MATEMATICAS IV

ESTELA JAIMES AGUILAR

MATEMATICAS IV

ESTELA JAIMES AGUILAR

PROLOGO

Cubriendo los objetivos marcados por la Comisión Académica del H. Consejo Universitario, se presentan ahora estas páginas, cuyo contenido dan forma al libro de Matemáticas IV, destinado al último semestre del bachillerato. Los cinco capítulos que lo forman tratan uno a uno los siguientes temas con sus ejercicios correspondientes; inducción matemática y el teorema del binomio el primero; sucesiones y series, el segundo; progresiones, el tercero; permutaciones y combinaciones, el cuarto y trigonometría el quinto.

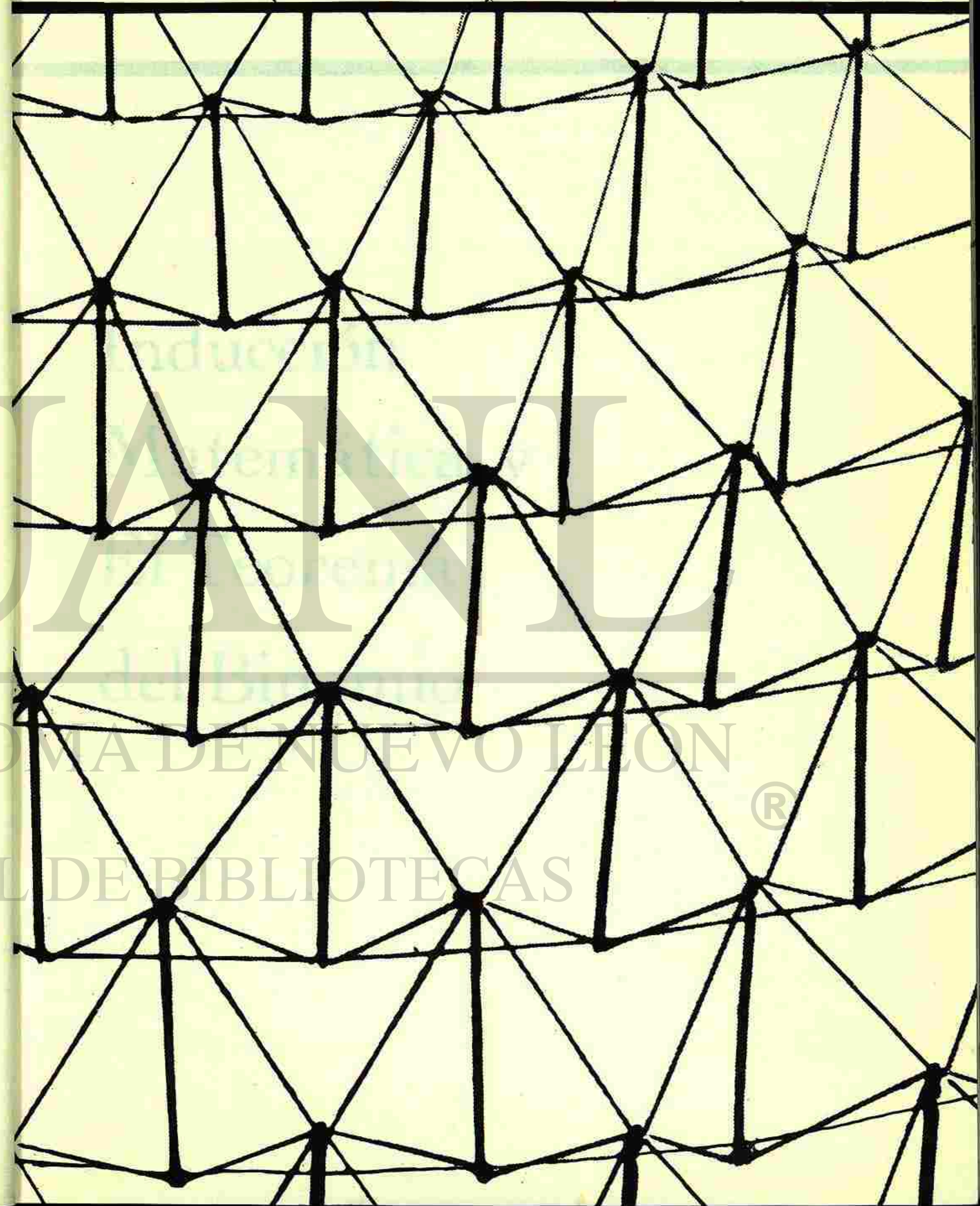
Agradezco al Lic. Ernesto Carrillo Camarena, Director de la Preparatoria No. 1 de la Universidad Autónoma de Nuevo León, la deferencia que tuvo al hacerme partícipe del movimiento editorial de esta escuela, que tan exitosamente promueve, así mismo a todos los maestros de la materia, por el apoyo brindado.

A QUIENES CON ESTE CURSO TERMINAN SU PREPARACION MATEMATICA EN EL BACHILLERATO, DESEANDOLES EXITO EN EL FUTURO.

RECONOCIMIENTO AL SR. IMPRESOR GUILLERMO BARROSO MENDIZABAL, QUIEN CONJUGANDO ARTE, CONOCIMIENTO Y PACIENCIA, HIZO POSIBLE LA FORMACION DE ESTE LIBRO.

C O N T E N I D O

CAPITULO 1



1

Inducción Matemática y El Teorema del Binomio

1

Inducción Matemática y El Teorema del Binomio

CAPITULO 1

INDUCCION MATEMATICA Y EL TEOREMA DEL BINOMIO

deductivo gral part
inductivo part gral
Mat. deductiva
con rigor
en el hacer - inductiva

1.1 INTRODUCCION

Hay ciencias racionales que nos dan verdades de razón y ciencias que nos dan verdades de hecho.

El razonamiento deductivo que procede de lo general a lo particular, se ubica en las ciencias que nos dan verdades de razón, a las cuales pertenece la **matemática;** el razonamiento que va de lo particular a lo general es el inductivo, usado en las ciencias que nos dan verdades de hecho, como la física.

La matemática es una ciencia conceptual deductiva, donde la base del pensar lo constituyen la definición y la demostración y tiene por método para sistematizar las verdades, el deductivo. ¿ Porqué entonces inducción matemática o inducción completa? ¿ Acaso un adjetivo modifica el proceso de razonamiento?

Se dice que: " la matemática presentada con rigor, es una ciencia deductiva, pero la matemática en el hacer es una ciencia experimental inductiva, ya que muchos resultados matemáticos fueron encontrados por inducción primeramente y probados más tarde ".

" La naturaleza de la inducción matemática es deductiva ya que se puede probar ".

Se puede inferir que todo jucio racional lógico opera por análisis y por síntesis formulando deducciones y aún en la matemática pura es preciso la intuición para que el pensamiento progrese.

1.2 INDUCCION MATEMATICA

El método de inducción matemática o completa podría llamarse " Prueba de n a (n + 1) o simplemente pasar al siguente entero."

Ilustramos el método con el siguiente ejemplo.

En una práctica ecuestre hay un número indefinido del mismo tipo de obstáculo. Se quiere demostrar que el competidor puede salvar hasta un obstáculo determinado cualquiera. Es necesario conocer dos hechos para hacerlo: i) puede salvar el primer obstáculo ii) Si ha salvado un número cualquiera de obstáculos, puede salvar el siguiente.

De i) se sabe que puede salvar el primer obstáculo; de esto y de ii) se sabe que puede salvar el segundo obstáculo, nuevamente de esto y de ii) se sabe que puede salvar el tercer obstáculo y así sucesivamente.

La inducción matemática es usada solamente para probar teoremas relacionados con los números enteros positivos, por ser el conjunto de los números naturales un conjunto que contiene el número 1 y es cerrado con respecto a la adición de 1, lo cual significa que si $1 \epsilon N$, entonces $1 + 1 = 2$, $2 \epsilon N$; $2 + 1 = 3$, $3 \epsilon N$; y así si $n \epsilon N$ entonces $(n + 1) \epsilon N$.

Haremos algunas consideraciones de interés con los números enteros positivos, necesarias para manejar los ejemplos de inducción matemática. Usaremos la siguiente nomenclatura.

N = { números naturales o enteros positivos }

P = { números pares }

I = { números impares }

Si cualquier número natural n, se multiplica por 2, entonces 2n pertenece a los números pares, así si $3 \epsilon N$, entonces $3(2) \epsilon P$ o sea $6 \epsilon P$.

Si restamos la unidad a un número par, lo convertimos en impar, por lo tanto la expresión de un número impar es $2n - 1$, para toda n que pertenezca a los naturales. Así si $5 \epsilon N$, entonces $2(5) - 1 \epsilon I$ o sea $9 \epsilon I$.

Los números pares e impares consecutivos difieren en dos unidades del anterior, por tanto los pares consecutivos son

$2n,\ 2n + 2,\ 2n + 4,\ 2n + 6, \ldots$

y los impares consecutivos son:

$2n - 1,\ 2n + 1,\ 2n + 3,\ 2n + 5, \ldots$

El enunciado formal del teorema de inducción matemática se dá a continuación.

1.2.1 PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

Si asociamos a cada entero positivo n una proposición P (n), con la propiedad de que P (n) sea cierta o falsa pero no ambas, para cada $n \epsilon N$, si P (n) es verdadera y P(n + 1) también lo es, entonces P (n) será verdadera para todo entero positivo n.

Ejemplo 1

Demostrar por inducción matemática que la suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n}{2}(n + 1)$. Lo cual se expresa por la igualdad

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración:

1o. Verificamos la igualdad para un número pequeño de sumandos

$$\text{Si } n = 3 \implies 1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

$$6 = \frac{3(4)}{2}$$

$$6 \equiv 6$$

2o. Si la igualdad se cumple para n debe cumplirse para n+ 1, por lo tanto si sumamos n+ 1 a los dos miembros de la igualdad, obtenemos

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n\,(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

Despejando (n + 1) del primer miembro, tenemos

$$n + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$n + 1 = \frac{n\,(n + 1)}{2} + (n + 1) - \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

$$n + 1 \equiv n + 1$$

La igualdad queda demostrada si llegamos a una identidad.

Ejemplo 2

Demostrar por inducción matemática que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Demostración:

1o. Verificamos para n = 1 y n = 4

Si n = 1

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}$$

Si n = 4

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 - \frac{1}{2^4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$ $= \frac{16-1}{16} = \frac{15}{16}$

$$\frac{15}{16} \equiv \frac{15}{16}$$

2o. Si la proposición es verdadera para n debe cumplirse para n+ 1 por lo tanto sustituímos n por n+ 1 en los dos miembros de la igualdad por demostrar y obtenemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Despejando $\frac{1}{2^{n+1}}$ del primer miembro, tenemos

$$\frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}\right)$$ $2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \equiv \frac{1}{2^{n+1}}$$ $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 3

Usar el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

lo cual se expresa diciendo que: La suma de los cubos de n números, es igual al cuadrado de la suma de ellos mismos.

Demostración:

1o. Verificamos para n = 4

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

$$1 + 8 + 27 + 64 = 10^2$$

$$100 \equiv 100$$

Del ejemplo 1 sabemos que:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, entonces la igualdad primera se escribe como:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

2o. Si la proposición es cierta para **n** debe serlo para n + 1

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2$$

Despejando $(n+1)^3$ del primer miembro tenemos:

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

Sacando factor común en el segundo miembro, escribimos

$$(n+1)^3 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \left[(n+2)^2 - n^2\right]$$

$$(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2}{4}\left[4\,(n+1)\right]$$

$$(n+1)^3 = (n+1)^2 \; (n+1)$$

$$(n+1)^3 \equiv (n+1)^3$$

EJERCICIO 1.1

1. ¿Cuál es la diferencia entre el razonamiento **deductivo** y el **inductivo?**

2. ¿Cuáles son los elementos que constituyen la base del pensamiento matemático?

3. Completa el siguiente párrafo.
"La matemática **presentada con rigor** es una ciencia ________, pero la matemática **en el hacer** es una ciencia experimental __________."

4. ¿En que consiste el método de inducción matemática?

5. Enunciar el principio de inducción matemática.

6. ¿Qué tipo de números reales se usan en el método de inducción matemática.

7. ¿Como se expresa un número par y uno impar en función de **n** si $n \in N$? 2n, 2n-1

8. ¿Pertenecen a los naturales los números pares e impares?

9. Identifica los siguientes conjuntos

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ N

$\{2n,\ 2n+2,\ 2n+4, \ldots\}$, $n \in N$ P

$\{2n-1,\ 2n+1,\ 2n+3, \ldots\}$, $n \in N$ I

Por el método de inducción matemática demuestre la veracidad de las proposiciones siguientes:

10. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$ ✓

11. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ ✓

$2n + 1 = 2n + 1$

12. $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n}{2}(n + 1)$

13. $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n(n + 1)$

14. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

15. $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots + n^4 =$

$$\frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

1.3 TEOREMA DEL BINOMIO

Potencias de binomios. Si recordamos los desarrollos del cuadrado y el cubo de un binomio, dados en productos notables y obtenemos por multiplicación algebraica los desarrollos de potencias mayores cuyos exponentes sean números naturales, tenemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Estos desarrollos nos sugieren un modelo con las siguientes características.

Primera: El número de términos de cada desarrollo, es una unidad mayor que la potencia del binomio.

Segunda: El grado de cada uno de los términos del desarrollo, coincide con el grado del término.

Tercera: El primer término del desarrollo, es el primer término del binomio elevado a una potencia igual a la del binomio, su coeficiente es unitario.

Cuarta: El exponente de "a" en cualquier término que no sea el primero, es una unidad menor que el exponente de "a" en el término anterior.

Quinta: El coeficiente de cualquier término del desarrollo, exceptuando el primero, se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de "a" y dividiéndolo entre el orden de ese término anterior.

Sexta: El exponente de b en cualquier término es una unidad mayor que el exponente de b en el término anterior.

Séptima: Si los términos del binomio tienen signos iguales, entonces todos los términos del desarrollo son positivos y si los términos del binomio son diferentes, entonces los términos del desarrollo tienen signos alternados.

Octava: Los coeficientes del primero y último términos son iguales, lo mismo sucede con los coeficientes de los términos segundo y penúltimo, tercero y antepenúltimo y así sucesivamente. Cuando el número de términos del desarrollo es impar, hay un término central sin pareja.

Ejemplo 1

Desarrollar $(x+y)^6$

Solución:

Cálculo del coeficiente	1	$\frac{1 \times 6}{1}$	$\frac{6 \times 5}{2}$	$\frac{15 \times 4}{3}$	$\frac{20 \times 3}{4}$	$\frac{15 \times 2}{5}$	$\frac{6 \times 1}{6}$
$(x+y)^6 =$	x^6	$+ 6x^5y$	$+ 15x^4y^2$	$+ 20x^3y^3$	$+ 15x^2y^4$	$+ 6xy^5$	$+ y^6$
Término número	1	2	3	4	5	6	7

Ejemplo 2

Obtener el desarrollo de $(1-a^2)^5$

Solución:

$$(1-a^2)^5 = (1)^5 + 5(1)^4(-a^2) + 10(1)^3(-a^2)^2 + 10(1)^2(-a^2)^3 + 5(1)(-a^2)^4 + (-a^2)^5$$

$$(1-a^2)^5 = 1 - 5a^2 + 10a^4 - 10a^6 + 5a^8 - a^{10}$$

Ejemplo 3

Obtener el desarrollo de $(2x-y)^4$

Solución:

Cálculo del coeficiente	1	$\frac{1 \times 4}{1}$	$\frac{4 \times 3}{2}$	$\frac{6 \times 2}{3}$	$\frac{4 \times 1}{4}$
$(2x-y)^4 =$	$(2x)^4$	$+ 4(2x)^3(-y)$	$+ 6(2x)^2(-y)^2$	$+ 4(2x)(-y)^3$	$+ (2x)^0(-y)^4$
Orden del término	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.

$$(2x-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

Con lo expuesto anteriormente se establece el desarrollo de la potencia enésima de un binomio, conocida como: **"Teorema del Binomio"** siendo **n** un número natural.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$

$$+\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3$$

$$+\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4 + \cdots$$

$$+\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(r-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(r-1)}a^{n-(r-1)}b^{r-1} + \cdots + b^n$$

En este desarrollo, el témino que contiene la letra r se conoce como el r-simo término y sus elementos se obtienen si observamos la relación que guardan los elementos de cada término del desarrollo con el **orden del término.**

Se observa que:

a) El exponente de **b** en cada uno de los término del desarrollo es una unidad menor que el orden del término, por lo tanto en el r-simo término el exponente de la **b** se escribe como $(r-1)$ ya que **r** es el orden del témino.

b) El exponente de **a** en cada uno de los términos es **n** disminuída en un número, el cual también es una unidad menor que el orden del término, en consecuencia el exponente de la **a** es $n-(r-1)$ que se puede escribir como $n-r+1$

c) El coeficiente de cada uno de los términos del desarrollo está formado por una fracción, la cual contiene verios factores en el numerador y en denominador. El último factor del numerador es la **n** disminuída en un número el cual es dos unidades menor que el orden del término, entonces este último factor del numerador es $n-(r-2)$ $= n-r+2$ y el último factor del denominador es un número el cual es una unidad menor que el orden del término, o sea $(r-1)$

Para escribir el denominador del r–simo término en forma más simple, se utiliza la **notación factorial** que explicaremos enseguida.

Definición.- La escritura abreviada de los productos de números positivos consecutivos, recibe el nombre de **factorial.**

La notación del factorial es el signo que cierra una admiración (!) y se lee "factorial".

Si $n \in N \implies n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n$

como la multiplicación es conmutativa, se puede escribir

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 1 = 720$

$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$

Por definición $0! = 1$

Definición que se explica con la siguiente exposición.

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4\cdot 3!$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 3\cdot 2!$

$2! = 2\cdot 1 = 2\cdot 1!$

$1! = 1 = 1\cdot 0!$

Despejando 0! de la última igualdad, tenemos $0! = 1$

Volviendo al r–simo término del desarrollo de la teoría del binomio y aplicando el concepto de factorial al denominador del coeficiente, escribimos

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-2)]}{(r-1)!}\, a^{n-(r-1)} b^{r-1}$$

La expresión del r—simo término, permite obtener un término cualquiera del desarrollo de la potencia de un binomio sin el desarrollo completo.

Ejemplo 1

Encontrar el quinto término del desarrollo de $(a+b)^{10}$

Solución:

$$r - \text{simo término} = \frac{n(n-1)\cdot\cdot\cdot[n-(r-2)]}{(r-1)!}\, a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$$

Con $n = 10$ y $r = 5$ calculamos los elementos

$n-(r-2) = 10-(5-2) = 10-(3) = 7$

$(r-1)! = (5-1)! = 4!$

$n-(r-1) = 10-(5-1) = 10-4 = 6$

$r-1 = 5-1 = 4$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del r—simo término, tenemos.

$$5o.\ \text{término} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\, a^6\, b^4$$

Simplificamos la fracción obtenemos

$$5o.\ \text{término} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\, a^6\, b^4$$

$5o.\ \text{término} = 10(3)(7)\, a^6\, b^4 = 210\, a^6\, b^4$

Ejemplo 2

Encontrar el séptimo término del desarrollo de $(x-2y)^{12}$

Solución:

$$r - \text{simo término} = \frac{n(n-1)\cdot\cdot\cdot[n-(r-2)]}{(r-1)!}\, a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$$

Con $n = 12$ y $r = 7$ calculamos

$n-(r-2) = 12-5 = 7$

$(r-1)! = 6!$

$n-(r-1) = 12-6 = 6$

$r-1 = 6$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del r—simo término, tenemos

$$\text{Séptimo término} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot \cancel{9}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1}\, x^6\,(-2y)^6 \quad (2\cdot 3\cdot 2)$$

$7o.\ \text{término} = 11\,(2)\,(3)\,(2)\,(7)\, x^6\, 64\, y^6$

$7o.\ \text{término} = 59{,}136\ x^6 y^6$

Ejercicio 1.2

Desarrollar la potencia indicada en cada binomio y expresar el resultado en la forma más simple.

1.	$(c+d)^4$	2.	$(x-y)^7$
3.	$(m-1)^6$	4.	$(1+y)^8$
5.	$(r+s)^9$	6.	$(w-z)^{10}$
7.	$(2x-y)^5$	8.	$(1+3a)^6$
9.	$(y^2-3)^3$	10.	$(1-b^2)^7$
11.	$(a^2+b^2)^9$	12.	$(x^2-1)^{11}$
13.	$(2a+3b)^6$	14.	$(a-2b)^5$
15.	$(\frac{c}{d}-1)^5$	16.	$(2-\frac{x}{y})^8$

17. Obtener los factoriales de los primeros 10 números naturales.

18. Simplificar las expresiones siguientes:

a) $\dfrac{10!}{5!}$ b) $\dfrac{7!}{(4-1)!}$ c) $\dfrac{n!}{(n-4)!}$

Obtener el término indicado de cada uno de los binomios sin el desarrollo completo.

19. 5o. término de $(w + z)^7$

20. 6o. término de $(2x - 1)^8$

21. 7o. término de $(s - t)^{10}$

22. 8o. término de $(1 - y^2)^{13}$

23. 9o. término de $(3a - 2b)^{12}$

24. 10o. término de $\left(\frac{a}{b} + 1\right)^{11}$

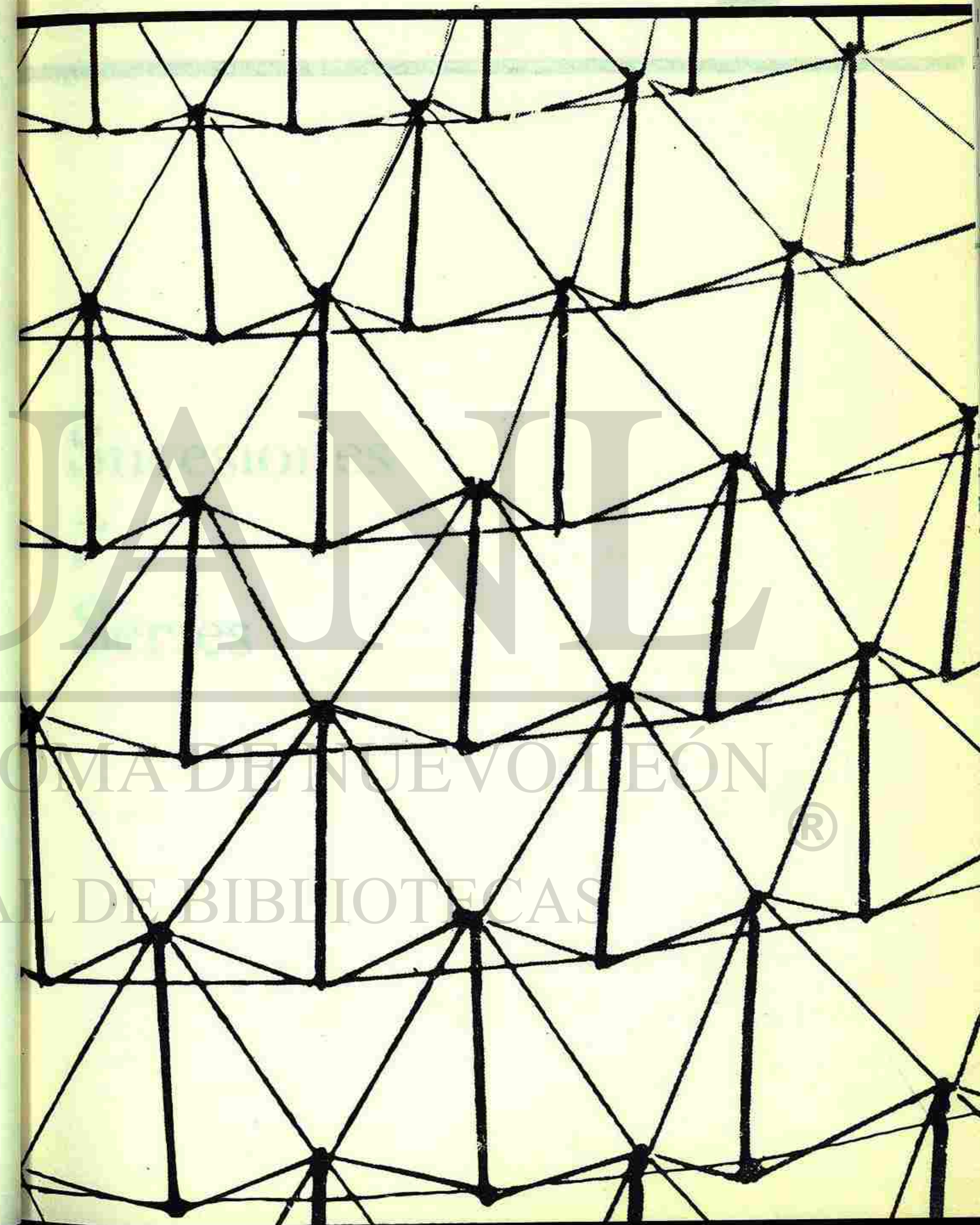
25. 11o. término de $(1 + w)^{14}$

26. ¿A qué es igual 0! ? = 1

27. Menciona las características del desarrollo del **Teorema del Binomio.**

28. Coloca los desarrollos de las potencias de los binomios que aparecen en la página 13, de tal manera que formen un triángulo. El triángulo así formado se llama triángulo de Pascal.

CAPITULO 2



2

Sucesiones y Series

Sucesiones
y
Series

CAPITULO 2

SUCESIONES Y SERIES

2.1 INTRODUCCION

Quizá alguna vez al observar el rebote de una pelota que cae de una altura determinada y continúa cayendo y rebotando en la misma forma, nos hayamos preguntado ¿ Qué distancia recorrerá en los continuos rebotes antes de quedar en reposo?

O bién al tener un número decimal periódico que no termina como 0.181818 . . . nos preguntemos ¿ Cuáles son los números enteros cuyo cociente reproduce ese número ?

La respuesta a estas y otras muchas preguntas las tenemos al aplicar los conceptos correspondientes de sucesiones y series.

2.2 SUCESIONES

Definición. Una sucesión es un conjunto de parejas ordenadas de la forma $\{(n, f(n)\}$ donde $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $f(n)$ es el valor de la función para cada número entero positivo. Cada $f(n)$ es un término de la sucesión.

Definición Alternativa. Una sucesión es el recorrido de una función, cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los números naturales.

Siendo el conjunto de los números naturales un conjunto infinito, infinita es la sucesión que lo tiene como dominio y finita si el dominio es parte de él. O bien, las sucesiones pueden ser finitas o infinitas atendiendo al número de términos que contienen. Es finita cuando el número de términos termina y se pueden contar, e infinita si el número de términos no termina y en consecuencia no se pueden contar.

