$I = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 2 < x < 3\}$$
$$J = \{x \mid x \text{ es una persona viviente mayor de 200 años}\}$$
$$K = \{ x \in \mathbb{N} \mid x < 1 \}$$

son ejemplos de conjuntos vacíos o nulos.

Observación 4. La cardinalidad de $\emptyset$ es cero, o sea que $\#(\emptyset) = 0$, por lo tanto, el conjunto vacío es un conjunto finito.

Observación 5. Conviene aclarar que los símbolos $\{0\}$ y $\{\emptyset\}$, no representan al conjunto vacío. El conjunto $\{0\}$ contiene un elemento, el número cero. El conjunto $\{\emptyset\}$ tiene también un elemento que es el conjunto vacío: es un conjunto de conjuntos.

1-6 CONJUNTO UNIVERSAL.

El "conjunto universal" es el conjunto que consiste en la totalidad de los elementos considerados para determinada operación, asunto, cuestión o especie a la que se esté haciendo referencia.

Así, el conjunto de los números enteros formará el conjunto universal cuando se discute acerca de los números impares; el conjunto de todas las letras del abecedario formará el conjunto universal cuando se discute acerca de las vocales; y la

población mundial será el conjunto universal para cualquier relación humana que se produzca.

Usualmente se reserva la letra "U" para representar el conjunto universal.

Observación 6. Es importante establecer desde un principio de la discución el conjunto universal, para eliminar posibles dudas en la definición de conjuntos.

1-7 CONJUNTOS EQUIVALENTES.

Si dos conjuntos poseen la misma cardinalidad, se dice que son "conjuntos equivalentes", ya que tienen el mismo número de elementos y puede establecerse entre ambos una correspondencia de uno a uno o biunívoca. O sea que, si A y B son dos conjuntos y $\#(A) = \#(B)$, entonces este hecho puede expresar como:

$$A \leftrightarrow B$$

(El símbolo " $\leftrightarrow$ ", se utiliza para expresar la relación de equivalencia entre dos conjuntos).

Así los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{a,e,i,o,u\}$ son equivalentes ($A \leftrightarrow B$), ya que se puede establecer la correspondencia buinívoca:

1	$\leftrightarrow$	a		3	$\leftrightarrow$	a		
3	$\leftrightarrow$	e		5	$\leftrightarrow$	e		
5	$\leftrightarrow$	i	ó	7	$\leftrightarrow$	i		etc.
7	$\leftrightarrow$	o		9	$\leftrightarrow$	o		
9	$\leftrightarrow$	u		1	$\leftrightarrow$	u		

Por lo tanto, se dice que dos conjuntos están en "correspondencia buinívoca" o de uno a uno, cuando a cada elemento de uno de los conjuntos le corresponde un elemento del otro conjunto y ningún elemento de cualquiera de los dos conjuntos deja de tener su elemento correspondiente.

1-8 CONJUNTOS IGUALES.

Se dice que el conjunto A es "igual" al conjunto B si ambos contienen exactamente los mismos elementos. Se denota la igualdad de los conjuntos A y B por:

$$A = B$$

Por ejemplo, si $L = \{1,2,3.4\}$ y $M = \{2,1,4,3\}$, entonces $L = M$, es decir, $\{1,2,3,4\} = \{2,1,4,3\}$

ya que ambos conjuntos tienen los mismos elementos. Por lo tanto, de acuerdo a la definición, el orden en que se enumeran o enlistan o describen los elementos no es importante.

Observación 7. Es muy importante hacer notar la diferencia entre conjuntos equivalentes y conjuntos iguales; dos conjuntos son equivalentes cuando tienen la misma cardinalidad - aunque sus elementos sean diferentes, mientras que dos conjuntos iguales siempre son también equivalentes, pues teniendo los mismos elementos tendrán siempre la misma cardinalidad.

Cuando dos conjuntos no son iguales, o sea que, tienen - elementos que los distinguen, entonces se dice que los conjuntos son "diferentes" ($A \neq B$). Por ejemplo, los conjuntos $\{a,b,c,d\}$ y $\{c,d,e,f\}$ son diferentes.

Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes, o sea que, difieren en todo, entonces se dice son conjuntos "ajenos" o "disjuntos". Por ejemplo, los conjuntos $\{x,y,z\}$ y $\{1,2,3\}$ son ajenos o disjuntos.

1-9 SUBCONJUNTOS.

Veamos estos dos conjuntos

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Se observa que cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B (o sea que no hay elemento de A que no esté en B); entonces se dice que "A es un subconjunto de B". Se expresa esta relación escribiendo

$$A \subset B$$

que también se puede leer como: "A está contenido en B".

Así pues, $A \subset B$, si sólo si, $x \in A$ implica que $x \in B$.

Por ejemplo, si

$$P = \{x \in N \mid x < 7\}$$
$$Q = \{2,4,6\}$$
$$R = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Entonces se puede afirmar que $Q \subset P$, ya que todo elemento de Q pertenece también a P. Y que también, $R \subset P$, pues cada - elemento que pertenece a R pertenece también a P. (Obsérvese en particular que $R=P$. De la misma manera se puede mostrar que todo conjunto es un subconjunto de sí mismo).

Con el concepto anterior de subconjunto se puede dar de otra manera la definición de igualdad de dos conjuntos: "dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$. si y solo si, $A \subset B$ y $B \subset A$".

Por otra parte, si el conjunto A no es un subconjunto del conjunto B, es decir, si $A \not\subset B$, entonces esto implica que existe por lo menos un elemento del conjunto A que no es elemento del conjunto B. Por ejemplo, si $S = \{1,3,5\}$ y $T= \{0,1,2,3,4\}$ entonces se cumple que $S \not\subset T$, ya que $5 \in S$ y $5 \notin T$.

Observación 8. Los símbolos "$\subset$" y "$\not\subset$" son usados únicamente para expresar la relación entre dos conjuntos.

Observación 9. Todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo, $A \subset A$.

Observación 10. Todo conjunto A es un subconjunto del conjunto universal U, $A \subset U$.

Observación 11. El conjunto vacío $\emptyset$, se considera un subconjunto de cualquier conjunto A, $\emptyset \subset A$.

Entonces, si quisiéramos hacer una lista de todos los subconjuntos de un conjunto, por ejemplo de $V = \{1,2,3\}$, estos resultan ser: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$ y $\emptyset$. A partir de lo anterior se puede observar que hay ocho subconjuntos en V.

Del mismo modo, se puede mostrar que el conjunto vacío tiene un subconjunto (él mismo), un conjunto con un elemento tiene dos subconjuntos, un conjunto con dos elementos tiene cuatro subconjuntos, etc., o sea que, el patrón general es: un conjunto de "n" elementos tiene "2^n" subconjuntos para cualquier número natural "n"; de esta forma, un conjunto que tiene seis elementos tiene 2^6, o sea, 64 subconjuntos.

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Definir los siguientes conceptos:

1) Cardinalidad.
2) Conjunto finito.
3) Conjunto infinito.
4) Conjunto vacío o nulo.
5) Conjunto universal.
6) Conjuntos equivalentes.
7) Conjuntos iguales.
8) Conjuntos diferentes.
9) Conjuntos ajenos.
10) Subconjuntos.

Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:

11) "x" es elemento de "A"
12) "A" no es subconjunto de "B"
13) "B" es equivalente a "C"
14) "y" no pertenece a "D"
15) "E" está contenido en "F"
16) "G" no está contenido en "H"
17) "z" pertenece a "C"
18) "D" es un subconjunto de "E"
19) El conjunto vacío
20) "w" no es elemento de "B"

Enunciar verbalmente cada uno de los sig. conjuntos:

21) {x/x habita en E.U.A.}
22) {x/x es un número par positivo}
23) {x/x es una mujer soltera mayor de 30 años}
24) $\emptyset$
25) {x/x votó por el Lic. Miguel de la Madrid Hurtado para Presidente de México}

Escribir en forma tabular cada uno de los sig. conjuntos:

26) {x/x es una letra del abecedario}
27) {x/x es una letra de la palabra "Parangaricutirimícuaro"}
28) $\{x \in N \ / \ x < 1\}$
29) $\{x \in N \ / \ x > 2\}$
30) $\{x \in N \ / \ 10 < x < 20\}$

Decir entre las afirmaciones siguientes cuáles son verdaderas o falsas, si:

$A = \{0,1,2,3,4\}$
$B = \{5,6,7,8,9\}$
$C = \{1,2,3,4\}$
$D = \{5,6,7\}$
U = {x/x es un número}

31) $5 \in A$	37) $4 \notin B$	43) $7 \in C$	49) $6 \notin D$	55) $C \in A$
32) $0 \in \emptyset$	38) $A \in \emptyset$	44) $A \leftrightarrow B$	50) $B \leftrightarrow C$	56) $C \leftrightarrow D$
33) $B \neq D$	39) $A = B$	45) $A \neq C$	51) $A \subset C$	57) $D \subset B$
34) $A \not\subset C$	40) $B \not\subset D$	46) $A \subset \emptyset$	52) $\emptyset \in U$	58) $5 \notin B$
35) $D \in B$	41) $\emptyset \in A$	47) $C \subset A$	53) $\emptyset \subset A$	59) $\emptyset \subset \emptyset$
36) $0 \notin C$	42) $A \subset B$	48) $A \subset U$	54) $U \subset D$	60) $\emptyset \subset U$

61) Los conjuntos A y C tienen la misma cardinalidad.
62) Los conjuntos B y D no tienen la misma cardinalidad.
63) Los conjuntos A y B son ajenos.
64) Los conjuntos B y D son ajenos.
65) En el conjunto A hay exactamente 24 subconjuntos.
66) En el conjunto C hay exactamente 16 subconjuntos.
67) En el conjunto D hay exactamente 6 subconjuntos.
68) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
69) Todo subconjunto de un conjunto infinito es infinito.
70) Dados dos conjuntos E y F, si $E \subset F$ y $F \subset E$ entonces E=F.

Decir si cada uno de los sig. conjuntos son finitos o infinitos:

71) $\{0,1,2,3,4,...\}$
72) $\{1,2,3,4,5,...,1000\}$
73) $\{x \in N$ /x es impar$\}$
74) $\{x \in N \ /x < 5\}$
75) $\{x \in N \ /3<x<4\}$
76) $\{x \in Z \ /x<5\}$

77) $\{x \in Z \ /-3<x<3\}$
78) $\{x \in N$ /x es un multiplo de 5$\}$
79) {x/x es un habitante de la Tierra}
80) {x/x es una fracción y $0<x<1$}

Decir si cada una de las sig. parejas de conjuntos son equivalentes o nó:

81) {Juan, José, Pedro, Raúl} y {Irma, Leticia, Rosa, María}
82) $\{2,3,5,7\}$ y $\{x,y,z\}$
83) $\{x \in N$ /x es par$\}$ y $\{x \in N$ /x es impar$\}$
84) $\{x \in N \ /x>10\}$ y $\{x \in N/x<10\}$
85) $\{x \in Z \ /x+1=1\}$ y $\emptyset$

Entre los pares de conjuntos siguientes, decir cuales son iguales o diferentes y especificar aquellos conjuntos que son ajenos o disjuntos.

86) $\{2,4,6\}$ y $\{1,3,5\}$
87) $\{1,3,5,7,9\}$ y $\{x \in N$/x es impar y $x<10\}$
88) $\{x \in N \ /x+1=1\}$ y $\emptyset$
89) $\{a,b,c,d\}$ y $\{d,c,b,a\}$
90) $\{x \in N \ /4<x<9\}$ y $\{4,5,6,7,8,9\}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

11) $x \in A$
12) $A \not\subset B$
13) $B \leftrightarrow C$
14) $y \notin D$
15) $E \subset F$
16) $G \not\subset H$
17) $z \in C$
18) $D \subset E$
19) $\emptyset$
20) $w \notin B$
21) El conjunto de los habitantes de E. U. A.
22) El conjunto de los números pares positivos.
23) El conjunto de las mujeres solteras mayores de 30 años.
24) El conjunto vacío.
25) El conjunto de las personas que votaron por Lic. Miguel de la Madrid para Presidente.
26) $\{a,b,c,d,\ldots x,y,z\}$
27) $\{a,c,g,i,m,n,o,p,r,t,u\}$
28) $\{\ \}$
29) $\{3,4,5,6,7,\ldots\}$
30) $\{11,12,13,\ldots 18,19\}$
31) Falsa.
32) Falsa.
33) Verdadera.
34) Verdadera.
35) Falsa.
36) Verdadera.
37) Verdadera.
38) Falsa.
39) Falsa.
40) Verdadera.
41) Falsa.
42) Falsa.
43) Falsa.
44) Verdadera.
45) Verdadera.
46) Falsa.
47) Verdadera.
61) Falsa.
62) Verdadera.
63) Verdadera.
64) Falsa.
65) Falsa.
66) Verdadera.
67) Falsa.
68) Verdadera.
69) Falsa.
70) Verdadera.
71) Infinito.
72) Finito.
73) Infinito.
74) Finito.
75) Finito.
76) Infinito.
77) Finito.

48) Verdadera.
49) Falsa.
50) Falsa.
51) Falsa.
52) Falsa.
53) Verdadera.
54) Falsa.
55) Falsa.
56) Falsa.
57) Verdadera.
58) Falsa.
59) Verdadera.
60) Verdadera.

78) Infinito.
79) Finito.
80) Infinito.
81) Equivalentes.
82) No equivalentes.
83) Equivalentes.
84) No equivalentes.
85) No equivalentes.
86) Diferentes y ajenos.
87) Iguales.
88) Iguales.
89) Iguales.
90) Diferentes.

1er. SEMESTRE. ÁLGEBRA I. UNIDAD II.

TEORÍA DE CONJUNTOS.
(Parte II)

INTRODUCCIÓN:

Al estudiar la Teoría de Conjuntos estamos capacitándonos para comprender mejor otras ramas de las matemáticas, principalmente porque los conjuntos son utilizados directamente en muchas disciplinas: sus conceptos y operaciones son tomados para llegar a otros, para simplificar la notación y para facilitar la comprensión y las demostraciones.

Además, los conceptos matemáticos de la Teoría de Conjuntos aparecen de una manera sencilla y fácil de comprender. Así, por ejemplo, al entender el concepto de "igualdad matemática" podremos después trabajar más profunda y fácilmente con ecuaciones.

Lo que vamos a estudiar, es la manera mediante la cual, los matemáticos hablan y escriben sobre ideas que todos hemos manejado intuitivamente. No se trata pues, de comprender altas abstracciones, sino de aprender a utilizar una notación matemática para escribir sobre cosas que, de hecho, estamos acostumbrados a usar.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1.- Definir los siguientes conceptos: unión, intersección, complemento, diferencia y producto cartesiano de conjuntos.

48) Verdadera.
49) Falsa.
50) Falsa.
51) Falsa.
52) Falsa.
53) Verdadera.
54) Falsa.
55) Falsa.
56) Falsa.
57) Verdadera.
58) Falsa.
59) Verdadera.
60) Verdadera.

78) Infinito.
79) Finito.
80) Infinito.
81) Equivalentes.
82) No equivalentes.
83) Equivalentes.
84) No equivalentes.
85) No equivalentes.
86) Diferentes y ajenos.
87) Iguales.
88) Iguales.
89) Iguales.
90) Diferentes.

TEORÍA DE CONJUNTOS.
(Parte II)

INTRODUCCIÓN:

Al estudiar la Teoría de Conjuntos estamos capacitándonos para comprender mejor otras ramas de las matemáticas, principalmente porque los conjuntos son utilizados directamente en muchas disciplinas: sus conceptos y operaciones son tomados para llegar a otros, para simplificar la notación y para facilitar la comprensión y las demostraciones.

Además, los conceptos matemáticos de la Teoría de Conjuntos aparecen de una manera sencilla y fácil de comprender. Así, por ejemplo, al entender el concepto de "igualdad matemática" podremos después trabajar más profunda y fácilmente con ecuaciones.

Lo que vamos a estudiar, es la manera mediante la cual, los matemáticos hablan y escriben sobre ideas que todos hemos manejado intuitivamente. No se trata pues, de comprender altas abstracciones, sino de aprender a utilizar una notación matemática para escribir sobre cosas que, de hecho, estamos acostumbrados a usar.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1.- Definir los siguientes conceptos: unión, intersección, complemento, diferencia y producto cartesiano de conjuntos.

2.- Resolver ejercicios que impliquen: unión, intersección, complemento, diferencia y producto cartesiano de conjuntos.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1.- Para los objetivos de esta unidad estudia la sección 1-10 de tu texto y resuelve los ejercicios de la autoevaluación de la lección 2. Hemos visto que se pueden obtener nuevos conjuntos a partir de un conjunto dado, llamados subconjuntos. En esta sección vamos a considerar operaciones, por medio de las cuales, dos conjuntos dan lugar a nuevos conjuntos. Las operaciones a estudiar son: unión, intersección, complemento, diferencia y producto cartesiano, denotados por: $A \cup B$, $A \cap B$, A', $A-B$ y $A \times B$, respectivamente.

2.- Si ya lograste resolver los objetivos satisfactoriamente, ahora repasa toda la unidad con tus compañeros más aventajados lo cual te servirá para reafirmar tus conocimientos y a la vez te indicará qué es lo que debes volver a estudiar.

3.- El requisito para presentar esta unidad consiste en resolver total y correctamente el laboratorio de la unidad y entregarla a tu maestro asesor.

AUTOEVALUACIÓN:

1.- La intersección entre A y B se puede definir como:

0) $\{x/x \in A$ ó $x \in B\}$ 1) $\{x/x \in A$ y $x \notin B\}$
2) $\{x/x \in A$ y $x \in B\}$ 3) $\{x/x \in U , x \notin A\}$

Si $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B=\{4,5,6,7,8\}$ y $C=\{2,3,5,6,9\}$; encuentra los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos: (problemas 2 al 8).

2.- $B \cup C$

0) $\{2,3,4,6,9\}$ 1) $\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$
2) $\{5,6\}$ 3) $\{2,3,4,5,6\}$

3.- $A \cap B$

0) $\{1,2,3,6,7,8\}$ 1) $\{4,5\}$
2) ϕ 3) $\{1,2,3\}$

4.- $B-C$

0) $\{2,3,7,8,9\}$ 1) ϕ
2) $\{4,7,8\}$ 3) $\{2,3,9\}$

5.- $A \cap (B \cup C)$

0) $\{2,3,4,5\}$ 1) $\{1,6,7,8,9\}$
2) ϕ 3) $\{4,5\}$

6.- $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

0) $\{7,8,9\}$ 1) $\{1,2,3,4,5,6\}$
2) ϕ 3) $\{3,4,5,6,7,8\}$

7.- B'

0) $\{6,7,8,9\}$ 1) $\{1,4,7,8\}$
2) ϕ 3) $\{1,2,3,9\}$

8.- $(B \cap C)'$

0) $\{2,4,6,8\}$ 1) $\{1,3,5,7,9\}$
2) $\{1,2,3,4,7,8,9\}$ 3) $\{1,2,5,6,9\}$

9.- $(A' \cup C)'$

0) {2,3,5,6,7,8,9} 1) {3,5,6,7}
2) {1,4} 3) {2,3,8,9}

10.- $(A \cup B)' \cap (C-B)$

0) {2,3,9} 1) {9}
2) {4,7,8} 3) ∅

Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

11.- $A \cap B \neq B \cap A$

0) Falsa. 1) Verdadera.

12.- $A \cup A = \emptyset$

0) Falsa. 1) Verdadera.

13.- $(A-B) \subset A$

0) Falsa. 1) Verdadera.

14.- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

0) Falsa. 1) Verdadera.

15.- $A \cup \emptyset = \emptyset$

0) Falsa. 1) Verdadera.

16.- $A-C = C-A$

0) Falsa. 1) Verdadera.

17.- Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$

0) Falsa. 1) Verdadera.

18.- Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $A-B = A$

0) Falsa. 1) Verdadera.

TEORÍA DE CONJUNTOS.

LECCIÓN 2.

1-10 OPERACIONES CON CONJUNTOS.

Una "operación" es una regla por la cual uno o más objetos son usados para obtener otro objeto(no necesariamente diferente). En aritmética se suma, resta y multiplica, es decir, a cada par de objetos "x" y "y" se le asigna un objeto "x + y" llamado suma de "x" y "y", un objeto "x-y" llamado diferencia de "x" y "y" y un objeto "xy" llamado producto de "x" y "y". Estas asignaciones se llaman operaciones de adición, sustracción y multiplicación, en donde los objetos son números. Los objetos que se examinarán en las operaciones de esta lección son conjuntos.

En esta lección se van a definir las operaciones de -- "unión", "intersección", "complemento", "diferencia" y "producto cartesiano" de conjuntos, es decir, se van asignar o hacer corresponder nuevos conjuntos a pares de conjuntos A y B. Se observará que estas operaciones entre conjuntos se comportan de manera un tanto semejante a la de las anteriores operaciones con números.

"UNIÓN"

La "unión" de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen al conjunto A, o bien, al conjunto B, o a ambos. La unión de los conjuntos A y B, se expresa como:

$$A \cup B$$

que se lee "A unión B". Esta definición escrita es notación descriptiva es:

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ó } x \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{c,d,e,f\}$. Entonces $A \cup B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, o a B, o a ambos conjuntos: se empieza enumerando todos los elementos de A:

$$\{a,b,c,d\}$$

y se continúa agregando a la lista aquellos elementos de B que no estuvieran ya enlistados, o sea:

$$\{a,b,c,d,e,f\} = A \cup B$$

Cada elemento de este nuevo conjunto pertenece, ya sea a A, o B o a ambos.

Observación 12. Se verifica, inmediatamente a partir de la definición, las siguientes propiedades:

i) $A \subset (A \cup B)$ y $B \subset (A \cup B)$
ii) $A \cup B = B \cup A$
iii) $A \cup A = A$
iv) $A \cup \emptyset = A$
v) $A \cup U = U$

"INTERSECCIÓN"

La "intersección" de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que son comunes al conjunto A y al conjunto B, esto es, de quellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B. La intersección de los conjuntos A y B, se expresa como

$$A \cap B$$

que se lee "A intersección B". Esta definición escrita en notación descriptiva es:

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$$

El signo lingüístico clave en esta definición es "y". Para determinar el conjunto de todos los elementos necesitamos que al mismo tiempo pertenezcan al conjunto A y al conjunto B.

Por ejemplo, si $A= \{a,b,c,d\}$ y $B= \{c,d,e,f\}$. Entonces $A \cap B$ es el conjunto de todos los elementos comunes para ambos

conjuntos, o sea,

$$A \cap B = \{c,d\}$$

Observación 13. Si dos conjuntos A y B no tienen elementos comunes, es decir, si A y B son conjuntos ajenos o disjuntos, entonces la intersección de A y B es el conjunto vacío, o sea $A \cap B = \emptyset$.

Observación 14. Se verifican, inmediatamente a partir de la definición las siguientes propiedades:

vi) $(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$
vii) $A \cap B = B \cap A$
viii) $A \cap A = A$
ix) $A \cap \emptyset = \emptyset$
x) $A \cap U = A$

Se puede complicar un poco la cosa. Si $C= \{p,q,r,s\}$, $D= \{r,s,t,u\}$ y $E= \{s,u,v,w\}$, aplicando los conceptos anteriores, se puede formar:

$$C \cup D = \{p,q,r,s,t,u\}$$

y entonces el conjunto $C \cup D$ se puede intersectar con el conjunto E, así:

$$(C \cup D) \cap E = \{s,u\}$$

Por lo tanto, $(C \cup D) \cap E$ es el conjunto de las letras que están en $C \cup D$ y que también están en E. (Nótese que los paréntesis indican que operación se debe realizar primero).

Otro ejemplo con los conjuntos C, D y E del ejemplo anterior, es:

$$C \cap (D \cup E) = \{r,s\}$$

o sea, es el conjunto de las letras que estan en C y en $D \cup E$. Mientras que:

$$(C \cap D) \cup E= \{r,s,u,v,w\}$$

es el conjunto de letras que están en $C \cap D$, o en E, o en ambos. Nótese que $C \cap (D \cup E) \neq (C \cap D) \cup E$.

Observación 15. De acuerdo a los conceptos anteriores de unión e intersección, se verifican las siguientes propiedades:

$$\text{xi)}\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$\text{xii)}\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$\text{xiii)}\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$\text{xiv)}\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

"COMPLEMENTO"

El "complemento" de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir, es el conjunto formado por los elementos que le faltan al conjunto A para completar el conjunto universal U. El complemento de un conjunto A en relación con el conjunto universal, se expresa como

$$A'$$

que se lee "complemento de A" o "A complemento". En la notación descriptiva de conjuntos, el complemento de un conjunto A esta dado por:

$$A' = \{x/x \notin A\}$$

El conjunto A' contiene a todos los elementos de U que no están en A. El conjunto A' depende no solamente del conjunto A sino también del conjunto que se ha escogido como U; si U cambia, A' también cambia. Se debe comprender que, por definición, el complemento de un conjunto es también un conjunto.

Por ejemplo, suponiendo que el conjunto universal sea el abecedario, es decir, U= $\{a,b,c,d,e,f,\dots,y,z\}$ y dado A= $\{a,b,c,d\}$, entonces

$$A' = \{e,f,g,h,i,\dots,y,z\}$$

O si se supone que el conjunto universal es el de los números naturales, U= $\{1,2,3,\dots\}$ y F= $\{2,4,6,\dots\}$, o sea los números pares, entonces

$F' = \{1,3,5,\dots\}$. que son los impares

Observación 16. Las propiedades que se establecen en seguida, resultan directamente de la definición, del complemento de un conjunto:

$$\text{xv)}\ (A')' = A$$
$$\text{xvi)}\ A \cup A' = U$$
$$\text{xvii)}\ A \cap A' = \emptyset$$
$$\text{xviii)}\ U' = \emptyset \ \text{ y } \emptyset' = U$$
$$\text{xix)}\ (A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$\text{xx)}\ (A \cap B)' = A' \cup B'$$

"DIFERENÇIA"

La "diferencia" de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A, pero no al conjunto B, es decir, es el conjunto resultante de quitar del conjunto A los elementos que tenga el conjunto B. Se expresa la diferencia de A y B por

$$A - B$$

que se lee "A diferencia B" o simpliemente "A menos B". La diferencia de A y B se puede también definir en notación descriptiva como

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \notin B\}$$

Por ejemplo, si A = $\{a,b,c,d\}$ y B= $\{c,d,e,f\}$, entonces A - B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B, o sea,

$$A - B = \{a,b\}$$

es decir, al conjunto A se le han quitado los elementos de B. Mientras que,

$$B - A = \{e,f\}$$

o sea, B-A es el conjunto de elementos que pertenecen a B, pero no a A.