Si en una función $y = f(x)$ damos a la variable independiente "x" valores enteros y calculamos los correspondientes valores de la función, el conjunto de estos valores forman una sucesión y cada uno de ellos es un término de la misma.

Generalmente a la variable independiente "x" se le designa por la letra "n".

La función evaluada en "n" se llama "ley de desarrollo" de la sucesión, y se encierra entre paréntesis de llave, notación que representa una sucesión.

Para encontrar los términos de una sucesión dada en la forma f (n), se calcula el valor numérico de la expresión para los diferentes números enteros positivos.

Ejemplo 1

Dada $f(n) = 2n - 1$, donde $n \in N$

Obtener la sucesión correspondiente

Solución:

Sabiendo que $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, calculamos los valores de f(n) y tenemos

$f(1) = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(3) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$

$f(4) = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

$f(5) = 2(5) - 1 = 10 - 1 = 9$

y así sucesivamente.

Si escribimos los valores de la función en fila separados por una coma, tenemos 1, 3, 5, 7, 9, . . . siendo ésta una sucesión infinita, por ser infinito el número de términos.

La gráfica de una sucesión la forman un conjunto de puntos aislados en el plano cartesiano bidimensional.

La figura 2.1 muestra la gráfica de la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, . . . que escrita como conjunto de pares ordenados es

$$\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), \ldots\}$$

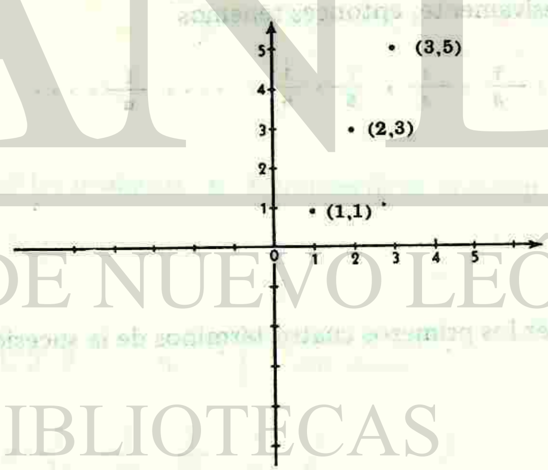


Fig. 2.1

Observamos en esta figura que los puntos están alineados y son puntos aislados de la recta correspondiente a la función $y = 2x - 1$.

Ejemplo 2

Obtener la sucesión representada por la función $f(n) = \frac{1}{n}$, si $n \in N$

Solución:

Calculamos los valores de f(n) para $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ que forma el dominio de toda sucesión.

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$f(4) = \frac{1}{4}$$

$$f(5) = \frac{1}{5}$$

y así sucesivamente, entonces tenemos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Ejemplo 3

Obtener los primeros cuatro términos de la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$

Solución:

Calculando el valor numérico de la ley de desarrollo para $n \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, tenemos

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \ldots$$

$$\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Ejemplo 4

Dada la sucesión $\{2^n\}$, obtener los primeros cinco términos.

Solución:

Sabemos que $n \in N$, entonces

$$\{2^n\} = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$$

$$\{2^n\} = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Ejemplo 5

Obtener los primeros **n** términos de la sucesión $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$

Solución:

$n \in \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, entonces

$$\left\{\frac{1}{n!}\right\} = \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \ldots, \frac{1}{n!}$$

$$\left\{\frac{1}{n!}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots, \frac{1}{n!}$$

Si la ley de desarrollo de una sucesión es una función lineal, la sucesión se llama **sucesión aritmética**. Ejemplos de sucesiones aritméticas son los siguientes

$$\{2n-1\} \ , \ \{n\} \ , \ \{1-n\}$$

Cuando la ley de desarrollo es una función exponencial* , la sucesión se conoce como **geométrica**. Los siguientes son ejemplos de sucesiones geométricas

$$\{2^n\} \ , \ \{5^{n-1}\} \ , \ \{(\tfrac{1}{2})^n\}$$

Una sucesión es **armónica** si al considerar el inverso multiplicativo de cada uno de sus términos, se obtiene una sucesión aritmética.

Las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$ son ejemplos de sucesiones armónicas.

Una sucesión cualquiera se representa por

$\{a_n\} = a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots , a_n , \ldots$

donde a_n representa la ley de desarrollo.

* Nota.- Si $f(x) = a^x$ donde $a \neq 1$, $a > 0$, $x \in R$ entonces $f(x)$ es una función exponencial.

Ejercicio 2.1

1. ¿ Qué es una sucesión ?

2. ¿ Cuándo una sucesión es finita y cuándo infinita ?

3. ¿ Qué diferencia existe entre la gráfica de una sucesión y la gráfica de una función ?

4. ¿ Que símbolo se usa para representar una sucesión ?

5. En la sucesión $\{a_n\} = a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$ ¿ Qué representa a_n ?

6. Escribir la ley de desarrollo de las sucesiones que forman

   a) los números naturales

   b) los números pares

   c) los números impares

7. ¿ Qué característica debe de tener la ley de desarrollo de una sucesión, para que la sucesión sea a) aritmética, b) geométrica, c) armónica?

Escribir los primeros cinco términos de las sucesiones dadas en los problemas del 8 al 19.

8. $\{n\}$ 9. $\{3-n\}$ 10. $\{n-2\}$

11. $\left\{\frac{1}{2}-n\right\}$ 12. $\{3n-2\}$ 13. $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}$

14. $\left\{\frac{2}{1-n}\right\}$ 15. $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 16. $\{3^n\}$

17. $\{4^{n-1}\}$ 18. $\{K^n\}$ 19. $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$

Analizar la ley de desarrollo de cada una de las sucesiones de los problemas del 20 al 25 y decir si la sucesión es armónica, geomética o aritmética.

20. $\{4-n\}$ **21.** $\{a^n\}$

22. $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ **23.** $\left\{\frac{1}{n-1}\right\}$

24. $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ **25.** $\{3n+2\}$

Obtener la gráfica de las sucesiones de los problemas del 26 al 31.

26. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ **27.** $\{2^n\}$ **28.** $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

29. $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ **30.** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ **31.** $\{2n\}$

2.3 SERIES

Definición. Serie es la suma de los elementos de una sucesión.

Una serie es infinita cuando el número de sumandos no termina y finita cuando el número de sumandos termina.

Presentamos enseguida tres series infinitas.

$$1+3+5+7+9+11+13+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

$$2+4+8+16+32+64+\cdots$$

Para representar una serie se usa el símbolo Σ que es la letra griega sigma mayúscula. Enseguida del signo de sumatoria se escribe la ley de desarrollo que corresponde a la ley de desarrollo de la sucesión, en la parte inferior del símbolo sigma se coloca una igualdad que contiene el primer valor de la variable que aparece en la ley de desarrollo y en la parte superior del símbolo se escribe el valor final de la variable. Si la serie es finita, el valor final de la variable es un número real y cuando la serie es infinita se escribe en la parte superior el símbolo ∞.

Así tenemos

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)},$$

serie finita que se lee como

"sumatoria desde n = 1 hasta 10 de $\frac{1}{n(n+1)}$"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

serie inifinita se lee "sumatoria desde n = 1 hasta infinito de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

En forma general una serie se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ donde

u_n representa la ley de desarrollo y n = $\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

Ejemplo 1

Escribir los seis términos de la serie $\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}$

$\left(\text{Sumatoria desde n = 1 hasta 6 de } \frac{1}{n}\right)$

Solución:

Sustituyendo los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sucesivamente donde aprece la "n" tenemos

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

Ejemplo 2

Dar los primeros tres sumandos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1$

Solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1 = [\,2(1) - 1\,] + [\,2(2) - 1\,] + [\,2\,(3) - 1\,] + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots$$

Dependiendo de las características de la ley de desarrollo de las series, éstas se conocen como **aritméticas** si la ley de desarrollo es una **función lineal, geométrica** si la ley de desarrollo es una **función exponencial** y **armónica** si el **inverso multiplicativo** de la ley de desarrollo se convierte en una función lineal.

A continuación presentamos un ejemplo de cada una de estas series.

$\sum_{n=1}^{\infty} 4 - n$, serie aritmética infinita

$\sum_{n=1}^{\infty} (3)^n$, serie geométrica infinita

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, serie armónica infinita

Las siguientes propiedades de la sumatoria tienen amplia aplicación.

i) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ donde c es una constante

ii) $\sum_{i=1}^{n} c\, x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$

iii) $\sum_{i=1}^{n} x_i \pm y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$

Ejercicio 2.2

1. ¿ Qué es una serie ?

2. ¿Qué símbolo se usa para representar una serie ?

3. En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

   ¿ Qué representa u_n ?

4. ¿Simbólicamente, qué diferencia distingue a las series finitas e infinitas?

Escribe los primeros seis sumandos de las series dadas en los problemas del 5 al 16.

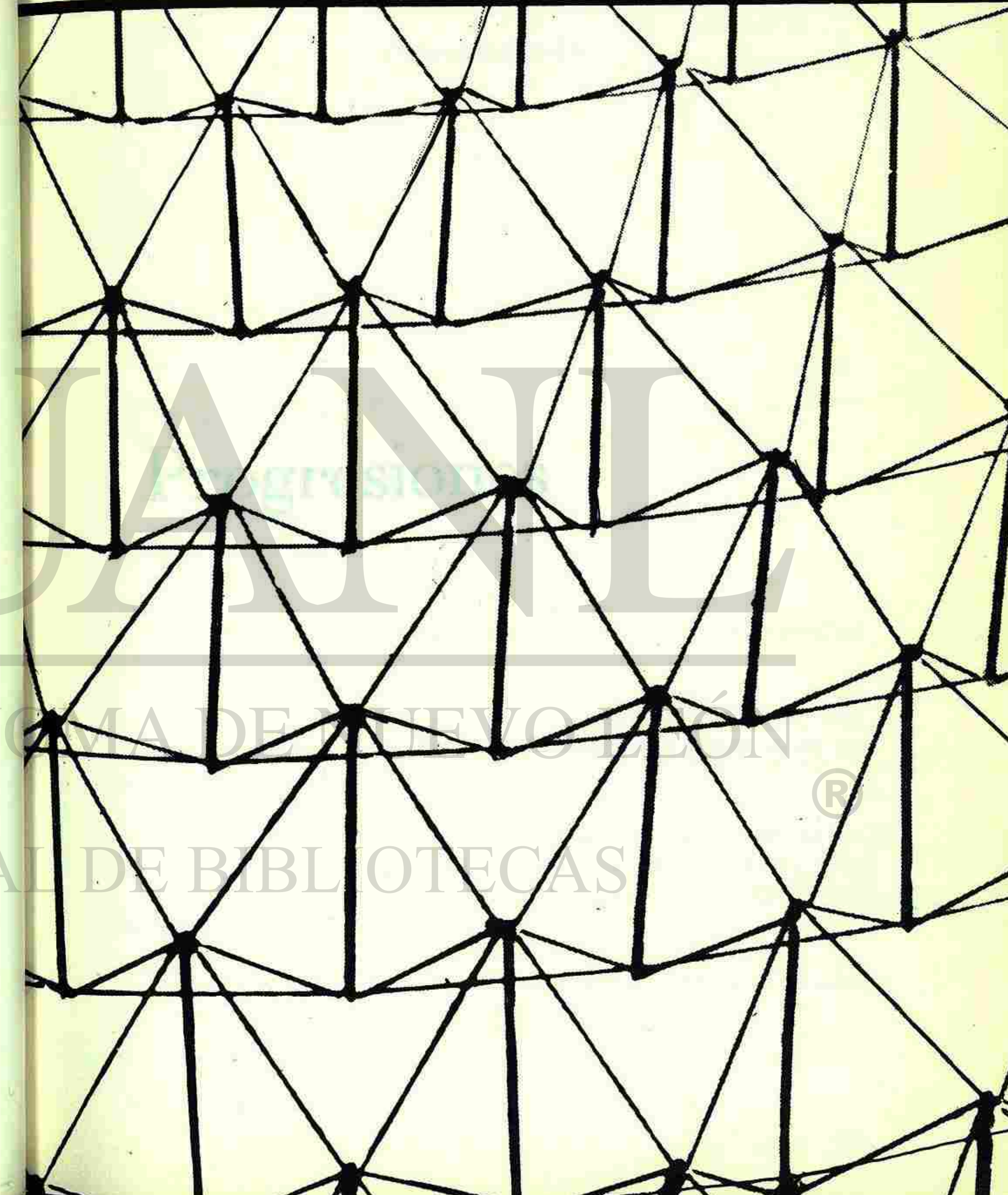
5. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n-1$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} 3n$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} 5n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$ 16. $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$

CAPITULO 3



3

Progresiones

CAPITULO 3
PROGRESIONES

3.1 INTRODUCCION

De las sucesiones analizadas en el capítulo anterior revisten especial importancia la sucesión aritmética y la geométrica, conocidas también como progresiones.

3.2 PROGRESION ARITMETICA

Teniendo presente lo que es una sucesión, podemos **formalizar** la definición de progresión aritmética.

Definición. Progresión aritmética es el recorrido de una función lineal, cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los números naturales.

Definición Alternativa. Una progresión aritmética es un conjunto de números tales que cualesquiera de ellos, después de el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad fija llamada diferencia común.

La diferencia común se obtiene restando a cualquier término de la progresión, el término anterior.

Las progresiones siguientes son aritméticas.

3, 7, 11, 15, . . .

1, 2, 3, 4, . . .

5, 10, 15, 20, . . .

La diferencia común de la primera es 4, la de la segunda es 1 y 5 es la diferencia común de la tercera.

Para manejar una progresión aritmética cualquiera, usamos la siguiente nomenclatura.

a_1 = 1er. término

a_n = enésimo o último término

d = diferencia común

n = número de términos

S_n = suma enésima

Utilizando la nomenclatura y la definición alternativa de una progresión aritmética, formamos la siguiente tabla.

Orden del Término	1	2	3	4	. . .	n
Término	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	. . .	$a_1+(n-1)d$

La expresión del enésimo término se obtiene analizando los sumandos de los términos precedentes, el primer sumando es a_1, el coeficiente del segundo sumando de cada término es una unidad menor que el orden del término, en consecuencia el coeficiente de la diferencia común del enésimo término es una unidad menor que "n", lo cual se escribe $(n-1)$ y la expresión final del enésimo término es $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

La progresión aritmética completa se escribe como

$$a_1\ ,\ a_1 + d\ ,\ a_1 + 2d\ , \ldots ,\ [a_1 + (n-1)\,d]$$

Conociendo el 1er. término y la diferencia común, podemos conocer los demás términos. El n- simo término se conoce también como el último término de una progresión finita.

Ejemplo 1

Obtener el veintiavo término de la progresión 3,7,11,15, . . .

Solución:

En esta progresión se tienen como datos $a_1 = 3$ y $n = 20$. Las incógnitas son d y a_n, entonces

$d = 7 - 3 = 4$

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

Sustituyendo n = 20

$a_{20} = 3 + (20-1)\,4 = 3 + 19\,(4) = 79$

El veintiavo término es 79

Ejemplo 2

Obtener la progresión aritmética de ocho términos, si el primero es 4 y el último 39.

Solución:

Se dan $a_1 = 4$, $a_n = 39$, $n = 8$ entonces usndo la fórmula del último término, tenemos

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

$39 = 4 + (8-1)\,d = 4 + 7d$

$$d = \frac{39-4}{7} = 5$$

Sumando esta diferencia común al primer término, obtenemos el segundo término y así sucesivamente los demás términos.

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, . . . es la progresión pedida.

Con frecuencia es útil obtener la suma de los términos de una progresión aritmética finita que se expresa por el símbolo S_n (suma enésima) y cuya fórmula se obtiene de la manera siguiente

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [\,a_1 + (n-1)\,d\,]$$

$$S_n = [\,a_1 + (n-1)d] + [\,a_1 + (n-2)d\,] + \cdots + (a_1 + d) + a_1$$

$$2S_n = [\,2a_1 + (n-1)d] + [\,2a_1 + (n-1)d] + \cdots + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$2S_n = n\,[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[\,a_1 + (a_1 + (n-1)d\,)]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

La descripción de los pasos en la deducción anterior son:

Primero. Se escriben los sumandos en orden natural.

Segundo. Se invierte el orden de los sumandos, observando que el coeficiente de la diferencia común del penúltimo término que no aparece escrito en la primera ecuación es $(n-2)$, el del antepenúltimo es $(n-3)$ y así se sigue hasta escribir a_1 que ocupa el lugar del último término.

Tercero. Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones, obteniéndose en cada una de ellas el mismo resultado.

$$a_1 + [a_1 + (n-1)d] = 2a_1 + (n-1)d$$

$$(a_1 + d) + [a_1 + (n-2)d] = 2a_1 + (n-1)d$$

Cuarto. Como hay "n" sumandos iguales, entonces la

$$S_n = n\,[2a_1 + (n-1)\,d\,]$$

Quinto. Se despeja S_n

Sexto. Se sustituye $a_1 + (n-1)\,d$ por a_n en la penúltima igualdad

Una progresión aritmética se conoce si conocemos el primer término, el último término, la diferencia común, el número de términos y la suma enésima. Si de estos cinco elementos se conocen tres, es posible obtener los otros dos resolviendo las ecuaciones apropiadas.

Ejemplo 3

Una progresión aritmética tiene 25 términos, siendo el primero igual a la unidad y dos la diferencia común. Obtener el último término y la suma de ellos.

Solución:

Como datos tenemos $n = 25$, $a_1 = 1$ y $d = 2$ siendo los elementos desconocidos a_n y S_n

Las fórmulas para el último término y la suma enésima son conocidas

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

Sustituyendo los valores conocidos en estas fórmulas, tenemos

$$a_{25} = 1 + (25-1)\,2 = 49$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}(1 + 49) = \frac{25\,(50)}{2} = 625$$

Por lo tanto la progresión es 1, 3, 5, 7, 9, . . . , 49

Ejemplo 4

El primer término de una progresión aritmética es 3, el último es 95, la diferencia común es 4, se desconocen el número de términos y la suma enésima.

Solución:

Los datos son: $a_1 = 3$, $a_n = 95$, $d = 4$

Los elementos desconocidos son: n y S_n

Sustituyendo valores conocidos en $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ y despejando n obtenemos:

$\frac{a_n - a_1}{d} = n-1$

$$95 = 3 + (n-1)4$$

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

$$\frac{95-3}{4} = n - 1$$

$$n = \frac{95-3}{4} + 1$$

$$n = 23 + 1$$

$$n = 24$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = 12\,(3 + 95) = 1176$$

Ejemplo 5

La suma de los primeros quince términos de una progresión aritmética es 540 y la diferencia entre ellos es 5. Formar la progresión.

Solución:

Datos: $S_n = 540$, $d = 5$, $n = 15$

Incógnitas a_1 y a_n

Usando las fórmulas conocidas y sustituyendo valores en ellas, tenemos

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$540 = \frac{15}{2}(a_1 + a_n)$$

$1080 = 15a_1 + 15a_n$ Ecuación con dos incógnitas

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + 14(5)$$

$a_n - a_1 = 70$ Ecuación con dos incógnitas

Ya que no es posible resolver las ecuaciones aisladamente, se simultanizan para obtener a_1 y a_n

$$15a_1 + 15a_n = 1080$$

$$-a_1 + a_n = 70$$

$$15a_1 + 15a_n = 1080$$

$$-15a_1 + 15a_n = 1050$$

$$30a_n = 2130$$

$$a_n = 71$$

Sustituyendo $a_n = 71$ en la ecuación $a_n - a_1 = 70$ obtenemos

$$71 - 70 = a_1$$

$$a_1 = 1$$

Progresión pedida

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71

Ejercicio 3.1

1. ¿ Qué es una progresión aritmética ?

2. Enumera los cinco elementos necesarios para conocer una progresión aritmética.

3. Escribe la expresión matemática del enésimo o último término.

4. Escribe en forma general la expresión de una progresión aritmética de **n** términos.

5. ¿ Cómo se obtiene la diferencia común de una progresión aritmética dada ?

6. Demostrar la fórmula para obtener la suma enésima de una progresión aritmética de n términos.

Obtener el último término de cada uns de las progresiones aritméticas dadas a continuación.

7. 1, 6, 11, 16, . . . hasta el 15o. término.

8. 7, 10, 13, 16, . . . hasta el 18o. término.

9. 2, 1, 0, −1, . . . hasta el 11o. término.

10. 3, 1, −1, −3, . . . hasta el 12o. término.

Determinar en cada uno de los problemas del 11 al 15 los elementos faltantes de las progresiones aritméticas, si se conocen tres de ellos.

11. $a_1 = 1$, $d = 4$, $n = 12$

12. $a_1 = -4$, $d = 2$, $n = 8$

13. $a_1 = 1$, $d = -1$, $a_n = -5$

14. $n = 16$, $d = 5$, $S_n = 680$

15. $n = 20$, $d = 4$, $S_n = 840$

En los problemas del 16 al 18, determinar la ley de desarrollo de las sucesiones dadas.

16. 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, . . . 5 − n

17. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, . . . 2n

2n + 1

3, 7, ...

18. − 3, −7, −11, −15, −19, . . . −4(n) − 1

3.3 PROGRESION GEOMETRICA

Definición. Progresión geométrica es el recorrido de una **función exponencial**,* cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los números naturales.

Definición Alternativa. Una progresión geométrica es el conjunto de números tales que, cualesquiera de ellos después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija llamada **razón común**.

La razón común se obtiene dividiendo, cualquier término de la progresión entre el anterior.

Son progresiones geométricas las siguientes

2, 4, 8, 16, 32, . . .

3, 9, 27, 81, 243, . . .

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

En toda progresión geométrica se distinguen los siguientes elementos

a_1 = 1er. término

a_n = enésimo o último término

r = razón común

n = número de términos

S_n = suma enésima

Si escribimos una progresión geométrica en función de estos elementos y utilizamos la definición alternativa, obtenemos

* La función exponencial se define como

$$Exp_a = \left\{ (x, y) \mid y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0,\ x \in R,\ y > 0 \right\}$$

ORDEN DEL TERMINO	1	2	3	4	5	6	. . .	n
TERMINO	a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$	$a_1 r^4$	$a_1 r^5$	. . .	$a_1 r^{n-1}$

La potencia de la razón en el enésimo término es $(n-1)$ o sea una unidad menor que el orden del término, esta misma relación se cumple en todos los términos.

La fórmula del enésimo término es

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

La expresión general de una progresión geométrica es

$$a_1,\ a_1 r,\ a_1 r^2,\ \ldots,\ a_1 r^{n-1}$$

Si conocemos el primer término y la razón común, podemos ir escribiendo término a término una progresión

Ejemplo 1

Obtener el doceavo término de la progresión geométrica

2, 4, 8, 16, 32, . . .

Solución:

En esta progresión geométrica tenemos como datos $a_1 = 2$, $n = 12$ y como incógnitas a_n y r, entonces

$$r = \frac{8}{4} = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Sustituyendo los datos, tenemos

$$a_{12} = 2(2)^{12-1} = 2(2)^{11} = 2(2048) = 4096$$

$$a_{12} = 4096$$

El doceavo término es 4096

Ejemplo 2

Obtener la progresión geométrica de siete términos, si el primero es $\frac{1}{3}$ y el último $\frac{1}{2187}$

Solución:

Obtenemos los siguientes datos del enunciado del problema

$$n=7\ ,\ a_1=\frac{1}{3}\ ,\ a_7=\frac{1}{2187}$$

Como $a_n = a_1 r^{n-1}$ entonces

$$a_7 = \frac{1}{3}(r)^{7-1}$$

$$\frac{1}{2187} = \frac{1}{3}r^6 \quad \text{de donde}$$

$$r^6 = \frac{\frac{1}{2187}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2187} = \frac{1}{729}$$

$$r = \sqrt[6]{(\tfrac{1}{3})^6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

La progresión buscada es

$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{27}\ ,\ \frac{1}{81}\ ,\ \frac{1}{243}\ ,\ \frac{1}{729}\ ,\ \frac{1}{2187}$$

También en las progresiones geométricas es útil obtener una fórmula para la suma enésima representada por S_n

Si representamos por S_n la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, tenemos

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por r, obtenemos

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$S_n = a_1 + \cancel{a_1 r} + \cancel{a_1 r^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_1 r^{n-1}}$$

$$-rS_n = -(\cancel{a_1 r} + \cancel{a_1 r^2} + \cancel{\cdots} + a_1 r^n)$$

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

Factorizando el primer miembro de la ecuación

$$S_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n$$

Despejando S_n

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \quad ; \quad r \neq 1$$

Esta fórmula representa la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica finita.

El valor de la razón debe ser diferente de 1 evitando así que el denominador se haga cero.

Para conocer completamente una progresión geométrica es necesario tener determinados los cinco elementos básicos, a_1, a_n, r, n y S_n, que se identifican como el primer término, último término, razón común, número de términos y suma enésima. Conociendo tres de ellos podemos obtener los dos restantes aplicando las fórmulas del enésimo término y suma enésima.

Elemplo 3

Obtener la suma de los primeros diez términos de la progresión geométrica dada a continuación

1 , 3 , 9 , 27 , . . . hasta el 10º término

Solución :

Fórmula a usar : $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$; $r \neq 1$

Datos : $a_1 = 1$, $n = 10$

El valor de la razón se obtiene dividiendo 9 entre 3 o bién 27 entre 9, por lo tanto $r = 3$.

Sustituyendo estos datos en la fórmula a usar, tenemos

$$S_{10} = \frac{1 - 1\,(3)^{10}}{1 - 3} = \frac{1 - 5049}{-2} = 29{,}524$$

Se deja al estudiante la comprobación del valor del décimo término que es $a_{10} = 19{,}683$, con el cual se conoce completamente la progresión.

Definición. Se llaman **medios geométricos** a los términos comprendidos entre dos términos cualesquiera de una progresión geométrica.

Los dos términos cualesquiera de la definición anterior, se asocian respectivamente con el primero y último término de una progresión.

Ejemplo 4.

Insertar tres medios geométricos entre $\dfrac{1}{27}$ y $\dfrac{1}{2187}$

Solución :

Con los dos términos dados y los tres por insertar se forma una progresión de 5 términos.

Haciendo $a_1 = \dfrac{1}{27}$ y $a_5 \; \dfrac{1}{2187}$ y aplicando la fórmula del enésimo término, tenemos

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$a_5 = \frac{1}{27}\, r^4$$

$$\frac{1}{2187} = \frac{1}{27}\, r^4$$

$$r^4 = \frac{\dfrac{1}{2187}}{\dfrac{1}{27}}$$

$$r = \pm\,\frac{1}{3}$$

Por lo tanto los medios geométricos son: $\pm\dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243}, \pm\dfrac{1}{729}$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 6 se dan tres elementos de una progresión geométrica. Determinar los elementos faltantes.

1. $a_1 = 2, \; a_n = 4096, \; n = 12$

2. $a_1 = \frac{1}{2}, \; r = \frac{1}{2}, \; n = 9$

3. $r = -3, \; n = 5, \; a_n = 162$

4. $n = 5, \; r = \frac{1}{3}, \; S_n = \frac{4}{9}$

5. $S_n = \frac{364}{405}, \; r = \frac{1}{3}, \; a_1 = \frac{3}{5}$

6. $a_1 = 27, \; a_n = \frac{1}{81}, \; r = \frac{1}{3}$

7. Insertar dos medios geométricos entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{320}$

8. Intercalar cuatro medios geométricos entre 27 y $\frac{1}{27}$.

9. Una pelota se deja caer de una altura de 1 m. Si en cada rebote alcanza un tercio de la altura desde la cual ha caído esa vez, ¿Qué altura alcanzará en el cuarto rebote? ¿Qué distancia total recorrerá al tocar el suelo por sexta vez?

10. El tercer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo es $\frac{1}{243}$. Obtener los dos primeros términos.

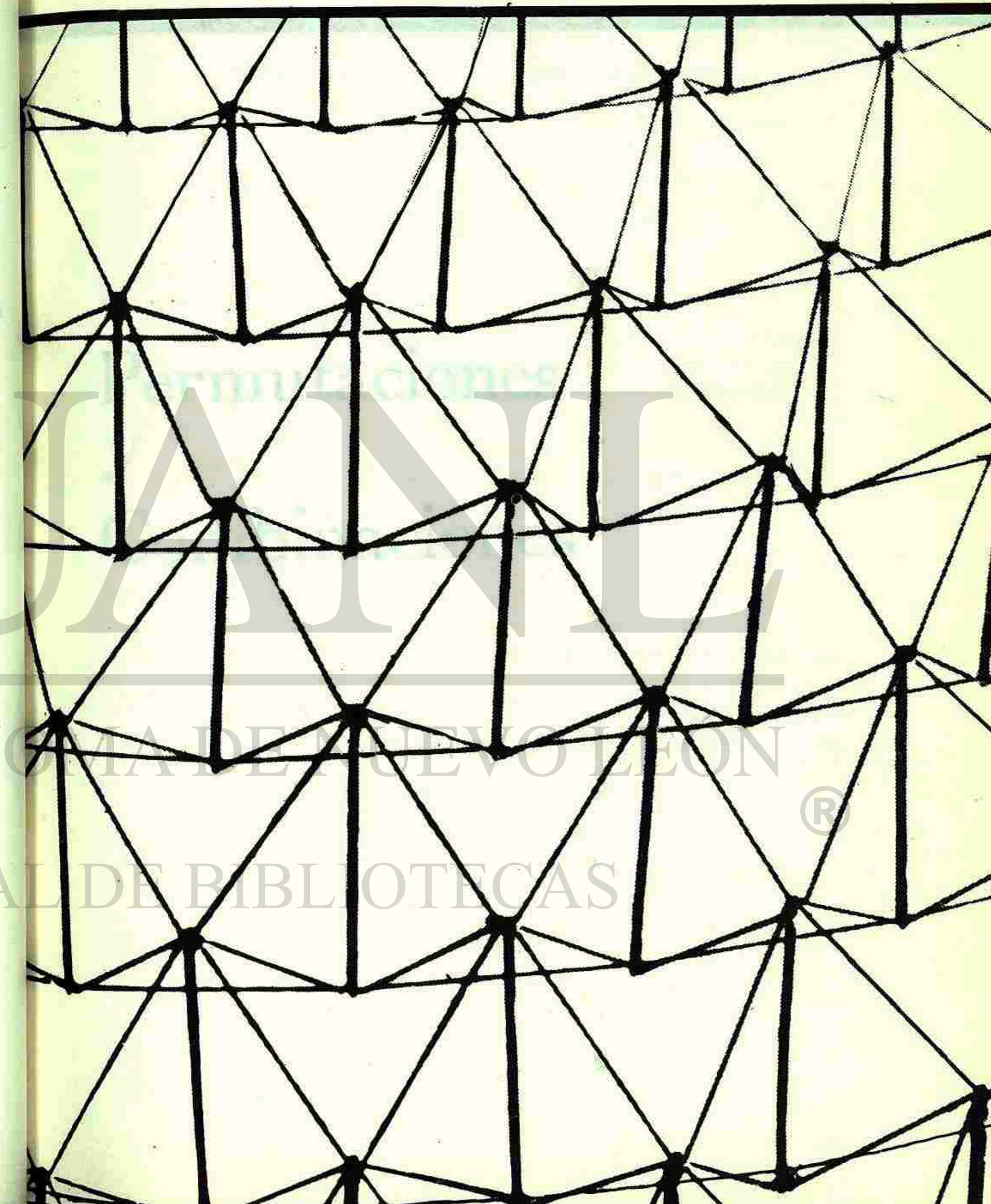
11. Definir lo siguiente:

    a) Progresión geométrica.

    b) Función exponencial.

    c) Medios geométricos.

CAPITULO 4



4

Permutaciones y Combinaciones

CAPITULO 4

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

4.1 INTRODUCCION

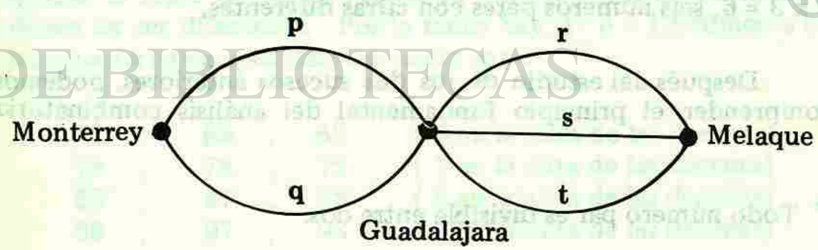
Un tipo especial del proceso de contar, básico en matemática, se presenta cuando estamos interesados en conocer el número de formas distintas en que, bajo ciertas condiciones puede realizarse un suceso.

4.2 ASPECTOS GENERALES DEL ANALISIS COMBINATORIO.

El estudio de los planteamientos siguientes conducirá al principio fundamental del análisis combinatorio.

Si queremos conocer de cuántas maneras distintas puede un viajero ir de Monterrey a Melaque, si hay dos caminos diferentes de Monterrey a Guadalajara y tres caminos diferentes de Guadalajara a Melaque, es necesario hacer el siguiente análisis.

Un diagrama ayuda al análisis



De Monterrey a Guadalajara hay dos caminos diferentes y por cada una de estas opciones, se presentan tres posibilidades para ir de Guadalajara a Melaque, por lo tanto los diferentes arreglos de caminos son:

p — r	q — r
p — s	q — s
p — t	q — t

llamando a los caminos por las letras que aparecen en el diagrama. Estos arreglos hacen un total de 6, número que se obtiene multiplicando $2 \times 3 = 6$ donde 2 es el número de caminos de Monterrey a Guadalajara y 3 es el número de caminos de Guadalajara a Melaque.

Si estamos ahora interesados en conocer cuántos números pares de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5 y 6, debemos hacer el análisis siguiente. Para que un número sea par, su cifra final debe ser par*. En consecuencia el lugar de las unidades puede ser ocupado en dos formas diferentes porque hay dos números pares en los dígitos dados; una vez elegida la cifra en las unidades, quedan tres números para ocupar el lugar de las decenas, como observamos en la distribución siguiente

34 , 54 , 64 (4 en la cifra de las unidades)

36 , 46 , 56 (6 en la cifra de las unidades)

El número total de números diferentes se puede obtener sin necesidad de escribirlos, si multiplicamos el número de posibilidades como puede ocuparse el lugar de las unidades por el número de posibilidades como puede ocuparse el lugar de las decenas. O sea $2 \times 3 = 6$, seis números pares con cifras diferentes.

Después del estudio de los dos sucesos anteriores, podemos comprender el principio fundamental del análisis combinatorio.

* Todo número par es divisible entre dos.

Principio Fundamental

Si un suceso puede ocurrir independientemente de m_1 maneras diferentes, si un segundo suceso puede ocurrir independientemente de m_2 maneras diferentes, ambos sucesos sucesivamente pueden ocurrir de $m_1 \cdot m_2$ maneras diferentes.

Este principio es válido para un número finito de sucesos. El orden en que se consideren esos sucesos no afecta el resultado.

Ejemplo 1

De cuántas maneras se puede formar un comité integrado por un presidente, un secretario y un tesorero, si hay cuatro candidatos a presidente, tres candidatos a secretario y dos candidatos a tesorero.

4 3 2

4, 3, 2, 1

Solución:

El cargo de presidente puede ser ocupado de 4 maneras diferentes, por cada una de ellas hay 3 maneras de ocupar el cargo de secretario y por cada una de las doce maneras de ocupar los cargos de presidente-secretario hay 2 maneras de ocupar el cargo de tesorero, por lo tanto tenemos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras diferentes de formar el comité.

Ejemplo 2

Cuántos números de dos cifras diferentes pueden formarse con los dígitos 6, 7, 8 y 9 ?

Solución :

El lugar de las decenas, puede ser ocupado por cualquiera de los cuatro dígitos dados, quedando tres dígitos disponibles para ocupar el lugar de las unidades, ya que las cifras de los números deben de ser diferentes. Por lo tanto hay $4 \cdot 3 = 12$ números con las características pedidas, los cuales son :

67 ,	68 ,	69	(6 en la cifra de las decenas)
76 ,	78 ,	79	(7 en la cifra de las decenas)
86 ,	87 ,	89	(8 en la cifra de las decenas)
96 ,	97 ,	98	(9 en la cifra de las decenas)

4, 3, 2 12 2 24

Ejemplo 3

¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos del problema anterior ?

Solución :

Al no especificarse que las cifras son diferentes, se permiten repeticiones y tanto el lugar de las unidades como el de las decenas pueden ser ocupado en 4 formas diferentes, entonces aplicando el principio fundamental, se obtienen $4 \cdot 4 = 16$ números de dos cifras. A los doce números del problema anterior se agregán 66 , 77 , 88 y 99.

Ejercicio 4.1

1. ¿En cúantas formas pueden distribuírse los tres primeros lugares de una competencia en la cual participan 10 países ?
2. Si se lanzan dos dados normales. ¿De cuántoas formas pueden caer ?
3. Una moneda de 100 pesos y otra de 200 pesos, se lanzan al suelo. ¿De cuántas maneras pueden caer ?
4. Un examen consta de ocho preguntas de falso y verdadero. ¿ De cuántas maneras diferentes puede contestarse el examen completo ?
5. ¿ Cuántos números de tres cifras diferentes menores que 400 pueden formarse con los enteros 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ? *
6. ¿De cuántas formas se pueden introducir 4 cartas en 2 buzones?
7. ¿ Cuántos números de a lo más dos cifras diferentes, pueden formarse con los dígitos 1 , 2 , 3 ?
8. Cuántos números de al menos dos cifras diferentes, pueden formarse con los dígitos 1 , 2 , 3 ?

(5)(4)(3)(2)

4.3 PERMUTACIONES

En el lenguaje diario y en el lenguaje matemático, **permutar significa cambiar el orden.**

Definición. Se llama permutación de un cierto número de objetos, a cada disposición u ordenación diferente de ellos.

Si analizamos las letras de las palabras *cosa* y *saco* observamos que constan de las mismas letras, sin embargo son vocablos diferentes porque son ordenaciones diferentes de las letras *a, c, o* y *s*.

Cuando tenemos **n** objetos y disponemos **r** de ellos ($r \leqslant n$) en un orden determinado, llamamos a esta disposición una permutación de **n** objetos tomados de **r** en **r** . Usamos el símbolo **P (n, r)** para señalar este hecho.

Los símbolos ${}_nP_r$, P_n^r , $P_{n,\,r}$ tienen el mismo significado que P (n , r)

El número total de permutaciones de **n** objetos tomados de **r** en **r** es equivalente al número de maneras en que pueden llenarse **r** lugares de entre **n** objetos.

Así el primer lugar puede ser llenado en **n** maneras diferentes, el segundo lugar puede ser ocupado en $n - 1$ formas diferentes, el tercero en $n-2$ y así sucesivamente hasta el r-simo lugar que puede ser ocupado en $[\ n-(r-1)\ ]$ formas diferentes ya que el número que se le resta a la **n** es una unidad menor que el **orden del lugar.** Ver cuadro siguiente:

Maneras de ocuparlos	n	n—1	n—2	n—3	. . .	n—(r—1)
Orden de los lugares	1	2	3	4	. . .	r —simo

Si suprimimos el paréntesis en la expresión del r-simo lugar obtenemos $(n - r + 1)$.

En consecuencia el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r se escribe

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)$$

Si el segundo miembro de esta igualdad se multiplica y se divide por $(n-r)!$ se obtiene

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)!}$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Entonces $\boxed{P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$ es la fórmula para obtener el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r.

Si estamos interesados en obtener el número de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez, obtenemos una fórmula reducida al hacer r = n y sustituírla en la fórmula anterior.

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Por lo tanto la fórmula que nos dá el número de permutaciones de n objetos tomados todos a un mismo tiempo es:

$$P(n, n) = n!$$

Ejemplo 1

Obtener el número de permutaciones de las cinco letras a, b, c, d y e, tomadas de tres en tres.

Solución:

La fórmula a usar es $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Sustituyendo valores

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 1} = 60$$

Ejemplo 2

De cuántas maneras pueden sentarse cinco alumnos en un salón de clase que tiene ochos bancos individuales.

Solución:

Usamos la fórmula $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Sustituímos los valores n = 8 , r = 5

entonces $P(8, 5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6720$$

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras pueden colocarse tres libros en un estante?

Solución:

Esta pregunta se asocia con el número de permutaciones de tres elementos tomados todos a la vez.

La fórmula apropiada es $P(n, n) = n!$

$$P(3, 3) = 3! = 6$$

Permutaciones con elementos repetidos.

El número P de permutaciones de n elementos, tomados todos a la vez, repitiéndose uno de ellos q veces, otro de ellos r veces, un tercero s veces, etc., está dada por

$$P = \frac{n!}{q!\ r!\ s!}$$

Ejemplo 4

Determinar el número de permutaciones de las diez letras de la palabra CUERNAVACA.

Solución:

Como la palabra Cuernavaca tiene letras repetidas, entonces la fórmula conveniente es $P = \frac{n!}{q!\, r!}$

$n = 10$, $q = 3$ $r = 2$

puesto que la palabra tiene 10 letras de las cuales 3 son a y 2 son c

Sustituyendo estos valores, tenemos

$$P = \frac{10!}{3!\ 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\ \cancel{2} \cdot 1} = 302,400$$

302,400 maneras diferentes de permutar las letras.

Con frecuencia en este análisis se obtienen cantidades grandes de formas diferentes de presentar un suceso y por esto suele llamarse formas sofisticadas.

Permutaciones circulares

El número de formas en que se pueden colocar n elementos diferentes alrededor de una mesa circular es igual a $(n-1)!$

$$P \text{ circulares} = (n-1)!$$

Ejemplo 5

¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en una mesa redonda?

Solución:

Usando la fórmula para permutaciones circulares y sustituyendo valores, tenemos

$P_c = (n-1)!$, $n = 6$

$P_c = (6-1)! = 5! = 120$ maneras diferentes

Ejercicio 4.2

1. Calcular las permutaciones siguientes:

   $P(4, 2)$, $P(8, 5)$, $P(15, 3)$

2. Obtener el número de permutaciones de ocho libros tomados de cuatro en cuatro.

3. De cuántas maneras pueden sentarse 15 alumnos en un salón de clase que tiene 20 bancos individuales.

4. ¿De cuántas formas pueden colocarse 10 libros en un estante?

5. ¿De cuántas formas pueden colocarse 7 libros en un estante de tal manera que 2 de ellos estén siempre juntos?

6. Obtener el número de permutaciones de las letras de la palabra ISSSTE.

7. Obtener el número de permutaciones de las letras de la palabra Torreón.

8. De cuántas maneras pueden sentarse 4 personas en una mesa redonda.

9. Obtener el número de permutaciones de 20 maestros tomados de 6 en 6.

10. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 5 macetas en un corredor?

11. De una colección de 9 cuadros se quieren formar filas de 3 cuadros. Hallar el número de filas que se pueden obtener.

12. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar 4 personas en una fila?

4.4 COMBINACIONES

Definición. Una combinación es un conjunto o colección de objetos en un orden no especificado.

El número de combinaciones de n objetos tomados de r en r, se asocia con el número de subconjuntos de r elementos que tiene un conjunto de n elementos.

Si $A = \{a, b, c, d, e\}$

¿Cuántas combinaciones de dos letras se pueden obtener?

Esto equivale a preguntarse. ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos tiene el conjunto A?

La respuesta es

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{a, e\}$,

$\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{b, e\}$, $\{c, d\}$;

$\{c, e\}$, $\{d, e\}$

Diez es el número de combinaciones de dos letras de las cinco letras dadas.

Para indicar el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r se usa el símbolo $C(n, r)$ que también puede ser $_nC_r$, C^r_n, $C_{n,r}$.

La diferencia primordial entre permutación y combinación es el orden de los objetos o elementos. Por cada combinación hay r! permutaciones.

Así tenemos

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} \quad \text{y como} \quad P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow \quad C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

fórmula para calcular el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r

El número de combinaciones de n objetos tomados todos a la vez es igual a 1.

Ejemplo 1

¿Cuántas ternas para la candidatura de director pueden formarse de un grupo de 15 maestros?

Solución:

Se pide el número de combinaciones de quince elementos tomados de tres en tres.

Usando la fórmula

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

donde $n = 15$, $r = 3 \Longrightarrow$

$$C(15, 3) = \frac{15!}{(15-3)!\,3!} = \frac{15!}{12!\,3!}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12!} = 455$$

Ejemplo 2

¿Cuántas combinaciones pueden formarse con las letras de la palabra PANUCO tomadas de dos en dos?

Solución:

fórmula $C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

$n = 6$, $r = 2$

$$C(6, 2) = \frac{6!}{4!\;2!} = 15$$

$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2}$

Esas combinaciones son

PA, PN, PU, PC, PO

AN, AU, AC, AO, NU

NC, NO, UC, UO, CO

Ejercicio 4.3

1. ¿Qué es una combinación?
2. ¿Cuál es la diferencia básica entre combinación y permutación?
3. Escribe la fórmula que te dá el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r.
4. Calcular las siguientes combinaciones.

   C (4, 2), C (10, 4), C (12, 3)

5. ¿Cuántos grupos de 5 alumnos se pueden formar con 20 alumnos sobresalientes de una preparatoria para que la representen en un concurso?

6. ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrado? ¿Cuántas un hexágono?

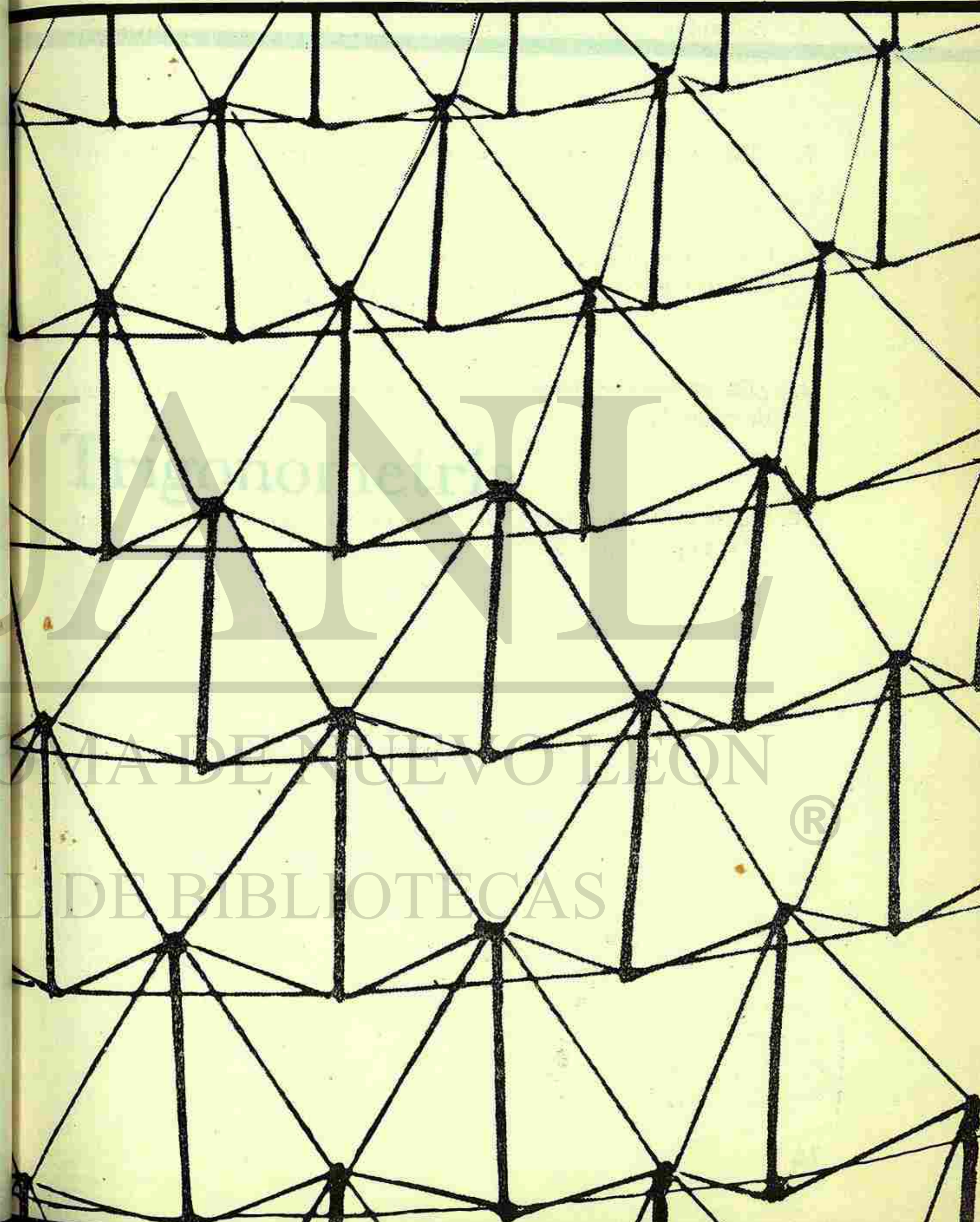
7. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 idiomas de entre 10?

8. Obtener el número de triángulos diferentes que se pueden formar uniendo los vértices de a) un cuadrado, b) un exágono.

9. ¿De cuántas maneras puede un alumno escoger 6 preguntas de entre 10?

10. Si se tienen 5 puntos sobre una circunferencia ¿Cuántas cuerdas se pueden determinar?

CAPITULO 5



5

Trigonometría

CAPITULO 5

TRIGONOMETRIA

5.1 INTRODUCCION

La trigonometría tiene sus inicios antes de la era Cristiana, pero no fué sino hasta el siglo XVI cuando surge como poderosa herramienta que impulsa la matemática aplicada.

No obstante que el significado de la palabra trigonometría es la medición de triángulos, hoy en día su campo se extiende a las funciones trigonométricas, medición de líneas, ángulos y arcos de circunferencia.

5.2 CONCEPTOS GEOMETRICOS GENERALES.

Puntos, rectas y planos

Dos puntos determinan un segmento de recta.

Cuando varios puntos se pueden unir por una sola recta, entonces se dice que están alineados o son colineales.

Tanto las rectas como los planos son conjuntos de puntos.

En la figura 5.1 los puntos A , B y C estan alineados, pero D , E y F no lo están.

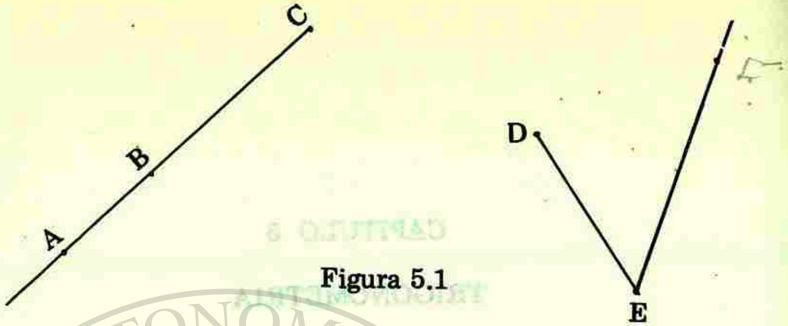


Figura 5.1

Recta horizontal es aquella recta que es paralela a una superficie de nivel, como el nivel de la superficie del agua. Fig. 5.2.

Recta vertical es la que sigue la dirección de la plomada. Fig. 5.3

Figura 5.2

Figura 5.3

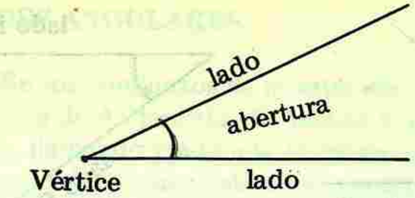
5.3 ANGULOS

VERTICE y lados ABERTURA Lados

Definición. Angulo es la abertura comprendida entre dos segmentos de recta que se unen en un punto común llamado vértice.

Los dos segmentos de recta se llaman los lados del ángulo.

Un ángulo se designa por una letra mayúscula colocada en el vértice, o bien por una letra griega situada en la abertura. Si los lados son OP y ON, entonces al ángulo se nombra por $\angle$ PON o por $\angle$ NOP , en esta notación es indiferente qué se nombre primero. La abertura de un ángulo no se afecta por la longitud de sus lados. Fig. 5.4.