Observación 18. Con el concepto anterior de diferencia de conjuntos se puede dar de otra manera la definición de "complemento de A": el complemento del conjunto A es la diferencia del conjunto universal U y del conjunto A, o sea,

$$A' = U - A$$

Observación 19. Los conjuntos (A-B), (B-A) y ($A \cap B$) son mutuamente conjuntos ajenos, es decir, la intersección de dos cualesquiera de ellos es conjunto vacío.

Observación 20. Las propiedades que se establecen en seguida, resultan directamente de la definición de la diferencia de conjuntos:

xxi) $(A-B) \subset A$
xxii) $A - A = \emptyset$
xxiii) $A - \emptyset = A$
xxiv) $\emptyset - A = \emptyset$
xxv) $A - U = \emptyset$
xxvi) $A - B = A \cap B'$
xxvii) $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$
xxviii) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

Observación 21. Las operaciones de unión, intersección, complemento y diferencia tienen otras propiedades sencillas cuando uno de los conjuntos de que se trata está contenido en el otro, o sea que, un conjunto es un subconjunto de otro. A partir de las definiciones anteriores, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

xxix) Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$
xxx) Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$
xxxi) Si $A \subset B$, entonces $B' \subset A'$
xxxii) Si $A \subset B$, entonces $A - B = \emptyset$
xxxiii) Si $A \subset B$, entonces $A \cup (B-A) = B$

"PRODUCTO CARTESIANO"

Intuitivamente, una "pareja ordenada" consta de dos elementos, por ejemplo, "x" y "y"; que en el par de designan como primero y segundo elementos respectivamente. Un par ordenado se simboliza por

$$(x,y)$$

Dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b) son iguales si, y solamensi, $x=a$ y $y=b$.

Por ejemplo, las parejas ordenadas (1,2) y (2,1) son diferentes. El conjunto {1,2} no es una pareja ordenada, pues los elementos 1 y 2 no se distinguen. Y puede haber parejas ordenadas que tengan iguales el primero y el segundo elementos tales como, (0,0), (3,3) y (4,4).

Dados dos conjuntos A y B, se le llama "producto cartesiano" de A y B al conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) con $x \in A$ y $y \in B$. Se expresa como

$$A \times B$$

que se lee "A por B". En notación descriptiva se define por

$$A \times B = \{(x,y)/x \in A,\ y \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{4,5\}$; entonces el producto conjunto es

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

(nótese que, $BxA = \{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$)

En el caso del producto cartesiano de un conjunto A por sí mismo se usa la notación $AxA= A^2$, o sea, si $C= \{6,7,8\}$, entonces, $C^2= \{(6,6),(6,7),(6,8),(7,6),(7,7),(7,8),(8,6),(8,7),(8,8)\}$

Observación 22. Si el conjunto A tiene "n" elementos y el conjunto B tiene "m" elementos, entonces el conjunto producto AxB tiene nxm elementos. Si uno de los conjuntos A o B es vacío, entonces AxB es vacío. Y, en fin, si uno de los dos

A o B es infinito y el otro no es vacío, entonces AxB es infinito.

Observación 23. El producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo, es decir, que

$$A \times B \neq B \times A$$

a menos que A = B, o que uno de los factores sea vacío.

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Definir los siguientes conjuntos usando la notación descriptiva:

1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) A' 4) $A - B$ 5) $A \times B$

Si: $A = \{0,1,2,3\}$
$B = \{4,5,6\}$
$C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (conjunto universal)

encuentra los elementos de cada uno de los sig. conjuntos:

6) $A \cup B$
7) $A \cup C$
8) $B \cup C$
9) $A \cap B$
10) $A \cap C$
11) $B \cap C$
12) A'
13) B'
14) C'
15) $(B')'$
16) $A - B$
17) $C - B$
18) $A - C$
19) $C - C$
20) $(A \cup B)'$
21) $(B \cap C)'$
22) $(A - B)'$
23) $A \cup B'$
24) $A' \cup C$
25) $B' \cap C$
26) $A \cap (B \cap C)$
27) $(A \cap C) \cup B$
28) $(A \cap B) \cup C'$
29) $A - (C - B)$
30) $A \cap (C - B)$
31) $(A \cup C) \cap (B \cap C)$
32) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$
33) $(A \cup B) \cup (B \cup C)$
34) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
35) $(A' - B)'$
36) $A' - (B \cap C)$
37) $(A' \cap B') - C$
38) $(A \cap B') \cup C'$
39) $(A \cap B)' \cap C'$
40) $(A' \cap B) \cup C'$
41) $A' \cap (B \cup C)$
42) $A \cup (B \cup C)'$
43) $A' \cup (B' \cap C')$
44) $(A-C)' \cap B'$
45) $C' \cap (A' \cup B')$
46) $(A - B)' \cap (C - B)$
47) $(A - B) \cup (C - B)'$
48) $C' \cap (A \cup B)'$
49) $(A \cap B') \cap U$
50) $(A' \cup B) \cap \emptyset$
51) $A \cup (B' \cap C')$
52) $A \times B$
53) $B \times A$
54) A^2
55) B^2

Decide si cada una de las siguientes afirmaciones son ve daderas o falsas: (Se puede considerar que los conjuntos A, B C y U son los mismos que para los problemas anteriores).

56) $(A \cup B) \subset A$
57) $(B \cap C) \subset C$
58) $(A - C) \subset (A \cup C)$
59) $(C - A) \subset A'$
60) $A \cup B = B \cup A$
61) $A \cup A = U$
62) $A \cup \emptyset = \emptyset$
63) $A \cup U = A$
64) $A \cap A = A$
65) $A \cap \emptyset = A$
66) $A \cap A' = U$
67) $\emptyset' = U$
68) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
69) $(A \cap B)' = A' \cap B'$
70) $U - A = A'$
71) $A-B = A \cap B'$
72) $(A')' = \emptyset$
73) $A \cap C = A - C$
74) $B - B = \emptyset$
75) $A - C = C - A$
76) $A' - C' = C - A$
77) $A \cup B = (A' \cap B')'$
78) $A - C' = A \cap C$
79) $(A - B) \cap B = \emptyset$
80) $(A \cap B) \cup B = B$
81) $(C - A) \cap (A - C) = \emptyset$
82) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
83) $A \cup (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap C$
84) $A - (B \cap C) = (A-B) \cap (A-C)$
85) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
86) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
87) Si $B \subset C$, entonces $B \cup C = C$
88) Si $B \subset C$, entonces $B \cap C = C$
89) Si $B \subset C$, entonces $B' \subset C'$
90) Si $B \subset C$, entonces $B-C=B$
91) Si $B \subset C$, entonces $B \cup (C-B)=C$
92) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A \subset B'$
93) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A' \cap B=B$
94) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A \cup B'=B$
95) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A - B=\emptyset$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

1) $\{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$
2) $\{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$
3) $\{x/x \notin A\}$
4) $\{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$
5) $\{(x,y)/x \in A \text{ y } y \in B\}$
6) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$
7) $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
8) $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
9) $\emptyset$
10) $\{1,2,3\}$
11) $\{4,5,6\}$
12) $\{4,5,6,7,8,9\}$
13) $\{0,1,2,3,7,8,9\}$
14) $\{0,8,9\}$
15) $\{4,5,6\}$
16) $\{0,1,2,3\}$
17) $\{1,2,3,7\}$
18) $\{0\}$
19) $\emptyset$
20) $\{7,8,9\}$
21) $\{0,1,2,3,7,8,9\}$
22) $\{4,5,6,7,8,9\}$
23) $\{0,1,2,3,7,8,9\}$
24) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
25) $\{1,2,3,7\}$
26) $\emptyset$
27) $\{1,2,3,4,5,6\}$
28) $\{0,8,9\}$
29) $\{0\}$
30) $\{1,2,3\}$
31) $\{4,5,6\}$
32) $\emptyset$
33) $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$
34) $\{1,2,3,4,5,6\}$
35) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$

36) {7,8,9}
37) {8,9}
38) {0,1,2,3,8,9}
39) {0,8,9}
40) {0,4,5,6,8,9}
41) {4,5,6,7}
42) {0,1,2,3,8,9}
43) {0,4,5,6,7,8,9}
44) {1,2,3,7,8,9}
45) {0,8,9}
46) {7}
47) {0,1,2,3,4,5,6,8,9}
48) {8,9}
49) {0,1,2,3}
50) ∅
51) {0,1,2,3,8,9}
52) {(0,4),(0,5),(0,6),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5)(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)}
53) {(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(6,0),(6,1),(6,2),(6,3)}
54) {(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)}
55) {(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}
56) F
57) V
58) V
59) V
60) V
61) F
62) F
63) F
64) V
65) F
66) F
67) V
68) V
69) F
70) V
71) V
72) F
73) F
74) V
75) F
76) V
77) V
78) V
79) V
80) V
81) V
82) F
83) F
84) F
85) V
86) V
87) V
88) F
89) F
90) F
91) V
92) V
93) V
94) V
95) F

TEORIA DE CONJUNTOS.
(PARTE III)

INTRODUCCION:

La Matemática es un cuerpo altamente organizado de conocimiento que usa el concepto de conjunto como uno de sus vehículos primarios para organización. El conjunto es una abstracción que permite una sistematización más eficiente y presentación de los elementos en un curso de matemáticas.

El concepto de conjunto es de alguna manera intuitivo. Generalmente, un conjunto se considera como una colección de objetos o cosas llamados elementos. Se puede pensar de un conjunto como un club de reglas de membrecía y miembros que se - llaman elementos. Por ejemplo, para pertenecer al conjunto de números mayores que cuatro, un elemento debe primero ser un número y segundo, tener un valor o magnitud mayor que cuatro. El tamaño de cualquier conjunto se determina por el número de miembros o elementos. El conjunto de los números naturales menores que cuatro tiene exactamente tres miembros y se llama un conjunto finito. El conjunto de los números naturales más grandes que cuatro tiene una lista indefinida de miembros y se dice que es infinita en tamaño.

Las varias relaciones que pueden existir entre los conjuntos pueden ilustrarse por medio de un diagrama de Venn. El diagrama de Venn es un esquema que representa a los conjuntos como sub-regiones de una región geométrica. Fue empleado por el Logista inglés John Venn (1834-1883) y se usarán en esta - unidad III para ayudar al entendimiento conceptual de las operaciones con conjuntos. Con el objeto de emplear el diagrama

36) {7,8,9}
37) {8,9}
38) {0,1,2,3,8,9}
39) {0,8,9}
40) {0,4,5,6,8,9}
41) {4,5,6,7}
42) {0,1,2,3,8,9}
43) {0,4,5,6,7,8,9}
44) {1,2,3,7,8,9}
45) {0,8,9}
46) {7}
47) {0,1,2,3,4,5,6,8,9}
48) {8,9}
49) {0,1,2,3}
50) ∅
51) {0,1,2,3,8,9}
52) {(0,4),(0,5),(0,6),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5)(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)}
53) {(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(6,0),(6,1),(6,2),(6,3)}
54) {(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0),(2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)}
55) {(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}
56) F
57) V
58) V
59) V
60) V
61) F
62) F
63) F
64) V
65) F
66) F
67) V
68) V
69) F
70) V
71) V
72) F
73) F
74) V
75) F
76) V
77) V
78) V
79) V
80) V
81) V
82) F
83) F
84) F
85) V
86) V
87) V
88) F
89) F
90) F
91) V
92) V
93) V
94) V
95) F

TEORIA DE CONJUNTOS.

(PARTE III)

INTRODUCCION:

La Matemática es un cuerpo altamente organizado de conocimiento que usa el concepto de conjunto como uno de sus vehículos primarios para organización. El conjunto es una abstracción que permite una sistematización más eficiente y presentación de los elementos en un curso de matemáticas.

El concepto de conjunto es de alguna manera intuitivo. Generalmente, un conjunto se considera como una colección de objetos o cosas llamados elementos. Se puede pensar de un conjunto como un club de reglas de membrecía y miembros que se - llaman elementos. Por ejemplo, para pertenecer al conjunto de números mayores que cuatro, un elemento debe primero ser un número y segundo, tener un valor o magnitud mayor que cuatro. El tamaño de cualquier conjunto se determina por el número de miembros o elementos. El conjunto de los números naturales menores que cuatro tiene exactamente tres miembros y se llama un conjunto finito. El conjunto de los números naturales más grandes que cuatro tiene una lista indefinida de miembros y se dice que es infinita en tamaño.

Las varias relaciones que pueden existir entre los conjuntos pueden ilustrarse por medio de un diagrama de Venn. El diagrama de Venn es un esquema que representa a los conjuntos como sub-regiones de una región geométrica. Fue empleado por el Logista inglés John Venn (1834-1883) y se usarán en esta - unidad III para ayudar al entendimiento conceptual de las operaciones con conjuntos. Con el objeto de emplear el diagrama de Venn, se introducirá la idea de Conjunto Universal.

El conjunto universal es el que consiste de la totalidad de las cosas bajo una discusión.

Por ejemplo, si se desea discutir acerca de los números, un conjunto universal apropiado sería el conjunto de todos - los números. La elección de un conjunto universal dependerá de una investigación particular. Dos investigaciones diferentes pueden tener conjuntos universales completamente diferentes. Venn representó al conjunto universal como el interior de un rectángulo. Puesto que todos los otros conjuntos bajo discusión serán subconjuntos del conjunto universal, éstos pueden ser representados como subregiones de ese rectángulo.

Al término de esta unidad III, el estudiante estará en - condición de:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1.- Usar los diagramas de Venn para graficar las operaciones entre conjuntos y resolver problemas que los involucren.

2.- Aplicar las leyes del Álgebra de Conjuntos en la demostración de la veracidad de enunciados dados.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1.- Para el objetivo 1 estudia los diagramas de Venn ilustrados en las secciones 1-11 y 1-12 de tu texto y resuelve los problemas de la Autoevaluación de la lección III.

Por medio de gráficas o diagramas, un conjunto puede ser representado en forma muy clara y objetiva por medio de los llamados diagramas de Venn, que son líneas cerradas dentro de las cuales se pueden anotar los elementos que integran al conjunto o bien, pueden indicarse únicamente por la letra mayúscula que lo representa. Las ilustraciones de este tipo se llaman así en honor del lógico inglés, John Venn (1834-1883).

2.- Estudia la sección 1-13 de tu texto y resuelve la autoevaluación. El álgebra de conjuntos no puede ser la misma que el álgebra de los números y las cantidades. Sin embargo, vale la pena observar que cualesquier teoremas que se deduzcan usando solamente aquellas propiedades que tienen ambas álgebras en común, serán teoremas ciertos en - cualquiera de los dos sistemas. El empleo del álgebra de conjuntos en la matemática superior es muy amplio. (Objetivo 2).

3.- Si ya lograste resolver los objetivos satisfactoriamente, ahora repasa toda la unidad con tus compañeros más aventajados lo cual te servirá para reafirmar tus conocimientos y a la vez te indicará qué es lo que debes volver a estudiar.

4.- El requisito para presentar esta unidad consiste en resolver totalmente el laboratorio de la unidad y entregarlo a tu asesor.

AUTOEVALUACIÓN:

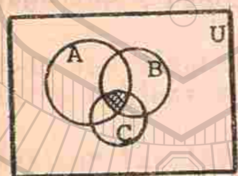
Determina la representación de las sig. zonas sombreadas:

1.- 

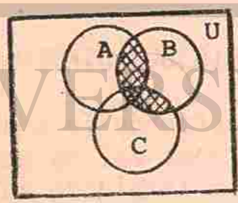
0) $B-A$ 1) $A \cap B$ 2) $A-B$ 3) B'

2.- 

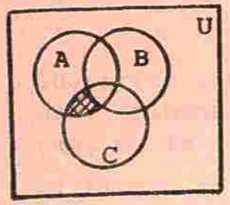
0) $A \cap B'$ 1) $A'-B'$ 2) $A' \cup B'$ 3) $A' \cap B'$

3.- 

0) $(A \cup B) \cup C$ 1) $(A \cap B) \cap C$ 2) $(A \cup B) \cap C$ 3) $(A \cap B) \cup C$

4.- 

0) $(A \cup B) \cap C$ 1) $B \cap (A \cup C)$ 2) $A \cup (B \cap C)$ 3) $B \cup (A \cap C)$

5.- 

0) $(A \cap C) \cap B'$ 1) $(B \cap C)-A'$ 2) $(A \cup C) \cup B'$ 3) $A' \cap (B \cup C)$

En un grupo de la escuela, se investigó a 50 alumnos al terminar el semestre y se encontró que:

15 reprobaron Química.
18 reprobaron Física.
18 reprobaron Matemáticas.
6 reprobaron Química y Física.
7 reprobaron Física y Matemáticas.
5 reprobaron Química y Matemáticas.
y 2 reprobaron las tres materias.

¿Cuántos de estos alumnos reprobaron?:

6.- Química y ninguna de las otras dos:

0) 4 1) 5 2) 6 3) 7

7.- Ninguna de las tres materias:

0) 10 1) 15 2) 17 3) 9

8.- Únicamente Física.

0) 7 1) 8 2) 5 3) 6

9.- Física pero no Química.

0) 8 1) 15 2) 10 3) 12

10.- Física y Matemáticas pero no Química.

0) 3 1) 4 2) 5 3) 6

Justifica cada uno siguientes pasos, relacionando las sig. columnas, utilizando las leyes del Álgebra de Conjuntos, en la demostración de: $A' \cup (A' \cup \emptyset)' = U$

11.- Si $A' \cup \emptyset = A'$............( )

12.- $\therefore A' \cup (A' \cup \emptyset)' = A' \cup (A')'$...( )

13.- Si $(A')' = A$ ....( )

14.- $\therefore A' \cup (A' \cup \emptyset)' = A' \cup A$ ....( )

15.- Si $A' \cup A = U$ ....( )

16.- $\therefore A' \cup (A' \cup \emptyset)' = U$........( )

0) Ley de Idempotencia.
1) Ley Asociativa.
2) Ley Conmutativa.
3) Ley Distributiva.
4) Ley de Identidad.
5) Ley de Complemento.
6) Ley de DeMorgan.
7) Principio de sustitución.

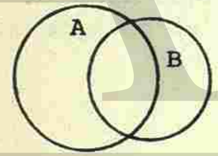
TEORÍA DE CONJUNTOS.

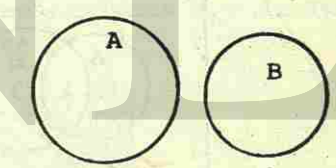
LECCIÓN 3.

1-11 DIAGRAMAS DE VENN.

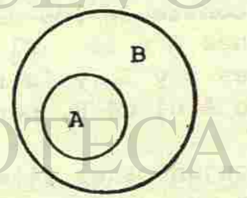
Se logra ilustrar de una manera sencilla e instructiva - las relaciones entre conjuntos, mediante la representación de un conjunto por un área plana, por lo general delimitada por un círculo. A este tipo de figuras cerradas se el conoce como "Diagramas de Venn", en honor al matemático inglés John Venn (1834-1883).

Por ejemplo, supóngase que $A \neq B$, entonces se les puede representar por el diagrama de la izquierda o por el de la derecha si son conjuntos ajenos:





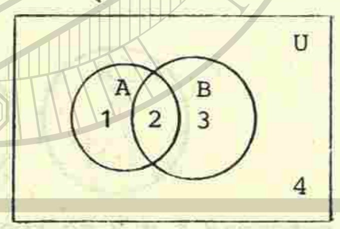
O bien, si $A \subset B$ y $A \neq B$, entonces A y B se pueden describir en diagramas como



La forma de representar al conjunto universal, en diagramas de Venn, es con un rectángulo que lleva en uno de sus ángulos la letra U.

"DIAGRAMAS DE LAS OPERACIONES CON CONJUNTOS"

Supóngase que los conjuntos A y B, son descritos en un diagrama como

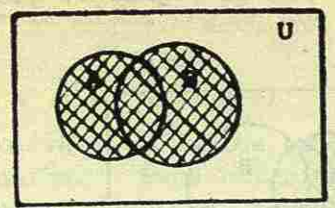


Este diagrama de Venn tiene cuatro regiones, llamadas 1,2,3 y 4(U). El conjunto A consta de los elementos que están comprendidos en las regiones 1 y 2. El conjunto B está representado por las regiones 2 y 3, y la región 4 consta de los elementos que no son de A ni de B, pero sí son del universo.

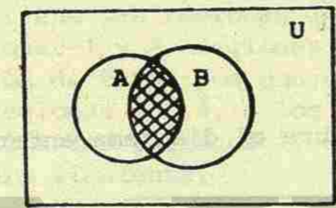
La unión de dos conjuntos es el conjunto formado al tomar todos los elementos que pertenezcan al conjunto A(regiones 1 y 2), o bien, al conjunto B(regiones 2 y 3), o a ambos, es decir, las regiones 1, 2 y 3, que están sombreadas en la si-

guiente figura:

A ∪ B

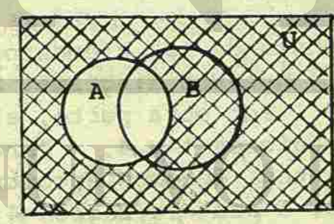


La intersección de dos conjuntos es el conjunto de todos los elementos que son comunes a ambos conjuntos A y B, o sea, la región 2, que está sombreada en la siguiente figura:



A ∩ B

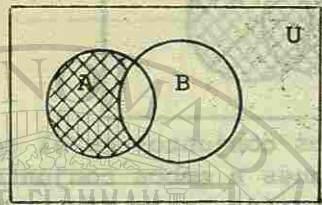
El complemento de un conjunto A es el conjunto de todos los elementos de U que no están en A. En nuestro diagrama, el conjunto A está representado por las regiones 1 y 2, entonces A' está representado por las regiones 3 y 4, que están sombreadas en la siguiente figura:



A'

Y por último, la diferencia de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A y que no pertenecen al conjunto B. En nuestro diagrama, el conjunto

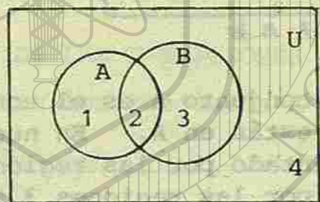
A-B está representado por la región 1, que está sombreada en la siguiente figura:



A - B

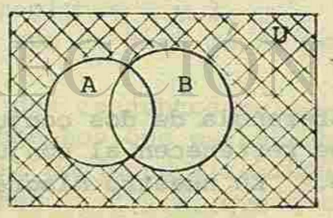
"OTROS DIAGRAMAS"

Supóngase que sobre el diagrama anterior, o sea,



se desee sombrear el conjunto A' ∩ B'.

El conjunto A' consta de los elementos de U que están fuera del conjunto A. En nuestro diagrama, A' está representado por las regiones 3 y 4. Por otra parte, el conjunto B' está representado por las regiones 1 y 4. Para encontrar la intersección de estos conjuntos, debemos encontrar los elementos que pertenecen a ambos, o sea, la región 4, que está sombreada en la siguiente figura:



A' ∩ B'

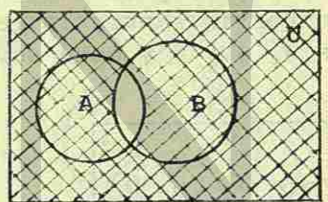
Esta es exactamente la misma región que (A∪B)'; lo cual nos lleva a creer que

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

En palabras, la intersección de los complementos es igual al complemento de la unión. Esta relación es una de las leyes de DeMorgan (Augustus DeMorgan, 1806-1871, un matemático inglés). La otra de las Leyes de DeMorgan es:

$$A' \cup B' = (A \cap B)'$$

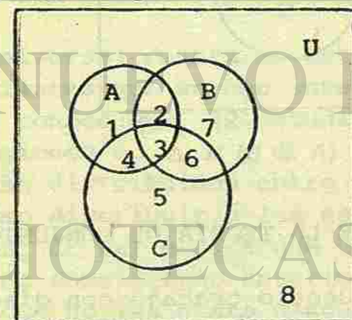
que puede demostrarse de un modo semejante:
El conjunto A' contiene las regiones 3 y 4. El conjunto B' incluye a las regiones 1 y 4, regiones fuera del conjunto B. Para formar la unión de estos dos conjuntos, se necesita a los elementos de las regiones 3 ó 4, a los de las regiones 1 ó 4. Es decir, se necesita las regiones 1, 3 y 4, como están sombreadas en la figura siguiente:



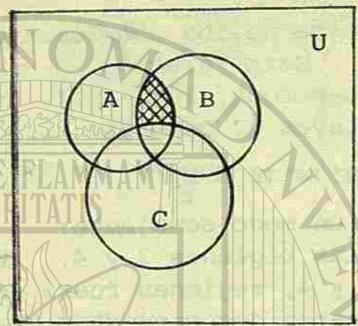
A' ∪ B'

Que es exactamente la misma región que (A ∩ B)'.

Empleando ahora el diagrama de Venn siguiente:

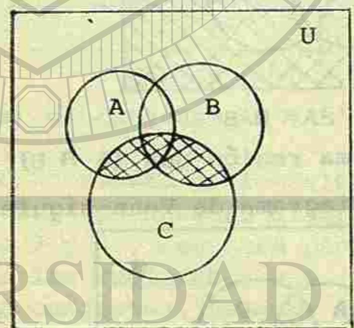


supóngase que se desee sombrear el conjunto (A ∩ B) ∩ C'. Aquí hay ocho regiones. El conjunto (A ∩ B) está constituído de los elementos de las regiones 2 y 3; el conjunto C' consta de las regiones 1,2,7 y 8. En consecuencia, se necesita la región común a (A ∩ B) y a C', que es la región 2. Esta región representa al conjunto (A ∩ B) ∩ C', y está sombreada en la figura siguiente:



(A ∩ B) ∩ C'

Por otra parte, si se desea ahora, sombrear el conjunto (A ∪ B) ∩ C. Entonces, el conjunto (A ∪ B) está formado por las regiones 1, 2, 3, 4, 6 y 7; y el conjunto C incluye las regiones 3, 4, 5 y 6. Por lo tanto, la región común a(A ∪ B) y a C, son las regiones 3, 4 y 6 y está sombreada en la sig. figura:



(A ∪ B) ∩ C

1-12 UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS.