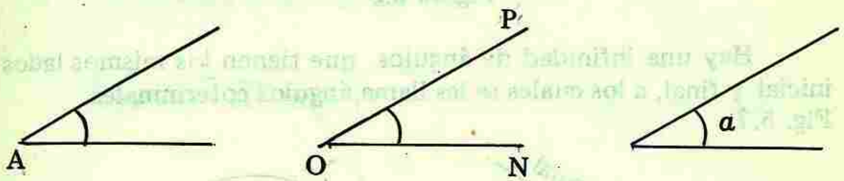


Figura 5.4

Generación de ángulos

Un ángulo se genera girando un segmento de recta alrededor de uno de sus extremos. Si el giro se hace en **contra de las manecillas del reloj,** (de un reloj con manecillas) entonces el ángulo se considera de **signo positivo** y si el ángulo se genera con un giro **a favor de las manecillas** del reloj, entonces se considera de **signo negativo.** Fig. 5.5

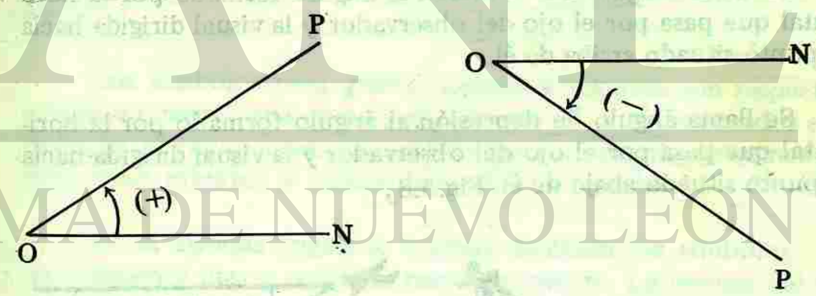


Figura 5.5

En trigonometría se habla de **ángulos orientados** en los cuales uno de los lados es el inicial y el otro es el lado final o terminal. Figura Fig. 5.6

Figura 5.6

Hay una infinidad de ángulos que tienen los mismos lados inicial y final, a los cuales se les llama **ángulos coterminales.** Fig. 5.7

Figura 5.7

Se llama ángulo de elevación al ángulo formado por la horizontal que pasa por el ojo del observador y la visual dirigida hacia un punto situado arriba de él.

Se llama ángulo de depresión al ángulo formado por la horizontal que pasa por el ojo del observador y la visual dirigida hacia un punto situado abajo de él. Fig.5.8,

Figura 5.8

5.4 UNIDADES ANGULARES

Grado. En los comienzos de nuestra era, los matemáticos griegos de la Escuela de Alejandría, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, llamando grado a la abertura angular correspondiente a ese arco y cuyo vértice está en el centro de la circunferencia, por lo tanto el grado es $\frac{1}{360}$ parte de una revolución y es una de las unidades angulares. Fig. 5.9

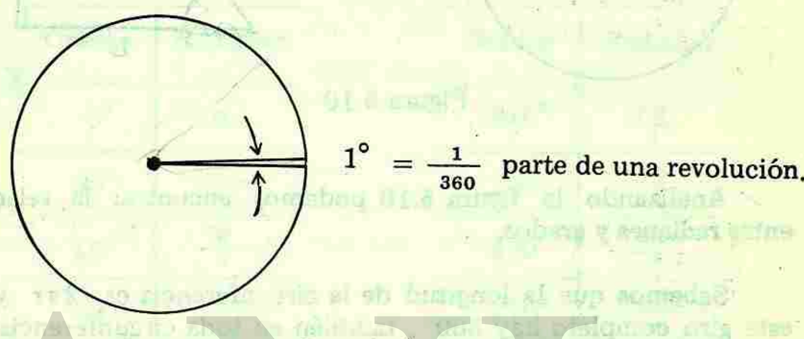


Figura 5.9

Dividieron también el grado en 60 partes iguales llamadas minutos (primera parte menor) y cada minuto lo dividieron en 60 partes iguales llamadas segundos (segunda parte menor de un grado).

Los símbolos para grado, minuto y segundo son respectivamente un cerito, una coma y dos comas $^\circ, ', ''$ colocados en el lugar de los exponentes. Así para designar un ángulo de quince grados, ocho minutos y cuatro segundos, se escribe $15^\circ\ 8'\ 4''$

En el sistema inglés se utilizan también los símbolos $'$, $''$ para designar pies y pulgadas respectivamente. La lectura del texto hará distinguir cuando se trate de fracciones de grado o unidades de longitud.

Radián. Otra unidad angular de amplia aplicación es el radián.

Definición. Radián es el ángulo cuya longitud del arco subtendido es igual a la longitud del lado.

Si el vértice de este ángulo lo ubicamos en el centro de una circunferencia, tenemos un radián en la Fig. 5.10

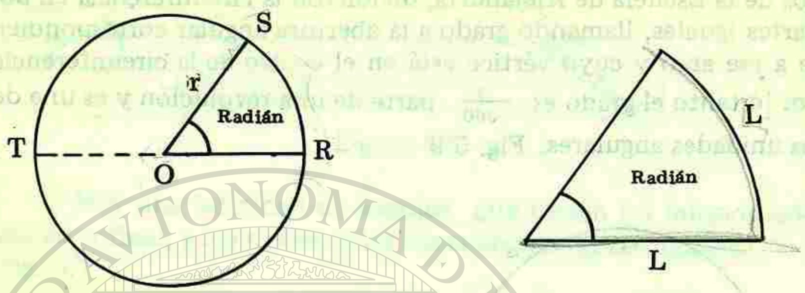


Figura 5.10

Analizando la figura 5.10 podemos encontrar la relación entre radianes y grados.

Sabemos que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y en este giro completo hay 360°, también en toda circunferencia los arcos son proporcionales a los ángulos centrales que los subtienden, en consecuencia tenemos

$$\frac{\measuredangle\ ROS}{\measuredangle\ ROT} = \frac{\overset{\frown}{RS}}{\overset{\frown}{RST}}$$

sustituyendo los valores correspondientes,tenemos

$$\frac{1 \text{ Radián}}{180^\circ} = \frac{r}{\pi r}$$

simplificando y despejando

$$1 \text{ Radián} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ \text{ aprox.}$$

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

Con esta relación $\pi = 180^\circ$ podemos formar una tabla de equivalencias de grados a radianes para los valores angulares más usuales, obteniendo múltiplos y submúltiplos de π.

Si $\pi = 180^\circ \implies 2\pi = 2(180^\circ) = 360^\circ$

Si $\pi = 180^\circ \implies \frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Y así sucesivamente.

Tabla de equivalencias.

Grados	Radianes	Grados	Radianes
0°	0	210°	$\frac{7\pi}{6}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	360°	2π
180°	π		

5.5 CLASIFICACION DE LOS ANGULOS

Angulo nulo es aquel ángulo cuyo lado final coincide con el inicial, Fig. 5.11

Lado inicial y lado final

Figura 5.11

Angulo agudo es un ángulo cuya abertura es mayor que 0° pero menor que la abertura de un cuadrante. Fig. 5.12

Figura 5.12

Angulo recto. Cuando una recta corta a otra formando ángulos adyacentes iguales, entonces estos ángulos son rectos. Fig. 5.13

Figura 5.13

Angulo obtuso es el ángulo cuya abertura es mayor que la de un ángulo recto y menor que la abertura de dos ángulos rectos. Fig. 5.14

Figura 5.14

Angulo de lados colineales o llano es aquel ángulo cuyo lado final es prolongación del lado inicial o sea que sus lados forman una recta Fig. 5.15

Figura 5.15

Angulo entrante es aquel ángulo cuya abertura es mayor que un ángulo de lados colineales pero menor que una revolución completa. Fig. 5.16

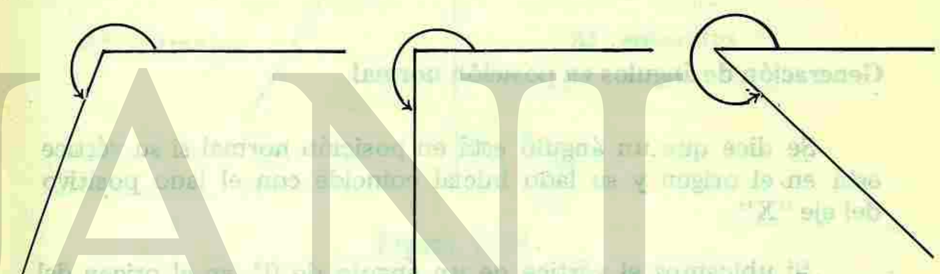


Figura 5.16

Angulo perigonal o perígono es aquel que corresponde a un giro completo. En este ángulo los lados inicial y final también coinciden. Fig. 5.17

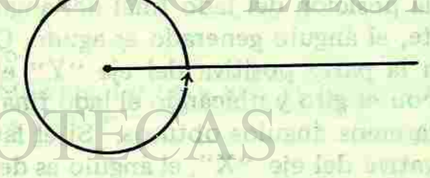


Figura 5.17

La abertura de un ángulo perigonal representa una circunferencia a la cual corresponden 360°

Con esta base, los límites en grados para las diferentes clases de ángulo son:

ángulo nulo = 0°

0° < ángulo agudo < 90°

ángulo recto = 90°

90° < ángulo obtuso < 180°

ángulo de lados colineales = 180° = 2rt.

180° < ángulo entrante < 360°

ángulo perigonal = 360° = 4rt.

Generación de ángulos en posición normal

Se dice que un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje "X".

Si ubicamos el vértice de un ángulo de 0° en el origen del sistema cartesiano y sus lados inicial y final coincidiendo con la parte positiva del eje de las "X" y giramos su lado terminal en contra de las manecillas del reloj, estaremos generando diferentes ángulos positivos dependiendo de la posición donde se detenga el lado terminal.

Si la posición del lado final del ángulo se ubica en el primer cuadrante, el ángulo generado es agudo. Cuando el lado final coincide con la parte positiva del eje "Y" el ángulo es recto. Continuando con el giro y ubicando el lado final en el segundo cuadrante, generaremos ángulos obtusos. Si el lado final coincide con la parte negativa del eje "X", el ángulo es de lados colineales. Generaremos éngulos entrantes cuando detenemos el giro en cualquier posición del tercer y cuarto cuadrantes. Por último tendremos un giro completo o ángulo perigonal al detener el lado terminal sobre el lado inicial colocado en la parte positiva del eje "X". En la figura 5.18 se dan gráficamente los ángulos descritos.

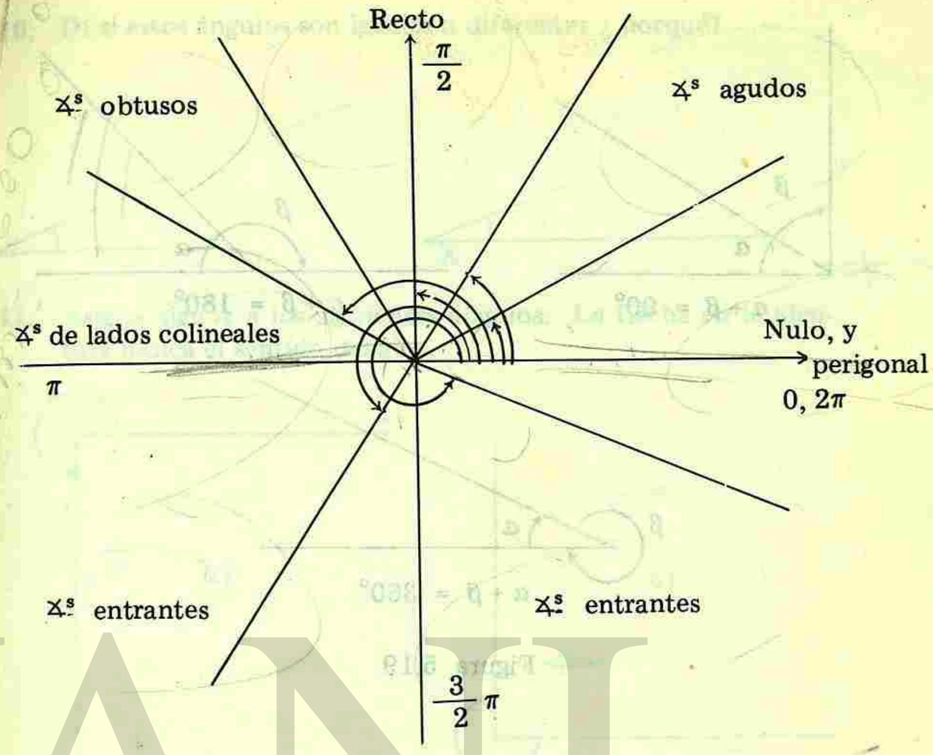


Figura 5.18

Definiciones

Angulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si su suma es 90°.

Angulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios y uno es el suplemento del otro si la suma de ellos es 180°.

Angulos conjugados

Dos ángulos son conjugados y uno es el conjugado del otro si la suma de ellos es 360°. En la figura 5.19 se presentan estos ángulos.

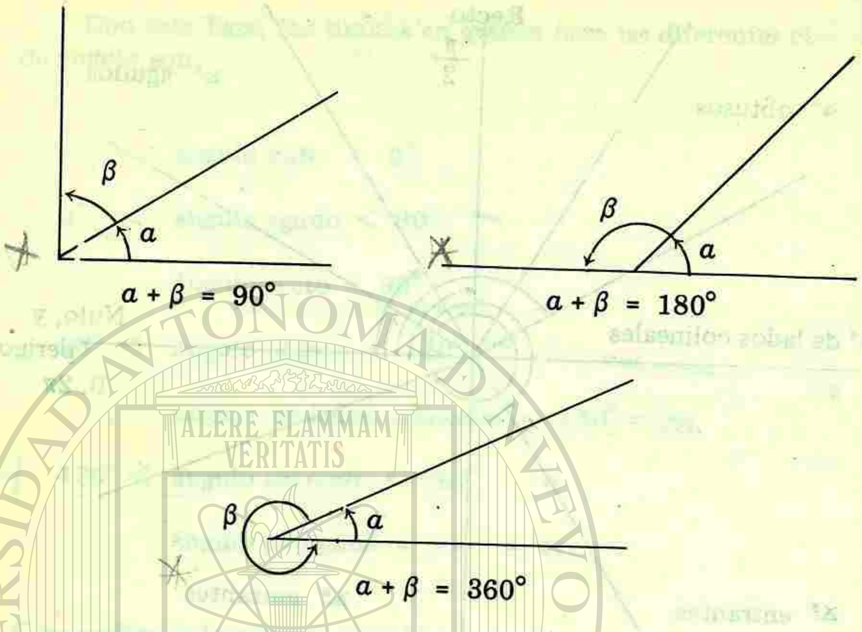
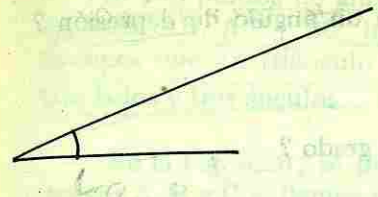


Figura 5.19

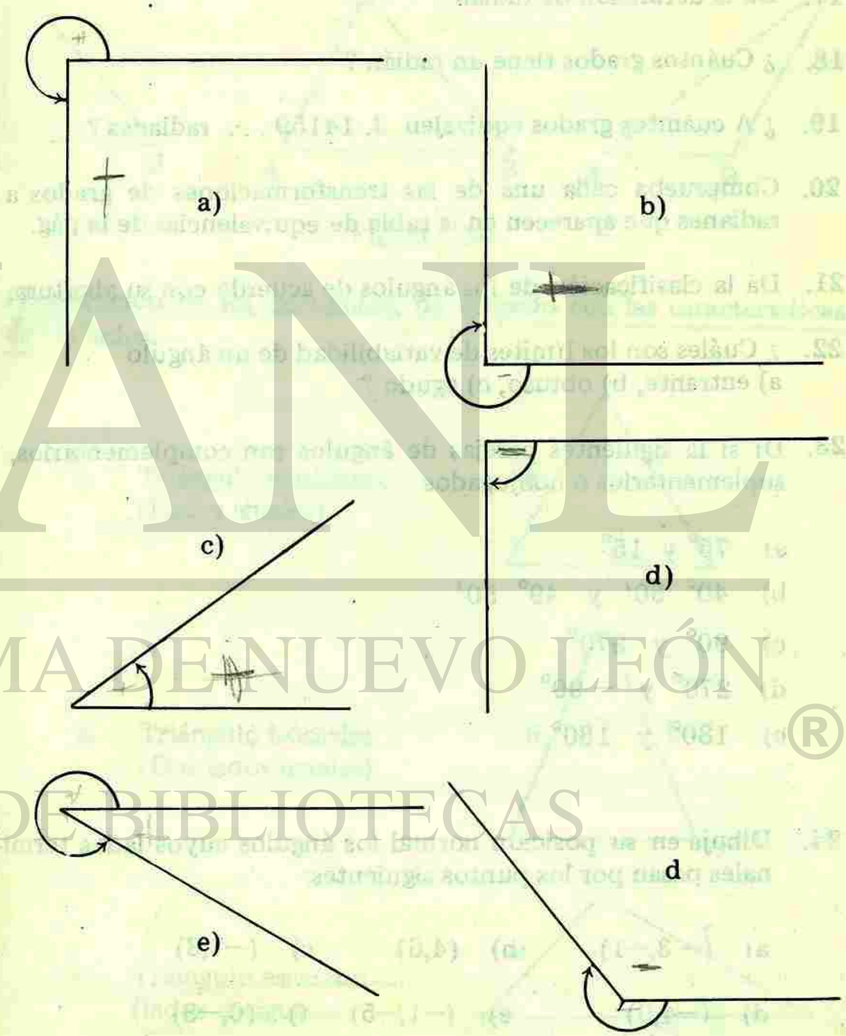
Ejercicio 5.1

1. ¿ Cuál es el campo de la trigonometría actualmente ?
2. ¿ Qué siglo marcó su desarrollo ?
3. ¿ Qué característica distingue a las rectas horizontal y vertical ?
4. ¿ Que es un ángulo orientado ?
5. ¿ Cómo se generan los ángulos positivos y negativos ?
6. ¿ Cuántos radianes hay en un círculo ?
7. ¿ Cuándo dos ángulos son coterminales ?
8. Dado un ángulo, ¿ cuántos ángulos coterminales tiene ?
9. Menciona tres ángulos coterminales de los siguientes ángulos:
   a) $-45°$ b) $32°$ c) $-15°$ d) $67°\ 30'$

10. Dí si estos ángulos son iguales o diferentes ¿ porqué?



11. Asigna signos a los siguientes ángulos. La flecha en la abertura indica el sentido del giro.



12. ¿ Cómo se forma el ángulo de elevación ?

13. ¿ Qué elementos intervienen en un ángulo de depresión ?

14. ¿ Que es un grado ?

15. ¿ Cómo se llaman las partes de un grado ?

16. ¿ Cuáles son las unidades angulares más conocidas ?

17. Dá la definición de radián

18. ¿ Cuántos grados tiene un radián ?

19. ¿ A cuámtos grados equivalen 3. 14159 . . . radianes ?

20. Comprueba cada una de las transformaciones de grados a radianes que aparecen en la tabla de equivalencias de la pág.

21. Dá la clasificación de los ángulos de acuerdo con su abertura.

22. ¿ Cuáles son los límites de variabilidad de un ángulo
a) entrante, b) obtuso, c) agudo ?

23. Dí si la siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o conjugados

a) 75° y 15°

b) $40^\circ\ 50'$ y $49^\circ\ 50'$

c) 90° y 270°

d) 270° y -90°

e) 180° y 180°

24. Dibuja en su posición normal los ángulos cuyos lados terminales pasan por los puntos siguientes:

a) $(-3,-1)$ b) $(4,6)$ c) $(-7,3)$

d) $(-4,0)$ e) $(-1,-5)$ f) $(0,-8)$

12/8/88

5.6 TRIANGULOS

Si tres puntos no alineados A, B y C se unen por segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, la figura resultante se llama triángulo y decimos que un triángulo es un polígono cerrado que consta de tres lados y tres ángulos.

En la Fig. 5.20, se presentan tres triángulos diferentes. Los puntos A, B y C se llaman vértices del triángulo.

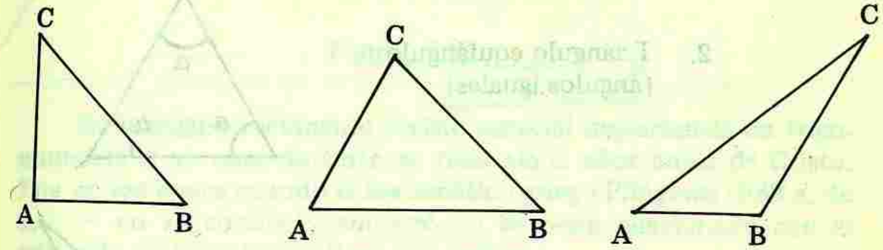
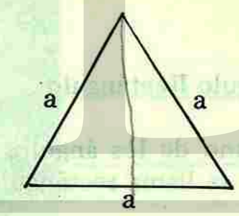


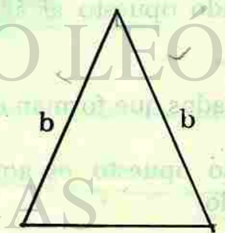
Figura 5.20

Clasificación de los triángulos, de acuerdo con las características de los lados.

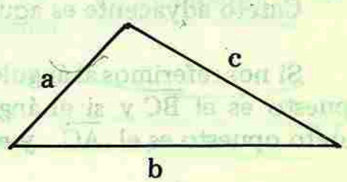
1. Triángulo equilátero
(Lados iguales)



2. Triángulo isósceles
(Dos lados iguales)

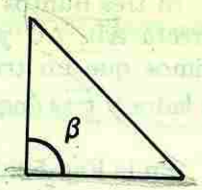


3. Triángulo escaleno
(lados desiguales)



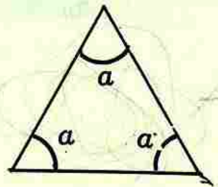
Clasificación de los triángulos atendiendo a las características de los ángulos.

1. Triángulo rectángulo
   (un ángulo recto)

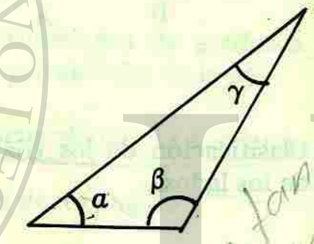


90

2. Triángulo equiángulo
   (ángulos iguales)



3. Triángulo oblicuángulo
   (ángulos diferentes)



rectang
equian
oblicu

El Triángulo Rectángulo

Si uno de los ángulos de un triángulo es recto, entonces el triángulo se llama rectángulo.

El lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de **hipotenusa.**

Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos.

Cateto opuesto es aquél que está frente al ángulo agudo considerado.

Cateto adyacente es aquél que forma parte del ángulo agudo.

Si nos referimos al ángulo A de la Fig. 5.21, emtonces el cateto opuesto es el BC y si el ángulo concíderado es el B, entonces el cateto opuesto es el AC y el adyacente el BC.

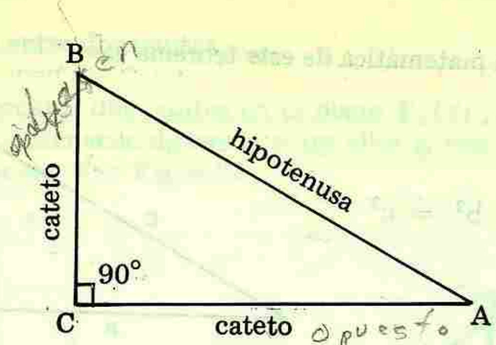
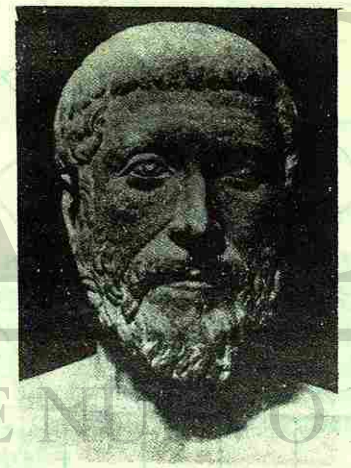


Figura 5.21

El triángulo rectángulo reviste especial importancia en trigonometría y su conocimiento se remonta a años antes de Cristo. Fue en esa época cuando el matemático griego Pitágoras (582 a. de J.C. — no se conoce) demostró un teorema relacionado con el triángulo rectángulo que lleva su nombre.

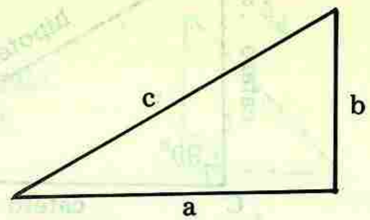


Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

La expresión matemática de este teorema es:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



La interpretación gráfica del teorema de Pitágoras se da en la Fig. 5.22

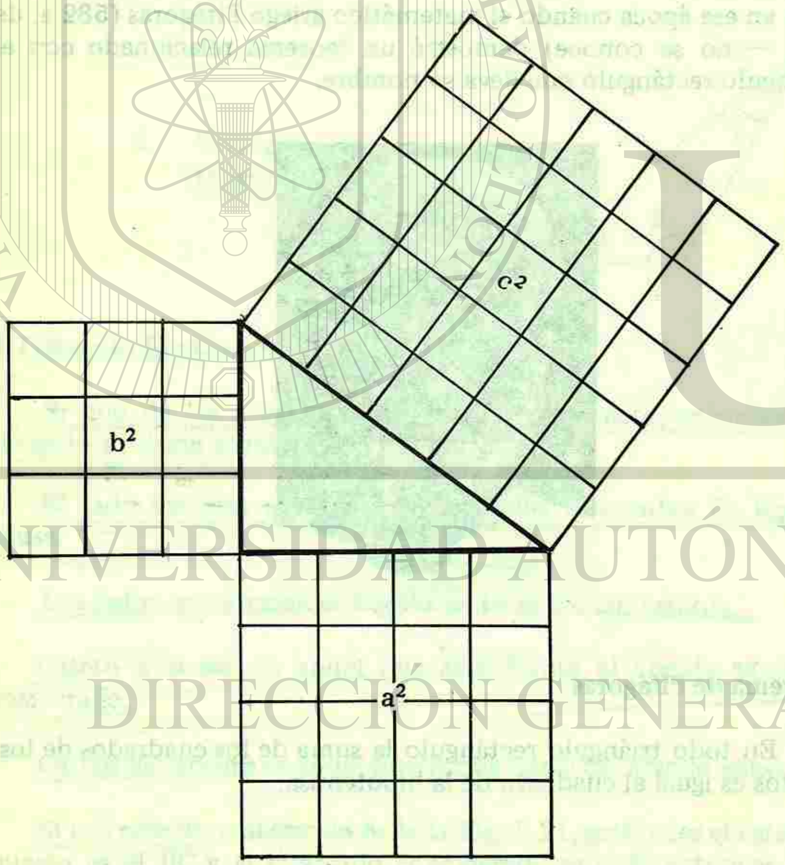


Figura 5.22

Distancia entre dos puntos

Conocidos dos puntos en el plano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, podemos obtener la distancia entre ellos si procedemos de la manera siguiente. Ver Fig. 5.23

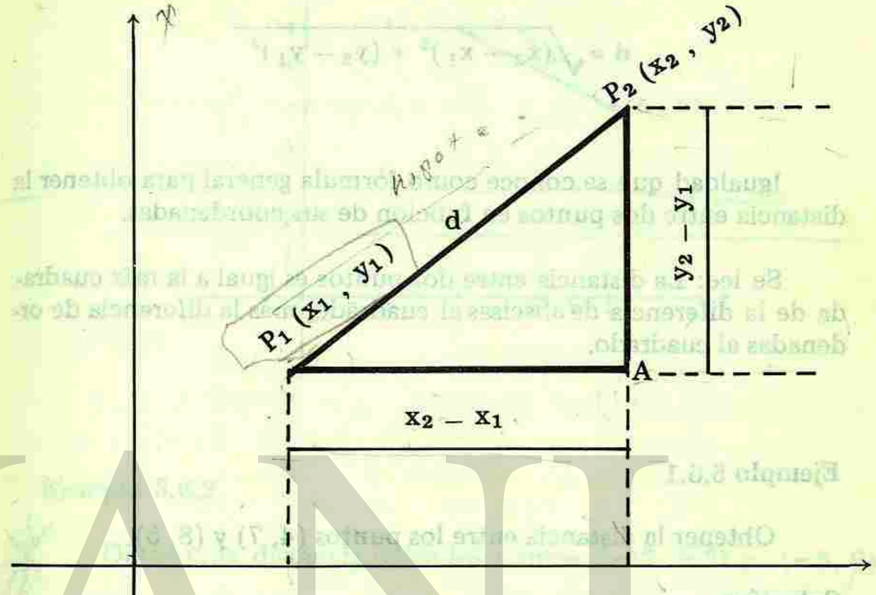


Figura 5.23

Trazamos una línea paralela al eje " X " partiendo de P_1 y bajamos una línea perpendicular al eje " X " a partir de P_2. Estas rectas se cortan en ángulo recto por ser respectivamente perpendiculares a los ejes coordenados, formando el triángulo rectángulo P_1AP_2, cuya hipotenusa es la longitud de la recta que une los puntos P_1 y P_2, longitud que corresponde a la distancia que queremos encontrar.

La longitud del cateto horizontal P_1A del triángulo rectángulo, la obtenemos por diferencia de abscisas $x_2 - x_1$, la longitud del cateto vertical la obtenemos restando las ordenadas $y_2 - y_1$

La distancia entre los dos puntos dados se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras para obtener el valor de la hipotenusa señalada con la letra d.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Despejando d, obtenemos

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Igualdad que se conoce como fórmula general para obtener la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas.

Se lee: La distancia entre dos puntos es igual a la raíz cuadrada de la diferencia de abscisas al cuadrado, más la diferencia de ordenadas al cuadrado.

Ejemplo 5.6.1

Obtener la distancia entre los puntos (4, 7) y (8, 5).

Solución:

Cualesquiera de los puntos puede tomarse como primer punto.

$P_1\ (4\ ,\ 7)\ ,\ P_2\ (8\ ,\ 5)$

Fórmula a usar

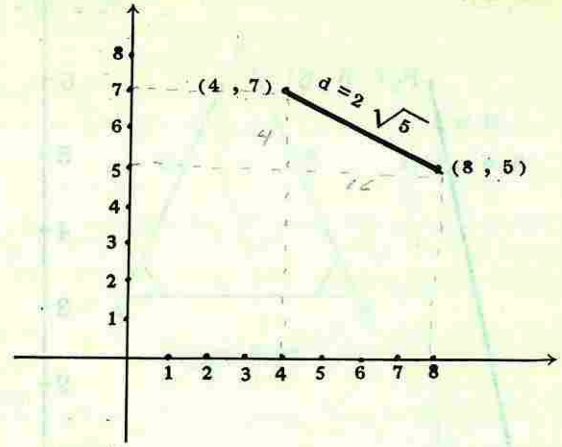
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas, tenemos

$$d = \sqrt{(8-4)^2 + (5-7)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

La figura siguiente corresponde a la gráfica de la distancia entre los dos puntos dados.



Ejemplo 5.6.2

Obtener la distancia entre los puntos (−7, −3) y (−5, 6)

Solución:

Fórmula a usar

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$P_1\ (-7\ ,\ -3)\ ,\ P_2\ (-5\ ,\ 6)$

Sustitución

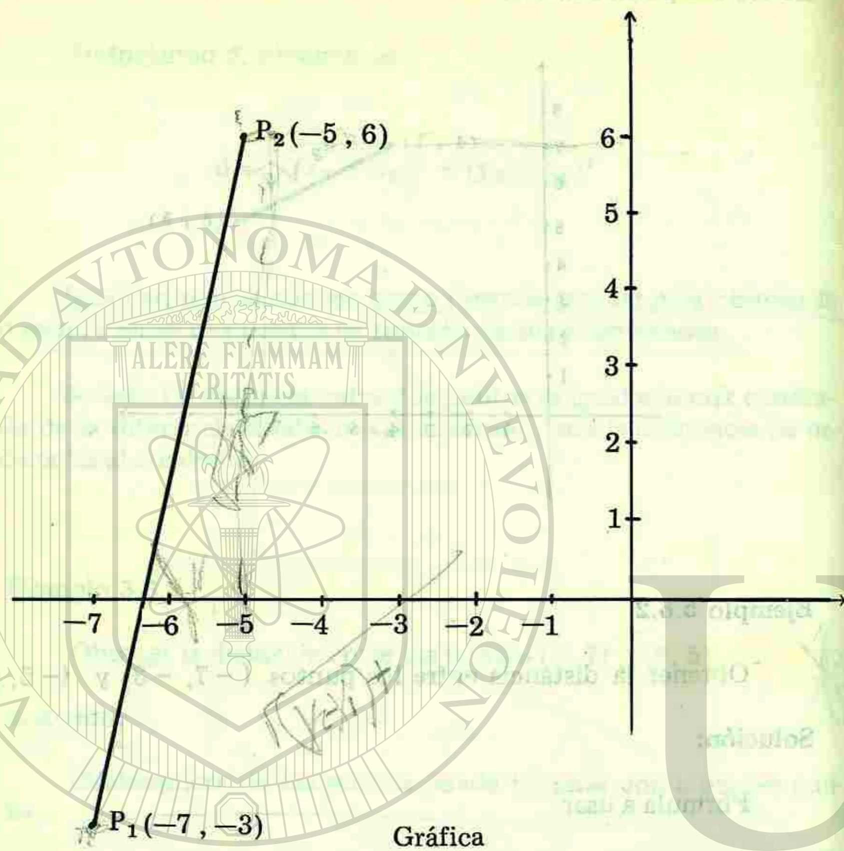
$$d = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + [6-(-3)]^2}$$

$$d = \sqrt{(-5+7)^2 + (6+3)^2}$$

$$d = \sqrt{4 + 81}$$

$$d = \sqrt{85}$$

La gráfica del ejemplo 5.6.2 se presenta enseguida.

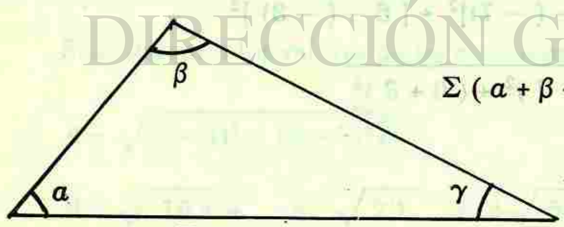


Gráfica

Teoremas de Amplia Aplicación

Teorema 1

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180° Fig. 5.24

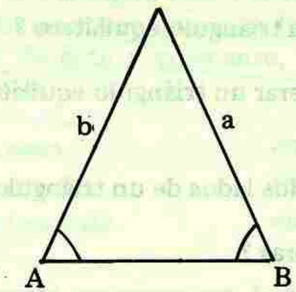


$\Sigma(\alpha + \beta + \gamma) = 180° = 2\text{rt.}$

Figura 5.24

Teorema 2

En todo triángulo los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales. Ver Fig. 5.25



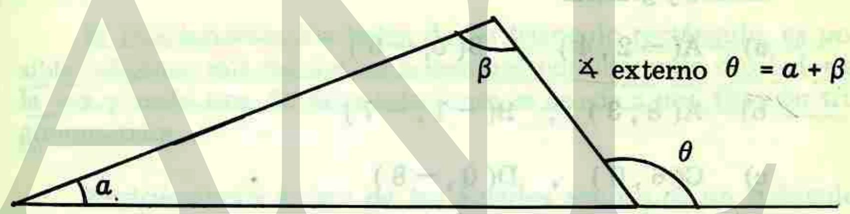
$a = b$

$\measuredangle A = \measuredangle B$

Figura 5.25

Teorema 3

Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos opuestos. Fig. 5.26

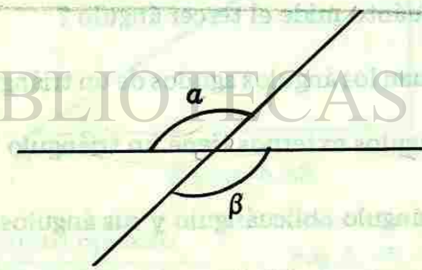


$\measuredangle$ externo $\theta = \alpha + \beta$

Figura 5.26

Teorema 4

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Fig. 5.27



$\measuredangle \alpha = \measuredangle \beta$

Figura 5.27

Ejercicio 5.2

1. ¿ Cómo se clasifican los triángulos, si se consideran
   a) los lados b) los ángulos ?

2. ¿ Es equiángulo un triángulo equilátero ?

3. ¿ Se puede considerar un triángulo equilátero como isósceles? ¿ Por qué ?

4. ¿ Cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo ?

5. ¿ Quién fué Pitágoras ?

6. Enuncia el teorema de Pitágoras

7. ¿ En qué teorema está basada la deducción de la fórmula de la destancia entre dos puntos ? Escríbela.

8. Obtener la distancia entre los puntos dados en los siguientes incisos y graficar

   a) A(− 2 , 4) , B(5, − 6)

   b) A(8 , 3) , B(− 1 , − 7)

   c) C(6 , 0) , D(0 , − 8)

   d) C(0 , 0) , D(x , y)

   e) A(x , y) , B(h , k)

9. La suma de dos de los ángulos interiores de un triángulo es 130° . ¿ Cuánto mide el tercer ángulo ?

10. ¿ Cuánto suman los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

11. ¿ Cuántos ángulos externos tiene un triángulo ?

12. Dibuja un triángulo oblicuángulo y sus ángulos externos.

13. ¿ Cómo son los ángulos opuestos por el vértice ?

SI IGUALES

5.7 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En todas las funciones existe una regla de correspondencia entre las variables independiente y dependiente, sin embargo en ocasiones la regla se considera como la función, éste es el caso de las funciones trigonométicas que son: función seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, cuyas abreviaturas se escriben a continuación

sen	para seno	**cot**	para cotangente
cos	para coseno	**sec**	para secante
tan	para tangente	**csc**	para cosecante

Si A es un ángulo, entonces sen A se lee "seno de A".

Con las seis funciones se establecen tres pares afines formados por seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosencante; en estos pares de funciones una de ellas es cofunción de la otra.

Funciones trigonométricas de ángulos agudos.

Si relacionamos los lados de un triángulo rectángulo, es posible obtener seis razones o relaciones considerando dos lados a la vez y cada una de estas relaciones se asocia a una función trigonométrica.

Regiriéndonos a uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo Fig. 5.28, tenemos las siguientes definiciones.

Figura 5.28

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Si aplicamos las definiciones anteriores a los ángulos α y β del siguiente triángulo cuyos lados se designan por las letras a, b y c, podemos escribir lo siguiente Fig. 5.29

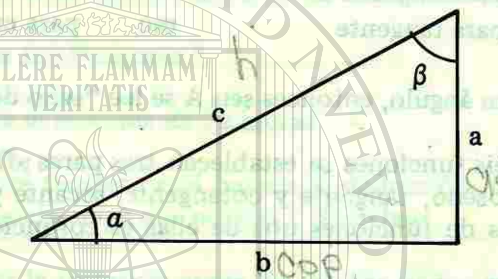


Figura 5.29

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot \beta = \frac{a}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} \qquad \sec \beta = \frac{c}{a}$$

$$\csc \alpha = \frac{c}{a} \qquad \csc \beta = \frac{c}{b}$$

Comparando las funciones de los ángulos α y β observamos que:

$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$ $\qquad$ $\cot \alpha = \tan \beta$
$\cos \alpha = \operatorname{sen} \beta$ $\qquad$ $\sec \alpha = \csc \beta$
$\tan \alpha = \cot \beta$ $\qquad$ $\csc \alpha = \sec \beta$

Estas igualdades siempre se cumplen si los ángulos son complementarios y se puede decir que una función de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su complemento.

Obtención de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo dado el valor de una de ellas.

Cuando tenemos el valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos asociar los elementos de la razón con los lados del triángulo rectángulo y obtener las funciones restantes sin necesidad de obtener el valor del ángulo.

Ejemplo 5.7.1

Si $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{4}{5}$,

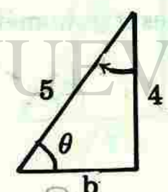
Obtener las demás funciones trigonométricas de θ

Solución:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \text{ y como } \operatorname{sen} \theta = \frac{4}{5} \implies$$

$$\frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

Con estos datos construyamos el triángulo rectángulo, en donde θ es uno de los ángulos agudos, el cateto opuesto vale 4 y la hipotenusa 5.



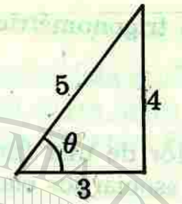
Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene el valor del cateto faltante

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$16 + b^2 = 25$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Las funciones trigonométricas se obtienen del siguiente triángulo rectángulo.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}\ ,\ \cos\theta = \frac{3}{5}\ ;\ \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{3}{4}\ ,\ \sec\theta = \frac{5}{3}\ ,\ \csc\theta = \frac{5}{4}$$

Cabe señalar que los valores de los datos del triángulo rectángulo que se obtienen a partir de una función, no son únicos ya que el valor de una fracción se puede obtener por un número infinito de relaciones numéricas, por ejemplo $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15}$, ect. Sin embargo los valores de las funciones son las que corresponden al ángulo θ

Ejemplo 5.7.2

Obtener la demás fuciones trigonométricas de θ.

Si $\tan\theta = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$

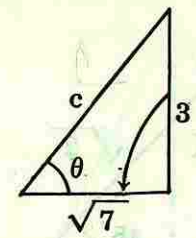
Solución:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}\ ,\quad \Longrightarrow \text{ como}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}\ ,\ \text{se tiene}$$

$$\frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Construyamos el siguiente triángulo rectángulo.



El valor de la hipotenusa c , lo obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras.

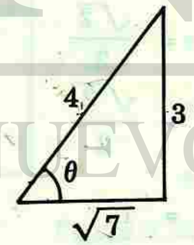
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$c^2 = 16$$

$$c = 4$$

Por lo tanto las funciones trigonométricas se obtienen del siguiente triángulo.



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{4}\ ,\ \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\ \tan = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\cot = \frac{\sqrt{7}}{3}\ ,\quad \sec\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}\ ,\ ,\csc\theta = \frac{4}{3}$$

Funciones Trigonométricas de los Angulos 45°, 30° y 60°

Si construímos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos sean iguales e iguales a la unidad, estaremos construyendo un triángulo cuyos ángulos agudos son iguales e iguales a 45°. Fig. 5.30

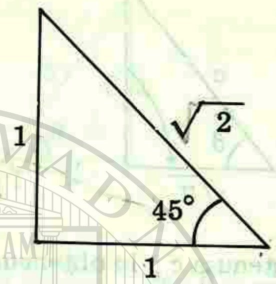


Figura 5.30

La hipotenusa la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 1 + 1$$

$$h^2 = 2$$

$$h = \sqrt{2}$$

Las funciones trigonométricas para este ángulo de 45° son:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

TRIANGULO Equilatero

Construyamos enseguida un triángulo equilátero cuyos lados tengan una longitud de dos unidades. Como todo triángulo equilátero es equiángulo, cada ángulo mide 60°, puesto que la suma de los ángulos interiores es 180°. Fig. 5.31

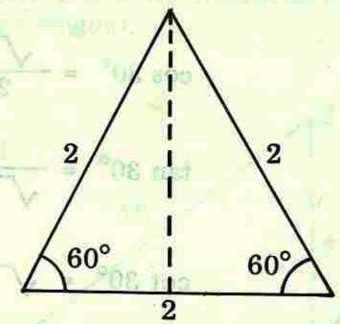
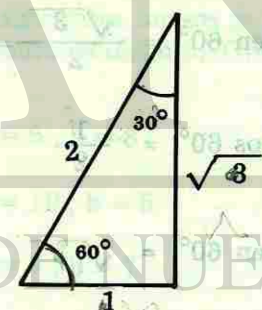


Figura 5.31

La bisectriz* del ángulo opuesto a la base, lo es también de ésta última y del triángulo mismo. Tomando cualesquiera de estas mitades del triángulo inicial, tenemos un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, de este triángulo obtenemos las funciones correspondientes a los ángulos agudos de 30° y 60°. Aplicando el **Teorema de Pitágoras** obtenemos el valor del cateto desconocido. Fig. 5.32



$$a^2 + b^2 = c^2$$

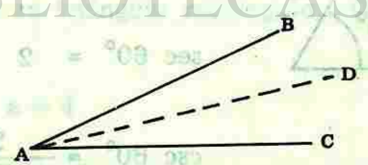
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{4 - 1}$$

$$a = \sqrt{3}$$

Figura 5.32

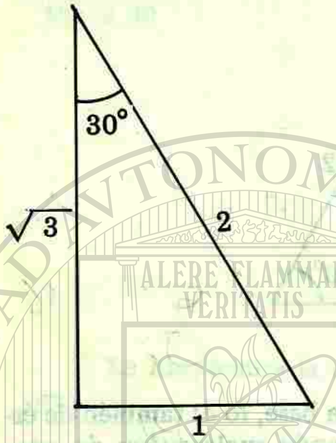
* La recta $\overline{AD}$ es la BISECTRIZ del ángulo BAC si y solo si $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC$.



Teorema. Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

$sen\ \beta$

Funciones de 30°



$$sen\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

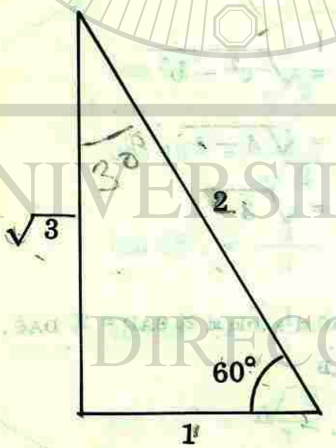
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot 30° = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\csc 30° = 2$$

Funciones de 60°



$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

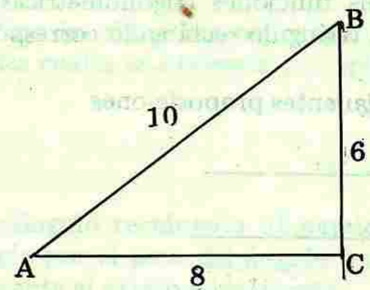
$$\sec 60° = 2$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Ejercicio 5.3

1. Enumera las seis funciones trigonométricas.

2. Obtener las seis funciones trigonométricas para el ángulo A del siguiente triángulo.



3. Obtener las seis funciones trigonométricas para el ángulo B del triángulo del problema anterior.

4. Menciona las cofunciones del sen a, sec a, tan a

   csc a, cos a, cot a

5. En los siguientes incisos se dan los valores de los catetos de un triángulo rectángulo. Obtener el valor de la hipotenusa.

   i) $a = 6$, $b = 8$

   ii) $a = 10$, $b = 5$

   iii) $a = 3$, $b = 7$

   iv) $a = 4$, $b = 12$

6. En los siguientes incisos se dan los valores de la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo. Obtener el valor del otro cateto.

   i) $c = 8$, $a = 4$

   ii) $c = 10$, $b = 5$

iii) $c = 15$, $a = 6$

iv) $c = \sqrt{2}$, $a = 1$

7. ¿ Qué valores tienen los lados de los triángulos rectángulos de donde se obtienen las funciones de 45° , 30° y 60° ?

8. Obtener las seis funciones trigonométricas de 45° , 30° y 60° a partir del triángulo rectángulo correspondiente.

9. Completa las siguientes proposiciones

sen 30° = cos 60° ________

tan 45° = cot 45° ________

sec 70° = csc 30° ________

cot 60° = tan 30° ________

csc 15° = sec 75° ________

cos 85° = sen 15° ________

10. ¿ En que te besaste para llenar los espacios de la pregunta anterior ?

11. Si el lado de un cuadrado mide 8 unidades de longitud. ¿Cuánto mide su diagonal ? Construye la figura.

12. En los siguientes incisos se dá el valor de una función trigonométrica de un ángulo. Obtener las demás funciones trigonométricas del ángulo dado.

a) $\cos\theta = \frac{4}{9}$ b) $\tan\lambda = \frac{3}{8}$

c) $\sec\beta = \frac{10}{7}$ d) $\text{sen}\,\gamma = \frac{5}{12}$

e) $\cot\phi = \frac{8}{5}$ f) $\csc\theta = \frac{12}{11}$

13. Si los lados de un rectángulo miden 10 y 6 unidades. ¿ Cuánto mide su diagonal ? Construye la figura.

5.8 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

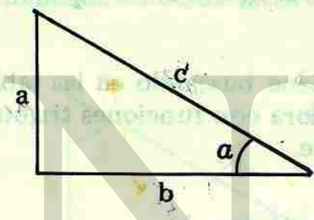
Resolver un triángulo rectángulo significa conocer las longitudes de los tres lados y los valores angulares de los tres ángulos.

Consideraremos los diferentes casos que se pueden presentar, conociendo dos de sus lados o bien uno de sus ángulos agudos y un lado.

Es útil aplicar las siguientes reglas que facilitan la obtención de los catetos, las cuales se obtienen por aplicación de las funciones.

Regla 1

En todo triángulo rectángulo un cateto es igual a la hipotenusa, multiplicada por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo adyacente al cateto considerado.

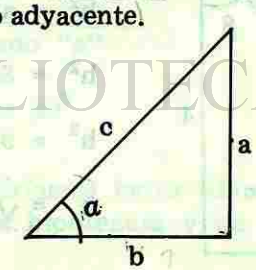


$$\text{sen}\,a = \frac{a}{c} \implies a = c\,\text{sen}\,a$$

$$\cos a = \frac{b}{c} \implies b = c\cos a$$

Regla 2

En todo triángulo rectángulo un cateto es igual al otro cateto, multiplicado por la tangente del ángulo opuesto o por la cotangente del ángulo adyacente.



$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \implies a = b \tan \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \implies b = a \cot \alpha$$

Cuando las incógnitas de un triángulo rectángulo son los ángulos agudos, estos se obtienen a través de una función trigonométrica que relacione dos lados conocidos. Al despejar el valor angular se utiliza la abreviatura de la función escogida, elevada a la potencia -1, como sen^{-1}, $\cos^{-1}$, etc. que significa ángulo cuyo seno o ángulo cuyo coseno respectivamente.

La siguiente proposición es un ejemplo de lo anteriormente explicado.

Si $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$

Lo cual se lee " si seno de alfa es igual a $\frac{1}{2}$ entoces alfa es el ángulo cuyo seno es $\frac{1}{2}$.

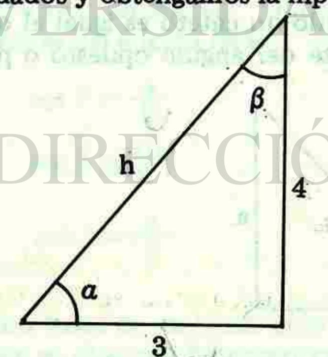
El ángulo se obtiene buscando en las tablas trigonométricas o bien en una calculadora con funciones trigonométricas, el valor angular correspondiente.

Ejemplo 5.8.1

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 unidades de longitud. Encontrar la hipotenusa y los ángulos agudos.

Solución:

Construyamos el triángulo rectángulo correspondiente a los catetos dados y obtengamos la hipotenusa



$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$

$$h^2 = 9 + 16$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$

Escogemos la función tangente para obtener los valores angulares.

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \qquad \tan \beta = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{4}{3} \qquad \beta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

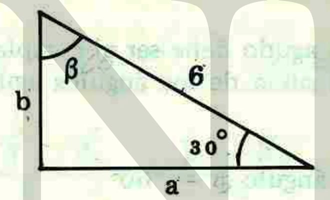
$$\alpha = \tan^{-1} 1.333\ldots \qquad \beta = \tan^{-1} 0.75$$

Ejemplo 5.8.2

Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 30° y la hipotenusa mide 6. Resolver el triángulo.

Solución:

La figura aproximada con esos datos es:



Utilizando una de las funciones trigonométricas que relacione el ángulo y el lado dados con uno de los catetos desconocidos se tiene:

$\cos 30° = \frac{a}{6}$ entonces,

Despejando "a"

$a = 6 \cos 30°$

También podríamos haber utilizado la regla directa puesto que conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. Utilizándola tenemos:

$$a = 6 \ \cos \ 30°$$

$$b = 6 \ \operatorname{sen} \ 30°$$

.5 .866

Un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo adyacente.

Sabemos que:

$$\operatorname{sen} \ 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos \ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{entonces}$$

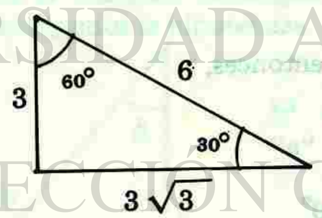
$$a = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$b = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

El otro ángulo agudo debe ser el complemento del ángulo de 30°, puesto que la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90°.

Por lo tanto el ángulo $\beta = 60°$

El diagrama del triángulo resuelto se presenta enseguida.



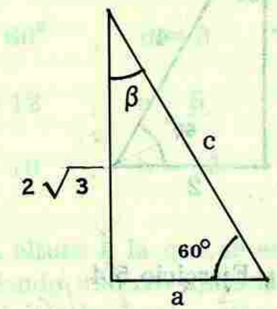
Ejemplo 5.8.3

Resolver el triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo de 60° y el cateto opuesto a él mide $2\sqrt{3}$ ..

∡A - 60°
b - 2√3

Solución:

El diagrama inicial del triángulo rectángulo en cuestión es:



Usando la regla directa que nos dice que un cateto es igual al otro cateto, multiplicado por la cotangente del ángulo adyacente, tenemos:

$$a = 2\sqrt{3} \quad \cot 60° \quad , \quad \cot 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{entonces} \quad a = \frac{2\sqrt{3}\ \sqrt{3}}{3} = \frac{2(\sqrt{3})^2}{3} = 2$$

Una vez conocidos los dos catetos, la hipotenusa la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras.