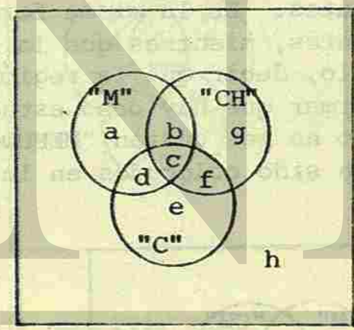
Se puede hacer nuestro trabajo con diagramas de conjuntos como una ayuda para resolver problemas que encierran conjuntos traslapados o separados. Por ejemplo, supóngase que se examina los gustos musicales de un cierto número de estudiantes

de la escuela y encontramos que:

a 22 les gusta el grupo "MENUDO"
a 25 les gusta el grupo "CHAMOS"
a 39 les gusta el grupo "CICLON"
a 9 les gustan "CHAMOS y MENUDO"
a 17 les gustan "MENUDO y CICLON"
a 20 les gustan "CHAMOS y CICLON"
a 6 les gustan los tres
a 4 no les gustan ninguno de ellos

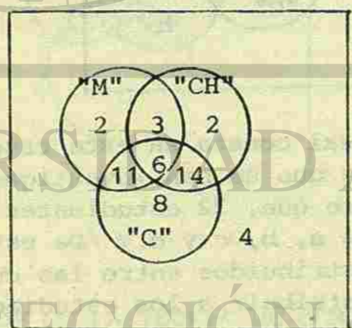
Encontrar el número de estudiantes que fueron examinados.

A primera vista podría parecer razonable sumar simplemente todos los números presentados; sin embargo, esto no funciona ya que conduce a traslapes. Por ejemplo, los 17 estudiantes a los que les gusta "MENUDO y CICLON" son también contados como parte de los 22 a los que les gusta "MENUDO" y de los 39 a los que les gusta "CICLON". La figura siguiente muestra un esquema de la situación que encierra estos datos:



El conjunto universal consta en este caso del conjunto - de todos los estudiantes que se han investigado. De la in-- formación dada, se conoce que, 22 estudiantes les gusta "MENUDO" incluye las regiones a, b, c y d. De esta manera, estos 22 estudiantes están distribuidos entre las cuatro regiones. Se debe decidir cómo distribuir a los estudiantes entre las diferentes regiones, de tal manera que éstas no se traslapen. El total más pequeño considerado anteriormente es el de los 4 estudiantes a los que no les gusta ninguno de los tres grupos. Como estos 4 estudiantes están fuera de los círculos asignados a "MENUDO", "CHAMOS" o a "CICLON", deben ir en la región "h", y se coloca el número 4 en la región h del diagrama. Hay 6 estudiantes a los que les gustan los tres grupos. Ya que la región "c" es la intersección de los tres círculos, se coloca el número 6 en la región "c"; los 20 estudiantes a los que les gustan los grupos "CHAMOS" y "CICLON" están representados por las regiones "c" y "f". Así, un total de 20 estudiantes han sido incluidos en las regiones "c" y "f". Sin embargo, la región "c" representa ya a 6 estudiantes y, por lo tanto, 20-6, es decir, 14 estudiantes deben colocarse en la región "f", que representa a los estudiantes a quienes les gusta los grupos "CHAMOS" y "CICLON", pero no el grupo "MENUDO". Por el mismo método puede determinarse que la región "d" representa a 11 estudiantes, mientras que la región "b" representa a 3.

A un total de 22 estudiantes les gusta "MENUDO"; el círculo que representa a estos estudiantes está formado por las regiones "a", "b", "c" y "d". Como ya se ha anotado las regiones "b", "c" y "d" se consideran para un total de 3+6+11= 20 estudiantes, lo que implica que la región "a" debe representar 22-20=2 estudiantes. En la misma forma, la región "g" representa a 2 estudiantes, mientras que la región "e" representa a 8. Por ejemplo, decir que la región "e" representa a 8 estudiantes es afirmar que hay ocho estudiantes a los que les gusta "CICLON" pero no les gustan "MENUDO" ni "CHAMOS". Todos estos números han sido colocados en la siguiente figura.



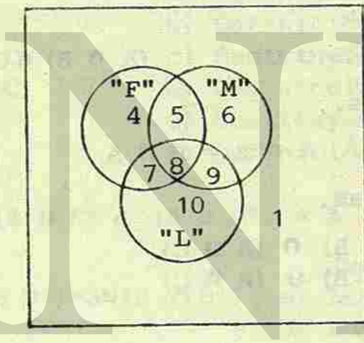
Los estudiantes no están contados dos veces en el diagrama de la figura anterior; por lo tanto, ahora podemos sumar los números de las regiones: 2+3+6+11+2+14+8+4=50. Cincuenta es-

tudiantes fueron interrogados.

Supóngase, ahora, que la Dirección de la Escuela interrogó a este grupo de 50 alumnos, acerca del aprovechamiento en las materias de Física, Matemáticas y Lógica en el semestre anterior y se encontró que

24 aprobaron Física.
28 aprobaron Matemáticas.
34 aprobaron Lógica.
17 aprobaron Matemáticas y Lógica.
15 aprobaron Física y Lógica.
13 aprobaron Física y Matemáticas.
8 aprobaron las tres matèrias.

De los datos obtenidos por la Dirección de la Escuela, se puede determinar los números mostrados en la siguiente figura:



de la cual se puede observar que:

4 alumnos aprobaron Física y ninguno de las otras dos.
1 alumno no aprobó ninguna de estas tres materias.
6 alumnos aprobaron Matemáticas pero ninguna de las otras dos.
9 alumnos aprobaron Matemáticas y Lógica pero no Física.
16 alumnos no aprobaron Lógica, etc.

1-13 ALGEBRA DE CONJUNTOS.

Las operaciones de unión, intersección y de complemento entre conjuntos cumplen varias leyes, es decir, verifican ciertas identidades. Hay una rama de las matemáticas que se dedica a investigar la Teoría de Conjuntos, estudiando aquellos teoremas cuya demostración requiere de estas leyes y solo de ellas. Se dirá que las leyes de la siguiente tabla y sus consecuencias, constituyen el álgebra del conjunto.

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS:

1. **Leyes de Idempotencia.**

   $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

2. **Leyes Asociativas.**

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. **Leyes Conmutativas.**

   $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

4. **Leyes Distributivas.**

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. **Leyes de Identidad.**

   $A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

   $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap U = A$

6. **Leyes de Complemento.**

   $A \cup A' = U$ $\qquad$ $(A')' = A$ $\qquad$ $A \cap A' = \emptyset$

   $U' = \emptyset$ $\qquad$ $\emptyset' = U$

7. **Leyes de DeMorgan.**

   $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Es de notar que el concepto de "elemento" y la relación "x pertenece a A", no aparecen en ninguna parte de la tabla anterior. Aunque estos conceptos eran esenciales para el desarrollo previo de la Teoría de Conjuntos, no aparecen al investigar el álgebra de conjuntos. La relación "A es un subconjunto B", se define en esta álgebra de conjuntos por

$A \subset B$, significa que $A \cap B = A$

Por medio de ejemplos, se demuestran tres teoremas de esta álgebra de conjuntos, es decir, se demuestran los tres teoremas siguientes que se deducen directamente de las leyes de la tabla anterior.

Demostrar: si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Preposición	Justificación
a) $A = A \cap B$	a) Definición de subconjuntos.
b) $B = B \cap C$	b) Definición de subconjuntos.
c) $\therefore A = A \cap (B \cap C)$	c) Sustituyendo b) en a)
d) $A = (A \cap B) \cap C$	d) Ley asociativa.
e) $A = A \cap C$	e) Sustituyendo a) en d)
f) $\therefore A \subset C$	f) Definición de subconjuntos.

Demostrar: $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

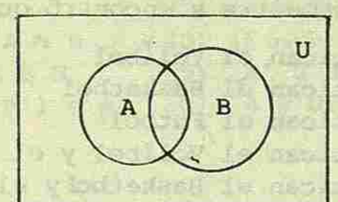
Preposición	Justificación
a) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B')$	a) Ley distributiva.
b) Si $B \cap B' = \emptyset$	b) Ley de complemento.
c) $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup \emptyset$	c) Sustitución.
d) Si $A \cup \emptyset = A$	d) Ley de identidad.
e) $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$	e) Sustitución.

Demostrar: $(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B'$

Preposición	Justificación
a) $(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = (A' \cap B') \cup (A'' \cap B')$	a) Ley de DeMorgan.
b) Si $A'' = A$	b) Ley de complemento.
c) $\therefore (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = (A' \cap B') \cup (A \cap B')$	c) Sustitución.
d) $(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B' \cap (A' \cup A)$	d) Ley distributiva.
e) Si $A' \cup A = U$	e) Ley de complemento.
f) $\therefore (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B' \cap U$	f) Sustitución.
g) Si $B' \cap U = B'$	g) Ley de identidad.
h) $\therefore (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B'$	h) Sustitución.

AUTOEVALUACION DE LA LECCIÓN 3.

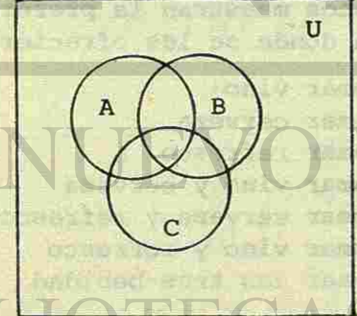
Para cada uno de los problemas del 1 al 15, haga un trazo semejante al de la siguiente figura:



y luego sombree únicamente el área que representa al conjunto indicado. En caso de que sea conjunto vacío, no sombree, y escriba por un lado su símbolo.

1) A U B	6) B - A	11) A' U B'
2) A ∩ B	7) A' - B	12) A' ∩ B'
3) (A U B)'	8) A - B'	13) (A ∩ B) UB'
4) (A ∩ B)'	9) A' ∩ B	14) (A U B) ∩ B'
5) A - B	10) A U B'	15) (A U B) ∩ (A ∩ B)'

Para cada uno de los problemas del 16 al 30, haga un trazo semejante al de la siguiente figura



y luego sombree únicamente el área que representa al conjunto indicado. En caso de que sea conjunto vacío, no sombree, y escriba por un lado su símbolo.

16) A ∪ (B ∪ C)
17) A ∩ (B ∩ C)
18) (A ∩ C) ∪ B
19) A ∪ (B ∩ C)
20) (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)
21) A - (B ∪ C)
22) (A ∩ B) - C
23) (A' ∪ B')' ∪ C
24) A' ∩ (B ∩ C)
25) (A ∩ C') ∪ B
26) (A' ∩ B) ∪ C
27) (A' ∩ B') ∩ C
28) (A ∩ C') ∩ B
29) (A ∩ B') ∩ C
30) (A' ∩ C') ∩ B

La coordinación de Deportes de la escuela investigó a 100 alumnos de primer semestre y encontró que

a 34 alumnos practican el Volibol
a 45 alumnos practican el Basketbol
a 60 alumnos practican el Futbol
a 13 alumnos practican el Volibol y el Basketbol
a 19 alumnos practican el Basketbol y el Futbol
a 18 alumnos practican el Volibol y el Futbol
y a 7 alumnos practican los tres deportes

31) ¿Cuántos estudiantes practican el Volibol y ninguno de los otros dos?
32) ¿Cuántos estudiantes no practican ninguno de estos tres deportes?
33) ¿Cuántos estudiantes practican el Futbol pero ninguno de los otros dos deportes?
34) ¿Cuántos estudiantes practican el Volibol y el Basketbol pero no el Futbol?
35) ¿Cuántos estudiantes no practican el Basketbol?

Los siguientes datos muestran la preferencia de 100 personas en una fiesta en donde se les ofrecieron bebidas

a 45 les gusta tomar vino
a 50 les gusta tomar cerveza
a 35 les gusta tomar refresco
a 12 les gusta tomar vino y cerveza
a 13 les gusta tomar cerveza y refresco
a 11 les ugsta tomar vino y refresco
y a 5 les gusta tomar las tres bebidad

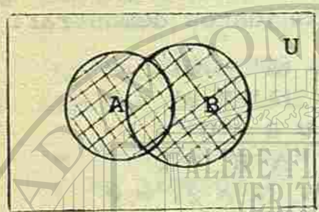
¿A cuántas de estas personas les gusta?
36) Ninguna de las tres bebidas.
37) El vino pero no la cerveza.
38) Cualquiera pero no los refrescos. 64

39) Únicamente la cerveza.
40) Únicamente los refrescos.

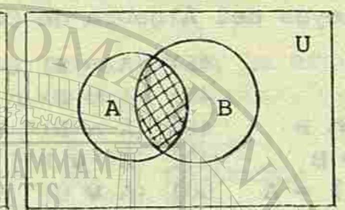
Utilizando las leyes del Álgebra de Conjuntos demostrar:

41) A ∩ (A ∪ B) = A
42) A ∪ (A ∩ B) = A
43) A ∩ (A' ∪ B) = A ∩ B
44) A ∪ (A' ∩ B) = A ∪ B
45) (A ∩ B) ∪ (A ∩ B') = A
46) (A ∩ B) ∪ (A' ∩ B) = B
47) (A ∪ B) ∩ (A' ∪ B) = B
48) (A ∩ B)' ∪ B = U
49) (A' ∪ B')' ∩ B' = ∅
50) (A ∪ U)' ∩ (A ∩ ∅)' = ∅

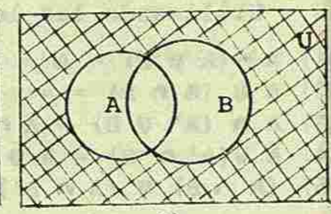
RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 3.



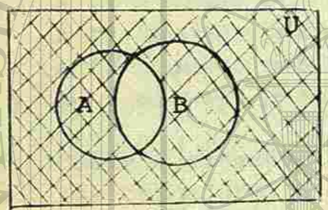
1)



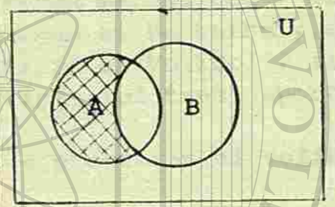
2)



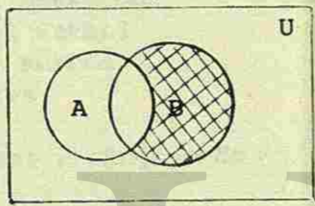
3)



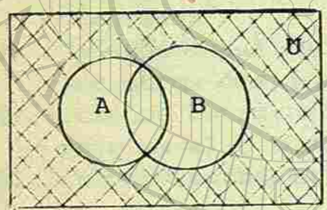
4)



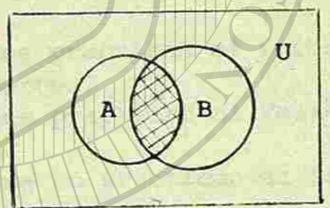
5)



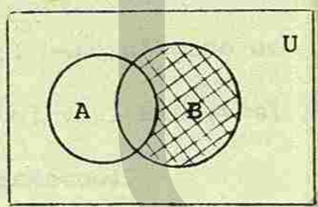
6)



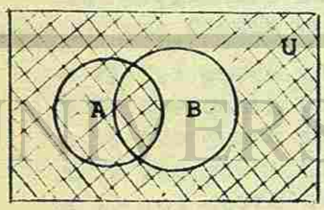
7)



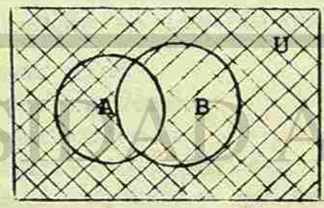
8)



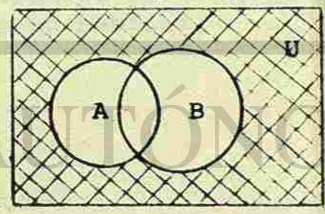
9)



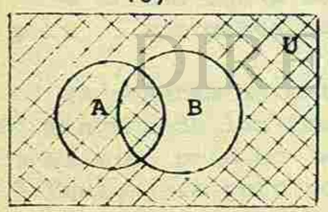
10)



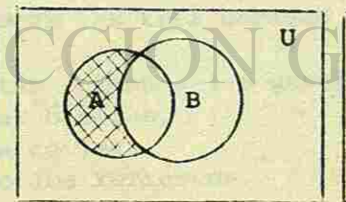
11)



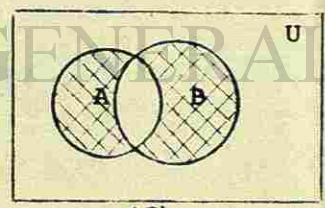
12)



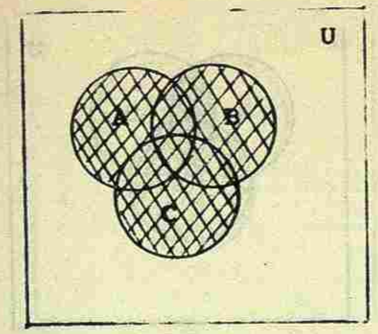
13)



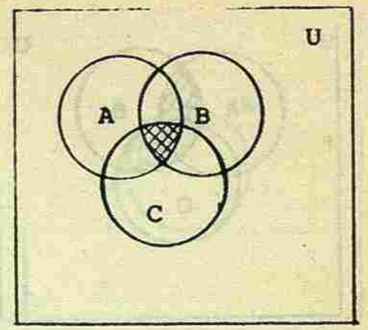
14)



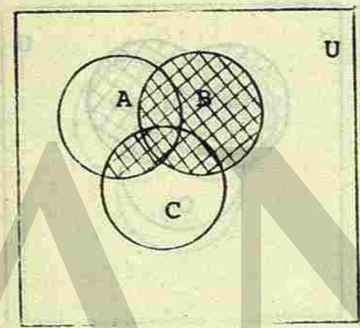
15)



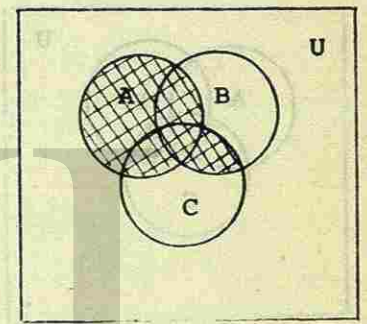
16)



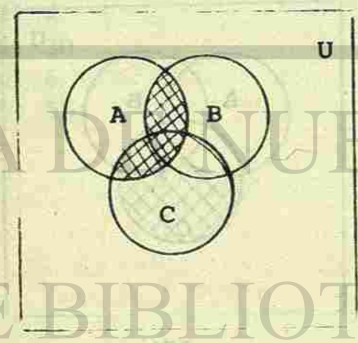
17)



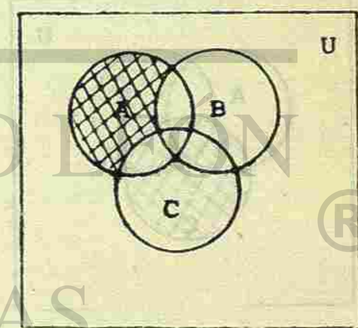
18)



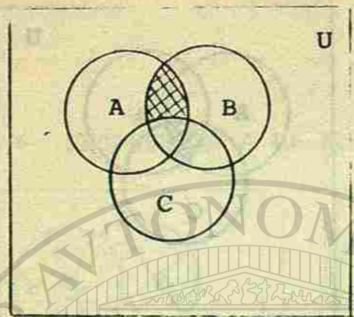
19)



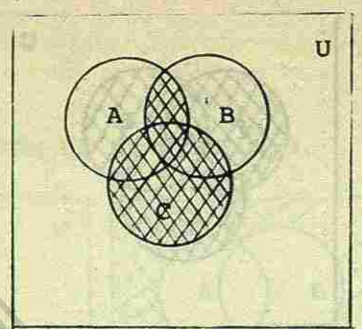
20)



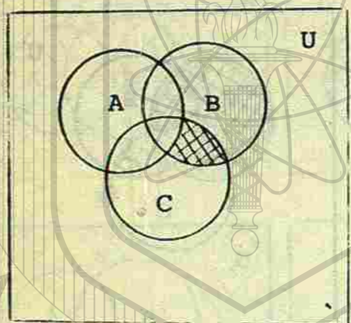
21)



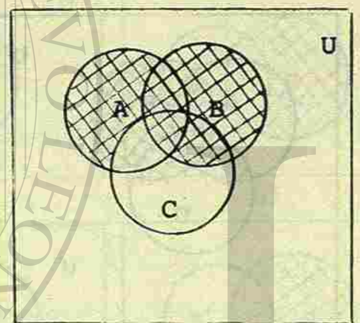
22)



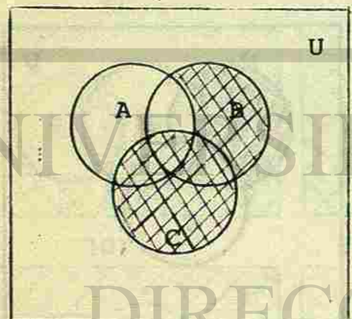
23)



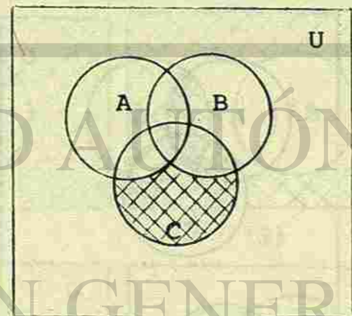
24)



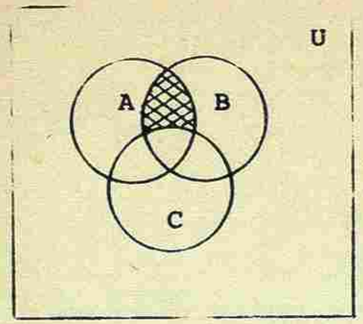
25)



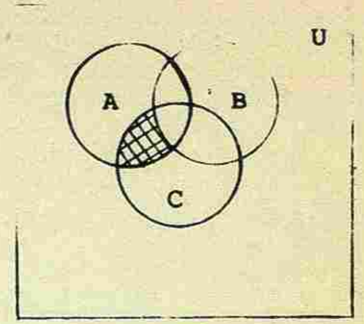
26)



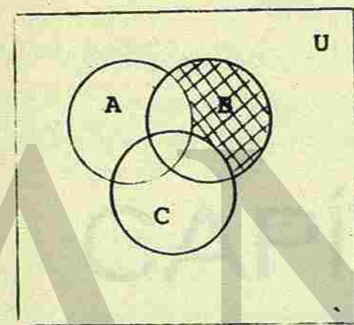
27)



28)



29)



30)

31) 10
32) 4
33) 30
34) 6
35) 55
36) 1
37) 33
38) 64
39) 30
40) 16

CAPÍTULO II

LOS NUMEROS REALES Y LA RECTA NUMÉRICA.

INTRODUCCIÓN.

En esta unidad veremos cómo representar a los números reales a través de una recta numérica. La representación de todos los números reales por puntos sobre una línea es un concepto básico de las matemáticas.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS.

1.- Explicar brevemente en qué consiste el conjunto de los números reales.

2.- Explicar el significado de correspondencia biunívoca de los números reales.

3.- Encontrar correctamente las coordenadas de los números reales en la escala numérica.

4.- Explicar brevemente, los conjuntos de números racionales e irracionales, enlistando los subconjuntos de cada uno de ellos.

5.- Explicar brevemente los significados de proposición abierta, variable, dominio de la variable y conjunto solución.

6.- Encontrar correctamente el conjunto solución de cualquier proposición abierta.

7.- Localizar gráficamente el conjunto solución de cualquier proposición abierta en la escala numérica.

PROCEDIMIENTO.

1.- Estudia la lección 1 del capítulo II de tu libro de texto. Antes de empezar a contestar tus objetivos dale una leída a toda la lección.

2.- Estudia y practica tus ejemplos antes de resolver las autoevaluaciones que se incluyen en la lección, y consulta inmediatamente cualquier duda que tengas con tu maestro asesor.

3.- Al final de la unidad se incluye una autoevaluación de repaso general de la lección, misma que deberás resolver, solamente y cuando hayas termiando de resolver tus objetivos relacionados con las preguntas en que te hayas equivocado.

4.- Como requisito para tener derecho a presentar esta unidad, deberás entregar totalmente contestado el laboratorio de la unidad a tu maestro asesor.

AUTOEVALUACIÓN.

Contesta las siguientes preguntas que hagan cierta la proposición.

1.- Otro nombre para el conjunto de números para contar es el conjunto de ______________, es decir {______________}

2.- En los números naturales no hay último o mayor número; es decir, hay un cantidad ______________ de números naturales.

3.- Al número asociado con un punto en la recta numérica se le llama su ______________.

4.- El 0 no es un número natural. Cuando consideramos el 0 junto con los números naturales, llamamos a este conjunto el de los ______________, es decir {0,1,2,3,4,...}

5.- El conjunto de los números enteros es el que tiene por subconjuntos el conjunto de los ______________, ______________ y ______________.

6.- Un número ______________ es aquel que puede escribirse en la forma a/b, en donde a y b son enteros, y $b \neq 0$.

7.- El conjunto de los números ______________ e ______________ forman el conjunto de los números reales.

8.- El conjunto de los números racionales es un subconjunto del conjunto de los ______________.

9.- ¿Cuáles de los siguientes números

$-4,\ 0,\ -1/3,\ \sqrt{5},\ 3/8,\ 2,\ \pi$

son:

a) Números naturales. b) Números enteros.
c) Números racionales. c) Números irracionales.
d) Números reales.

10.- Existen números tales como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$ que no pueden expresarse ni como una decimal exacta ni como una decimal que se repite (periódica). A este conjunto de números se les llama el conjunto de los ____________.

11.- Los números reales son o ____________ o ____________. Es decir, el conjunto de los números reales consiste en la unión del conjunto de los __________ y el conjunto de los ________. Expresado en símbolos:

$$\{x \mid x \in R\} = \{y \mid y \in Q\} \cup \{z \mid z \in S\}$$

12.- El conjunto de números cardinales es ordenado; en una recta numérica cualquier número cardinal es menor que el otro si su punto correspondiente está a __________ del otro, y es mayor que él si está su ______________.

13.- El conjunto de puntos de una recta numérica asociado con los elementos del conjunto de los números reales, recibe el nombre de ____________ de ese conjunto de números.

14.- Así pues, a todo punto de la recta numérica le corresponde un número ________ único (racional o irracional); y recíprocamente, a cada número real se le puede asociar con un punto único de la recta numérica. Es decir están en ______________.