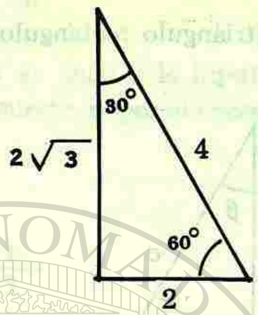
$$c^2 = (2)^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$c^2 = 4 + 12 = 16$$

$$c = 4$$

El ángulo $\beta = 90° - 60° = 30°$

El diagrama final del triángulo resuelto es:



Ejercicio 5.4

1. ¿ Que significa resolver un triángulo rectángulo ?

2. ¿ Cuántos elementos se deben conocer como mínimo para poder resolver un triángulo rectángulo ?

3. Si conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. ¿ Qué regla aplicamos para encontrar los catetos ?

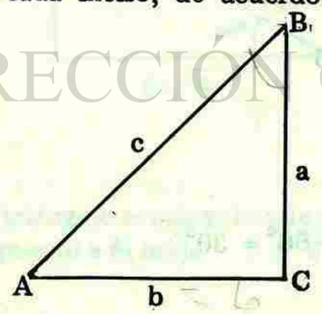
4. Si conocemos un cateto y un ángulo agudo. ¿ Qué regla aplicamos para obtener el otro cateto ?

5. ¿ Cómo se leen las siguientes proposiciones ?

   a) $\text{sen}^{-1}\ 0.5$ b) $\cot^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

   c) $\tan^{-1} 1$ d) $\sec^{-1} \infty$

6. Resolver los siguientes triángulos rectángulos, cuyos datos se dan en cada inciso, de acuerdo con la figura siguiente



a) $\measuredangle B = 30°$, $b = 6$

b) $\measuredangle A = 45°$, $a = 4$

c) $\measuredangle B = 70°$, $c = 10$

d) $\measuredangle A = 60°$, $d = 8$

e) $c = 12$, $a = 6$

f) $a = 10$, $b = 13$

7. Encontrar la altura a la que se encuentra un aeroplano que está sobrevolando un área ubicada a 2,000 m de una batería antiaérea. El ángulo de elevación del avión, desde la batería es de 30°.

8. Un aeroplano vuela a una altura de 2,200 m sobre el nivel del mar, cuando pasa sobre su portaviones. En el mismo instante se advierte la presencia de un submarino, cuyo ángulo de depresión es de 28°, desde el aeroplano. Calcular la distancia entre el submarino y el portaviones.

5.9 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS PARA ANGULOS AGUDOS, OBTUSOS Y ENTRANTES.

Los triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45°, 30° y 60°, son básicos para obtener las razones trigonométricas de ángulos obtusos y entrantes, si colocamos uno de estos triángulos en los diferentes cuadrantes del sistema cartesiano, cuidando que la base del triángulo coincida siempre con el eje de las " X ". En esta posición, las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo pasan a ser coordenadas del vértice opuesto a la base, la longitud de la hipotenusa se considera como la distancia del punto al origen y como toda distancia, siempre es positiva. Con estas consideraciones, las funciones del ángulo agudo del triángulo rectángulo corresponden a las funciones del ángulo cuyo lado inicial es la parte positiva del eje " X " y el lado terminal coincide con la posición de la hipotenusa.

Al definir las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes, reportarán diferentes signos.

Las siguientes figuras muestran la posición del triángulo rectángulo en los diferentes cuadrantes, al cual llamaremos triángulo trigonométrico. Fig.5.33 y 5.34

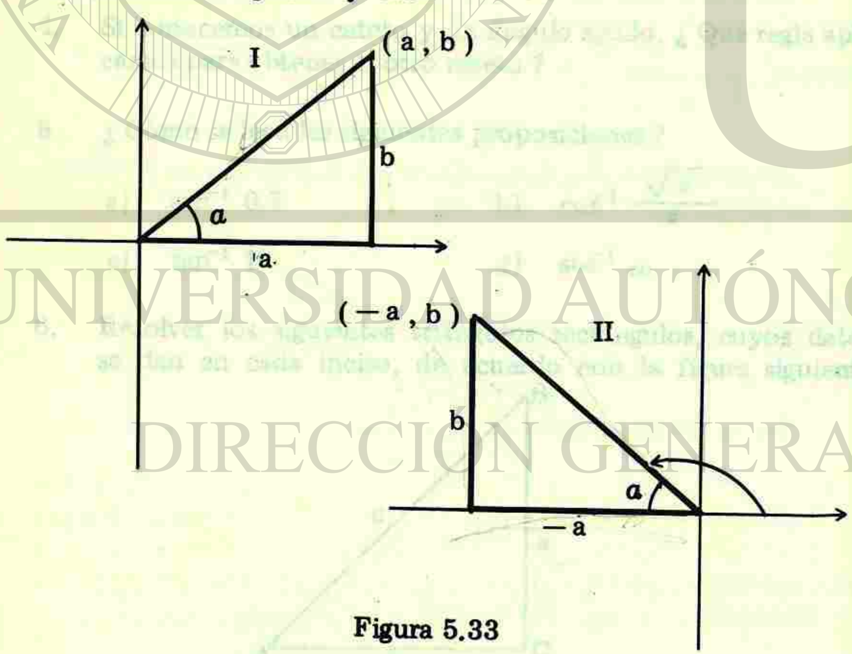


Figura 5.33

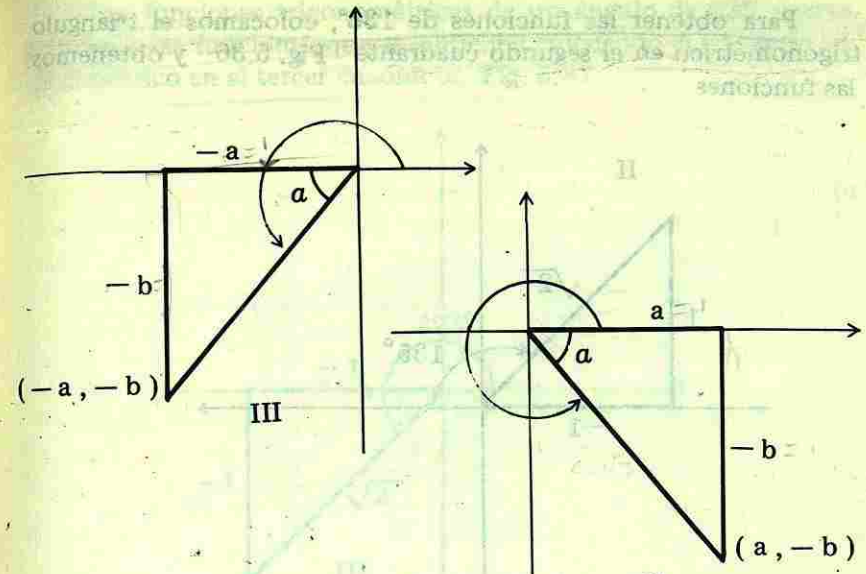


Figura 5.34

FUNCIONES DE 45°, 135°, 225° y 315°

Estas funciones se obtienen si colocamos el triángulo rectángulo de 45° en los diferentes cuadrantes. Así si lo colocamos en el primer cuadrante obtenemos la Fig. 535

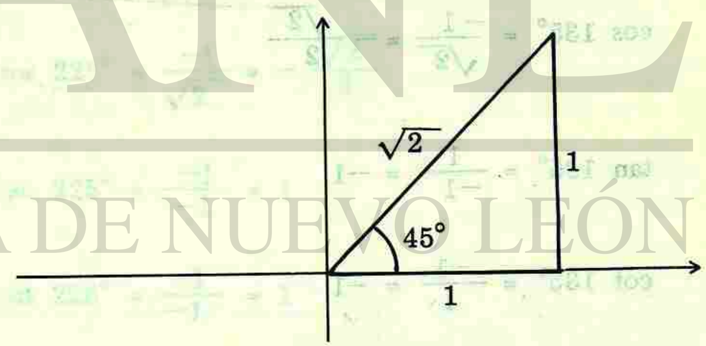


Figura 5.35

Si el triángulo trigonométrico está ubicado en el primer cuadrante, los valores de las funciones trigonométricas coinciden con las obtenidas considerando el triángulo respectivo como figura libre. Véanse los valores de las funciones trigonométricas de 45° dadas en la pág. 108

Para obtener las funciones de 135°, colocamos el triángulo trigonométrico en el segundo cuadrante Fig. 5.36 y obtenemos las funciones

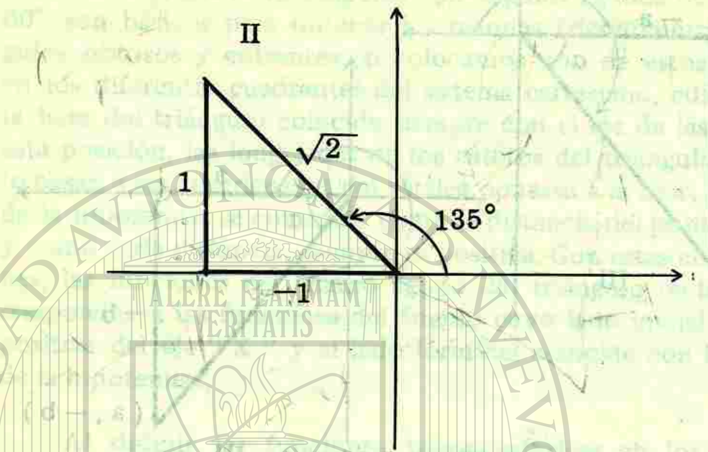


Figura 5.36

$$\text{sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135° = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cot 135° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\sec 135° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 135° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Las funciones trigonométricas de un ángulo de 225° corresponden a las funciones que se obtienen colocando el triángulo trigonométrico en el tercer cuadrante. Fig. 5.37

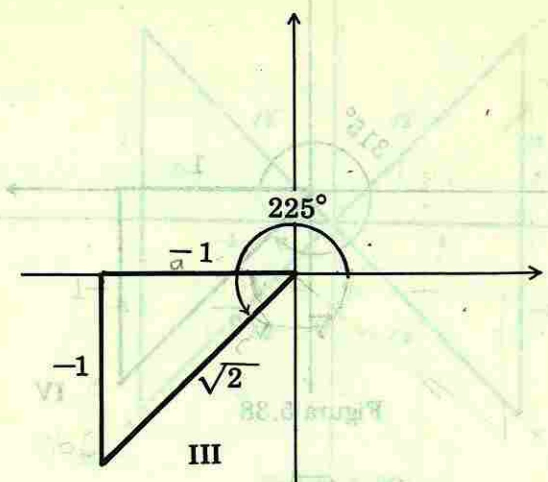


Figura 5.37

$$\text{sen } 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225° = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cot 225° = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\sec 225° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 225° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Ahora si colocamos el triángulo trigonométrico en el cuarto cuadrante, se tienen las funciones de 315°. Ver Fig. 5.38

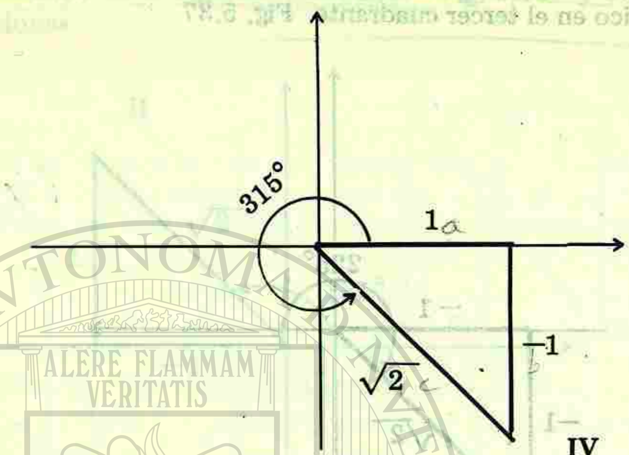


Figura 5.38

$$\text{sen } 315^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cot 315^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 315^\circ = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Si colocamos los cuatro triángulos en un solo diagrama, lograremos la Fig. 5.39

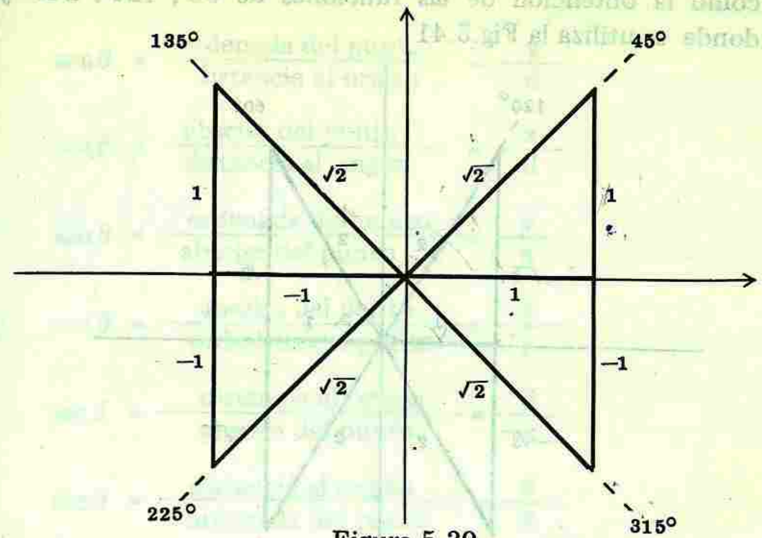


Figura 5.39

FUNCIONES DE 30°, 150°, 210° y 330°

De manera análoga al análisis hecho en la exposición del punto anterior, se tienen las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 150°, 210° y 330° utilizando la Fig. 5.40

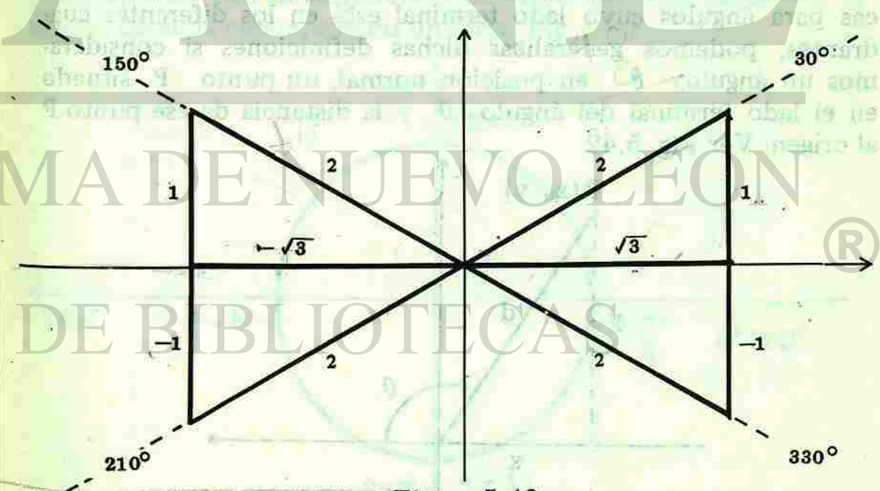


Figura 5.40

La obtención se deja como ejercicio al estudiante, así también como la obtención de las funciones de 60°, 120°, 240° y 300° donde se utiliza la Fig.5.41

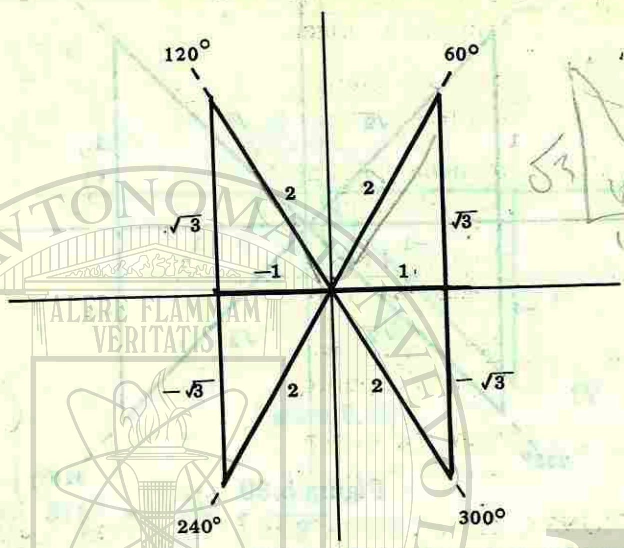


Figura 5.41

5.10 OBTENCION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE CUALQUIER ANGULO.

Partiendo de las definiciones de las funciones trigonométricas para ángulos cuyo lado terminal está en los diferentes cuadrantes, podemos generalizar dichas definiciones si consideramos un ángulo θ en posición normal, un punto P situado en el lado terminal del ángulo θ y la distancia de ese punto P al origen. Ver Fig. 5.42

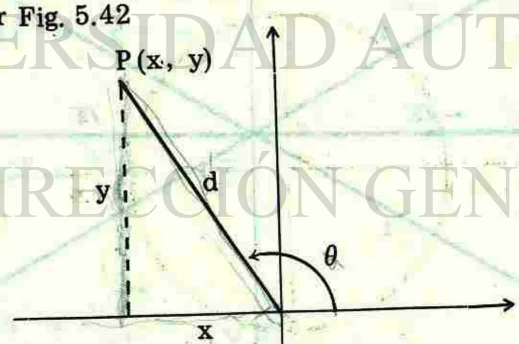


Figura 5.42

Definición de las funciones

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{ordenada del punto}}{\text{distancia al origen}} = \frac{y}{d}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{abscisa del punto}}{\text{distancia al origen}} = \frac{x}{d}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ordenada del punto}}{\text{abscisa del punto}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{abscisa del punto}}{\text{ordenada del punto}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{distancia al origen}}{\text{abscisa del punto}} = \frac{d}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{distancia al origen}}{\text{ordenada del punto}} = \frac{d}{y}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Estos ángulos tienen la características de que sus lados terminales coinciden con alguno de los ejes coordenados.

Las funciones trigonométricas de estos ángulos se obtienen construyendo una circunferencia de radio uno con centro en el origen, llamada circunferencia unitaria. Fig. 5.43

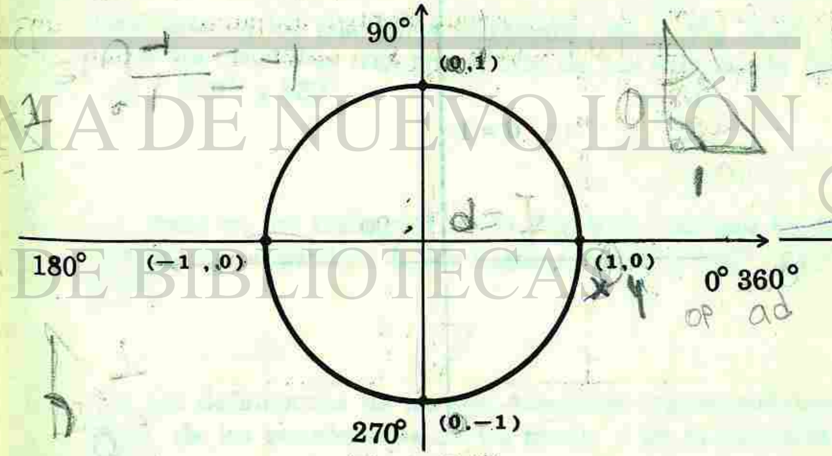


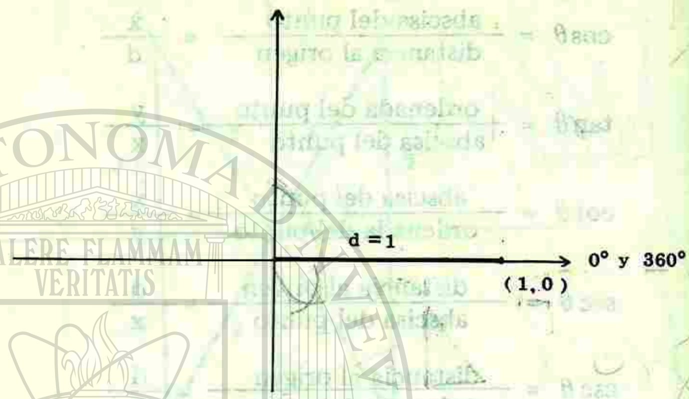
Figura 5.43

Sen $= \frac{1}{1} = 1$

cos $\frac{0}{1} = 0$

Si localizamos puntos sobre los lados terminales de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ tenemos como coordenadas (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0,−1) y aplicando las definiciones generales, obtenemos

Funciones de 0° y 360°



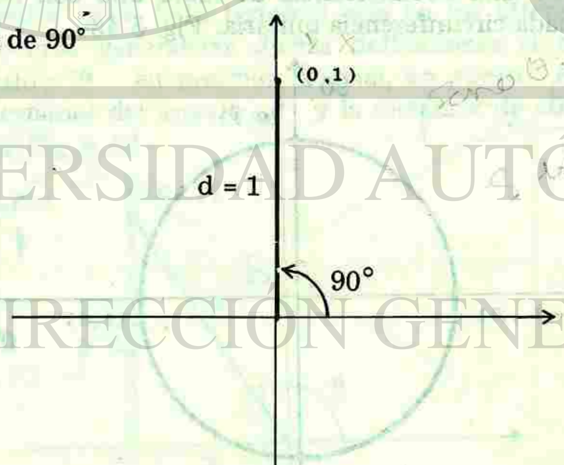
$$\operatorname{sen} 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cot 0^\circ = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\cos 0^\circ = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec 0^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0 \qquad \csc 0^\circ = \frac{1}{0} = \infty$$

Las funciones de 360° tienen los mismos valores que las de 0°

Funciones de 90°



$$\operatorname{sen} 90^\circ = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 90^\circ = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sec 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\tan 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty \qquad \csc 90^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Se deja al estudiante como ejercicio la obtención de las funciones de 180° y 270°.

Ejercicio 5.5

1. ¿ En qué posición debe estar colocado el triángulo trigonométrico, en el sistema cartesiano ?

2. Dibuja el triángulo trigonométrico en los diferentes cuadrantes

3. Con base en los triángulos rectángulos de la Fig. 5.40, obtener las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 150°, 210° y 330°.

4. Con base en los triángulos de la Fig. 5.41, obtener las funciones trigonométricas de los ángulos de 60°, 120°, 240° y 300°.

5. Dar las definiciones de las seis funciones trigonométricas a partir de las coordenadas de un punto y de la distancia al origen.

6. Obtener las funciones trigonométricas de 180° y 270° , a partir de la circunferencia unitaria.

7. ¿ En cúales cuadrantes es positiva la función coseno ?

8. Forma una tabla donde especifiques el signo de las funciones en los diferentes cuadrantes.

9. En cada uno de los siguientes incisos, obtener las funciones trigonométricas del ángulo en posición normal cuyo lado final pasa por el punto indicado.

a) $(\sqrt{3}, -1)$ c) $(0, -1)$

b) $(-1, 1)$ d) $(-1, -1)$

5.11 FUNCIONES DE ANGULOS NEGATIVOS EN TERMINOS DEL ANGULO POSITIVO

En la Fig. 5.44 se presenta un ángulo positivo θ y el negativo de este ángulo $(-\theta)$. Fig. 5.44

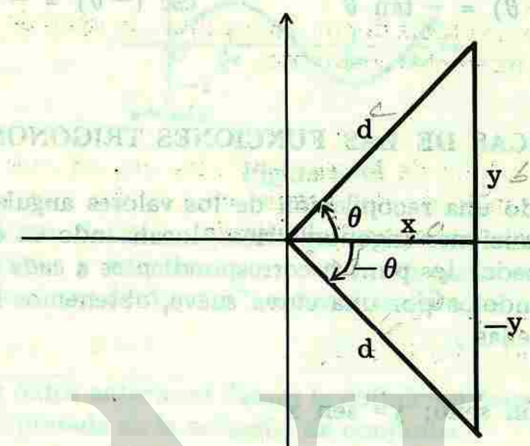


Figura 5.44

Obteniendo las funciones trigonométricas de θ y $(-\theta)$ podemos establecer la relación entre ellas.

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{d} \qquad \text{sen } (-\theta) = \frac{-y}{d}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{d} \qquad \cos (-\theta) = \frac{x}{d}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad \tan (-\theta) = \frac{-y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} \qquad \cot (-\theta) = \frac{x}{-y}$$

$$\sec \theta = \frac{d}{x} \qquad \sec (-\theta) = \frac{d}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{d}{y} \qquad \csc (-\theta) = \frac{d}{-y}$$

Comparando las dos columnas, tenemos

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$

5.12 GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Haciendo una recopilación de los valores angulares de cada una de las funciones trigonométricas, localizando en el sistema de ejes coordenados los puntos correspondientes a cada pareja ordenada y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica de cada una de ellas.

Función seno; y= sen x

TABLA DE VALORES

x	y	x	y
0°	0	210°	−0.5
30°	0.5	225°	−0.71
45°	0.71	240°	−0.86
60°	0.87	270°	−1
90°	1	300°	−0.87
120°	0.87	315°	−0.71
135°	0.71	330°	−0.5
150°	0.5	360°	0
180°	0		

Los valores angulares los transformamos a radianes y en esa forma los localizamos sobre el eje de las " X ", los valores de la función se localizan sobre el eje "Y". Ver figura Fig. 5.45

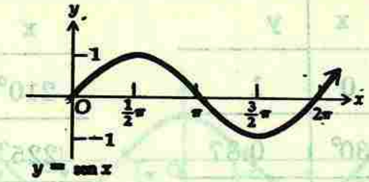


Figura 5.45

Los valores dados a la variable x se pueden ampliar a ángulos negativos y mayores que 2π, sin embargo los valores de la variable dependiente "y" o función siempre estarán entre − 1 y 1.

Con los datos anteriores damos la definición formal de la función seno expresada en la notación de conjunto.

$$\text{Sen} = \left\{ (x, y) \mid y = \operatorname{sen} x \ , \ x \in R \ ; \ y \in [-1 \ ; \ 1] \right\}$$

La cual se lee: La función seno es igual al conjunto de parejas ordenadas (x , y), tal que y = sen x , el dominio de la función son los números reales y el recorrido de la función es el intervalo cerrado de − 1 a 1.

Las seis funciones trigonométricas son funciones periódicas, repitiéndose el período un número infinito de veces por lo tanto la gráfica se presenta en la Fig. 5.46

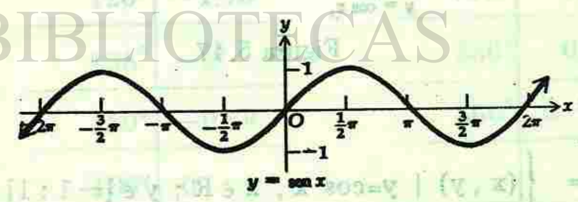


Figura 5.46

Funcion coseno ; $y = \cos x$

TABLA DE VALORES

x	y	x	y
0°	1	210°	−0.87
30°	0.87	225°	−0.71
45°	0.71	240°	−0.5
60°	0.5	270°	0
90°	0	300°	0.5
120°	−0.5	315°	0.71
135°	−0.71	330°	0.87
150°	−0.87	360°	1
180°	−1		

Localizando los puntos correspondientes a cada uno de los pares ordenados de la tabla anterior, obtenemos la gráfica de la función coseno. Fig. 5.47

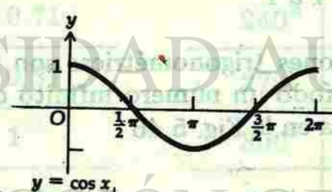


Figura 5.47

Definición

$$\text{Cos} = \left\{ (x\,,y) \mid y=\cos\,x\,,\ x \in R\ ;\ y \in [-1\,;1] \right\}$$

Lo cual se lee: la función coseno es igual al conjunto de parejas ordenadas (x,y), tal que $y = \cos x$, el dominio de la función son los números reales y el recorrido de la misma es el intervalo cerrado de -1 a 1.

Si repetimos el período, obtenemos la Fig. 5.48 para la función coseno.

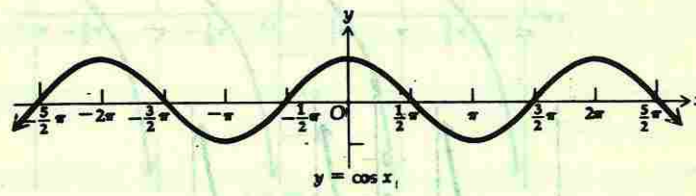


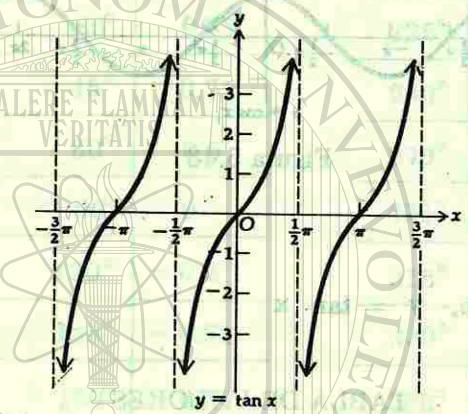
Figura 5.48

Función tangente, $y = \tan x$

TABLA DE VALORES

x	y	x	y
0°	0	210°	0.58
30°	0.58	225°	1
45°	1	240°	1.73
60°	1.73	270°	∞
90°	∞	300°	−1.73
120°	−1.73	315°	−1
135°	−1	330°	−0.58
150°	−0.58	360°	0
180°	0		

El análisis de esta tabla nos indica que para los valores angulares de 90° y 270°, el valor de la función es infinito, en estos casos la curva se fuga al infinito, teniendo como límite una recta vertical llamada asíntota. Estas rectas se dibujan a través de cada uno de los puntos $\frac{\pi}{2} + n\pi$ donde n es un número entero. Ver Fig. 5.49



Definición

$$\text{Tan} = \left\{ (x, y) \mid y = \tan x,\ x \in R,\ x \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) ;\ y \in R \right\}$$

La construcción de la tabla de valores para las funciones cotangente, secante y cosecante se dejan como ejercicio al estudiante. Las gráficas respectivas se dan a continuación. Figs. 5.50 5.51 y 5.52

Los puntos de las curvas localizadas a la izquierda del eje "Y" se obtienen dando valores angulares negativos a la variable x.

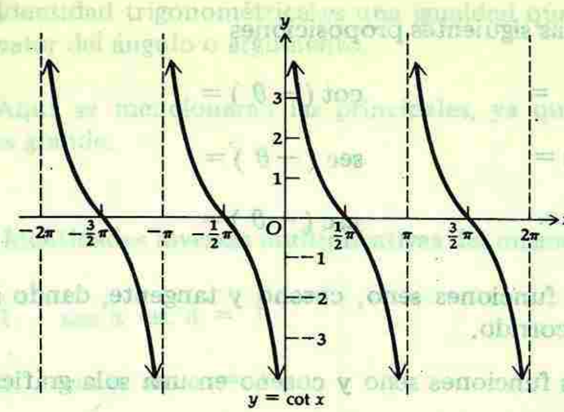


Figura 5.50

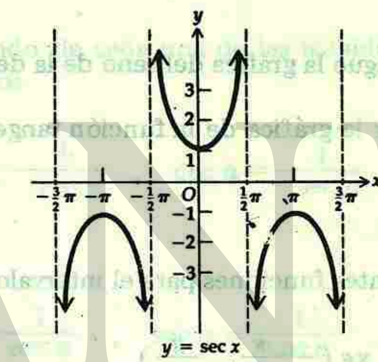


Figura 5.51

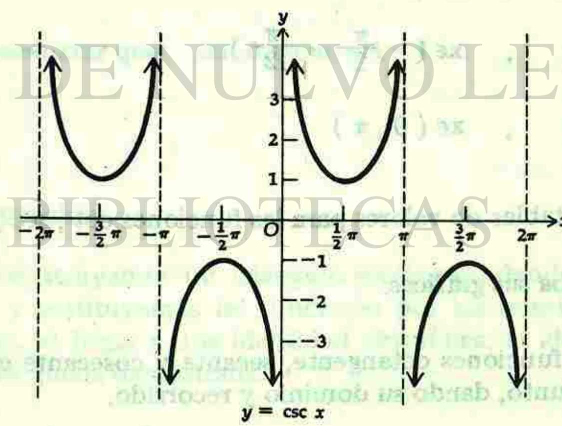


Figura 5.52

Ejercicio 5.6

1. Completa las siguientes proposiciones

   $\text{sen}(-\theta) =$ $\qquad$ $\cot(-\theta) =$

   $\cos(-\theta) =$ $\qquad$ $\sec(-\theta) =$

   $\tan(-\theta) =$ $\qquad$ $\csc(-\theta) =$

2. Define las funciones seno, coseno y tangente, dando su dominio y recorrido.

3. Dibujar las funciones seno y coseno en una sola gráfica para el período de 0° a 360°

4. ¿ En qué se distingue la gráfica del seno de la del coseno ?

5. ¿ Se puede trazar la gráfica de la función tangente sin despegar el lápiz ?

6. Grafica las siguientes funciones para el intervalo que se indica

   a) $\tan x$, $x \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   b) $\cot x$, $x \epsilon (0, \pi)$

   c) $\sec x$, $x \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   d) $\csc x$, $x \epsilon (0, \pi)$

7. Forma las tablas de valores para las funciones cot , sec , y csc y comprueba sus gráficas.

8. Define las funciones cotangente, secante y cosecante en forma de conjunto, dando su dominio y recorrido.

5.13 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Identidad trigonométrica es una igualdad que se cumple para todo valor del ángulo o argumento.

Aquí se mencionarán las principales, ya que el número de ellas es grande.

Identidades inversas multiplicativas del mismo ángulo.

1. $\text{sen}\, a \csc a = 1$

2. $\cos a \sec a = 1$

3. $\tan a \cot a = 1$

Despejando de cada una de las igualdades una de las funciones, obtenemos

$$\text{sen}\, a = \frac{1}{\csc a}, \quad \cos a = \frac{1}{\sec a}, \quad \tan a = \frac{1}{\cot a}$$

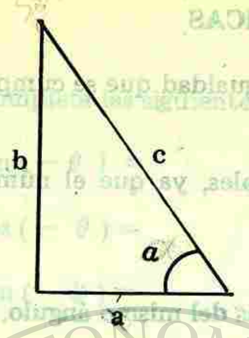
o bien

$$\csc a = \frac{1}{\text{sen}\, a}, \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{1}{\tan a}$$

Demostrar que: $\text{sen}\, a \csc a = 1$

Demostración:

Construyamos un triángulo rectángulo dando nombres a sus lados y sustituyamos las funciones por las relaciones correspondeintes, al llegar a una identidad airtmética, la identidad trigonométrica queda demostrada.



$$\operatorname{sen} a \csc a = 1$$

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$$

$$\frac{bc}{bc} = 1$$

$$1 \equiv 1$$

Las demostraciones de las identidades 2 y 3 se dejan al estudiante.

Identidades Pitagóricas

4. $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \tan a$

5. $\dfrac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \cot a$

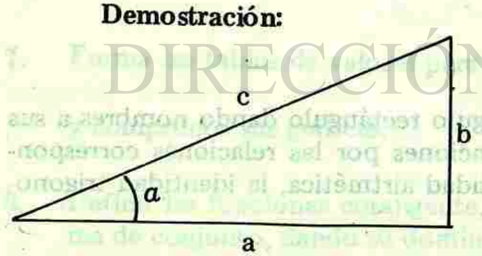
6. $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

7. $1 + \tan^2 a = \sec^2 a$

8. $1 + \cot^2 a = \csc^2 a$

Demostrar que: $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \tan a$

Demostración:



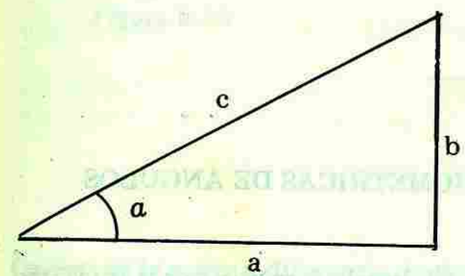
$$\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \tan a$$

$$\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{b}{a}$$

Demostrar que: $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

Demostración:



$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$1 \equiv 1$$

Las identidades 7 y 8 pueden obtenerse de la identidad 6 por transformaciones permitidas a saber:

Transformar la identidad $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$

en $1 + \tan^2 a = 1$

Transformación:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a}$$

Una igualdad no se altera si los dos miembros se dividen entre la misma cantidad.

$\tan^2 a + 1 = \sec^2 a$	Utilizando las identidades $\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \tan a$ y $\dfrac{1}{\cos a} = \sec a$
$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$	La propiedad conmutativa de la adición.

5.14 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPUESTOS.

Angulo compuesto es aquel ángulo formado por la suma, resta, multiplicación o división de dos ángulos simples. Si representamos geométricamente estos ángulos, obtenemos las Figs. 5.53, 5.54, 5.55 y 5.56.

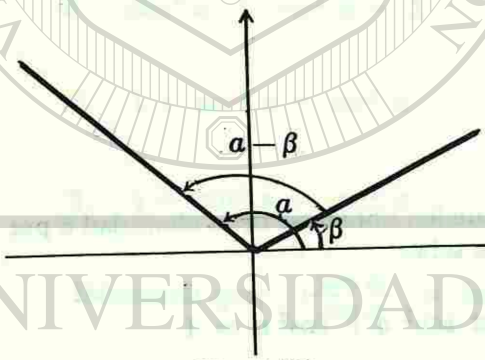


Fig. 5.53

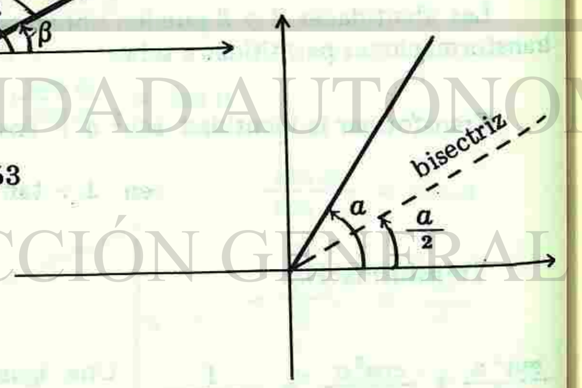


Fig. 5.54

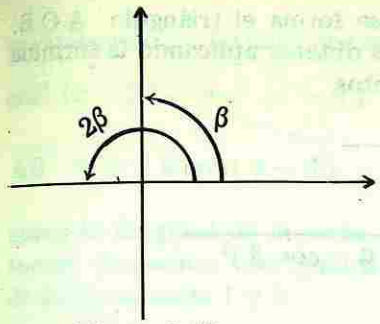


Figura 5.55

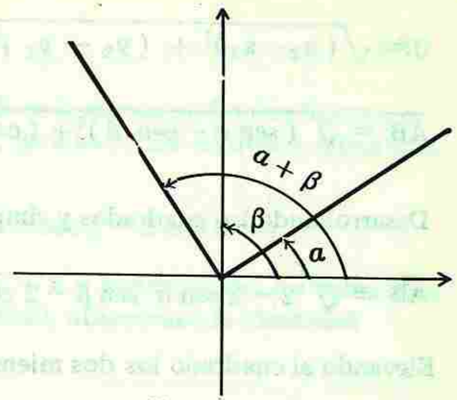


Figura 5.56

Coseno de la suma y diferencia de dos ángulos.

Para obtener la indentidad del coseno de la diferencia de dos ángulos, construyamos una circunferencia unitaria con centro en el origen y marquemos los ángulos a y β en posición normal. Fig.5.57

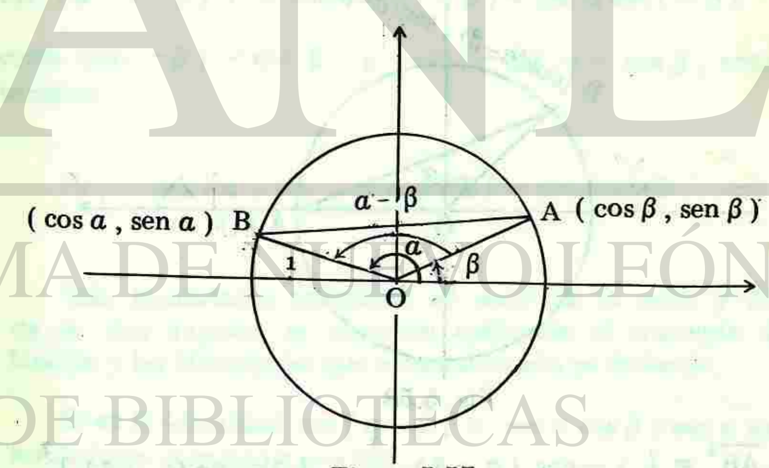


Figura 5.57

Las coordenadas de los puntos A y B que están en la circunferencia se asocian con el coseno y con el seno del ángulo respectivo.

Uniendo los puntos A y B se forma el triángulo A O B. La longitud del lado $\overline{AB}$ la podemos obtener aplicando la fórmula general de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(\text{sen}\, \alpha - \text{sen}\, \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2}$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando

$$\overline{AB} = \sqrt{2 - 2\, \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros obtenemos

$$\overline{AB}^2 = 2 - 2\, \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \qquad (1)$$

Si giramos el triángulo ABO de manera que el vértice A coincida con el punto (1,0), hacemos que el ángulo $\alpha - \beta$ esté en posición normal y que las coordenadas del vértice B sean ahora $(\cos(\alpha - \beta)\ ,\ \text{sen}\,(\alpha - \beta)\ )$. Fig. 5.58

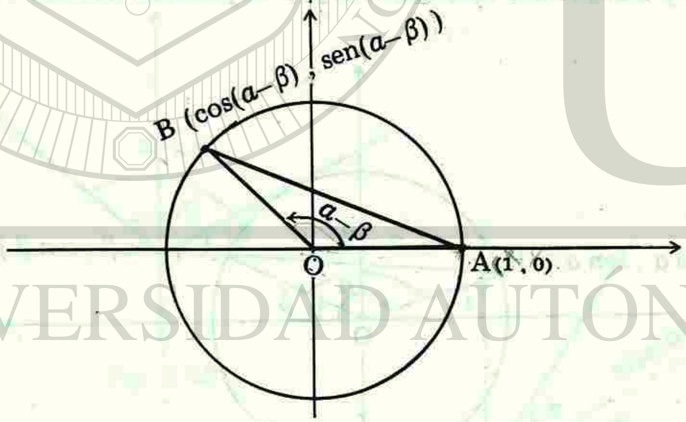


Fig. 5.58

$$\overline{AB}^2 = [\ 1 - \cos\ (\alpha - \beta)\ ]^2 + [\ 0 - \text{sen}\, (\alpha - \beta)\ ]^2$$

desarrollando los cuadrados de los binomios

$$\overline{AB}^2 = 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) + \text{sen}^2\, (\alpha - \beta)$$

sustituyendo los últimos dos sumandos por la unidad, puesto que $\cos^2 (\alpha - \beta) + \text{sen}^2\, (\alpha - \beta) = 1$, tenemos

$$\overline{AB}^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta) \qquad (2)$$

como la longitud de la recta AB es la misma en las dos figuras, entonces formamos una igualdad, igualando los segundos miembros de las ecuaciones 1 y 2.

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\, \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta$$

simplificando, dividiendo entre -2 y conmutando los sumandos del segundo miembro de la igualdad, obtenemos la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, \beta$$

Si en esta identidad el ángulo β lo sustituímos por $(-\beta)$, entonces la identidad se transforma en:

$$\cos\ (\alpha - (-\beta)\ ) = \cos \alpha\ \cos(-\beta) + \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, (-\beta)$$

como $\cos(-\beta) = \cos \beta$ y $\text{sen}\, (-\beta) = -\ \text{sen}\, \beta$, entonces tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, \beta$$

Las identidades referentes al seno de la suma y diferencia de dos ángulos, se obtienen aplicando el concepto de cofunción y las identidades que a continuación se deducen.

Si en la identidad $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \text{sen}\, \alpha\ \text{sen}\, \beta$ sustituímos el ángulo α por 90°.

obtenemos $\cos\ (90° - \beta) = \cos 90°\ \cos \beta + \text{sen}\ 90°\ \text{sen}\ \beta$

cos 90° − β = cos 0° cos β + sen 1 sen β

como $\cos 90° = 0$ y $\text{sen}\ 90° = 1$, entonces la identidad se transforma en

cos 90° − β = + sen β

$$\boxed{\cos(90° - \beta) = \text{sen}\,\beta}$$

si en esta identidad sustituímos el ángulo β por $(90° - \beta)$, obtenemos

$$\cos(90° - (90° - \beta)) = \text{sen}(90° - \beta)$$

$$\boxed{\cos\beta = \text{sen}(90° - \beta)}$$

Con estas identidades, comprobamos que **cualquier función de un ángulo dado es igual a la cofunción de su complemento.**

Seno de la suma y diferencia de dos ángulos.

Sustituyendo el ángulo β por $(\alpha + \beta)$ en la identidad $\text{sen}\,\beta = \cos(90° - \beta)$, obtenemos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos(90° - (\alpha + \beta))$$

reagrupando el segundo miembro, escribimos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos[(90° - \alpha) - \beta]$$

Aplicando la identidad del coseno de la diferencia de dos ángulos al segundo miembro, tenemos

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \cos(90° - \alpha)\cos\beta + \text{sen}(90° - \alpha)\,\text{sen}\,\beta$$

sustituyendo $\cos(90° - \alpha)$ por $\text{sen}\,\alpha$ y $\text{sen}(90° - \alpha)$ por $\cos\alpha$ obtenemos

$$\boxed{\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

x + y

En forma análoga, podemos demostrar la identidad del seno de la diferencia de dos ángulos y obtener

$$\boxed{\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

Obtención de la tangente de la suma de dos ángulos.

Utilizando las identidades básicas, podemos demostrar que:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Demostración:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

sustituyendo $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ por sus respectivas igualdades, tenemos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

dividiendo el numerador y el denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$. escribimos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\text{sen}\,\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

reduciendo a la unidad los factores iguales, obtenemos la identidad por demostrar

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$$

En forma análoga se obtiene

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Funciones trigonométricas de ángulo doble

Si hacemos que el ángulo α sea igual al ángulo β en las identidades del seno, coseno y tangente, de la suma de dos ángulos, obtenemos las identidades de ángulo doble que se dan a continuación.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Demostrar que: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

Demostración:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

si $\beta=\alpha$, tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

conmutando el orden de los factores del segundo sumando, en el segundo miembro y sumando los términos semejantes, tenemos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Se deja como ejercicio al estudiante, la demostración de las identidades del $\cos 2\alpha$ y $\tan 2\alpha$.

Demostraremos dos identidades muy usuales a partir de la identidad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Demostrar que: $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Demostración:

Usando la identidad

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

sustituyendo el $\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$, tenemos

$$\cos 2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\operatorname{sen}^2\alpha$$

despejando el $\operatorname{sen}^2\alpha$, obtenemos

$$2\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Demostrar que: $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Demostración:

Con la misma identidad del coseno del ángulo doble usado en la demostración anterior y sustituyendo el $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1-\cos^2\alpha$ obtenemos $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

despejando el $\cos^2\alpha$, escribimos

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo.

Si sacamos la raíz cuadrada a los dos miembros de las identidades

$$\text{sen}^2\, a = \frac{1-\cos 2a}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

obtenemos las identidades

$$\text{sen}\, a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}$$

$$\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$$

Como la relación de los ángulos que aparecen en el primero y segundo miembros es uno a dos, entonces podemos sustituír el ángulo a por $\frac{a}{2}$ y así obtener las identidades de la mitad del ángulo

$$\text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

Ejercicio 5.7

1. Demostrar que: $\cos a \sec a = 1$

2. Demostrar que: $\tan a \cot a = 1$

3. Exprese cada una de las identidades de los problemas anteriores en otra forma.

4. Demostrar que: $\dfrac{\cos a}{\text{sen}\, a} = \cot a$

5. Tranformar la identidad $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$ en $1+\cot^2 a = \csc^2 a$

6. Completa las siguientes proposiciones

$\cos\ (a-\beta) =$ cos a cos β + sen a sen β

$\cos\ (a+\beta) =$ cos a cos β − sen a sen β

$\text{sen}\ (a+\beta) =$ sen a cos β + cos a sen β

$\text{sen}\ (a-\beta) =$ sen a cos β − cos a sen β

7. Demuestra que:

$\cos(a-\beta) = \cos a \cos\beta + \text{sen}\, a\, \text{sen}\,\beta$

8. Completa las siguientes proposiciones

$\tan\ (a+\beta) = \dfrac{\text{Tan } a + \text{Tan } \beta}{1 - \text{Tan } a \text{ Tan } \beta}$

$\tan\ (a-\beta) = \dfrac{\text{Tan } a - \text{Tan } \beta}{1 + \text{Tan } a \text{ Tan } \beta}$

9. Demuestra la primera identidad del problema anterior.

10. Deduce las identidades trigonométricas de la mitad de un ángulo.

5.15 TIRANGULOS OBLICUANGULOS

Hemos mencionado que un triángulo rectángulo está resuelto, cuando conocemos sus tres lados y sus tres ángulos, esto también es válido para los triángulos oblicuángulos cuyo análisis nos ocupa por ahora. Los elementos desconocidos en cualquier triángulo pueden llegar a tres, siempre y cuando dentro de los elementos conocidos se incluya la longitud de uno de sus lados. Para resolver un triángulo oblicuángulo es necesario conocer nuevas leyes que nos ayuden en esta tarea. Estas leyes se conocen con el nombre de **ley de los senos y ley de los cosenos,** las cuales se enuncian y se demuestran enseguida.

Ley de los senos

Enunciado:

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a dichos lados.

Si tenemos el triángulo oblicuángulo ABC cuyos lados son a, b y c, Fig. 5.59

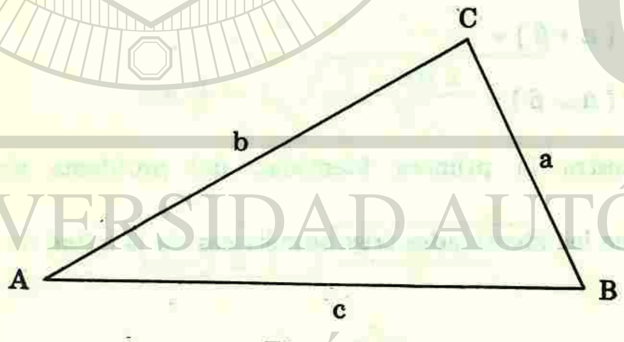


Figura 5.59

entonces la expresión matemática de la ley de los senos es:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Demostración:

Colocamos el triángulo oblicuángulo de la Fig. 5.59 sobre el plano cartesiano, haciendo que el vértice A coincida con el origen, por lo tanto el ángulo A está en posición normal (ver Fig. 5.60) y en esta posición obtenemos las coordenadas del vértice que no está sobre el eje " X " o sea el vértice C. De este vértice bajamos una perpendicular al lado AB, siendo h la altura del triángulo.

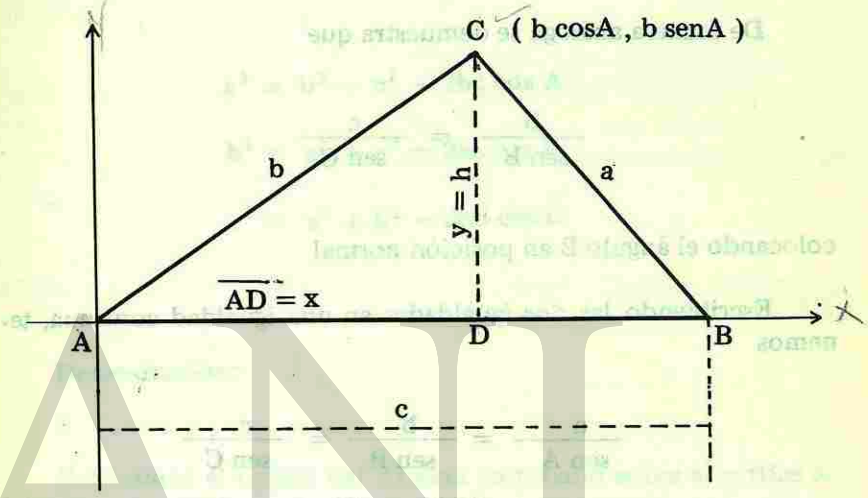


Figura 5.60

Las coordenadas del vértice C corresponden a las distancias AD y h respectivamente y forman los catetos del triángulo rectángulo ADC, los cuales se expresan en función del ángulo A por las igualdades.

$$x = \overline{AD} = b \cos A$$
$$y = h = b \text{ sen } A$$

Refiriéndonos ahora al triángulo rectángulo BCD, tenemos

$$h = a \text{ sen } B$$

Por lo tanto

Si $h = b \operatorname{sen} A$ y $h = a \operatorname{sen} B$, entonces $b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B$, igualdad que puede escribirse en la forma

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

De manera análoga se demuestra que

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

colocando el ángulo B en posición normal.

Escribiendo las dos igualdades en una igualdad continua, tenemos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Ley de los cosenos

Enunciado

En todo triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido.