15.- En cambio, para los números racionales y la recta numérica no se puede establecer la correspondencia biunívoca, pues, aún cuando existen infinidad de fracciones entre dos enteros consecutivos (propiedad de densidad), sin embargo hay "huecos" entre las coordenadas racionales que son presisamente el conjunto de ____________.

16.- Una ____________ es el enunciado de que dos expresiones numéricas designan el mismo número.

17.- A una igualdad se le llama también una ____________.

18.- Los símbolos de relación de orden son ________ y ______. Con relación a la recta numérica, un número es menor que (____) otro si en la recta numérica está a la izquierda del otro. Un número es ________________ (____) otro si está a la derecha del segundo número.

19.- En la recta numérica todos los números a la izquierda de uno en particular son ________________ y hacia la derecha son ______________.

20.- Una ____________________ es una proposición que contiene una o más variables.

21.- Una ________________ es un símbolo, generalmente una letra, que ponemos en lugar del nombre de uno cualquiera de los elementos de un conjunto dado.

22.- Cualquier conjunto cuyos elementos pueden ser usados para sustituir a una variable, se llama ________________.

23.- El conjunto sustitución para una variable se llama ____________________ de la variable.

24.- El ________________ de una proposición abierta es el subconjunto de la variable que hace cierta la proposición.

25.- La ____________________ del conjunto solución de una proposición abierta en una variable es el conjunto de todos los puntos en la recta numérica cuyas coordenadas son los números que hacen cierta la proposición.

Colocar los símbolos "=", ">" ó "<", en el lugar del signo de interrogación (?) de tal manera que hagan cierta la proposición.

26.- -8 ? 8

27.- 3 ? -3

28.- 0 ? 5

29.- 9 ? -3

30.- -7 ? -1

31.- -1 ? 0 ? 3

32.- -1 ? -3 -5

Sea $-4 < x < 3$. Bajo esta proposición, contesta lo si-guiente:

33.- ¿Cuántos números naturales satisfacen esta desigualdad?

34.- ¿Cuántos números enteros satisfacen esta desigualdad?

35.- ¿Cuántos números reales satisfacen esta desigualdad?

Expresar en palabras, cada uno de los siguientes conjuntos:

36.- $\{x \mid x + 3 = 10,\ x \in N\}$

37.- $\{z \mid 2z - 3 \geq 5,\ z \in Z\}$

38.- $\{y \mid 4 \geq y \geq 2,\ y \in S\}$

NÚMEROS REALES.

LECCIÓN 1.

2-1 EVOLUCIÓN DE LOS NUMEROS REALES.
(R) Y LA RECTA NUMÉRICA.

Vamos a tratar en esta sección que el estudiante vea más claramente el desarrollo del conjunto de los números Reales. Supondremos que es cierto lo que vamos a ver y más delante - daremos propiedades y demostraciones.

Los números Naturales (N). *(Enteros positivos)*

Como ya se vió, los números naturales nacieron de la idea de contar. Fueron los pirmeros números y podemos agregar siempre 1 a cualquier número natural y se obtiene el siguiente, o sea, el número que le sigue inmediatamente. Representaremos al conjunto de los número naturales como:

$$N = \{ 1,2,3,4,... \} .$$

Los puntos suspensivos indican que hay un número infinito de números naturales.

Al contar los estudiantes de un salón de clases, no se señala al primer estudiante diciendo: "este es el estudiante "0". El cero no es un número para contar, y por lo tanto el "0" no pertenece al conjunto de números naturales, tal como lo definimos. Para incluir al o con el conjunto de números naturales, formamos un nuevo conjunto que lo definimos como el conjunto de los números cardinales. De tal suerte que:

(K) El conjunto de los números cardinales $=\{0,1,2,3,...\}$
o bien, $N \subset K$ *(Enteros no negativos)*

Representación gráfica de los números naturales. Cuando pensamos en números, encontramos útil asociarlos con puntos en una recta. Para ello escogemos dos puntos convenientes sobre la recta y le ponemos al punto de la izquierda el número 1 y al punto de la derecha el número 2; y luego usando la distancia entre 1 y 2 como unidad de medida marcamos la línea recta indefinidamente.

La flecha indica que "una cantidad infinita de puntos podemos asociar con los números naturales. Esta recta, cuyos puntos los hemos asociado con números, se le llama *recta numérica o escala numérica*. Así tenemos que: a) al número asociado con un punto en particular se le llama *coordenada* de dicho punto; y b) al punto asociado con un número se le llama *gráfica* de ese número.

Como todo número natural puede asociarse con un punto de una recta numérica, esto nos permite localizar elementos del conjunto de números naturales sobre una recta numérica y viceversa, el conjunto de puntos asociados con los elementos de un conjunto de números forma la *gráfica del conjunto*.

EJEMPLO:

Dado A = {1,2,3,5} , dibujar la gráfica de A. (A ε N)

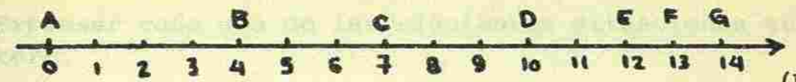
Solución:

Dibujamos una escala numérica.

Sobre la recta numérica dibujamos los elementos del conjunto y marcamos los puntos localizados en esta forma. Nótese que solamente marcamos los puntos asociados con elementos del conjunto.

AUTOEVALUACION 1.

1.- Dar las coordenadas de los puntos siguientes:



(K)

a) F b) C c) E

2.- Bajo la recta numérica anterior contesta lo siguiente:

a) Dar la coordenada del punto medio entre A y B.

b) Dar las coordenadas de los números cardinales a la izquierda de D.

c) Dar las coordenadas de los números cardinales entre A y D que son múltiplos de 4.

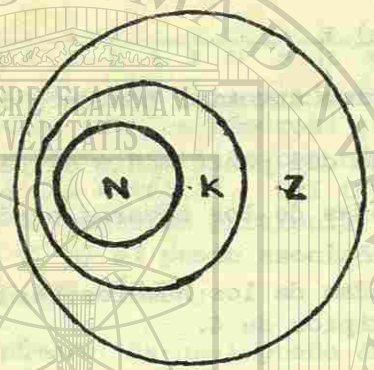
El conjunto de los números enteros. (Z)

Hasta ahora hemos estudiado el conjunto de los números cardinales, que incluyen los números naturales y 0. Sabemos que este conjunto puede ser asociado con los puntos de una recta, llamada la recta numérica. Hemos considerado la recta numérica como partiendo de 0 y extendiéndose hacia la derecha indefinidamente. Claramente, una recta se extiende indefinidamente hacia la izquierda. Para ello seguiremos el mismo esquema anterior. Usando el intervalo de 0 a 1 como intervalo unitario, marcamos

(Z)

puntos igualmente espaciados a lo largo de la recta de la izquierda. Al primer punto le denominamos -1, al segundo -2, etc., donde el símbolo "-1" se lee "1 negativo" etc. Así pues, la coordenada del punto 4 a la izquierda de 0 es el "4 negativo" o -4. Hemos creado entonces un nuevo conjunto que con los cardinales forman el conjunto de los números enteros.

Así, el conjunto de los números enteros está formado por el conjunto de los números cardinales, junto con el conjunto $\{-1,-2,-3,\ldots\}$, o sea = $\{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ es decir, $(N \subset K) \subset Z$. Representado por diagramas tendríamos que



Usaremos la letra Z para simbolizar el conjunto de los números enteros. Los enteros a la izquierda del 0 se llaman *enteros negativos* y los de la derecha del 0 son llamados enteros positivos.

El conjunto de los números enteros se usa a menudo para indicar cosas opuestas. Por ejemplo:

a) Sacar del banco \$10 podemos escribirlo como -10 pesos; un depósito de \$10 como 10 pesos.

b) Cuando se ganan 7 yardas en el futbol americano lo podemos escribir como 7 yardas; cuando haya una pérdida de 7 yardas puede ser escrito como -7 yardas.

AUTOEVALUACION 2.

Expresar cada una de las siguientes situaciones usando un entero.

1.- Una pérdida de 12.

2.- 200 pies arriba del nivel del mar.

3.- Un beneficio de \$15

4.- Un gasto de \$8

En las siguientes parejas de puntos ¿cuál punto queda a la derecha del otro sobre la recta numérica?

5.- 10, -4

6.- 3, 6

7.- -2, -4

8.- -4, 0

9.- 9, 4

10.- 1, -2

11.- Cierto día de invierno la temperatura subió a 20° de -2° ¿Cuál fue la temperatura final?

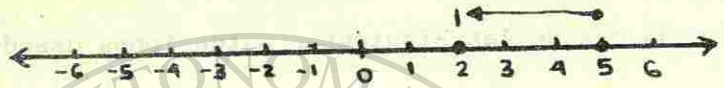
12.- Al acercarse la primavera, la temperatura subió un día de -10° a 35°. ¿Cuántos grados subió?

13.- Más tarde en el verano, la máxima a mediodía fue de 84°F, pero la temperatura cayó a 68°F en la noche ¿Cuánto bajó?

Usar la recta numérica para efectuar las operaciones siguientes; en cada caso dar la coordenada del punto que resulta.

EJEMPLO:

Comenzar en 5 y moverse 3 unidades a la izquierda



coordenada que resulta: 2

14.- Empezar en 0 y moverse 3 unidades a la izquierda.

15.- A partir del -1, moverse 3 unidades a la izquierda.

16.- Comenzar en 2 y moverse 2 unidades a la derecha, y des-- pués 5 unidades a la derecha.

17.- A partir del 5, moverse 3 unidades a la izquierda y después 4 unidades a la izquierda.

En los problemas siguientes considérense los depósitos al banco como enteros positivos y los retiros como negativos, las temperaturas bajo cero como cantidades negativas y las temperaturas sobre cero como positivas, las medidas sobre el suelo o nivel del mar como positivas y las medidas bajo el suelo o nivel del mar como negativas.

Exprésese cada resultado con un número entero.

18.- Un poste de 32 pies de longitud sobresale del suelo 12 pies. Si el poste se introduce 5 pies más, expresa la parte que sobresale y la enterrada.

19.- Se depositan \$17 y \$15 y se sacan \$8

20.- Se retiran \$23 y \$19 y se depositan \$25

El conjunto de los números racionales. (Q)

Consideremos la siguiente división

$$\frac{7}{2} =$$

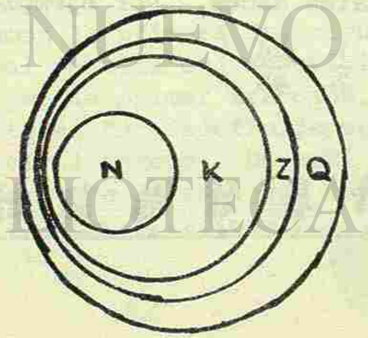
Por lo que sabemos de aritmética $7 \div 2 = \frac{7}{2}$ ó $3\frac{1}{2}$ no es un número natural, ni tampoco un número entero. Para poder expresar la división de un entero por otro entero (excepto cero) fue necesario crear un nuevo conjunto de números, llamado el conjunto de los números racionales. Definimos un número racional como: "un número que puede escribirse en la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Así pues, nuestro nuevo sistema de números incluye elementos como los siguientes:

$$\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{4}{7}\ ;\ 1;\ 0;\ 5\frac{1}{2}\ \text{o}\ \frac{11}{2}\ ;\ 0.7\ \text{ó}\ \frac{7}{10}$$

Un número racional puede ser expresado por un número infinito de formas equivalentes. Por ejemplo:

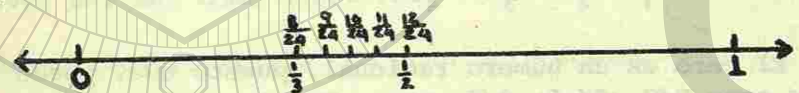
$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

El cero es un número racional, puesto que, puede ser escrito como 0/2, 0/-5, 0/7, etc. Por lo cual concluimos que: "el conjunto de los enteros, los números naturales y cardinales están incluidos en el conjunto de los números racionales". Es decir $[(N \subset K) \subset Z] \subset Q$, o bien expresado por medio de diagramas, queda:



Habiendo creado los números racionales, podemos localizar nuevos puntos en la recta numérica. Por ejemplo, podemos dividir el intervalo entre dos enteros cualesquiera en mitades, terceras, cuartas partes, etc. Entonces la recta numérica se vería como sigue:

Cada número racional puede asociarse así con un punto de la recta numérica. Si localizamos más puntos, tales como quintos, sextos, séptimos, etc., los puntos correspondientes estarán cada vez más juntos. Si continuáramos haciendo esto indefinidamente veríamos que: "siempre hay un número racional entre dos números racionales cualesquiera dados no importa cuán próximos estén esos dos números. Examinemos esto con más detalle. Supongamos que escogemos dos puntos cuyas coordenadas son 1/3 y 1/2. Sabemos que 1/3 puede ser escrito como 8/24 y que 1/2 puede ser escrito como 12/24. Además cualquier número entre 8/24 y 12/24 está también entre 1/3 y 1/2. Claramente se ve, que 9/24 · 10/24 y 11/24 están entre 8/24 y 12/24. Así pues, hay cuando menos tres puntos entre 1/3 y 1/2.



Este proceso de encontrar más puntos entre dos puntos dados cuyas coordenadas son números racionales puede repetirse indefinidamente encontrando otros números racionales entre dos números racionales dados. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{16}{48} \quad y \quad \frac{1}{2} = \frac{24}{48}$$

A esto le llamamos la *propiedad de densidad* del conjunto de los números racionales. Así pues, entre dos puntos dados de la recta numérica cuyas coordenadas son números racionales, no importa cuán próximos estén, hay siempre un punto cuya coordenada es un número racional.

Así como un número racional positivo puede ser designado en muchas formas, un número racional negativo tiene también diferentes designaciones. Puede considerarse como el cociente de un entero negativo y un entero positivo, o como el cociente de un entero positivo y un entero negativo. Por esta razón

$$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Pero, hasta ahora, hemos usado fracciones para representar algunos números racionales. Cuando estudiamos aritmética aprendimos cómo expresar una fracción ordinaria en forma decimal. Se hacía dividiendo el numerador por su denominador. Por ejemplo:

$$\frac{3}{11} = 11\begin{array}{l} .272727... \\ \overline{)3.000000} \end{array}$$

$$\frac{5}{6} = 6\begin{array}{l} .833... \\ \overline{)5.000} \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = 4\begin{array}{l} .75 \\ \overline{)3.00} \end{array}$$

Si observamos la primera fracción veremos que la representación decimal resulta una repetición "27" sin llegar a su fin. Al igual que la primer fracción, la segunda fracción también se repite el "3" indefinidamente. La tercer fracción es un número decimal exacto. De aquí podemos concluir que: "Toda decimal exacta o decimal que se repite (decimal periódica) representa un número racional".

AUTOEVALUACION 3.

Si N representa el conjunto de los números naturales, K el conjunto de los números cardinales, Z representa el conjunto de los enteros, y Q representa el conjunto de los números racionales. ¿Cuáles de las siguientes aseveraciones son verdaderas y cuáles son falsas?

1.- $K \subset Q$ 4.- $N \subset Q$

2.- $Q \subset Z$ 5.- $Z \subset K$

3.- $Q \subset K$ 6.- $Z \subset Q$

7.- a) ¿Cuántos enteros hay entre -3 y -2? b) ¿Cuántos números racionales hay entre -3 y -2?

8.- Escribir por lo menos 3 equivalencias que representen al número racional -2/5.

9.- Encontrar uno o más números racionales entre cada una de las siguientes parejas de números racionales 1/4 y 1/3.

10.- Dibujar una recta numérica y localizar en ella puntos que correspondan a los siguientes números racionales.

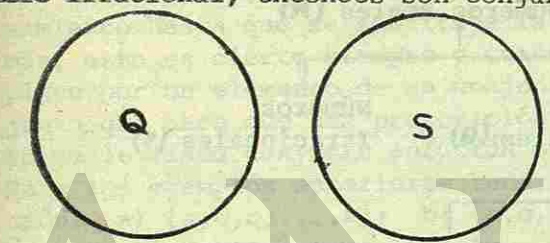
a) -3 b) $2\frac{1}{2}$ c) $-1\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $3\frac{1}{4}$

El conjunto de los números irracionales. (S)

Anteriormente vimos como a todo número racional corresponde un punto en la recta numérica. Por otra parte ¿a cada punto de la recta le corresponde un número racional? La respuesta es "no". Hay muchos puntos de la recta numérica cuyas coordenadas "no" son números racionales.

Hay números cuya representación decimal no es *ni una decimal que se repite, ni una decimal exacta, ni mucho menos una fracción.* Como por ejemplo: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$, π, $\sqrt{3}$; donde el símbolo $\sqrt{2}$ se lee "raíz cuadrada de 2", y significa el número positivo que, cuando se multiplica por sí mismo, nos da como resultado 2. Son aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ los números 1.4, 1.414, 1.4142, 1.414214, etc. Ningún grupo de cifras decimales se repiten. Un número de esta clase se llama un *número irracional.*

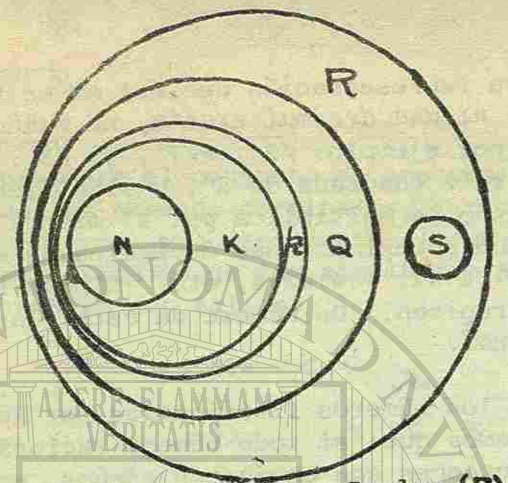
Representando a los números irracionales por medio de diagramas de Venn, vemos que: si todo número racional no es número irracional, entonces son conjuntos ajenos, es decir



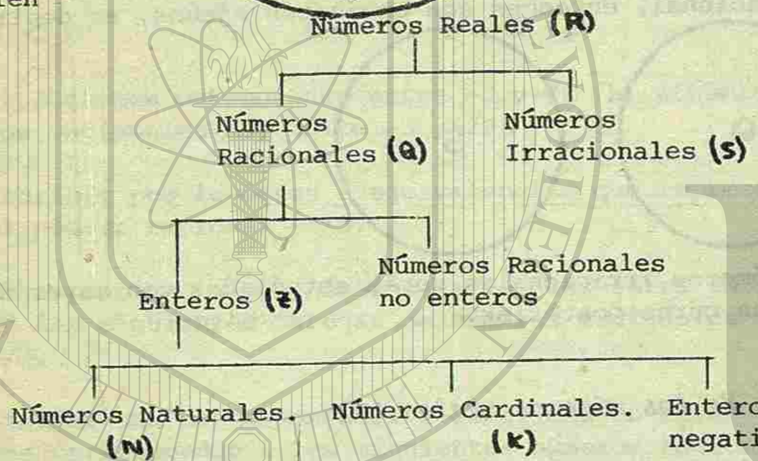
Los números irracionales serán estudiados con mayor detalle, en un curso posterior.

El conjunto de los números reales. (R)

El conjunto de números racionales junto con el conjunto de números irracionales componen el conjunto de los números reales. Así, pues, el conjunto de números racionales y el conjunto de números irracionales son subconjuntos del conjunto de los números reales. El diagrama que nos muestra lo anterior, es el siguiente



o bien



Podemos resumir todo lo anterior a esta sección como sigue:

1) Los números que pueden expresarse como decimales se llaman *números reales*.

2) Un número real cuya representación decimal es una decimal periódica o decimal exacta se le denomina número racional.

3) Un número real cuya representación decimal no tiene una parte que se repita periódicamente se llama número irracional.

2-2 PROPOSICIONES ABIERTAS Y VARIABLES.

Consideremos las siguientes proposiciones.

a) __________ es una letra del abecedario.

b) __________ es una vocal.

c) __________ es un mes del año.

Los anteriores ejemplos son *proposiciones abiertas*. Se les llama así porque no está expresado completamente el pensamiento hasta que se sustituye la "___" por un nombre. Además, esto es cierto siempre y cuando a la "___" se le reemplace por un elemento de un conjunto particular. A este conjunto que hace que una proposición sea un enunciado verdadero se le llama *conjunto solución* o *conjunto de soluciones*. Para los ejemplos anteriores tendríamos como conjunto solución: a) $\{a,b,c,\ldots,z\}$; b) $\{a,e,i,o,u\}$; c) {Enero, Febrero,..., Diciembre}.

Consideremos ahora el siguiente ejemplo: ___ >2. En vez de usar "___", los matemáticos hacen uso de una letra. Si usamos la letra "x", la proposición abierta viene siendo $x>2$.

Si convenimos en que "x" va a ser sustituída por un elemento del conjunto de los números naturales, entonces cualquier elemento del subconjunto infinito $\{3,4,5\ \ldots\}$ del conjunto de los números naturales hará que la proposición sea cierta. Así, el conjunto solución para la proposición abierta $x>2$ es $\{3,4,5,\ldots\}$.

En este caso "x" representa cualquier número natural del 3, 4, 5... La letra "x" cuando se usa en esta forma, se denomina una variable y el conjunto del cual podemos seleccionar un elemento para que la proposición abierta sea verdadera se llama conjunto de sustitución o *dominio de la variable*.

EJEMPLO:

Encuentre el conjunto solución que haga verdadera a la proposición abierta $x \neq 2$; siendo el dominio de la variable el conjunto de los números naturales.

Solución:

El conjunto solución de la proposición abierta $x \neq 2$ es

$$\{1,3,4,5,6,7,...\}$$

EJEMPLO:

Encuentre el conjunto solución que haga verdadera a la proposición abierta $n+4 = 7$; siendo el conjunto sustitución o dominio de la variable de los números irracionales.

Solución:

El conjunto solución de la proposición abierta $n+4 = 7$ es $\emptyset$, puesto que no existe un número irracional que sumado con 4 nos de 7.

En el caso de que en este último ejemplo nos dijeran que el dominio de la variable fuera el conjunto de los números racionales o enteros, el conjunto solución sería $\{3\}$. ¿Podrías decir para qué otro dominio de n el conjunto solución es $\emptyset$?

Cabe hacer las siguientes observaciones:

a) *Una variable* es un símbolo que colocamos en lugar del nombre de cualquier elemento de un conjunto de sustitución.

b) *Una proposición abierta* es una proposición que contiene una o más variables.

c) *El conjunto solución* de una proposición abierta es el subconjunto del dominio de la variable que hace cierta la proposición.

AUTOEVALUACION 4.

En cada uno de los problemas siguientes se da una proposición abierta y el dominio de la variable. Hallar el conjunto solución de cada una de las proposiciones abiertas.

1.- $x+2 = 8$; $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

2.- $x-3 = 1$; $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

3.- $2x+7 = 15$; $\{2,4,6,8\}$

En cada una de las proposiciones abiertas que siguen, reemplácese la variable por el número indicado y diga si es verdadera o falsa la proposición.

4.- $x+6 = 10$; para x es 4.

5.- $2(n+3)<20$; para $n=7$

6.- $24 \nless 3y+5$; para $y = 6$

Hallar los conjuntos solución de cada una de las siguientes proposiciones abiertas si a) el dominio es el conjunto de los números enteros positivos, b) el dominio es el conjunto de los números irracionales y c) el dominio es el conjunto de los números naturales pares.

7.- $x+4<7$

8.- $p+3>p+2$

9.- $x+12=2x+6$

10.- $3x+5>17$

2-3 GRÁFICAS DE CONJUNTOS DE SOLUCIONES.

En una sección anterior hemos visto la forma de construir la gráfica de un conjunto de números. En esta sección veremos un método usado para el dibujo de las gráficas del conjunto solución de proposiciones abiertas. Consideremos los ejemplos siguientes:

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica del conjunto solución de la siguiente proposición abierta $y=4$; siendo el dominio de la variable el conjunto de los números racionales.

Solución:

Vemos que el conjunto solución de esta proposición abierta es $\{4\}$. Para dibujar la gráfica de este conjunto solución trazamos una recta numérica y localizamos en ella el número 4.

(Q)

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica del conjunto solución de la siguiente proposición abierta $2+y<5$; siendo el dominio de la variable el conjunto de los números enteros.

Solución:

Vemos que el conjunto solución de esta proposición abierta es

$$\{\ldots, -2,-1,0,1,2\}$$

para dibujar la gráfica de este conjunto solución trazamos una recta numérica y localizamos en ella las coordenadas de los puntos que pertenezcan al conjunto solución.

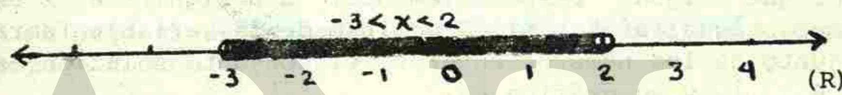
(Z)

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica del conjunto solución de la siguiente proposición abierta $-3<x<2$; siendo el dominio de x el conjunto de los números reales.

Solución:

La gráfica de esta proposición abierta consiste en todos los números que están entre -3 y 2, o sea que, el conjunto solución gráficamente es:



(R)

La circunferencia en -3 y 2 indica que estos puntos no están incluidos en la gráfica.

Si observamos detenidamente los ejemplos anteriores, vemos que, es muy importante conocer la clasificación de los números reales para dar correctamente el conjunto solución a través del dominio de la variable. Veámoslo más detenidamente a través del siguiente ejemplo.

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica de la siguiente proposición si a) el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros y b) el dominio de la variable es el conjunto de los números reales.

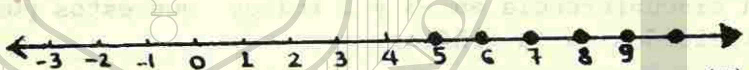
$$1 < x < 2$$

Solución:

a) Cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros, el conjunto solución es ϕ y la gráfica no tiene puntos en la recta numérica. ¿Por qué?

b) Cuando el dominio de la variable es el conjunto de los números reales, el conjunto solución consiste en todos los puntos intermedios entre 1 y 2 es decir,

Hay otros símbolos que son la combinación del "=" y ">" o "<", que son: "$\geq$" y "$\leq$", que significan "mayor que o igual" y "menor que o igual" respectivamente. $X \geq 5$ significa "x es mayor que o igual a 5". Si el dominio de la variable fuera el conjunto de los números enteros, el conjunto solución es {5,6,7,8,...}, y su gráfica es:



La punta de flecha rellena indica que esto podemos prolongarlo indefinidamente.

Si ahora el dominio de la variable fuera el conjunto de los números reales, la gráfica para la proposición abierta $x \geq 5$ sería:

Nótese que ahora la circunferencia del 5 está rellena debido a que el conjunto solución está el 5 inclusive.

Podemos además, expresar las proposiciones abiertas en notación conjuntista (que se vió en el capítulo anterior) usando la notación descriptiva o constructiva. Así, en los ejemplos anteriores tenemos que:

a) $y=4$, el dominio de la variable es el conjunto de los números racionales:

$\{y \mid y = 4,\ y \in Q\} = \{4\}$ (conjunto solución)

b) $2+y < 5$, el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros:

$\{y \mid 2+y < 5,\ y \in Z\} = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,\}$ (conjunto solución)

c) $-3 < x < 2$, el dominio de la variable es el conjunto de los números reales:

$\{x \mid -3 < x < 2,\ x \in R\}$

Se deja al estudiante, que determine los demás ejemplos en esta notación.

AUTOEVALUACION 5.

Dibujar las gráficas de los conjuntos solución de las siguientes proposiciones abiertas; si el dominio de la variable es el conjunto de los números cardinales.

1.- $x = 6$

2.- $x < 5$

3.- $2x \leq 8$

4.- $x \neq 4$

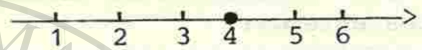
Determinar, en cada uno de los problemas siguientes, si el conjunto de puntos indicados es la gráfica de la proposición abierta dada. En todos los casos el dominio de la variable es el conjunto de los números naturales.

5.- $x+1=3$

6.- $x > 2$

7.- $3 < x < 7$

8.- $2x = 8$



Para cada gráfica escríbase una proposición abierta con los conjuntos solución dados por ella.

9.-

10.-

11.-

12.-

13.- Poner en notación descriptiva los primeros 4 problemas de la autoevaluación.

Dibujar las gráficas de los conjuntos que se dan a continuación:

14.- $\{x \mid 5 < x < 10,\ x \in R\}$

15.- $\{x \mid x \geq 2,$ x es un número natural par$\}$

16.- $\{x \mid 3 < x \leq 8,\ x \in N\}$

17.- $\{x \mid -3 < x \leq 2,\ x \in R\}$

18.- $\{x \mid x+1 = 7,\ x \in N\}$

19.- $\{y \mid y > 0,$ y es un número entero negativo$\}$

20.- $\{z \mid 1 < z \leq 2,\ z \in N\}$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 1.

AUTOEVALUACION 1.

1.- a) 13
b) 7
c) 12

2.- a) 2
b) 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
c) 4 y 8

AUTOEVALUACION 2.

1.- -12
2.- +200
3.- +15
4.- -8
5.- 10
6.- 6
7.- -2
8.- 0

9.- 9
10.- 1
11.- 20°
12.- 45°
13.- 16°
18.- 7, -25
19.- 24
20.- -17

AUTOEVALUACION 3.

1.- V
2.- F
3.- F
4.- V
5.- F

6.- V
7.- a) Ninguno
b) Infinito
8.- -4/10, -8/20, -16/40
9.- 10/36, 11/36

AUTOEVALUACION 4.

1.- $\{6\}$

2.- $\{4\}$

3.- $\{4\}$

4.- V

5.- F

6.- V

7.- a) $\{1,2,\}$ c) $\{2\}$

8.- Cualquier número para a),b) y c)

9.- a) $\{6\}$, b) $\emptyset$, c) $\{6\}$

10.- a) $\{5,6,7...\}$,
c) $\{6,8,10...\}$

AUTOEVALUACION 5.

5.- Falso.

6.- Falso.

7.- Verdadero.

8.- Verdadero.

9.- $\{x | x = 3, x \in N\}$

10.- $\{x | -4 < x < 1, x \in Z\}$

11.- $\{x | x \geq -2, x \in R\}$

12.- $\{x | -1 < x < 6, x \in Z\}$

13.- 1) $\{x | x = 6, x \in K\}$
2) $\{x | x < 5, x \in K\}$
3) $\{x | 2x \leq 8, x \in K\}$
4) $\{x | x \neq 4, x \in K\}$

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES.

INTRODUCCION.

Hemos analizado en forma más bien breve diversos conjuntos de números. Nuestra intención en la presente unidad es presentar el sistema de los números reales como un sistema lógico deductivo, esto es, dar algunas ideas no sólo de la naturaleza de los números mismos sino que también de las operaciones con estos números y de las propiedades que ellas poseen. Como en todo sistema deductivo, enunciaremos nuestros postulados y definiciones y bosquejaremos demostraciones para los teoremas más importantes, dejando otras como ejercicios al estudiante.

Si recordamos los métodos de demostración de la Geometría de la escuela secundaria, un hecho resalta, cada demostración incluye una hipótesis y una conclusión, siguiendo ésta de la hipótesis mediante un proceso de razonamiento lógico. Para convencernos de la verdad de nuestra conclusión debemos suponer que la hipótesis es verdadera o bien, haber demostrado ésta previamente. Esta hipótesis, a su vez, debe haberse establecido a partir de hechos comprobados con anterioridad. Este eslabonamiento no puede continuarse indefinidamente y debe haber un punto de partida. Es en este punto en que, en un sistema deductivo, nosotros decimos: "Suponemos que ciertos hechos son verdaderos". Este comienzo debe consistir de una cierta cantidad de palabras no definidas y de un conjunto de proposiciones no demostradas. En seguida, a medida que pasamos de una proposición a otra, seguimos reglas bien precisas. Estas leyes básicas de razonamiento, utilizadas intuitivamente por todos nosotros, rara vez se enuncian. Una de estas leyes expresa que toda proposición es, o bien verdadera, o bien falsa.

AUTOEVALUACION 4.

1.- { 6 }

2.- { 4 }

3.- { 4 }

4.- V

5.- F

6.- V

7.- a) {1,2,} c) {2}

8.- Cualquier número para a),b) y c)

9.- a){6} , b) Ø, c) {6}

10.- a) {5,6,7...},
c) {6,8,10...}

AUTOEVALUACION 5.

5.- Falso.

6.- Falso.

7.- Verdadero.

8.- Verdadero.

9.- $\{x | x = 3, x \in N\}$

10.- $\{x | -4 < x < 1, x \in Z\}$

11.- $\{x | x \geq -2, x \in R\}$

12.- $\{x | -1 < x < 6, x \in Z\}$

13.- 1) $\{x | x = 6, x \in K\}$
2) $\{x | x < 5, x \in K\}$
3) $\{x | 2x \leq 8, x \in K\}$
4) $\{x | x \neq 4, x \in K\}$

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES.

INTRODUCCION.

Hemos analizado en forma más bien breve diversos conjuntos de números. Nuestra intención en la presente unidad es presentar el sistema de los números reales como un sistema lógico deductivo, esto es, dar algunas ideas no sólo de la naturaleza de los números mismos sino que también de las operaciones con estos números y de las propiedades que ellas poseen. Como en todo sistema deductivo, enunciaremos nuestros postulados y definiciones y bosquejaremos demostraciones para los teoremas más importantes, dejando otras como ejercicios al estudiante.

Si recordamos los métodos de demostración de la Geometría de la escuela secundaria, un hecho resalta, cada demostración incluye una hipótesis y una conclusión, siguiendo ésta de la hipótesis mediante un proceso de razonamiento lógico. Para convencernos de la verdad de nuestra conclusión debemos suponer que la hipótesis es verdadera o bien, haber demostrado ésta previamente. Esta hipótesis, a su vez, debe haberse establecido a partir de hechos comprobados con anterioridad. Este eslabonamiento no puede continuarse indefinidamente y debe haber un punto de partida. Es en este punto en que, en un sistema deductivo, nosotros decimos: "Suponemos que ciertos hechos son verdaderos". Este comienzo debe consistir de una cierta cantidad de palabras no definidas y de un conjunto de proposiciones no demostradas. En seguida, a medida que pasamos de una proposición a otra, seguimos reglas bien precisas. Estas leyes básicas de razonamiento, utilizadas intuitivamente por todos nosotros, rara vez se enuncian. Una de estas leyes expresa que toda proposición es, o bien verdadera, o bien falsa.

En las secciones 2-8 y 2-9 se da el listado de los otros axiomas de los números reales considerados como los axiomas de campo y de orden. Copia los axiomas en tu cuaderno, tratando de explicar con tus propias palabras lo que significa cada uno y tratando de recordarlos por los números, ya que más adelante los usaremos en las demostraciones de teoremas, indicando nada más su número (Cap.3). Te recomendamos que: 1) copies en tu cuaderno todas las definiciones y 2) enlistes las propiedades de igualdad y de campo de los números reales.

2.- Las autoevaluaciones que se incluyen en el material de estudio se componen de dos partes. La primera parte consta de preguntas acerca del material expuesto, con el fin de que el estudiante recuerde lo más importante y que comprenda mejor lo que estudió. La segunda parte lo componen problemas donde el alumno debe ser capaz de aplicar los conocimientos adquiridos.

3.- El ritmo de trabajo para esta unidad es el siguiente:

1er. día - Estudiar las secciones 2-4 y 2-5, copiar las definiciones y propiedades de igualdad y contestar la Autoevaluación 1.

2o. día - Estudiar las secciones 2-6 y 2-7, copiar proposiciones y contestar la Autoevaluación 2.

3er. día - Estudiar las secciones 2-8 y 2-9 enlistando los axiomas de campo y de orden y resolver las autoevaluaciones 3 y 4.

4o. día - Repaso.

4.- Como práctica de esta unidad resuelve el Laboratorio asignado por tu maestro asesor.

NÚMEROS REALES.

LECCIÓN 2.

2-4 LOS NÚMEROS REALES; UN SISTEMA DEDUCTIVO.

El conjunto de los números reales (R) es la colección de **números que se ha utilizado durante muchos años.** Cuando era **niño, primero empezó a contar, y así se familiarizó** con los **números naturales (N) {1, 2, 3...}**. Así mismo aprendió a - **sumar y multiplicar pares de números naturales.**

Luego, al trabajar con la suma de pares de números naturales, digamos m y M, se descubrió que no siempre era posible **encontrar en los números naturales un número** que al ser su**mado a m diese el número M.** Por ejemplo, no hay número natu**ral que sumado a 4 de como suma 4.** Por esta razón se definió **el número cero, que se denota por 0,** como el número con la - **propiedad de que $m + 0 = m$, en donde** m es cualquier número na**tural. A este nuevo conjunto de números se le llamó** el con-- **junto de los números cardinales (K)**, de tal manera que, $K = \{0\} \cup \{1, 2, 3...\}$ **(enteros no negativos)**

Posteriormente para cada número natural n, se inventó un **número $-n$, llamado el inverso aditivo de** n, con la propiedad **de que $n + (-n) = 0$. Estos números,** junto con los elementos **de K, formaron el conjunto de los números enteros** (Z).

$$Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$$

En base a este nuevo conjunto, a los elementos de N, también se les llama enteros positivos. De igual manera, otro nombre para el inverso aditivo de un número natural es entero negativo.

Los más importantes subconjuntos de R aparecen abajo.

N = {1, 2, 3...} (conjunto de los números naturales o conjunto de los enteros positivos).

K= {0, 1, 2, 3...} (conjunto de los números cardinales o conjunto de los enteros no negativos).

Z= {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...} (conjunto de los enteros).

{-1, -2, -3,...} (conjunto de los enteros negativos).

{0, -1, -2, -3...} (conjunto de los enteros no positivos)

$\{x \mid x = 2m, m \in Z\}$ (conjunto de los enteros pares).

$\{x \mid x = 2m+1, m \in Z\}$ (conjunto de los enteros impares).

La ventaja de usar este conjunto de números y no limitarnos a K, es que resulta factible la resta de cualquier número entero de otro entero. Con solo números positivos, escogidos convenientemente, tal que 3-5, la sustracción no tendría sentido.

Más tarde se observó que se había definido una operación inversa de la suma, pero no había ninguna para la multiplicación. Sin embargo, había necesidad de que en una operación sobre los enteros *m* y *n* resultase un número *q* que al multiplicarse por *n* se obtuviera el producto *m*.

División: $\frac{m}{n} = m \div n = m : n = q \leftrightarrow n \cdot q = m$

14:2 = 7 ya que 2.7 = 14; 20:(-4) = -5, puesto que (-4).(-5)= 20. Pero esta operación no se podía aplicar a cualquier par de enteros. Por ejemplo, no había solución para 3:12 ó 15:4. Para solucionar esto se definió el conjunto de los números racionales (Q). Se llamó números racionales a la colección completa que comprende los números enteros positivos y negativos, el cero y las fracciones positivas y negativas.

$$Q = \{ \frac{a}{b} \mid a,b \in Z ; b \neq 0 \}$$

Por supuesto, se deseaba entonces que los axiomas aceptados para los enteros se aplicasen a los elementos del conjunto aumentado Q. Consecuentemente, se demostraron teoremas necesarios que permitiesen, por una parte, encontrar otros números racionales equivalentes y que sirviesen para resolver ecuaciones cuyos conjuntos solución fuesen subconjuntos de Q.

Con frecuencia resultaba conveniente usar fracciones decimales para representar números racionales y se demostró que cada número racional se podía escribir como un entero, o decimal periódico infinito. Por ejemplo:

$\frac{6}{2} = 3$; $\frac{4}{3} = 1.333...$; $\frac{3}{4} = 0.7500....$

Recíprocamente, cada decimal periódico infinito se podía escribir como un número racional $\frac{a}{b}$; donde a, b $\in$ Z y b $\neq$ o.

Por último se descubrieron número tales que, no eran enteros, ni decimales periódicas infinitas, ni se podían expresar como a/b. Consideremos la expresión 0.12345678... en donde los tres puntos suspensivos indican que sigue colocando los números dígitos en las posiciones decimales, a la derecha del número previo. Este seguramente nunca será periódico. Otro ejemplo es 0.5050050005..., en donde después de cada 5 sucesivo, se tiene un 0 más que el grupo anterior al 5.

También se demostró que no hay solución en Q para la ecuación $x^2 = 2$. Un número tal x, no era un entero y, además, no se podía representar como un decimal periódico infinito. Sin embargo, se podía encontrar aproximaciones decimales a los números racionales, por ejemplo una aproximación de x, sería.

$$(1.41)^2 = 1.9881$$
$$(1.414)^2 = 1.999396$$
$$(1.4142)^2 = 1.9996064$$
$$(1.4142135)^2 = 1.99999982358225$$

Esto condujo a aceptar que x, tal que $x^2 = 2$, se podía definir mediante el numeral 1.4142135... (en donde los puntos suspensivos indican que el 5 está seguido por un número ilimitado de dígitos). Se sabía que x no era un número racional, por tanto, no podía existir un conjunto de dígitos repetido. Tal expresión quizá se haya denominado número decimal infinito no periódico. Se reconocía que había un número infinito de ellos y a su conjunto se le llamó conjunto de los números irracionales (S). Desafortunadamente, no estamos capacitados para definir un número irracional en término de los números racionales y usando solo el lenguaje matemático que existe actualmente. Los términos *decimal infinito no periódico* y *número irracional* deben aceptarse como no definidos. Lo que hemos hecho es describir ciertas características de S y de sus elementos para ayudar a aclarar la definición de números irracionales.

Obsérvese que los conjuntos Q y S son ajenos. Si formamos la unión de Q U S, obtenemos un conjunto que llamaremos de números reales (R). De tal modo que, a través de lo anterior, podemos crear la definición siguiente:

Definición de números reales: La unión del conjunto de todos los números racionales y el conjunto de todos los números irracionales.

Nos encontramos ahora en situación de presentar un conjunto de axiomas que en ningún caso son únicos pero que definen o caracterizan el conjunto de los números reales. Al considerar estos axiomas quedará claro que muchos de ellos son verificados en forma individual por otros sistemas, haciéndose con esta advertencia aún más claro su significado.

AUTOEVALUACION 1.

Dado el conjunto $P = \{2,5,10,17,26,37,65,82\}$

1.- ¿Cuál es el subconjunto formado por números primos?

2.- ¿Cuál es el sunconjunto formado por los números divisibles por 3?

3.- ¿Cuál es el subconjunto formado por los números cuadrados perfectos?

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son infinitos y cuáles finitos?

4.- Todos los números naturales que son múltiplos de 6.

5.- Todos los números naturales que no son múltiplos de 6.

6.- $\{x|x$ es un número natural par$\}$

7.- $\{x|x$ es cualquiera del primer millón de números naturales$\}$

8.- $\{x|x \in Q$ y x está entre 3 y 4$\}$

9.- $\{x|x \in Z$ y x está entre 1 y 2$\}$

10.- $\{x|x \in Q$ y x está entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}\}$

11.- Todos los números naturales que son múltiplos de 6 que son menores que 6000.

12.- Todos los números de Z que son múltiplos de 6 que son menores que 6000.

13.- $\{x|x \in K$ y x está entre 3 y 3 billones$\}$

14.- $\{x|x \in K$ y x es menor que 3 billones$\}$

Analizar las afirmaciones siguientes, marcando si son verdaderas o falsas:

15.- $K \subset N$	20.- $Z \cup Q = Q$
16.- $K \subset Q$	21.- $N \cap K = \{0\}$
17.- $Z \subset Q$	22.- $-3 \in K$
18.- $\{\sqrt{2}\} \subset Q$	23.- Si $a \in Q$, entonces $a \in R$
19.- $Q \cup S = R$	24.- Si $a \in Z$, entonces $a \in Q$

Explicar por qué los números siguientes son racionales:

25.- 0.3	28.- 3.1416
26.- 3.16	29.- 15%
27.- $\frac{1}{7}$	30.- 0.5%

Encontrar el número decimal que es equivalente al número dado:

31.- 7/8	34.- 7/11
32.- 3/500	35.- 14 2/5%
33.- 5 2/3	36.- 102%

Encontrar una fracción que sea equivalente a cada uno de los números decimales periódicos dados.

EJEMPLO.

Hallar la fracción equivalente a 0.05252...

Solución: Sea $n = 0.05252$

Escribamos dos números con la misma parte decimal. Esto lo podemos lograr multiplicando n primero por 10 y luego por 1000:

$$10\ n = 0.5252...$$
$$1000\ n = 52.5252...$$

Puesto que las partes decimales son las mismas, la diferencia entre 1000 n y 10 n es un número natural.

$$1000\ n - 10\ n = 52.5252... - 0.5252...$$
$$990\ n = 52$$
$$n = \frac{52}{990} = \frac{26}{495}$$

37.- 0.444...

38.- 0.707070...

39.- 1.21414...

40.- Explicar qué significa la afirmación de que π no es un número racional.

2-5 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD (=).

En el capítulo I analizamos la igualdad de conjuntos y el uso del símbolo = en lo relativo a conjuntos. Necesitamos ahora hacer ciertas suposiciones acerca de la relación de igualdad respecto al conjunto de los números reales.

Generalizando, definiremos la igualdad de los números reales como sigue:

Definición de igualdad: Dos símbolos, a y b, representando números reales son iguales, a = b, sí y sólo si representan el mismo número real.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades:

Propiedad 1. La propiedad reflexiva de la igualdad.

$$a = a$$

Este axioma parece ser trivial, pero no lo es. Lo que estamos haciendo es poner las cosas lógicamente compatibles. Simplemente decimos que el significado de un símbolo o un numeral no cambia sin razón.

Propiedad 2. La propiedad de simetría de la igualdad.

Si $a, b \in R$ *y si* $a = b$, *entonces* $b = a$.

Esto es importante, porque significa que una igualdad puede leerse de derecha a izquierda igual que de izquierda a derecha. Significa que los números son los mismos aunque los numerales sean diferentes. Brevemente, los dos numerales son nombres diferentes para la misma cosa.

Propiedad 3. La propiedad transitiva de la igualdad.

Si $a, b, c, \in R$ *y si* $a = b$ *y* $b = c$, *entonces* $a = c$.

Esto es una propiedad o hipótesis muy útil, porque puede extenderse a más números. Por ejemplo, si a=b, b=c, c=d, y d=e, entonces a = e.

Propiedad 4. La propiedad de sustitución de la igualdad.

Si $a, b \in R$ y si $a = b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión, enunciado específico o proposición abierta. Tal sustitución no cambia el valor de la expresión ni altera la veracidad del enunciado específico ni el conjunto de verdad de la proposición abierta.

Estas propiedades pueden parecer triviales, pero son extremadamente importantes en el desarrollo lógico de este sistema

matemático. La primera de estas propiedades, la propiedad reflexiva, ciertamente parece obvia, pero debe destacarse que no todas las relaciones sobre el conjunto de nuestros números reales tienen esta propiedad. Por ejemplo, no es cierto que $a < a$ para cada número real. Nótese también que si $a, b \in R$ y si $a < b$, no se sigue que $b < a$. Es decir, que la relación *menor que* no tiene la propiedad de simetría.

2-6 OPERACIONES BINARIAS.

Frecuentemente trabajaremos con conjuntos de objetos en los que el orden en que aparezcan es significativo. El más sencillo de dichos conjuntos contiene solo dos objetos y se llama par ordenado o pareja ordenada.

Definición de par ordenado: Se dice que un par de objetos a y b es un par ordenado si uno de ellos se identifica como el primer objeto y el otro como el segundo.

Si a es el primer objeto y b el segundo, el par ordenado se representa por (a, b). Por ejemplo (2,1) es un par ordenado de números naturales en los que 2 es el primer término y 1 el segundo.

Cuando ponemos 2 + 1 = 3, estamos asociando, con el par ordenado (2,1), el número 3. No asociaremos ningún otro número natural con este par ordenado en esta situación puesto que conocemos las leyes de la suma. Ya que la suma asocia con cada par ordenado de números naturales uno y solo un número natural, decimos que la suma es una operación binaria sobre el conjunto de los números naturales. También cuando multiplicamos dos números naturales, el resultado es un número natural; en el mismo par ordenado 2 x 1 = 2.

Definición de operación binaria: Sea $P = \{a,b,c,...\}$ un conjunto cualquiera. La operación * (léase asterisco) es una operación binaria en P si y sola mente si a cada par ordenado (a,b), donde a y b son elementos de P le corresponde un elemento único $a * b$ de P.

En esta definición hay varios puntos delicados que se deben observar:

1) El orden de a y b puede ser importante porque (a,b) es un par ordenado. Así puede suceder que $a * b \neq b * a$.

2) La operación tiene que estar definida para todos los pares (a, b), donde a y b son elementos de P.

3) El elemento resultante $a * b$ tiene que ser un elemento de P.

La suma, la multiplicación y la sustracción en R son operaciones binarias. Pero, por ejemplo la división no es una operación binaria en R, porque el par ordenado (a,o), esto es, (a ÷ o) no está definida. No obstante, la división es una operación binaria en los números reales diferentes de cero.

En cambio, cuando restamos un número natural de otro número natural, el resultado no es forzosamente un número natural; por ejemplo, 3 - 8 no nos da un número natural, ni tampoco nos lo da 5 - 5. También, cuando dividimos un número natural por otro, el resultado puede ser o no, otro número natural: por ejemplo, 6 ÷ 3 es un número natural, pero ni 6 ÷ 5 ni 3 ÷ 6 son números naturales.

Decimos que el conjunto de los números naturales es cerrado con respecto a las operaciones, adición y multiplicación, pero no es cerrado con respecto a las operaciones de sustracción y división.

Definición de Cerradura: Un conjunto es *cerrado* bajo una operación si el elemento que se obtiene al aplicar dicha operación a cualquier par de elementos del conjunto es también un elemento del conjunto dado.

En nuestro desarrollo de los números reales deseamos suponer que la suma y el producto son operaciones binarias sobre R. Tal hipótesis significaría que el conjunto de los números reales fuese cerrado ante dichas operaciones.

De lo anterior se expone el axioma siguiente de R.

Axioma 1. Las leyes de cerradura. Para cualesquier $(a,b) \in R$, $a + b \in R$ $a \cdot b \in R$

Esta propiedad de cerradura, puede parecer tan sencilla, pero no todos los conjuntos son cerrados con respecto a una operación dada. Para ello, daremos algunos ejemplos donde no se cumple esta propiedad:

EJEMPLOS.

La suma de dos números impares no es un número impar.

La suma de dos números primos no es necesariamente primo, etc.

2-7 PROPIEDADES ADITIVA Y MULTIPLICATIVA DE LA IGUALDAD.

Las siguientes propiedades que vamos a demostrar, son consecuencia inmediata de las definiciones que hemos hecho y de las propiedades en que hemos convenido hasta ahora en esta lección. Recuérdese que por ahora tenemos éstas como las únicas propiedades conocidas de los números reales.

Propiedad 5. Propiedad aditiva de la igualdad.

Para todo número real a,b,c y d, si a=b y c=d, entonces $a + c = b + d$

Demostración: Hipótesis: a=b y c=d.
Conclusión: a+c = b+d.

Proposición	Justificación
1. a,b,c,d ε R	1. Dado.
2. a + c ε R	2. Axioma 1.
3. a + c = a + c	3. Propiedad 1.
4. a = b	4. Dado.
5. a + c = b + c	5. Propiedad 4.(*a* se sustituye por *b* en el lado derecho de la igualdad del paso 3).
6. c = d	6. Dado.
7. Por tanto, a+c=b+d	7. Prop. 4 (*c* se sustituye por *d* en el lado derecho de la igualdad del paso 5).

Propiedad 6. Propiedad multiplicativa de la igualdad.

Para todo número real a,b,c, y d, si a=b y c=d, entonces a . c = b . d

Demostración: Hipótesis: a=b y c=d.
Conclusión: ac = bd.

Proposición	Justificación
1. a,b,c,d, ε R	1. Dado.
2. a . c ε R	2. Axioma 1.
3. a . c = a . c	3. Propiedad 1.
4. a = b, c = d	4. Dado.
5. Por tanto, a.c=b.d	5. Propiedad 4.(*a* se sustituye por *b* y *c* se sustituye por *d* en el lado derecho de la igualdad del paso 3).

Dado que c=c para cualquier c ε R, ambas propiedades demostradas nos permiten escribir:

Si a,b,c ε R y a = b, entonces a + c = b + c y
Si a,b,c ε R y a = b, entonces a . c = b . c

Estas dos propiedades de los números reales se conocen como la propiedad aditiva de la igualdad y la propiedad multiplicativa de la igualdad, respectivamente.

Se pueden usar otros conjuntos de proposiciones y justificaciones igualmente válidas para demostrar las propiedades. Por ejemplo, la propiedad 5, pasos 1, 4 y 6 podían haberse combinado en un solo paso. No hay que olvidar que el propósito de una demostración es convencer plenamente de que cierta proposición es verdadera. Si usted cree que puede realizar este propósito en 5 pasos en vez de 7 ó 15, tiene completa libertad de hacerlo. Sin embargo, existe una recomendación: No espere que quien lea la demostración complete los pasos que faltan en la argumentación; es decir una demostración válida debe ser completa, sin importar la forma.

AUTOEVALUACION 2.

1.- ¿Son la adición, la sustracción, la multiplicación y la división operaciones binarias en el conjunto de los enteros positivos (N)?

2.- ¿Son la unión y la intersección de conjuntos operaciones binarias? De ejemplos.

3.- ¿Es el complemento de un conjunto una operación binaria?

4.- ¿Cuántos elementos intervienen en una operación binaria?

5.- ¿Cuál es el entero que la operación binaria suma, definida en el conjunto de los enteros, asigna al par (5,7)?

6.- ¿Por qué no es la sustracción una operación binaria en N? Dar un contra ejemplo.

7.- Nombrar un conjunto en el cual la sustracción es una operación binaria.

8.- ¿Por qué no es la división una operación binaria en N?

9.- Nombrar un conjunto en el cual la división es una operación binaria.

Decir si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes. Razonar la pregunta.

10.- Todo número real tiene una representación decimal.

11.- El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los enteros.

12.- Todo número cardinal puede escribirse como una fracción.

13.- Toda fracción representa un entero.

14.- El decimal 0.137 representa un número irracional.

15.- ¿Cuáles de los siguientes números son números: a) naturales, b) enteros, c) racionales, d) irracionales y e) reales.

$$-4, \quad 0, \; -\frac{1}{3}, \; \sqrt{5}, \quad \frac{3}{8}, \quad 2, \quad \pi$$

La verdad de cada una de las proposiciones dadas, depende de una de las propiedades, que hasta aquí, hemos visto. En cada caso enunciar en forma completa la propiedad que corresponde. Suponer que x, y, z ε R.

16.- Si $x = \sqrt{3}$ y $y = z$, entonces $x + y = \sqrt{3} + z$

17.- Si $x = y$ y $z = 6$, entonces $x \cdot z = y \cdot 6$

18.- Si $x + y = z$ y $z = 6$, entonces $x + y = 6$

19.- Si $6 = 2 + x$ y $6 = z$, entonces $z = 2 + x$

20.- Si $6 = 2 + x$ y $6 = z$, entonces $6 + 6 = (2 + x) + z$

Dar la justificación de cada proposición en las demostraciones que siguen.

21.- *Demostrar:* Si a,b,c, ε R y a = b, entonces a+c = b+c

Proposición	Justificación
1. a,b,c, ε R y a = b	1. ________
2. a + c ε R	2. ________
3. a + c = a + c	3. ________
4. Por tanto, a+c = b+c	4. ________

22.- *Demostrar:* Si a,b,c, ε R y a=b, entonces c.a = c.b

Proposición	Justificación
1. a,b,c ε R y a = b	1. ________
2. c . a ε R	2. ________
3. c . a = c . a	3. ________
4. c . a = c . b	4. ________

23.- Si a,b,c, ε R y si a = b, entonces a . c = b . c (Sugerencia: aplicar los pasos del problema 22).

24.- Si a,b,c, ε R y si a = b, entonces c + a = c + b.

2-8 AXIOMAS DE CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES (R).

Además de las propiedades aceptadas en relación con la igualdad, hemos identificado el conjunto de números con los cuales vamos a trabajar, esto es, los números reales. En otras palabras, hemos supuesto que existen tales números. El axioma de cerradura afirma que cada par de números reales x, y, tienen una suma única llamada x + y y un producto único llamado xy. Así mismo, x + y, xy ε R.

Necesitamos ahora hacer ciertas suposiciones concernientes al comportamiento de dichos números respecto de las operaciones de suma y multiplicación. Admitir que la suma de dos números existe, nos dice $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ son números reales, pero ello no nos autoriza a sustituir $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ por $5\sqrt{2}$.

Las leyes que necesitamos aquí y otras necesarias para cómputos con números reales se desarrollarán usando combinaciones de nuestras anteriores propiedades y las que a continuación ofrecemos. Cabe observar que por ahora tenemos éstas como las únicas propiedades conocidas de R.

Axioma 1. Las leyes de cerradura. Para cualesquier $a, b \in R$, $a + b \in R$ y $a \,.\, b \in R$

Este axioma nos dice que la adición y la multiplicación de dos números reales dan números que también pertenecen a R.

Axioma 2. Las leyes conmutativas. Para cualesquier $a, b \in R$, $a+b = b+a$ y $a.b = b.a$

Este axioma afirma que la suma o el producto de cualesquiera dos números reales no resulta afectado por el orden en que se sumen o se multipliquen. Así, $3+7 = 7+3$ y $7.3 = 3.7$

Sin embargo este axioma no permite afirmar que $(3+4)+5= 3+(4+5)$. Aquí no se está cambiando el orden de la suma; se está cambiando la agrupación. Debemos ser capaces de hacer esta afirmación; pero, ésta se sigue del axioma 3.

Axioma 3. Las leyes asociativas. Para cualesquier $a,b,c \in R$, $(a+b)+c = a+(b+c)$ y $(a.b)c = a(b.c)$

Este axioma nos permite combinar 3 elementos de R. Podemos ya definir la suma de $a + b + c$ de tres números reales, puesto que, originalmente solo sabíamos sumar dos números $a + b$ o multiplicar dos números $a \,.\, b$, por ser éstas, operaciones binarias.

Si escribieramos los números 2, 5 y 8 en este órden: 2,5,8, queremos encontrar el valor de $2 + 5 + 8$ agrupando:

$$(2 + 5) + 8$$

Ahora sumamos $2 + 5 = 7$ y, después, $7 + 8 = 15$, Parece, pues, que:

$$2 + 5 + 8 = 15$$

Es posible agrupar los sumandos de otro modo,

$$2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$$

La combinación de la conmutatividad y la asociatividad de los números reales nos permite afirmar que, la suma o producto de tres números reales es independiente del orden en que se escriban.

Axioma 4. La ley distributiva. Para cualesquier $a, b, c \in R$, $a(b + c) = a \,.\, b + a \,.\, c$

$$(b + c)a = b \,.\, a + c \,.\, a$$

Este axioma expresa que obtenemos el mismo resultado si multiplicamos un cierto número real por la suma de dos números reales que si multiplicamos el número por cada uno de los dos y enseguida sumamos.

Además, el axioma distributivo combinado con la propiedad de simetría de la igualdad nos permite afirmar que:

$$a \,.\, b + a \,.\, c = a(b + c)$$

$$b \,.\, a + c \,.\, a = (b + c)a$$

En otras palabras, este axioma se usa a veces para escribir el producto de dos números reales como la suma de dos números reales, y en otras ocasiones, para escribir la suma de dos números como un producto.

Antes de ver los axiomas que faltan, necesitamos hacer una pausa para permitir al estudiante familiarizarse mejor con los axiomas expuestos hasta aquí.

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Demuestre que el conjunto de los números impares no es cerrado bajo la adición citando un contraejemplo.

2.- Demuestre que el conjunto de los números naturales no es cerrado bajo la división citando un contraejemplo.

3.- Demuestre que el conjunto de los números primos no es cerrado bajo la multiplicación dando un contraejemplo.

Diga si cada conjunto es cerrado bajo cada una de las cuatro operaciones aritméticas: 1) adición; 2) sustracción; 3) multiplicación; y 4) división (excepto para división entre cero).

4.- El conjunto de números naturales (N).

5.- El conjunto de números enteros (Z).

6.- El conjunto de números racionales (Q).

7.- El conjunto de números reales (R).

8.- Si p y q representan números naturales, ¿cuáles de las siguientes expresiones representarán siempre otro número natural?

a) $p - q$ b) $p \div q$
c) pq d) $p + q$

9.- En el caso de que las anteriores expresiones no representen siempre un número natural ¿Qué restricciones debemos hacer sobre p y sobre q de tal modo que el resultado de la operación indicada represente un número natural.

Escribir para cada uno de los que siguen, si el conjunto descrito es cerrado con respecto a la operación indicada. Razonar la respuesta.

10.- {1,2 } ; multiplicación.

11.- Los números impares; multiplicación.

12.- Todos los múltiplos de 3; multiplicación.

13.- Los números impares; adición.

14.- ¿Cuáles de las siguientes actividades son conmutativas?
a) Ponerse los calcetines y después los zapatos.
b) Ir a una fiesta y después al cine.
c) Leer un libro y escribir un ensayo sobre él.
d) Hacer tu tarea y después ver televisión.

15.- ¿Qué operaciones de la aritmética de los números reales son conmutativas?

16.- Mencione ejemplos de operaciones que no son conmutativas.

17.- ¿Qué operaciones de la aritmética son asociativas en el conjunto de los números reales?

18.- ¿Qué operaciones de la aritmética no son asociativas en el conjunto de los números reales? Dar contraejemplos.

19.- ¿Cuáles son las operaciones binarias de la aritmética de los números reales que poseen la propiedad conmutativa y asociativa?

Justificar cada proposición, dando el nombre de un axioma o teorema.

20.- $2\ (3 + 5) = (2)(3)+(2)(5)$

21.- $\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

22.- $7 + (3 + \sqrt{2}) = (7 + 3) + \sqrt{2}$

23.- $(\sqrt{2} + 1)\ (3 + 11) = \sqrt{2}\ (3 + 11) + 1 \cdot (3 + 11)$

24.- $7 + (3 + \sqrt{2}) = 7 + (\sqrt{2} + 3)$

25.- $xy + x\ (y + z) = xy + (xy + xz)$

26.- $x\ [\ (y + z) + a\ ] = x\ (y + z) + x \cdot a$

27.- $x + (y + z) = x + (z + y)$

28.- $x + y = z$, entonces $(x + y) + z = z + z$

29.- Si $x = \sqrt{2}$, $\sqrt{2} = y$, entonces $x = y$

30.- $x = a$, entonces $x + 3 = a + 3$

31.- $x + 2 = \sqrt{2}$, entonces $3(x + 2) = 3\sqrt{2}$

Llenar los espacios en blanco para que las operaciones sean casos especiales de exactamente uno de los axiomas o teoremas. Dar el nombre del axioma o teorema.

32.- $3\ (5 + \sqrt{2}) = 3 \cdot \_\_\_ + \_\_\_ \cdot \_\_\_$

33.- $(7 + 1/2) + 2 = 7 + (\_\_\_ + \_\_\_)$

34.- $8 \cdot (5 \cdot 7) = \_\_\_ \cdot (\_\_\_ \cdot \_\_\_)$

35.- $[\ 2\ (5 + 7)\ ] \cdot \sqrt{2} = \_\_\_ \cdot (\_\_\_ + \_\_\_) \cdot \_\_\_$

36.- $(8 + 3) + 5 = \_\_\_ + (\_\_\_ + \_\_\_)$

37.- $\_\_\_ \cdot (3 + 7) = 8 \cdot \_\_\_ + 8 \cdot \_\_\_$

38.- $4 \cdot 8 + 3 \cdot \_\_\_ = (\_\_\_ + \_\_\_) \cdot 8$

En los problemas siguientes, dar las justificaciones para las proposiciones de las demostraciones.

39.- *Demostrar:* $(x+y) + (a+b) = (a+x) + (y+b)$

Demostración:

$(x + y) + (a + b)$

$= [\ (x + y) + a\ ] + b$ 1. ___

$= [\ a + (x + y)\ ] + b$ 2. ___

$= [\ (a + x) + y\ ] + b$ 3. ___

$= (a + x) + (y + b)$ 4. ___

40.- *Demostrar:* $(xy) \cdot (2z) = 2\ [\ (xy)\ z\ ]$

Demostración:

$(xy) \cdot (2z) = [\ (xy) \cdot 2\ ]\ z$ 1. ___

$= [\ 2 \cdot (xy)\ ]\ z$ 2. ___

$= 2 \cdot [\ (xy) \cdot z\ ]$ 3. ___

41.- *Demostrar:* $(4a + 3) + 2\ (a + 2) = 6a + 7$ (supóngase que: $2.2=4$, $3+4=7$ y $4+2=6$ son hechos conocidos.)

Demostración:

$(4a + 3) + 2\ (a + 2)$

$= (4a + 3) + (2a + 2 \cdot 2)$ 1. ___

$= (4a + 3) + (2a + 4)$ 2. Hecho conocido.

$= (4a + 3) + (4 + 2a)$ 3. ___

$= [\ (4a + 3) + 4\ ] + 2a$ 4. ___

$= [\ 4a + (3 + 4)\ ] + 2a$ 5. ___

$= (4a + 7) + 2a$ 6. Hecho conocido.

$= 2a + (4a + 7)$ 7. ___

$= (2a + 4a) + 7$ 8. ___

$= (2 + 4)\ a + 7$ 9. ___

$= 6a + 7$ 10. Hecho conocido.

Escribir las demostraciones de las proposiciones dadas, mostrando cada paso y usar solo un axioma o teorema en cada paso.

42.- $(x + 2) + z = z + (x + 2)$

43.- $[(x + y) + 5] + z = (x + 5) + (y + z)$

44.- $(2b)c = b\ (2c)$

45.- $3\ (7x) = 21x$ (supóngase que $3.7 = 21$, como un hecho conocido.

46.-$2\ [a + (b + c)] = (2a + 2b) + 2c$

47.- $a\ (b + c + d) = ab + ac + ad$.

48.- $(a + 5)\ (a + 7) = a^2 + (12a + 35)$ (supóngase que $a\ .\ a = a^2$ como un hecho conocido.)

A medida que avanzamos y que el estudiante se acostumbra a usar los axiomas, debemos hacer ciertos convenios que haga menos laborioso el proceso. Enunciaremos ahora los otros dos postulados de campo: el *axioma de la identidad* y el *axioma del inverso*. Después, con los seis postulados, podemos demostrar los teoremas necesarios para desarrollar las técnicas de operación de los elementos de un campo, en nuestro caso el de los números reales.

Axioma 5. Los elementos de identidad. Para cualesquier $a \in R$, existe un número real llamado *cero*, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a$$

Para cualesquier $a \in R$, existe un número real no nulo llamado *uno* y denotado con 1, tal que

$$a\ .\ 1 = a$$

El número 0 es llamado *el elemento de identidad para la adición*, el número 1 es llamado *el elemento de identidad para la multiplicación*. Puesto que 0 y 1 pertenecen a R, por Axioma 2, tenemos

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad y \qquad a\ .\ 1 = 1\ .\ a = a$$

Axioma 6. Los elementos inversos. Para cualesquier

$a \in R$, existe un número real denotado con $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0$$

Para cualesquier número no nulo (distinto de 0) $a \in R$, existe un número real denotado por $1/a$, tal que

$$a\ .\ \frac{1}{a} = 1$$

El número $-a$ es llamado el *inverso aditivo de a*, el *negativo de a*, o *menos a*. El número $1/a$ es llamado el *inverso multiplicativo de a* o el *recíproco de a*.

Por el Axioma 2, tenemos

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \quad y \quad a\ .\ \frac{1}{a} = \frac{1}{a}\ .\ a = 1$$

Los elementos idénticos y los inversos son únicos y la demostración de ello es relativamente simple.

Teorema 1. La identidad aditiva de 0 es única.

Demostración: Deseamos mostrar que 0 es el único elemento de identidad para la suma. Supongamos que hay otra identidad aditiva b. Tenemos entonces

1.	$0 + b = 0$	1. Hipótesis.
2.	$0 + b = b$	2. Axioma 5 (para la suma). y Ax 2
3.	Por tanto, $b = 0$	3. Propiedad 3.

Teorema 2. El idéntico multiplicativo 1 es único.

Teorema 3. El inverso multiplicativo de cualquier número no nulo $a \in R$ es único.

Demostración: Supongamos ahora que algún número b es multiplicativo inverso de un número real, a, no nulo. Tenemos entonces:

1.	$a, b \in R$	1. Axioma 1
2.	$a\ .\ b = 1$	2. Hipótesis
3.	$1/a\ (a.b) = 1/a$ (1)	3. Propiedad 6.
4.	$(1/a.a).b = 1/a$	4. Axioma 3

5. $1 \cdot b = 1/a$ 5. Axioma 6
6. $b \cdot 1 = 1/a$ 6. Axioma 2
7. $b = 1/a$ 7. Axioma 5

De este modo, cualquier inverso multiplicativo de a es igual a $1/a$.

Teorema 4. El inverso aditivo de cualquier número $a \in R$ es único, es decir,

$(a \in R,\ a + b = 0$, entonces $a = -b)$
$a \in R,\ b + a = 0$, entonces $a = -b$

Teorema 5. Para cualesquier $a,b,c \in R$,
$a + b + c = c + b + a$

Hipótesis: $a,b,c \in R$.
Conclusión: $a+b+c = c+b+a$

Demostración:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	Axioma 3
$= a + (c + b)$	Axioma 2
$= (a + c) + b$	Axioma 3
$= (c + a) + b$	Axioma 2
$= c + (a + b)$	Axioma 3
$= c + (b + a)$	Axioma 2

A causa de la propiedad transitiva de la igualdad, cada una de las expresiones anteriores representa el mismo número, por lo que podemos escribir:

$$a + b + c$$

sin indicar qué par se debe sumar primero y en qué orden deben sumarse.

Del mismo modo se tiene el siguiente teorema (se deja al estudiante la demostración).

Teorema 6. Para cualquier $a,b,c \in R$.
$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$

2-9 LOS AXIOMAS DE ORDEN.

El conjunto de números reales R es un conjunto de elementos indefinidos que poseen las propiedades de los axiomas de campo y se dice que forman un campo.

Un campo que satisface los axiomas de orden se denomina un campo ordenado. Los símbolos de orden son:

$<$ "es menor que"

$>$ "es mayor que"

Axioma 7. El axioma de tricotomía. Si a y $b \in R$, entonces, una y solo una de las siguientes relaciones es válida:

$a < b$ $a = b$ $a > b$

Axioma 8. El axioma de transitividad. Si a, b y $c \in R$ tal que $a > b$ y $b > c$, entonces, $a > c$.

Axioma 9. El axioma de adición. Si a, b y $c \in R$ tales que $a > b$ entonces, $a + c > b + c$.

Axioma 10. El axioma de multiplicación. Si a, b y $c \in R$ tales que $a > b$ y $c > 0$ entonces, $ac > bc$.

Definición 1. Si a y $b \in R$ entonces, $a < b$ si y solo si $b > a$.

Definición 2. Un número real a es positivo si $a > 0$ y negativo si $a < 0$.

Definición 3. El enunciado de que una cantidad es mayor que o menor que otra cantidad es llamado una desigualdad.

Escribiendo b=0 en el axioma 7 se concluye que $a<0$, $a=0$ ó $a>0$. De este hecho y de la definición 2 se concluye que 0 no es positivo ni negativo.

Algunas veces es conveniente combinar una igualdad con una desigualdad. Así,

$a \leq b$ "a es menor que o igual a b".

$a \geq b$ "a es mayor que o igual a b".

Por ejemplo, $a \leq 0$ significa que a no es positivo y $a \geq 0$ significa que a no es negativo. Es claro que si ambos enunciados fuesen válidos simultáneamente, entonces $a=0$.

Hay una gran variedad de teoremas útiles que comprenden desigualdades. Demostraremos algunos teoremas y enunciaremos otros que el alumno puede demostrar.

Teorema 7. Si $a>0$ y $b>0$ entonces, $a+b>0$.

Demostración: Hipótesis: $a>0$ y $b>0$
Conclusión: $a+b>0$

$a > 0$	dato
$a+b > 0+b = b$	axioma 9
$b > 0$	dato
$a+b > 0$	axioma 8

Teorema 8. Si $a>0$ y $b>0$ entonces, $ab>0$.

Estos teoremas nos dicen que la suma o el producto de dos números positivos es positivo, los cuales son propiedades de cerradura para la adición o multiplicación de números positivos. Además, el producto o cociente de dos números de signos iguales es positivo y el producto o cociente de dos números de signos diferentes es negativo.

Teorema 9. Si $a, b \in R$ entonces, $a>b$ si y solo si $-a < -b$. 3<4
-3 > -4

Demostración: Hipótesis: $a,b \in R$ y $a>b$
Conclusión: $-a<-b$

Primero demostraremos que si $a>b$ entonces, $-a<-b$. Luego demostraremos que si $-a<-b$ entonces $a>b$, o sea;

Hipótesis: $a, b \in R$ y $-a<-b$
Conclusión: $a>b$

$a > b$	dato
$a+[(-a)+(-b)] > b+[(-a)+(-b)]$	axioma 9
$-b > -a$	¿por qué?
$-a < -b$	definición 1

Necesitamos ahora demostrar que si $-a < -b$ entonces, $a>b$.

Los pasos en la primera parte de la demostración son reversibles. Por tanto, la demostración consistirá en comenzar con $-a < -b$ y reescribir las desigualdades en orden inverso hasta $a > b$.

Corolario.

Si $a > 0$, entonces $-a < 0$.
Si $-a < 0$, entonces $a > 0$.

Teorema 10. Si $a,b,c \in R$ con $a>b$ y $c<0$, entonces $ac < bc$.

Demostración: Hipótesis: $a,b,c \in R$ con $a>b$ y $c<0$.
Conclusión: $ac < bc$

Puesto que $c<0$, se concluye del corolario precedente que $-c>0$. Entonces tenemos,

$a > b$ dato
$-ac > -bc$ axioma 10
$ac < bc$ teorema 9

Un corolario es una verdad que se deriva como consecuencia de un teorema. Su demostración requiere poco razonamiento.

Teorema es una verdad no evidente, pero demostrable. Tiene carácter eminentemente deductivo, requiriendo de razonamiento lógico deductivo (demostración) para que pueda ser aceptado como verdad absoluta.

Axioma es un enunciado no demostrado, de carácter intuitivo que se capta espontáneamente sin razonamiento alguno; es una verdad intuitiva que tiene suficiente evidencia para ser aceptada como tal. Se llama también postulado.

El axioma 10 nos dice que ambos miembros de una desigualdad pueden ser multiplicados por un número positivo si el sentido de la desigualdad permanece inalterado. Y el teorema 10 nos dice que el sentido debe ser cambiado si el multiplicador es un número negativo.

Teorema 11. Si a,b,c y $d \in R$ con $a>b$ y $c>d$, entonces $a+c > b+d$.

Demostración: Hipótesis: $a,b,c,d \in R$ con $a>b$ y $c>d$.
Conclusión: $a+c > b+d$.

$a>b$ y $c>d$	datos
$a+c > b+c$	
$b+c > b+d$	axioma 9
$a+c > b+d$	axioma 8

Teorema 12. Si $a>b$ y $c>d$ con a,b,c y $d > 0$, entonces $ac>bd$.

Teorema 13. Si $a>0$, $b>0$ y $a>b$, entonces $1/a < 1/b$.

Demostración: Hipótesis: $a>0$, $b>0$ y $a>b$.
Conclusión: $1/a < 1/b$.

$a > b$	dato
$a\left(\frac{1}{ab}\right) > b\left(\frac{1}{ab}\right)$	axioma 10
$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$	¿por qué?
$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	definición 1

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- Si $a \in R$, diga por qué la desigualdad $a>a$ es imposible.

2.- Si $b \in R$, demuestre que $b<0$ si y solo sí $-b>0$. Demuestre además, que $b>0$, si y solo sí $-b<0$ (sugestión, use el teorema 10).

3.- Si a,b,c y $d \in R$ con $b>0$, demuestre que $a/b > c/d$ si y solo sí $ad > bc$.

4.- Verifique los teoremas 7 al 13 usando enteros propiamente escogidos.

5.- Demuestre que $a>b$ si y solo sí $a-b>0$.

6.- Si $a \neq 0$, demuestre que $a^2>0$.

7.- Si $a>b$ y $c>0$, muestre que $a/c > b/c$.

8.- Si $a>b$ y $c<0$, muestre que $a/c < b/c$.

Como pudimos observar de las demostraciones desarrolladas en esta unidad, siempre se parte de una hipótesis dada (datos) y a través de una cadena de deducciones se llega a la veracidad de la proposición que debe probarse (conclusión) utilizando axiomas o postulados previamente establecidos.

Se empieza con un número comparativamente pequeño de axiomas, aceptados como verdaderos sin demostración alguna y a continuación, se deducen todas las demás proposiciones a partir de los axiomas por medio del razonamiento deductivo.

CAPÍTULO III

CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CAMPO DE LOS NUMEROS REALES.

INTRODUCCION:

En la mente de todos los matemáticos modernos está en el concepto de axioma y la deducción de teoremas a partir de axiomas. El propósito de esta unidad es introducir al estudiante en el método deductivo de la matemática moderna, a un nivel que siendo rigurosa, sea suficientemente sencillo en presentación y contexto, para que permita una fácil comprensión.

Al término de esta unidad el alumno estará en condición de:

OBJETIVO:

1. Aplicar todos las propiedades y axiomas de los números reales en las demostraciones de teoremas y solución de problemas.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1. Estudia el capítulo III y copia en limpio todos los axiomas y teoremas del capítulo II para que puedas recordarlos fácilmente. Es necesario que observes la manera de como se demuestran los teoremas que vienen en el capítulo anterior a este para que después tú puedas hacer lo mismo con los que no están.

2. Practica la unidad resolviendo las autoevaluaciones que se incluyen en el capítulo.

3. El requisito de esta unidad consiste en contestar el Laboratorio y entregarlo a tu maestro.

AUTOEVALUACION.

1. Poner una palomita (√) en cada columna de los conjuntos de números que satisfagan los axiomas o propiedades de la columna izquierda.

PROPIEDAD	Conjunto de números.	N	K	Z	Q	R
Cerradura (+)						
Cerradura (-)						
Cerradura (x)						
Cerradura (÷)	excepto por 0					
Conmutativa (+)	$a+b = b+a$					
Conmutativa (x)	$a \cdot b = b \cdot a$					
Asociativa (+)	$(a+b)+c = a+(b+c)$					
Asociativa (x)	$a(bc)=(ab)c$					
Distributiva	$a(b+c) = ab+ac$					
Identidad (+)	$a + 0 = a$					
Identidad (x)	$a \cdot 1 = a$					
Inverso (+)	$a+(-a) = 0$					
Inverso (x)	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$					
Densidad						

A través de los axiomas vistos en la lección, completa lo siguiente:

Cerradura

2.- La suma de dos números impares ________ un número impar.

3.- La suma de dos números primos _____ necesariamente primo, etc.

4.- La ley _____ de la adición de dos números reales, dice que se puede cambiar el orden de los sumandos sin alterar la suma.

5.- La ley conmutativa de la _____ de dos números reales dice que se puede cambiar el orden de _____ sin alterar el _________.

6.- La ___________ nos permite sumar o multiplicar tres o más números no importando la manera en que se agrupen los números, para realizar la operación.

7.- En particular, al número real llamado "cero", denotado por 0, se le llama el __________ en ___________ de los números reales.

8.- En particular, al número real llamado "uno", denotado por 1, se le llama el __________ en ___________ de los números reales.

9.- El inverso ___________ de "a" es "(-a)" y tiene la propiedad de que la _________ de "a" y "(-a)" es igual a __________. En cambio, el inverso ____________ es "(1/a)" y tiene la propiedad de que el ___________ de "a" y "(1/a)" es igual a ___________.

10.- La ley ___________ afirma que, un producto puede ser igual a una suma y que, recíprocamente, la suma en cuestión, es igual a un producto, puesto que la igualdad es ______________.

A través de los teoremas enunciados en la lección, completa lo siguiente:

11.- Si en las prop. 5 y 6 en vez de c=d, empleamos c=c, vemos que a+c = b+c y ac=bc. Estos resultados dan lugar a :

a) Puede sumarse_____________ a ambos miembros de una ecuación sin alterar la relación de =.

b) Puede____________ un mismo número a ambos miembros de una ecuación sin alterar la relación de =.

Encuentra el inverso aditivo y también el inverso mutliplicativo de cada uno de los siguientes números.

12.- 5
13.- 2/3
14.- 2x/5y
15.- 1
16.- -a
17.- 3a/3b
18.- -2
19.- (2x+y)

Aplica el axioma de la ley Distributiva en la solución de las siguientes proposiciones:

EJEMPLOS:

$2x + 5x = (2+5)x = 7x;$

$5xy - 8yz = (5x - 8z)\ y;$

$(3x + 2y)\ z = 3xz + 2yz$

20.- (x+a) (y+b)
21.- 3yz + 5wyz
22.- 3x (2y+3z)

Resolver las siguientes operaciones, sin justificar los pasos:

23.- 7+2
24.- (-5) + 0
25.- (-3)+(-3)
26.- (-13) + 11
27.- (-13)(11)
28.- 5 [3+(-3)]
29.- 5(-8)+(-5)(-8)

30.- $[(-2)(-3)]\ \ (-5)$

31.- $[(-7)+8]\ [(-15)+(-17)]$

32.- $[11+(-5)] + (-5)(11)$

33.- $(-18)+\{(-5)+[18+(-7)+(-4)]\}$

34.- $-2\ \{[3+(-5)+5]\}$

35.- $5-\{3-[7+(-5)]\}$

36.- $2-(3-7)$

37.- $-6\ [3(7+6)-4(3-8)]\ \ -4\ [(7-3)9-16]$

Demostrar las proposiciones siguientes. Dar las justificaciones de cada proposición, usando los axiomas y proposiciones de la lección.

38.- $(x+2)\ [x+(-2)] = x^2+2(-2)$

39.- $3+\{2a+5\ [a+(b+2)]\} = 7a+(5b+13)$

40.- $[(-5).x]\,[(-2).x] = 10x^2$

41.- Si $\frac{3}{5}x = \frac{2}{7}$, entonces $x = 10/21$

CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CAMPO.

3-1 INDUCCIÓN Y DEDUCCIÓN.

¿Qué es una demostración? Preguntémonos, "¿qué es una demostración?". Supongamos que el alumno está tratando de convencer a un amigo de que la Tierra tiene forma esférica. Le habla acerca del horizonte que se amplía conforme el observador se eleva sobre la superficie de la Tierra, de los viajes alrededor del mundo, de la sombra redonda que la Tierra arroja sobre la Luna durante un eclipse de Luna, etc.

Estas consideraciones, con las cuales busca convencer a su amigo se llaman *argumentos*. ¿En qué se basa la fuerza o lo convincente de un argumento? Veamos, por ejemplo, el último de los argumentos anteriores. Afirmamos que la Tierra debe ser redonda porque su sombra es redonda. Esta aseveración se basa en el hecho, conocido por la experiencia, de que todos los cuerpos que tienen forma esférica proyectan una sombra redonda e inversamente, que los cuerpos de forma esférica tienen sombras redondas, independientemente de su posición. Se ve que en este caso, ante todo confiamos en los hechos, en nuestra experiencia directa con respecto a las propiedades de los objetos que nos rodean en nuestra vida cotidiana. Entonces se ha recurrido a una *deducción* que en el caso dado, se establece aproximadamente de la siguiente manera:

"Todos los cuerpos que en todas sus diferentes posiciones proyectan una sombra redonda, tienen la forma de una esfera". "La Tierra que durante los eclipses de Luna ocupa posiciones diferentes en relación con ésta, siempre proyecta una sombra redonda sobre la Luna". Conclusión: "Por tanto, la Tierra tiene la forma de una esfera".

Veamos ahora un ejemplo de la aritmética. Tomemos varios números impares arbitrarios, elevémoslos al cuadrado y restemos el número uno de cada cuadrado. Por ejemplo, $7^2-1=48$, $11^2-1=120$, $5^2-1=24$, $9^2-1=80$, $15^2-1=224$ y así sucesivamente. Cuando vemos los números resultantes, observamos que tienen una propiedad en común, cada uno de ellos es divisible entre 8. Llevando a cabo unas cuantas pruebas más con otros números impares y encontrando siempre que el resultado es divisible entre 8, podría establecerse tentativamente: "El cuadrado de cualquier número impar disminuido en uno da un número que es un múltiplo de ocho".

Como ahora estamos hablando de cualquier número impar, para demostrarlo debemos hallar argumentos que sirvan para todo número impar arbitrario. Para hacerlo, recuérdese primero que cualquier número impar puede expresarse en la forma $2n-1$, donde n es un entero. Entonces, el cuadrado de un número impar disminuido en uno, está dado por la expresión $(2n-1)^2-1$. Quitando los paréntesis se obtiene

$$\begin{aligned}(2n-1)^2-1 &= 4n^2-4n+1-1\\ &= 4n^2-4n\\ &= 4n(n-1)\end{aligned}$$

Pero en efecto, esta expresión resultante es un múltiplo de 8 para todo número natural n. Porque el factor 4 indica que el número $4n(n-1)$ es un múltiplo de 4; además como n y $n-1$ son enteros consecutivos, uno de ellos debe ser par; de aquí que sin duda nuestro producto todavía contiene otro factor 2. Por tanto, el número $4n(n-1)$ siempre es un múltiplo de 8, que era lo que debía demostrarse.

A partir de estos ejemplos puede verse que existen dos formas fundamentalmente distintas, mediante las cuales adquirimos conocimientos del mundo que nos rodea, de sus objetos, fenómenos y leyes naturales:

La primera es aquella en la cual, con base en un gran número de observaciones y experimentos sobre los objetos y fenómenos, se descubren las leyes generales. En los ejemplos anteriores, a base de observaciones, los hombres descubrieron la relación que existe entre la forma de un cuerpo y su sombra; las pruebas efectuadas con los cuadrados de los números impares nos condujeron a aseverar cierta propiedad de tales cuadrados disminuidos en uno. Este método, de sacar conclusiones generales a partir de la observación de numerosos casos particulares, se llama *inducción* (del latín "inductio"). Los casos particulares nos conducen a la idea de que existen leyes generales.

Un segundo método se usa cuando ya se conocen ciertas leyes generales, y se aplica este conocimiento a los casos particulares. Tal método se llama *deducción* (del latín "deductio").

En el último ejemplo, las leyes generales de la aritmética se aplicaron a un caso particular, probando así cierta propiedad de los números impares. Este último ejemplo también nos indica que la inducción y la deducción nunca pueden estar divorciadas una de otra.

Esta combinación de la inducción y la deducción es lo que caracteriza *al método científico*. De hecho, en el curso de toda demostración se usan ambos métodos. Cuando se buscan argumentos para demostrar una proposición, se recurre a los experimentos, las observaciones y los hechos, o también a las proposiciones ya demostradas. Entonces, con base en tales conocimientos, sacamos nuestras conclusiones referentes a la veracidad o falsedad de la proposición en cuestión. Por supuesto, los primeros conocimientos matemáticos y científicos se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. Conforme creció el conjunto de conocimientos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras por medio de la deducción sin recurrir a las observaciones o a los experimentos.

Por ejemplo, ciertas proposiciones aceptadas como verdaderas sin demostración alguna llamadas *axiomas* (del griego

La primera es aquella en la cual, con base en un gran número de observaciones y experimentos sobre los objetos y fenómenos, se descubren las leyes generales. En los ejemplos anteriores, a base de observaciones, los hombres descubrieron la relación que existe entre la forma de un cuerpo y su sombra; las pruebas efectuadas con los cuadrados de los números impares nos condujeron a aseverar cierta propiedad de tales cuadrados disminuidos en uno. Este método, de sacar conclusiones generales a partir de la observación de numerosos casos particulares, se llama *inducción* (del latín "inductio"). Los casos particulares nos conducen a la idea de que existen leyes generales.

Un segundo método se usa cuando ya se conocen ciertas leyes generales, y se aplica este conocimiento a los casos particulares. Tal método se llama *deducción* (del latín "deductio").

En el último ejemplo, las leyes generales de la aritmética se aplicaron a un caso particular, probando así cierta propiedad de los números impares. Este último ejemplo también nos indica que la inducción y la deducción nunca pueden estar divorciadas una de otra.

Esta combinación de la inducción y la deducción es lo que caracteriza *al método científico*. De hecho, en el curso de toda demostración se usan ambos métodos. Cuando se buscan argumentos para demostrar una proposición, se recurre a los experimentos, las observaciones y los hechos, o también a las proposiciones ya demostradas. Entonces, con base en tales conocimientos, sacamos nuestras conclusiones referentes a la veracidad o falsedad de la proposición en cuestión. Por supuesto, los primeros conocimientos matemáticos y científicos se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. Conforme creció el conjunto de conocimientos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras por medio de la deducción sin recurrir a las observaciones o a los experimentos.

Por ejemplo, ciertas proposiciones aceptadas como verdaderas sin demostración alguna llamadas *axiomas* (del griego

"axios" que significa "digno de confianza") se utilizan para demostrar la veracidad de todas las demás proposiciones llamados *teoremas* (del griego "theoreo, que significa pienso o medito). Se empieza con un número comparativamente pequeño de axiomas, aceptados sin demostración, y a continuación, se deducen todas las demás proposiciones a partir de los axiomas por medio del razonamiento deductivo procurando reducir, hasta donde sea posible, el número de axiomas.

Resumiendo nuestra exposición, podemos dar la respuesta a *¿qué es una demostración?* diciendo que es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas o postulados previamente establecidos.

3-2 LA LEY DE LA RAZÓN SUFICIENTE.

¿Por qué son necesarias las demostraciones? La necesidad de la demostración es una consecuencia de una de las leyes fundamentales de la lógica (la lógica es la ciencia de las leyes del razonamiento correcto), *la ley de la razón suficiente*.

Esta ley requiere que toda aseveración que se haga debe estar bien fundamentada, es decir, debe presentarse junto con argumentos lo suficientemente fuertes que apoyen su veracidad o sea, su concordancia con los hechos y con la realidad. Tales argumentos pueden basarse con referencias a una posible verificación a través de la observación y experimentos o bien, en el razonamiento correcto basado en deducciones sistemáticas.

En matemáticas, nos interesan principalmente los argumentos de este último tipo.

Ocasionalmente surge la pregunta de si es necesario dar una demostración cuando la proposición que debe probarse parece lo suficientemente clara y evidente por sí sola. Sobre el parti "axios" que significa "digno de confianza") se utilizan para demostrar la veracidad de todas las demás proposiciones llamados *teoremas* (del griego "theoreo, que significa pienso o medito). Se empieza con un número comparativamente pequeño de axiomas, aceptados sin demostración, y a continuación, se deducen todas las demás proposiciones a partir de los axiomas por medio del razonamiento deductivo procurando reducir, hasta donde sea posible, el número de axiomas.

Resumiendo nuestra exposición, podemos dar la respuesta a *¿qué es una demostración?* diciendo que es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas o postulados previamente establecidos.

3-2 LA LEY DE LA RAZÓN SUFICIENTE.

¿Por qué son necesarias las demostraciones? La necesidad de la demostración es una consecuencia de una de las leyes fundamentales de la lógica (la lógica es la ciencia de las leyes del razonamiento correcto), *la ley de la razón suficiente*.

Esta ley requiere que toda aseveración que se haga debe estar bien fundamentada, es decir, debe presentarse junto con argumentos lo suficientemente fuertes que apoyen su veracidad o sea, su concordancia con los hechos y con la realidad. Tales argumentos pueden basarse con referencias a una posible verificación a través de la observación y experimentos o bien, en el razonamiento correcto basado en deducciones sistemáticas.

En matemáticas, nos interesan principalmente los argumentos de este último tipo.

Ocasionalmente surge la pregunta de si es necesario dar una demostración cuando la proposición que debe probarse parece lo suficientemente clara y evidente por sí sola. Sobre el particular podemos puntualizar, en una ciencia exacta, por lo general no se puede confiar en lo que es obvio, porque el concepto de obvio es muy vago; lo que parece obvio a una persona puede ser bastante dudoso para otra. Sólo es necesario recordar la forma tan diferente en que a veces, distintos observadores describen el mismo evento y lo difícil que es determinar la veracidad de la evidencia de testigos oculares.

Por tanto, resumiendo lo que se ha dicho sobre la necesidad de las demostraciones, podemos establecer lo siguiente:

a) En la matemática, sólo se aceptan sin demostración un pequeño número de proposiciones fundamentales, *los axiomas*. Las proposiciones restantes, *los teoremas*, se demuestran a partir de estos axiomas construyendo una serie de deducciones.

b) Las demostraciones son necesarias como consecuencia de una ley fundamental del pensamiento correcto, *la ley de la razón suficiente*, de acuerdo con la cual nuestras aseveraciones deben tener un fundamento riguroso para que sean verdaderas.

c) Una demostración construida correctamente sólo se apoya en proposiciones previamente demostradas y no en lo que es obvio.

d) También es necesaria la demostración para establecer la generalidad de la proposición en cuestión, o sea, su aplicabilidad a todos los casos particulares.

e) Por último, mediante las demostraciones, la matemática se transforma en un sistema científico, en el cual cada teorema está vinculado mediante una cadena completa de deducciones con los teoremas previamente demostrados, y éstos con teoremas que se han probado aún antes y así sucesivamente, y las cadenas de estas deducciones se continúan hasta que, finalmente, se llega a las definiciones y axiomas básicos que constituyen los fundamentos de toda la ciencia matemática.

3-3 RAZONAMIENTO CORRECTO.

¿Cómo debe construirse una demostración? Ahora examinemos la cuestión de las especificaciones con las que debe cumplir una demostración para poder decir que es *correcta* o que hemos desarrollado un *razonamiento correcto*.

Nótese primero que toda demostración consiste de una serie de deducciones, por tanto, lo correcto o incorrecto de la demostración depende de la veracidad o falsedad de las deducciones que entran en ella.

Tal y como se vio anteriormente, el razonamiento deductivo consiste en la aplicación de alguna ley general a un caso particular dado. Con el objeto de evitar errores en nuestro razonamiento, necesitamos familiarizarnos con ciertos métodos que permiten representar las relaciones existentes entre los conceptos matemáticos.

Nuestra pregunta es ahora, ¿qué requisitos debe satisfacer una demostración para que sea válida (esto es, para garantizar la veracidad de la proposición que debe probarse)? Puede responderse de la manera siguiente:

a) La demostración sólo debe basarse en axiomas o en teoremas previamente demostrados.

b) Todas las deducciones, mediante las cuales se establece la demostración, deben llevarse a cabo correctamente.

c) Siempre debe tenerse en cuenta el propósito de la demostración, que es establecer la veracidad de la proposición que debe probarse, y no sustituirla por alguna otra proposición.

En vista de la necesidad de satisfacer estos requisitos, surge la pregunta de cómo pueden hallarse las demostraciones correctas. En primer lugar, cuando se pide demostrar una proposición, es necesario expresar con precisión la aseveración básica que debe probarse, a menudo esto no se hace con suficiente claridad. Después de haber determinado exactamente

lo que se desea probar, debemos extraer del enunciado del teorema dado, las condiciones que se dan y aquellas que son esenciales para la demostración; a continuación, todo esto se establece en forma simbólica, bajo los encabezados "Hipótesis" y "Conclusión". Después de escribir esto, se procede a probar el teorema. En la demostración se aplican axiomas o teoremas previamente establecidos y por supuesto, las relaciones especiales que se "dan" (hipótesis) en el teorema. Ahora, hay que hallar una cadena de razonamientos que conduce a partir de éstas a la proposición que debe probarse. ¿Cómo seleccionar, de la gran cantidad de proposiciones existentes, aquellas que servirán para probar nuestro teorema? En este caso, es mejor partir de la proposición que debe probarse y establecer el problema de la siguiente manera: ¿De qué proposición puede obtenerse por deducción la proposición que se desea probar? Si puede hallarse tal proposición, y si es una consecuencia de las condiciones y de los teoremas previamente probados, entonces nuestro problema está resuelto. No obstante, si no es así, debemos plantear nuevamente la pregunta para otra proposición, y así sucesivamente. En el razonamiento científico, una cadena de razonamientos de este tipo se llama *análisis*.

Para escribir una demostración, todos los pasos del análisis tendrán que tomarse en orden inverso. Esta forma de presentar una demostración, que es la usada generalmente en los libros de texto y en clase, se desarrolla en el orden inverso que el análisis y se llama *síntesis*. La demostración de un teorema por el método sintético parece más fácil y más natural, pero no debe olvidarse que, en la primera investigación para realizar una demostración, inevitablemente debemos hacer uso del análisis.

Por tanto, análisis y síntesis son dos etapas inseparablemente unidas de uno y del mismo proceso, la construcción de una demostración de un teorema dado, el análisis es el método para buscar los argumentos adecuados; la síntesis es el método para presentar la demostración.

Por supuesto, al buscar los argumentos, no siempre se encuentra de inmediato el camino correcto. En ocasiones, en vez de confirmar con el primer enfoque, hay que usar algún otro razonamiento. Con práctica contínua se puede desarrollar la habilidad necesaria y aplicar con éxito el método del análisis, para encontrar los argumentos adecuados.

Por último, consideremos todavía otra distinción entre los métodos de demostración: demostraciones *directas e indirectas*. En una demostración directa, se establece la veracidad de la proposición que debe probarse, demostrando que es una consecuencia de las proposiciones previamente probadas.

En una demostración indirecta, se supone que la proposición que debe probarse es falsa y, a continuación, se prueba que esta suposición es contradictoria a la hipótesis o bien a alguna proposición probada con anterioridad. Por esta razón, a la demostración indirecta también se le da el nombre de demostración por contradicción o bien, el de demostración por reducción al absurdo.

Frecuentemente se aplica este tipo de demostración cuando, en la búsqueda de los argumentos, se observa que una demostración directa será difícil o incluso imposible de hallar. En tales casos, se supone que es verdadera la proposición contraria a la que debe probarse y, entonces, se intenta hallar una cadena de razonamientos que conduzca a una conclusión que contradiga a alguna proposición previamente establecida.

3-4 BASES PARA LA SELECCIÓN DE AXIOMAS.

¿Qué proposiciones se aceptan sin demostración? A primera vista, esta pregunta parece muy sencilla. El alumno dirá que se aceptan como axiomas aquellas proposiciones cuya veracidad ha sido ampliamente verificada y que no dan lugar a duda. Sin embargo, cuando se intenta seleccionar tales proposiciones en la práctica, encontramos que no es tan sencillo como parece. Gran número de proposiciones matemáticas

se han sometido tantas veces a la verificación práctica, que casi nadie duda de su veracidad. Pero esto no significa que debemos considerar todas esas proposiciones como axiomas. ¿Por qué no aceptar todas esas proposiciones como axiomas? ¿En esa forma, no se simplificaría mucho la exposición de la matemática, considerando como superfluas a muchas demostraciones?

De hecho, la matemática no se ha desarrollado de acuerdo con estos lineamientos. Por el contrario, los matemáticos han buscado la manera de reducir la lista de axiomas hasta el menor número posible y obtener todos los demás conocimientos matemáticos por el razonamiento deductivo, partiendo de este número pequeño de verdades fundamentales. ¿Por qué seleccionaron este camino aparentemente más difícil y complicado para construir un sistema de conocimientos matemáticos? Las razones para realizar ese esfuerzo fueron varias. En primer lugar, cuando se reduce el número de axiomas, cada axioma particular adquiere mayor significado, porque estos axiomas contienen en sí mismos, por decirlo así, toda la matemática futura que va a deducirse a partir de ellos. Por tanto, mientras menor sea el número de axiomas, más importantes, profundas y de mayor alcance son las propiedades que revela cada axioma.

Otra razón para esforzarse en limitar el número de axiomas, que mientras menor sea el número de axiomas, más fácil es investigar la validez de cada uno y de todos los axiomas combinados. Así nos enfrentamos con el problema de seleccionar el menor número posible de las proposiciones más básicas, generales e importantes de la matemática que deben ser aceptadas como axiomas. ¿Cómo hacer esta selección?

En primer lugar, debemos tener presente que los axiomas no pueden seleccionarse al azar, uno después del otro, ya que deben tener ciertas relaciones entre sí. Entonces, en la matemática no se estudian axiomas aislados sino un sistema completo de axiomas, ya que sólo un sistema considerado como un todo, puede representar correctamente las propiedades y las interrelaciones que existen en las matemáticas.

Es más, al seleccionar un sistema de axiomas, se debe tener cuidado de no incluir un par de proposiciones que se contradigan entre sí, ya que no pueden ser las dos verdaderas. Además, los axiomas no sólo deben ser compatibles entre sí, sino que, entre las proposiciones deducidas a partir de los axiomas no debe haber dos cualesquiera que se contradigan. Este requisito fundamental se llama *condición de consistencia.*

Además de lo anterior, también debe tenerse cuidado de no incluir en nuestro sistema de axiomas, proposición alguna que pueda deducirse de otros axiomas. Este requisito es obvio, en virtud de que se desea reducir al mínimo nuestro sistema, es decir, procurar que contenga el menor número posible de proposiciones no demostradas. Si una proposición dada puede probarse a partir de otros axiomas, entonces no es un axioma sino un teorema, y no existe razón alguna para incluirlo en el sistema de axiomas. El requisito de que ningún axioma sea deducible de otros axiomas se llama *condición de independencia.*

Sin embargo, al tratar de hacer mínimo el sistema de axiomas, no debemos llegar a extremos y omitir en él algunas proposiciones que sean necesarias para deducir alguno de los teoremas de las matemáticas. Esto nos conduce a la tercera condición que debe satisfacer un sistema de axiomas, *la condición de completo.* Esta condición puede expresarse de manera más precisa como sigue: Si el sistema de axiomas está incompleto, entonces, siempre es posible construir una nueva proposición (por supuesto, una proposición que use los mismos conceptos fundamentales que los axiomas) que no es deducible a partir de los axiomas y que tampoco los contradiga. Si, por otra parte, el sistema de axiomas está completo, entonces cualquier nueva proposición que se agregue al sistema matemático y que use los mismos conceptos de los que tratan los axiomas, es una consecuencia de estos axiomas, o bien, los contradice.

Con el objeto de aclarar todavía mejor el significado de las tres condiciones de completo, independencia y consistencia de un sistema de axiomas, daremos el siguiente ejemplo, él proporciona una analogía bastante buena para ellas.

Examinemos un sistema de ecuaciones de primer grado en tres incógnitas. Consideremos cada una de las incógnitas del sistema como un "concepto" sujeto a definición y cada ecuación como cierto tipo de axioma que permite determinar las relaciones existentes entre estos conceptos. Así, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

¿Es posible determinar las incógnitas x, y, z de este sistema? No, ya que, en este caso el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. El sistema no satisface la condición de completo.

Ahora, tratemos de remediar esta deficiencia, agregándole al sistema una ecuación:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \\ 3x + 3y + 12z &= 18 \end{aligned}$$

Examinando cuidadosamente el nuevo sistema, se encuentra que con la introducción de la nueva ecuación no ha mejorado la situación ya que la tercera ecuación se deduce directamente de la segunda (la tercera ecuación es precisamente la segunda ecuación multiplicada por tres) y no se proporciona una nueva relación. Ahora, el sistema viola la condición de independencia.

Cambiemos ahora la tercera ecuación y examinemos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \\ 3x + 3y + 12z &= 15 \end{aligned}$$

Pero nuevamente este sistema es inútil para la determinación de las incógnitas. Porque dividiendo ambos miembros de la última ecuación por 3, se obtiene la ecuación,

$$x + y + 4z = 5$$

mientras que la segunda ecuación nos da

$$x + y + 4z = 6$$

¿Cuál de estas ecuaciones se debe creer? Es evidente que este es un caso de sistema inconsistente, cuyas incógnitas tampoco se pueden determinar.

Si finalmente examinamos el sistema,

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \\ 2x + y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

es fácil ver que el sistema tiene una solución única, ($x=5$, $y= 13$, $z= -3$); o sea es consistente, independiente y completo.

Si a este sistema se agrega una cuarta ecuación en x, y y z, es una combinación de las tres ecuaciones dadas o bien, las contradice. De estas consideraciones, se ve que la selección de los axiomas que van a usarse como el fundamento de las matemáticas está muy lejos de ser arbitraria y está sujeta a requisitos muy rígidos. El trabajo de determinar un sistema aceptable de axiomas se empezó a fines del siglo pasado, y aunque los eruditos han realizado muchos progresos en esta dirección, la tarea aún en la actualidad, no puede considerarse terminada. En particular, al someter un sistema de axiomas existente a un nuevo examen sistemático, en ocasiones los matemáticos descubren que el sistema contiene axiomas superfluos, es decir, "dependientes" que pueden deducirse de otros más sencillos o más generales. Todas estas investigaciones son de gran interés para el matemático porque su propósito es averiguar cuáles son las propiedades más generales, básicas e

importantes de esta ciencia. Hagamos ahora un resumen de lo que se ha dicho.

RESUMEN.

a) Se ha señalado que nuestros primeros conocimientos se obtuvieron por medio de la inducción, es decir, de las observaciones y los experimentos.

b) Se han enunciado las propiedades básicas y más generales de un sistema de proposiciones fundamentales llamadas axiomas.

c) Un sistema de axiomas correctamente construido debe satisfacer las condiciones de completo, independencia y consistencia.

d) Aparte de los axiomas, todas las demás proposiciones (los teoremas) se obtienen mediante cadenas de deducciones, es decir, por medio del razonamiento deductivo, partiendo de los axiomas y teoremas probados previamente. Tales cadenas de deducciones se llaman demostraciones.

e) Para que una demostración sea correcta, debe basarse en razonamiento correcto. El éxito en hacer demostraciones correctas depende de 1) un enunciado preciso y correcto de la proposición que debe probarse. 2) La selección de argumentos necesarios y válidos. 3) Una observancia estricta de las reglas de la lógica en el curso de la demostración.

3-5 CONSECUENCIAS.

Los axiomas que enlistamos en la unidad anterior pueden ser considerados en conjunto, puesto que se refieren a los métodos para combinar los números reales mediante las operaciones básicas. Son tan simples que el estudiante los ha utilizado siempre, probablemente, sin darse cuenta exactamente qué propiedades estaba empleando. No obstante, ellos son básicos, puesto que hay ciertos teoremas que se infieren directamente. Los teoremas representan propiedades básicas del conjunto de números reales y se aplicarán en los próximos capítulos.

En las demostraciones convendremos en:

1) Si una proposición demostrada, sea por el maestro o por los estudiantes, es de aquella que usaremos a menudo para estructurar nuestro sistema deductivo la llamaremos teorema. De otro modo lo llamaremos ejemplo. Hablando estrictamente, todos son teoremas, pero usaremos esta terminología para que el estudiante sepa cuáles debe recordar.

2) Para abreviar, haremos referencia a los axiomas indicando los números que les fueron asignados en la unidad anterior.

3) Sálvo que se indique lo contrario, todas las variables representan números reales.

Ahí donde falten referencias, el estudiante deberá justificarlo. En los teoremas que se enuncian sin demostración, se deja al estudiante que los demuestre. Los ejemplos y teoremas que a continuación se exponen, proporcionarán una mejor comprensión de ellos y harán notar donde son utilizados en nuestra aritmética ordinaria y álgebra elemental.

Teorema 14. El inverso aditivo del inverso aditivo de a es a, es decir $-(-a) = a$.

Demostración: Hipótesis: $a + (-a) = 0$
Conclusión: $-(-a)=a$

$$(-a) + [-(-a)] = 0 \qquad \text{Ax. } 6$$

$$a + (-a) = 0 \qquad \text{Ax. } 6$$

$$(-a) + a = 0 \qquad \text{Ax. } 2$$

Estas ecuaciones revelan que $-(-a)$ y a son ambos inversos aditivos de $(-a)$, concluimos:

$$-(-a) = a \qquad \text{T-4}$$

El estudiante puede establecer los teoremas enunciados como parte de la demostración.

Teorema 15. Ley de la cancelación de la suma.

$$a + b = c + b$$

entonces, $a = c$

Demostración: Hipótesis: $a + b = c + b$
Conclusión: $a = c$

1. $a+b = c+b$	1. Dado
2. $(a+b) + (-b) = (c+b)+(-b)$	2. Propiedad 5
3. $a + [b+(-b)] = c + [b+(-b)]$	3. Axioma 3
4. $a + 0 = c+0$	4. Axioma 6, en ambos lados de la igualdad.
5. Por tanto, $a=c$	5. Axioma 5, en ambos lados de la igualdad.

Teorema 16. Ley de la cancelación de la multiplicación.

$$b \neq 0,\ a.b = c.b$$

entonces, $a = c$

Teorema 17. Para cualquier $a \in R$, $0.a = a.0 = 0$

Demostración: Hipótesis: $a = a$ Prop. 1
Conclusión: $a.0 = 0$

1. $a = a$	Dato
2. $a.0 = a.0$	Prop. 6
3. $a.0 = a.0+0$	Axioma 5
4. $\quad = a.0 + \{a.0 + [-(a.0)]\}$	Axioma 6
5. $\quad = [(a.0)+(a.0)] + [-(a.0)]$	Axioma 3
6. $\quad = a(0+0) + [-(a.0)]$	Axioma 4
7. $\quad = a.0 + [-(a.0)]$	Axioma 5
8. $\quad = 0$	Axioma 6

El producto de cualquier número real por 0 es 0.

Teorema 18. Si $a,b \in R$ y $ab = 0$. entonces $a=0$ o bien, $b=0$.

Demostración: Hipótesis: $ab= 0$ y $a \neq 0$
Conclusión: $b= 0$

1. $ab=0$; $a \neq 0$	Dado
2. $1/a\ (ab)= 1/a\ .(0)$	Prop. 6
3. $(1/a\ .\ a)b = 1/a\ .\ 0$	Axioma 3
4. $1.b = 1/a\ .0$	Axioma 6
5. $1.b = 0$	Teorema 17
6. $b=0$	Axioma 5

De la misma manera se puede demostrar que si, $ab=0$ y $b \neq 0$, entonces $a=0$.

Teorema 19. Si $a,b \in R$, entonces, $(-a)b = -(ab)$.

Demostración: Hipótesis: $a,b \in R$
Conclusión: $(-a)b$ y $-(ab)$ son ambos inversos aditivos de ab

1. $(-a)b \in R$	1. ______
2. $(-a)b = (-a)b$	2. ______
3. $ab+(-a)b= ab+(-a)b$	3. ______
4. $\quad = ba + b(-a)$	4. ______
$\quad = b(a+(-a))$	5. ______
$\quad = b.0$	6. ______
$\quad = 0$	7. ______

Por tanto, $(-a)b$ es inverso aditivo de ab, pero $-(ab)$ también es inverso aditivo de ab. Por tanto, $(-a)b= -(ab)$. T-4.

Corolarios: $(-a)b = a(-b)$ y $(-1)b = -b$

Teorema 20. Para cualquier $a,b \in R$

$$(-a)(-b) = ab$$

Teorema 21. Si $a, b \neq 0$, $a=b$, entonces, $1/a = 1/b$.

Teorema 22. Si $a=b$, entonces $-a = -b$.

Teorema 23. Para cualquier $a,b \in R$

$$-(a+b) = -(a) + (-b)$$

En nuestro desarrollo de los números reales hemos supuesto sólo dos operaciones que son suma (+) y producto (x ó .). Los axiomas sólo dan las propiedades de la suma y de la multiplicación. A través del axioma 6, sólo conocemos una propiedad de (-a): que es el número que al sumarse a (a) da 0, por lo que hasta ahora visto sabemos que si $2 \in R$, tiene un inverso aditivo $-2 \in R$, y que $2 + (-2) = 0$.

Hemos demostrado también teoremas concernientes a la suma y a la multiplicación. Por tanto, es evidente la ventaja de definir cualquier otra operación en términos de ellas. Con esto en mente, introduzcamos un nuevo método de asociar los elementos de un par ordenado (a,b), con algún número real y luego investiguemos la asociación para ver si es una operación binaria sobre R.

Definición de resta: La resta es el proceso que asocia un número real c con un par ordenado de números reales (a,b) tal que $a-b = c$, o bien $a = b+c$, donde $a-b$ se llama la *diferencia* de a y b.

EJEMPLOS.

$7 - 2 = 5$, puesto que $2 + 5 = 7$

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, puesto que $\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$

Cada número real tiene exactamente un inverso aditivo. Sin embargo, cada par de números tiene una suma única. Por ello, para cada par de números reales a,b existe $a + (-b)$ y es único. Pero notemos que $b + a + (-b) = a$. Por tanto, por definición de resta tenemos la siguiente igualdad:

$$a + (-b) = a - b$$

Esto nos conduce al siguiente teorema:

Teorema 24 (resta). Para cualquier $a,b \in R$, $a-b$ es el número real único $a + (-b)$.

Este es un teorema muy útil y poderoso. Usarlo nos permite realizar la operación de resta convirtiéndola en una suma y esto es necesario si deseamos aplicar los axiomas y teoremas previos.

Las demostraciones de los siguiente teoremas se dejan al estudiante.

Teorema 25. Si $a \in R$, entonces $a-0 = a$.

Teorema 26. $-(a-b) = -a + b$.

Teorema 27. $a - (b+c) = (a-b) - c$

Teorema 28. $a + (b-c) = (a+b) - c$

Teorema 29. $a - (b-c) = (a-b) + c$

Teorema 30. Si $a=b$, entonces, $a-c = b-c$

Teorema 31. $a(b-c) = ab-ac$.

Demostración: Hipótesis: $a,b,c \in R$
Conclusión: $a(b-c) = ab-ac$

1. $a(b-c) = a[b+(-c)]$	1. Por definición de resta.
2. $= ab + a(-c)$	2. Axioma 4
3. $= ab + (-c)a$	3. Axioma 2
4. $= ab + [-(ca)]$	4. Teorema 19
5. $= ab - ca$	5. Por definición de resta
6. $= ab - ac$	6. Axioma 2

Definamos ahora la división de una manera similar a la que usamos para definir la resta.

Definición de división: La división es el proceso que asocia un número real c con un par ordenado de números reales (a,b) tales que, $a \div b = a/b = c$, entonces $b.c = a$.

EJEMPLOS.

$10 \div 2 = 5$, ya que $5 \,.\, 2 = 10$

$4 \div 2 = 2$, ya que $2 \,.\, 2 = 4$

Sabemos que la única excepción de la división es $b \neq 0$. De tal manera que:

Teorema 32 (división). Para cualquier $a,b \in R$, con $b \neq 0$, a/b es el número real único a(1/b).

$$\frac{a}{b} = a\,\frac{1}{b}$$

El símbolo *a/b* se lee *el cociente de a* dividido por *b*; *a* es el numerador y *b* el denominador de la fracción. También se les llama dividendo y divisor respectivamente.

Nuevamente, recordamos el paralelismo entre la resta y la división. Para restar *b* de *a* se suma a *a* el inverso aditivo de *b*. Para dividir *a* entre *b* se multiplica por el inverso multiplicativo de *b*.

Teorema 33. El inverso multiplicativo de a/b es b/a, donde $a,b \neq 0$.

Demostración: Hipótesis: $a\neq 0$, $b\neq 0$ y $a/b \neq 0$
Conclusión: b/a es inverso multiplicativo único

1. $a/b \neq 0$	1. Dado
2. $a \neq 0$	2. Dado
3. $a/b = 0$, entonces $b.0=a$	3. Por definición, división.
4. entonces $a=0$	4. Teorema 17 y propiedad 2

Esto contradice la hipótesis de que $a \neq 0$. Luego $a/b \neq 0$ y, por tanto, debe tener un inverso multiplicativo b/a, tal que $(a/b)(b/a) = 1$. Esto implica que

5. $(a.\ 1/b)(b/a) = 1$	5. Definición de división.
6. $(1/a\ .\ b)\left[(a.\ 1/b)(b/a)\right] = (1/a\ b).1$	6. Propiedad 6
7. $\left[(a.\ 1/a)(b.\ 1/b)\right]\ (b/a) = 1/a\ b$	7. Axiomas 2, 3 y 5
8. $b/a = b/a$	8. Axioma 5,6 y por definición de división.

Por tanto, a/b tiene un único inverso multiplicativo.

Teorema 34. $1/a\ .\ 1/b = 1/ab$, donde $a,b \neq 0$.

Demostración: Hipótesis: $a\neq 0$ y $b\neq 0$ y $ab\neq 0$
Conclusión: $1/a\ .\ 1/b = 1/ab$

1. $(ab)(1/ab) = 1$	1. Axioma 6
2. $(1/a\ .\ 1/b)\left[ab.(1/ab)\right] = (1/a\ .\ 1/b).1$	2. Propiedad 6
3. $\left[(a.\ 1/a)(b.1/b)\right].\ 1/ab = 1/a\ .\ 1/b$	3. Axiomas 2, 3 y 5
4. $1/ab = 1/a\ .\ 1/b$	4. Axioma 5 y 6

Teorema 35. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$, donde $b,d \neq 0$

Demostración: Hipótesis: $b\neq 0$ y $d\neq 0$
Conclusión: $a/b\ .\ c/d = ac/bd$

1. $a/b.c/d = (a.1/b)(c.1/d)$	1. ______________
2. $= (a.c)(1/b.1/d)$	2. ______________
3. $= (a.c)(1/bd)$	3. ______________
4. $= a.c/b.d$	4. ______________

Teorema 36. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$; b, c, $\neq 0$

Demostración: Hipótesis: $b \neq 0$ y $c \neq 0$
Conclusión: $ac/bc = a/b$

1. $ac/bc = ac\ (1/bc)$ 1. ______________
2. $= ac\ (1/b.1/c)$ 2. ______________
3. $= (a.1/b)(c.1/c)$ 3. ______________
4. $= a/b$ 4. ______________

Teorema 37. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, donde $b \neq 0$

Teorema 38. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, donde b, d $\neq 0$

Teorema 39. $\frac{-(a)}{-(b)} = \frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$

Teorema 40. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$, donde $b \neq 0$

Teorema 41. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$, donde b, c, d $\neq 0$

¿Reconoce el estudiante estos últimos teoremas como reglas que ha estado usando en Aritmética y Álgebra? El teorema 36 se usa cuando se reduce una fracción a términos más simples o se eleva a términos mayores; los teoremas 34 y 35 se usan para multiplicar fracciones; etc.

Además de estudiar todos los teoremas demostrados, el estudiante debería resolver problemas con respecto a los teoremas; en esta forma, quedarán claras la mayor parte de las ideas básicas del Álgebra y se pondrán de manifiesto las razones lógicas que hay tras de estas ideas.

Ahora sí, estamos en condición de que el estudiante inicie las operaciones con expresiones algebráicas, donde suponemos que todas las variables que intervienen son números reales, a menos que consignemos las restricciones específicamente.

Esperamos que el estudiante haya vislumbrado la importancia del estudio de los axiomas y teoremas, puesto que serán de gran utilidad en la resolución de problemas y en la comprensión de material posterior.

3-6 APLICACIONES DE LOS AXIOMAS DE CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES.

EJEMPLO 1.

Despejar "a" de la ecuación: $2a + 1 = 5$, $a \in R$ dando las justificaciones necesarias en cada paso:

$2a + 1 = 5$	dato
$-1 + 2a + 1 = -1 + 5$	propiedad aditiva
$2a + 1 - 1 = -1 + 5$	ley conmutativa
$2a + 0 = -1 + 5$	elemento inverso aditivo
$2a = 4$	elemento identidad suma y hecho conocido
$\frac{1}{2}(2a) = \frac{1}{2}(4)$	propiedad multiplicativa
$(\frac{1}{2})(2)(a) = \frac{1}{2}(4)$	ley asociativa
$1.\ a = \frac{1}{2}(4)$	elemento inverso multiplicativo
$a = 2$	hecho conocido y elemento de identidad mult.

EJEMPLO 2.

Despejar "a" de la ecuación: $\frac{3a-2}{5} = a + 2$; $a \in R$.

$\frac{3a-2}{5} = a + 2$	dato
$5(\frac{3a-2}{5}) = 5(a+2)$	prop. multiplicativa

$5(\frac{1}{5})(3a - 2) = 5(a+2)$	ley asociativa
$1.\ (3a - 2) = 5(a+2)$	elemento inverso multiplicativo
$(3a - 2) = 5(a+2)$	elemento de identidad de la multiplicación
$3a - 2 = 5a + 5(2)$	ley distributiva
$3a - 2 = 5a + 10$	hecho conocido
$3a - 2 + 2 = 5a + 10 + 2$	propiedad aditiva
$3a + 0 = 5a + 12$	elem. inverso aditivo y hecho conocido
$3a = 5a + 12$	elem. identidad suma
$-5a + 3a = -5a + 5a + 12$	propiedad aditiva
$-5a + 3a = 5a - 5a + 12$	ley conmutativa
$-5a + 3a = 0 + 12$	elemento inverso aditivo
$-5a + 3a = 12 + 0$	ley conmutativa
$-5a + 3a = 12$	elem. identidad suma
$3a - 5a = 12$	ley conmutativa
$a(3-5) = 12$	ley distributiva
$a(-2) = 12$	hecho conocido
$a(-2)(-\frac{1}{2}) = 12\ (-\frac{1}{2})$	propiedad multiplicativa
$a.1 = 12(-\frac{1}{2})$	elemento inverso multiplicativo
$a = 12(-\frac{1}{2})$	elem. identidad multiplicación
$a = -6$	hecho conocido

A continuación, el alumno tratará de resolver los siguientes ejemplos dando la justificación necesaria en cada paso (utilice los axiomas de campo y las propiedades de la igualdad).

EJEMPLO 3.

Despejar m de la fórmula, $F = ma$; $a \neq 0$

$F = ma$	1. ______________
$ma = F$	2. ______________
$ma(\frac{1}{a}) = F(\frac{1}{a})$	3. ______________
$m.1 = F(\frac{1}{a})$	4. ______________
$m = F(\frac{1}{a})$	5. ______________
$m = F/a$	6. ______________

EJEMPLO 4.

Despejar "a" de la ecuación, $2a - 1 = 5a$

$2a - 1 = 5a$	1. ______________
$5a = 2a - 1$	2. ______________
$5a - 2a = 2a - 1 - 2a$	3. ______________
$5a - 2a = 2a - 2a - 1$	4. ______________
$5a - 2a = 0 - 1$	5. ______________
$5a - 2a = -1$	6. ______________
$a(5-2) = -1$	7. ______________
$a(3) = -1$	8. ______________
$(3)a = -1$	9. ______________

$3a = -1$ 10. ____________

$(\frac{1}{3})\ 3a = -1\ (\frac{1}{3})$ 11. ____________

$1\ .\ a = -1\ (1/3)$ 12. ____________

$a = -1\ (\frac{1}{3})$ 13. ____________

$a = 1\ .\ (-\frac{1}{3})$ 14. ____________

$a = -\ 1/3$ 15. ____________

AUTOEVALUACION 4.

Despejar la variable indicada en cada problema dando la justificación necesaria en cada paso.

1.- Despejar t de la fórmula $v = d/t$.

2.- Despejar c de la ecuación $a = \frac{b}{c} - 1$.

3.- Despejar c de la ecuación $a = \frac{b}{c-1}$.

4.- Despejar C de la fórmula $M = C + Crt$.

5.- Despeja h de la fórmula $A = \frac{bh}{2}$.

6.- Despejar C de la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$.

7.- Despejar K de la ecuación $6K = 3$.

8.- Despejar y de la ecuación $3y + 7 = 5$.

9.- Despejar x de la ecuación $3x = 15 + 2x$

10.- Despejar r de la fórmula $C = 2\pi r$.

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 2.

AUTOEVALUACION 1.

1.- {2,5,17,37}
2.- ϕ
3.- ϕ
4.- Infinito.
5.- Infinito.
6.- Infinito.
7.- Finito.
8.- Infinito.
9.- Finito.
10.- Infinito.
11.- Finito.
12.- Infinito.
13.- Finito.
14.- Finito.
15.- Falso.
16.- Verdadero
17.- Verdadero.
18.- Falso.
19.- Verdadero.
20.- Verdadero.
21.- Falso.
22.- Falso.
23.- Verdadero.
24.- Verdadero.
31.- 0.875
32.- 0.006
33.- 5.666....
34.- 0.6363....
35.- 0.144
36.- 1.02
37.- 4/9
38.- 70/99
39.- 601/495

AUTOEVALUACION 2.

5.- 12
10.- Verdadero.
11.- Falso.
12.- Verdadero.
13.- Falso.
14.- Falso.
15.- N: 2
Z: -4,0,2
Q: -4,0,-1/3, 3/8,2
S: $\sqrt{5}$, π
R: todos
16.- Propiedad 5.
17.- Propiedad 6.
18.- Propiedad 3.
19.- Propiedad 3.
20.- Propiedad 5.
21.- 1. Dado.
2. Axioma 1.
3. Propiedad 1.
4. Propiedad 4
22.- 1. Dado.
2. Axioma 1.
3. Propiedad 1.
4. Propiedad 4.

AUTOEVALUACIÓN 3.

4.- N: cerrado en 1 y 3.
5.- Z: cerrado en 1,2 y 3.
6.- Q: cerrado en 1,2,3 y 4.
7.- R: cerrado en 1,2,3 y 4.
8.- c y d
9.- a) que $p>q$
b) que q sea submúltiplo de p y de un entero positivo como resultado.
10.- No.
11.- Sí.
12.- Sí.
13.- No.
14.- b y d
15.- La suma y multiplicación.
17.- La suma y multiplicación.
19.- La suma y multiplicación.
20.- Axioma 4.
21.- Axioma 2.
22.- Axioma 3.
23.- Axioma 4.
24.- Axioma 2.
25.- Axioma 4.
26.- Axioma 4.
27.- Axioma 2.
28.- Propiedad 5.
29.- Propiedad 3.
30.- Propiedad 5.
31.- Propiedad 6.
32.- 5,3, $\sqrt{2}$; axioma 4.
33.- 1/2, 2; axioma 3.
34.- 8,7,5; axioma 2.
35.- 2,7,5, $\sqrt{2}$; axioma 2.
36.- 8,3,5; axioma 3.
37.- 8,3,7; axioma 4.
38.- 8,4,3; axioma 4.
39.- 1. Axioma 3.
2. Axioma 2.
3. Axioma 3.
4. Axioma 3.

40.- 1. Axioma 3.
2. Axioma 2.
3. Axioma 3.

41.- 1. Axioma 4.
2. -
3. Axioma 2.
4. Axioma 3.
5. Axioma 3.
6. -
7. Axioma 2.
8. Axioma 3.
9. Axioma 4.
10. -

B I B L I O G R A F Í A.

1.- Allendoerfer Carl, Oakley Cletus.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.
Ed. McGraw-Hill de México, S.A. de C.V.

2.- Anfossi.
CURSO DE ÁLGEBRA.
Ed. Progreso, S.A.

3.- Baldor, A.
Álgebra.
EDIME Organización Gráfica.

4.- Dolciani, Berman, Freilich.
ÁLGEBRA MODERNA (Tomo I).
Publicaciones Cultural, S.A.

5.- Dolciani, Berman, Wooton.
ÁLGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRÍA (Tomo 2).
Publicaciones Cultural, S.A.

6.- Hall, Knight.
ÁLGEBRA ELEMENTAL.
Montainer y Simon, S.A. Barcelona.

7.- Lehmann, Charles.
ÁLGEBRA.
Ed. Limusa, S.A.

8.- Lovaglia, Florence - Elmore, Merritt-Conway, Donald.
ÁLGEBRA.
Harper y Row Latinoamericana (HARLA, SLAL de C.V.).

AUTOEVALUACIÓN 3.

4.- N: cerrado en 1 y 3.
5.- Z: cerrado en 1,2 y 3.
6.- Q: cerrado en 1,2,3 y 4.
7.- R: cerrado en 1,2,3 y 4.
8.- c y d
9.- a) que $p>q$
b) que q sea submúltiplo de p y de un entero positivo como resultado.
10.- No.
11.- Sí.
12.- Sí.
13.- No.
14.- b y d
15.- La suma y multiplicación.
17.- La suma y multiplicación.
19.- La suma y multiplicación.
20.- Axioma 4.
21.- Axioma 2.
22.- Axioma 3.
23.- Axioma 4.
24.- Axioma 2.
25.- Axioma 4.
26.- Axioma 4.
27.- Axioma 2.
28.- Propiedad 5.
29.- Propiedad 3.
30.- Propiedad 5.
31.- Propiedad 6.
32.- 5,3, $\sqrt{2}$; axioma 4.
33.- 1/2, 2; axioma 3.
34.- 8,7,5; axioma 2.
35.- 2,7,5, $\sqrt{2}$; axioma 2.
36.- 8,3,5; axioma 3.
37.- 8,3,7; axioma 4.
38.- 8,4,3; axioma 4.
39.- 1. Axioma 3.
2. Axioma 2.
3. Axioma 3.
4. Axioma 3.

40.- 1. Axioma 3.
2. Axioma 2.
3. Axioma 3.

41.- 1. Axioma 4.
2. -
3. Axioma 2.
4. Axioma 3.
5. Axioma 3.
6. -
7. Axioma 2.
8. Axioma 3.
9. Axioma 4.
10. -

B I B L I O G R A F Í A.

1.- Allendoerfer Carl, Oakley Cletus.
FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS UNIVERSITARIAS.
Ed. McGraw-Hill de México, S.A. de C.V.

2.- Anfossi.
CURSO DE ÁLGEBRA.
Ed. Progreso, S.A.

3.- Baldor, A.
Álgebra.
EDIME Organización Gráfica.

4.- Dolciani, Berman, Freilich.
ÁLGEBRA MODERNA (Tomo I).
Publicaciones Cultural, S.A.

5.- Dolciani, Berman, Wooton.
ÁLGEBRA MODERNA Y TRIGONOMETRÍA (Tomo 2).
Publicaciones Cultural, S.A.

6.- Hall, Knight.
ÁLGEBRA ELEMENTAL.
Montainer y Simon, S.A. Barcelona.

7.- Lehmann, Charles.
ÁLGEBRA.
Ed. Limusa,S.A.

8.- Lovaglia, Florence - Elmore, Merritt-Conway, Donald.
ÁLGEBRA.
Harper y Row Latinoamericana (HARLA,SLAL de C.V.).

9.- Nichols, Eugene D.
ÁLGEBRA MODERNA ELEMENTAL.
Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA)

10.- Nichols, Heimer, Garland.
ÁLGEBRA MODERNA.
Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA)

11.- Rees, Sparks.
ÁLGEBRA.
Editorial Reverté Mexicana, S.A.

12.- Rider, Paul R.
ÁLGEBRA.
Editorial Herrero.

13.- Schaaf, Peters.
ÁLGEBRA, UN ENFOQUE MODERNO.
Editorial Reverté Mexicana,S.A.

14.- Tomber, Marvin L.
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA CONTEMPORÁNEA.
Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana (UTHEA).

15.- Swokowski, Earl.
ÁLGEBRA UNIVERSITARIA.
Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA)

16.- Wentworth y Smith.
ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.
Editorial Porrúa, S.A.