La expresión matemática de la ley de los cosenos para cada uno de los lados a, b y c del triángulo ABC de la Fig. 5.61 es:

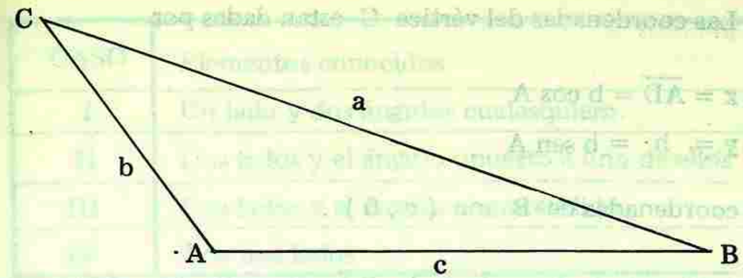


Figura 5.61

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración:

Colocamos el origen del sistema cartesiano sobre el vértice A del triángulo ABC, quedando el ángulo A en posición normal como se muestra en la Fig. 5.62

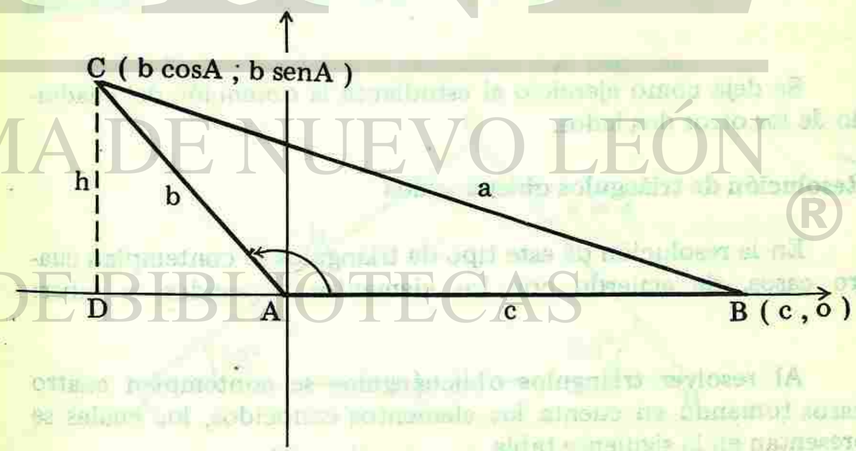


Figura 5.62

Las coordenadas del vértice C estan dadas por

$$x = \overline{AD} = b \cos A$$
$$y = h = b \operatorname{sen} A$$

y las coordenadas de B son $(c , 0)$.

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos la longitud del lado a.

$$a = \sqrt{(b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2}$$

elevando al cuadrado los dos miembros nos queda

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A)^2$$

elevando al cuadrado, sacando factor común y aplicando la identidad $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, obtenemos

$$a^2 = b^2 \cos^2 A - 2 bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A$$

$$a^2 = b^2 (\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2 bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos A$$

Se deja como ejercicio al estudiante la obtención del cuadrado de los otros dos lados.

Resolución de triángulos obicuángulos

En la resolución de este tipo de triángulos se contemplan cuatro casos, de acuerdo con los elementos conocidos, a saber:

Al resolver triángulos oblicuángulos se contemplan cuatro casos tomando en cuenta los elementos conocidos, los cuales se presentan en la siguiente tabla.

CASO	Elementos conocidos
I	Un lado y dos ángulos cualesquiera
II	Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
III	Dos lados y el àngulo comprendido
IV	Los tres lados

Los casos I y II se resuelven aplicando la ley de los senos y los casos III y IV con la ley de los cosenos.

Al resolver un triángulo oblicuángulo es recomendable hacer siempre el dibujo del triángulo marcando en la figura los datos y los elementos desconocidos, identificando el caso correspondiente. Cuando se aplique la ley de los cosenos, se sugiere calcular primeramente el más pequeño de los ángulo desconocidos.

Se ilustran con ejemplos los diferentes casos

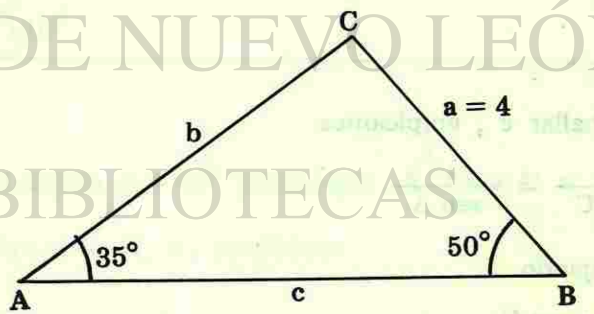
Casos I Datos: Un lado y dos ángulos cualesquiera.

Ejemplo 5.15.1

Resolver el triángulo ABC , si $a=4$, $A=35°$ y $B=50°$

Solución:

En la figura, los datos se presentan con negritas



Las incógnitas son b, c y C.

Al escribir las razones de acuerdo con la ley de los senos, hay que cuidar que intervengan los datos y **solo un elemento desconocido.**

Para hallar la incógnita **b** , escribimos

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$$

despejando

$$b = \frac{a \text{ sen B}}{\text{sen A}}$$

sustituyendo valores

$$b = \frac{4 \text{ sen } 50^\circ}{\text{sen } 35^\circ}$$

$$b = \frac{4\ (\ 0.7660\ )}{0.5736} = 5.3417$$

El ángulo C se obtiene aplicando la igualdad

$A + B + C = 180^\circ$, de donde

$C = 180^\circ - A - B$

$C = 180^\circ - 35^\circ - 50^\circ = 95^\circ$

Para hallar **c** , empleamos

$$\frac{c}{\text{sen C}} = \frac{a}{\text{sen A}}$$

despejando

$$c = \frac{a \text{ sen C}}{\text{sen A}}$$

sustituyendo valores

$$c = \frac{4 \text{ sen } 95^\circ}{\text{sen } 35^\circ}$$

$$c = \frac{4\ (\ 0.996\ )}{0.574} = 7$$

b = 5

Respuesta **c** = 7

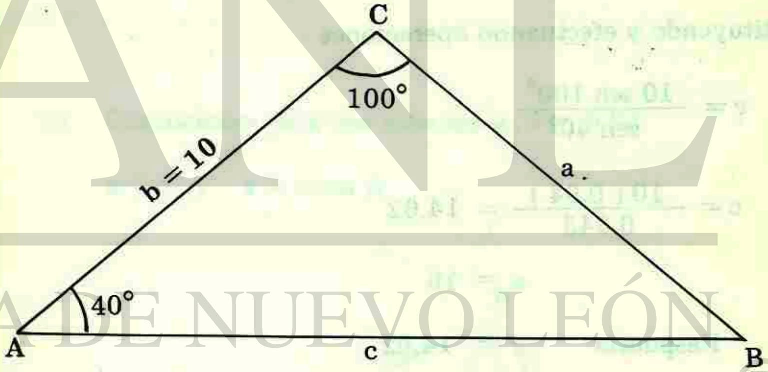
∡**C** = 95

Ejemplo 5.15.2

Encontrar **a** , **c** y **B** del triángulo ABC si b=10 , A=40° y C=100°

Solución:

Dibujamos el triángulo, señalando los datos e incógnitas



El ángulo B = 40° puesto que A + B + C = 180°

$B = 180^\circ - A - C$

$= 180^\circ - 40^\circ - 100^\circ$

$B = 40^\circ$

Para obtener **a** , escribimos

$$\frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}$$

despejando

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$ (10)(.6428) .6428

sen A = sen B ya que A = B, entonces

a = b

a = 10

Comprobamos aquí, que los lados opuestos a los ángulos iguales son iguales.

Para obtener c escribimos

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

despejando

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

sustituyendo y efectuando operaciones

$$c = \frac{10 \text{ sen } 100^\circ}{\text{sen } 40^\circ}$$

$$c = \frac{10\,(0.94)}{0.643} = 14.62$$

Respuesta $a = 10$

$c = 14.62$

$\measuredangle B = 40^\circ$

Caso II Datos: Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Este es el caso conocido como ambiguo, ya que puede haber una, dos o ninguna solución cuando el ángulo conocido es

agudo, o bien una o ninguna solución, si el ángulo conocido es recto u obtuso.

Analizaremos las soluciones posibles, si el ángulo conocido es agudo.

a). Condiciones para una solución. Fig. 5.63

a < c pero a = c sen A

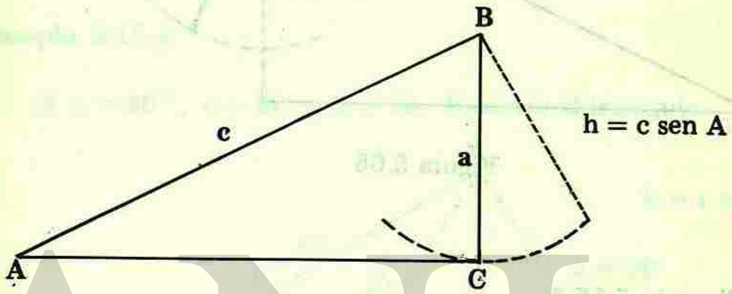


Figura 5.63

b) Condiciones para dos soluciones. Fig. 5.64

a < c y a > c sen A

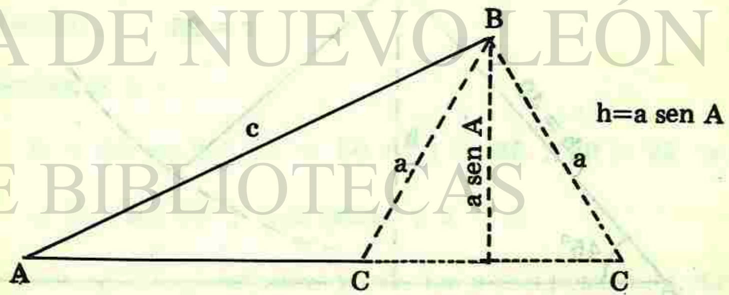


Figura 5.64

c). **Condiciones para no - solución. Fig. 5.65**

$$a < c \quad y \quad a < c \text{ sen } A$$

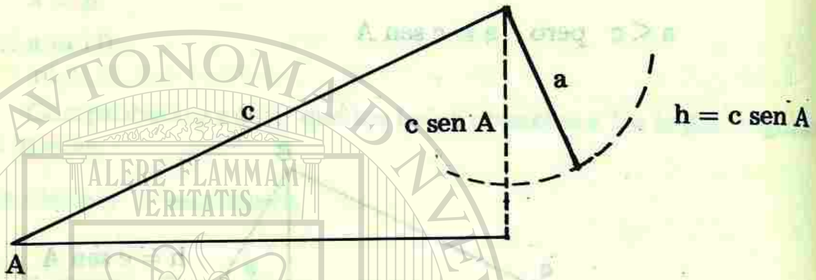


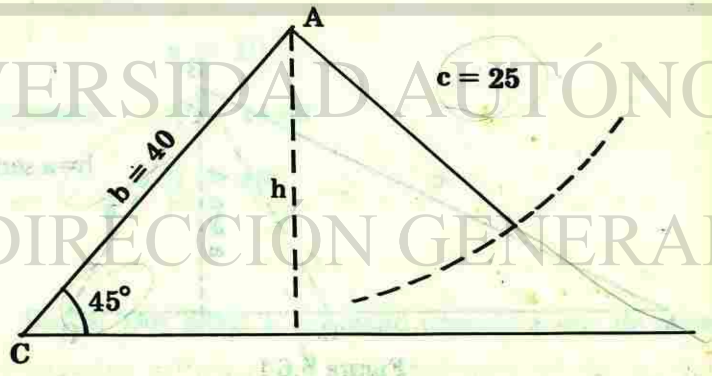
Figura 5.65

Ejemplo 5.15.3

Si $C = 45^\circ$, $b = 40$ y $c = 25$. Resolver el triángulo

Solución:

Construímos la figura de acuerdo con los datos.



Comparamos c con la longitud de la perpendicular trazada desde A al lado opuesto

$$h = b \text{ sen } 45^\circ$$

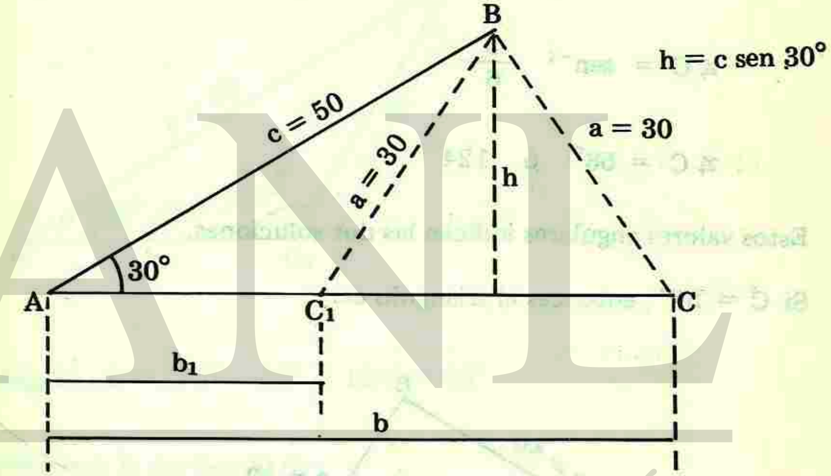
$$h = b \text{ sen } c = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} = 28.28$$

entonces $25 < 28.3$ o sea $c < b \text{ sen } C$

y de los datos sabemos que C es agudo y $c < b$, condiciones éstas para no solución. En la figura observamos que el lado c no alcanza a cerrar el polígono.

Ejemplo 5.15.4

Si $A = 30^\circ$, $c = 50$ y $a = 30$. Resolver el triángulo



Solución:

Calculamos h

$$h = 50 \text{ sen } 30^\circ, \; h = 50 \left(\tfrac{1}{2}\right) = 25, \; 30 > 25 \text{ o sea}$$

$$a > c \text{ sen } 30^\circ, \; A \text{ es agudo y } a < c$$

y como $a > h$, entonces puede tener dos posiciones, dando así lugar a las dos soluciones que en la gráfica aparecen con líneas punteadas.

Aplicando la ley de los senos al triángulo ABC para obtener el ángulo C , tenemos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

despejando

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } A}{a}$$

sustituyendo

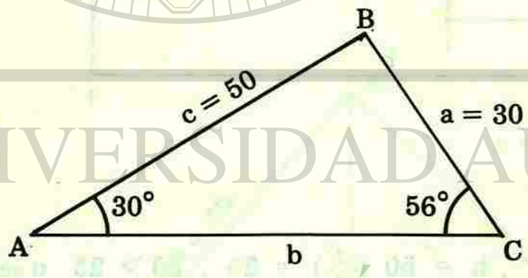
$$\text{sen } C = \frac{50 \text{ sen } 30^\circ}{30} = \frac{50\,(0.5)}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\measuredangle C = \text{sen}^{-1}\ \frac{5}{6}$$

$$\measuredangle C = 56^\circ \quad \text{ó} \quad 124^\circ$$

Estos valores angulares indican las dos soluciones.

Si C = 56°, entonces el triángulo es:



El ángulo B = 180° − A − C

$$B = 180^\circ - 30^\circ - 56^\circ = 94^\circ$$

Para obtener **b** , aplicamos la ley de los senos

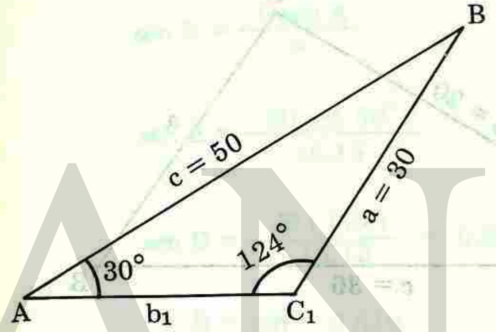
$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$b = \frac{30 \text{ sen } 94^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$b = \frac{30\,(0.99)}{0.5} = 59.4$$

Si C = 124° , el triángulo correspondiente es



El ángulo B = 180° − 30° − 124° = 26°

Obtenemos **b** paritendo de :

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

$$b_1 = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$b_1 = \frac{30 \text{ sen } 26^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$b_1 = \frac{30\,(0.45)}{0.5} = 27$$

Caso III **Datos: Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.**

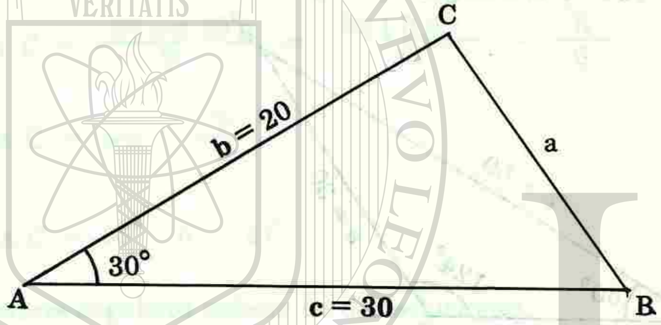
Con estos elementos conocidos, aplicamos la ley de los cosenos ya que la ley de los senos no resuelve el triángulo.

Ejemplo 5.

Resolver el triángulo ABC, si $b = 20$, $c = 30$ y $A = 30°$.

Solución:

Con los datos logramos la figura siguiente



Por la ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

Despejando y sustituyendo valores

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A}$$

$$a = \sqrt{(20)^2 + (30)^2 - 2\,(20)\,(30)\,\cos 30°}$$

$$a = \sqrt{400 + 900 - 1200\,(0.866}$$

$$a = \sqrt{1300 - 1200\,\,(0.866}$$

$$a = \sqrt{1300 - 1039.20 = 16.15}$$

$$a = 16.15$$

Enseguida determinamos el menor de los dos ángulos desconocidos.

Por la ley de los senos,

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } A}{a}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

$$\text{sen } B = \frac{20 \text{ sen } 30°}{16.15}$$

$$\text{sen } B = \frac{20\,(0.5)}{16.15} = 0.619$$

$$B = \text{sen}^{-1}\, 0.619$$

$$B = 38°\ 15'$$

El ángulo C lo obtenemos a partir de

$$C = 180° - A - B$$

$$C = 180° - 30 - 38°\ 15'$$

$$C = 111°\ 45'$$

Caso IV Datos: Los tres lados.

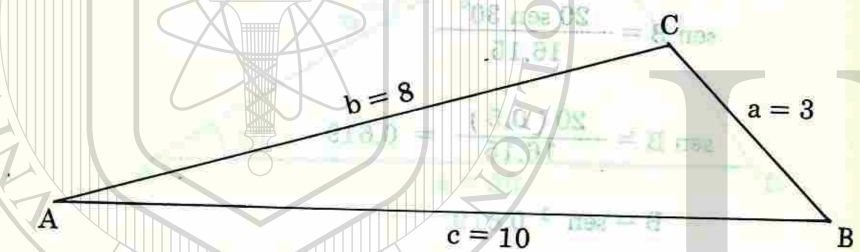
También aquí utilizamos la ley de los cosenos para hallar los ángulos del triángulo dado.

Ejemplo 5.15.6

Resolver el triángulo ABC, si $a=3$, $b=8$ y $c=10$

Solución:

La figura del triángulo correspondiente es:



Si queremos obtener cualquiera de los ángulos, utilizamos la ley de los cosenos y despejamos el ángulo correspondiente.

Así

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

Despejando cos A, obtenemos

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2\,b\,c}$$

Cambiando signo a la fracción

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

Sustituyendo valores

$$\cos A = \frac{(8)^2 + (10)^2 - (3)^2}{2\,(8)(10)}$$

$$\cos A = \frac{64 + 100 - 9}{160}$$

$$\cos A = \frac{155}{160} = \frac{31}{32} = 0.969$$

$$A = \cos^{-1} 0.969$$

$$A = 75^\circ\ 50'$$

El ángulo B se obtiene a partir de la igualdad.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Sustituyendo valores obtenemos

$$\cos B = 0.75$$

$$B = \cos^{-1} 0.75$$

$$B = 41^\circ\ 20'$$

El ángulo C es el suplemento de la suma $\measuredangle A + \angle B$, por lo tanto $\measuredangle C = 62^\circ\ 50'$.

Ejercicio 5.8

1. **Enuncia la ley de los senos.**

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a dichos lados

2. **Da la expresión matemática de la ley de los senos.**

$$\frac{a}{\text{Seno } A} = \frac{b}{\text{Sen } B} = \frac{c}{\text{Seno } C}$$

3. **Demuestra la ley de los senos.**

Si $h = b \text{ sen } A$ y $h = a \text{ sen } B$, entonces b sen A = a sen B

4. **¿Qué nos dice la ley de los cosenos?**

En todo triángulo el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ang. ...

5. **Escribe la expresión matemática de la ley de los cosenos, para cada uno de los lados de un triángulo oblicuángulo.**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

6. **Demuestra la ley de los cosenos para el triángulo de la figura 5.62 obteniendo el cuadrado del lado c. Coloca el ángulo C en posición normal.**

7. **¿Cuántos casos se presentan al resolver un triángulo oblicuángulo, de acuerdo con los elementos conocidos?**

4 casos

8. **¿Cuándo se aplica la ley de los senos?**

cuando hay un lado y 2 ángulos cualesquiera
cuando hay 2 lados y el ángulo opuesto a uno de ...

9. **¿En cuáles casos se aplica la ley de los cosenos?**

III - IV

10. **Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos cuyos datos se dan en los incisos siguientes**

a) $b = 141$, $c = 109$, $B = 40° 16'$

b) $A = 30°$, $c = 10$, $b = 8$

c) $\cos B = \dfrac{1}{12}$, $a = 4$, $c = 6$

d) $a = 6$, $b = 8$, $c = 12$

Funciones Trigonométricas

Senos y tangentes, léanse hacia abajo
Cosenos y cotangentes, léanse hacia arriba

37
53
90

∠	sen		tan			∠	sen		tan		
0°	.0000	.0175	.0000	.0175	89°	45°	.7071	.7193	1.000	1.036	44°
1°	.0175	.0349	.0175	.0349	88°	46°	.7193	.7314	1.036	1.072	43°
2°	.0349	.0523	.0349	.0524	87°	47°	.7314	.7431	1.072	1.111	42°
3°	.0523	.0698	.0524	.0699	86°	48°	.7431	.7547	1.111	1.150	41°
4°	.0698	.0872	.0699	.0875	85°	49°	.7547	.7660	1.150	1.192	40°
5°	.0872	.1045	.0875	.1051	84°	50°	.7660	.7771	1.192	1.235	39°
6°	.1045	.1219	.1051	.1228	83°	51°	.7771	.7880	1.235	1.280	38°
7°	.1219	.1392	.1228	.1405	82°	52°	.7880	.7986	1.280	1.327	37°
8°	.1392	.1564	.1405	.1584	81°	53°	.7986	.8090	1.327	1.376	36°
9°	.1564	.1736	.1584	.1763	80°	54°	.8090	.8192	1.376	1.428	35°
10°	.1736	.1908	.1763	.1944	79°	55°	.8192	.8290	1.428	1.483	34°
11°	.1908	.2079	.1944	.2126	78°	56°	.8290	.8387	1.483	1.540	33°
12°	.2079	.2250	.2126	.2309	77°	57°	.8387	.8480	1.540	1.600	32°
13°	.2250	.2419	.2309	.2493	76°	58°	.8480	.8572	1.600	1.664	31°
14°	.2419	.2588	.2493	.2679	75°	59°	.8572	.8660	1.664	1.732	30°
15°	.2588	.2756	.2679	.2867	74°	60°	.8660	.8746	1.732	1.804	29°
16°	.2756	.2924	.2867	.3057	73°	61°	.8746	.8829	1.804	1.881	28°
17°	.2924	.3090	.3057	.3249	72°	62°	.8829	.8910	1.881	1.963	27°
18°	.3090	.3256	.3249	.3443	71°	63°	.8910	.8988	1.963	2.050	26°
19°	.3256	.3420	.3443	.3640	70°	64°	.8988	.9063	2.050	2.145	25°
20°	.3420	.3584	.3640	.3839	69°	65°	.9063	.9135	2.145	2.246	24°
21°	.3584	.3746	.3839	.4040	68°	66°	.9135	.9205	2.246	2.356	23°
22°	.3746	.3907	.4040	.4245	67°	67°	.9205	.9272	2.356	2.475	22°
23°	.3907	.4067	.4245	.4452	66°	68°	.9272	.9336	2.475	2.605	21°
24°	.4067	.4226	.4452	.4663	65°	69°	.9336	.9397	2.605	2.747	20°
25°	.4226	.4384	.4663	.4877	64°	70°	.9397	.9455	2.747	2.904	19°
26°	.4384	.4540	.4877	.5095	63°	71°	.9455	.9511	2.904	3.078	18°
27°	.4540	.4695	.5095	.5317	62°	72°	.9511	.9563	3.078	3.271	17°
28°	.4695	.4848	.5317	.5543	61°	73°	.9563	.9613	3.271	3.487	16°
29°	.4848	.5000	.5543	.5774	60°	74°	.9613	.9659	3.487	3.732	15°
30°	.5000	.5150	.5774	.6009	59°	75°	.9659	.9703	3.732	4.011	14°
31°	.5150	.5299	.6009	.6249	58°	76°	.9703	.9744	4.011	4.331	13°
32°	.5299	.5446	.6249	.6494	57°	77°	.9744	.9781	4.331	4.705	12°
33°	.5446	.5592	.6494	.6745	56°	78°	.9781	.9816	4.705	5.145	11°
34°	.5592	.5736	.6745	.7002	55°	79°	.9816	.9848	5.145	5.671	10°
35°	.5736	.5878	.7002	.7265	54°	80°	.9848	.9877	5.671	6.314	9°
36°	.5878	.6018	.7265	.7536	53°	81°	.9877	.9903	6.314	7.115	8°
37°	.6018	.6157	.7536	.7813	52°	82°	.9903	.9925	7.115	8.144	7°
38°	.6157	.6293	.7813	.8098	51°	83°	.9925	.9945	8.144	9.514	6°
39°	.6293	.6428	.8098	.8391	50°	84°	.9945	.9962	9.514	11.43	5°
40°	.6428	.6561	.8391	.8693	49°	85°	.9962	.9976	11.43	14.30	4°
41°	.6561	.6691	.8693	.9004	48°	86°	.9976	.9986	14.30	19.08	3°
42°	.6691	.6820	.9004	.9325	47°	87°	.9986	.9994	19.08	28.64	2°
43°	.6820	.6947	.9325	.9657	46°	88°	.9994	.9998	28.64	57.29	1°
44°	.6947	.7071	.9657	1.000	45°	89°	.9998	1.000	57.29	∞	0°
		cos		cot	∠			cos		cot	∠

Respuestas a los Problemas Impares

Respuestas a los problemas impares.

Ejercicio 1.1 (Página 11)

1. El razonamiento deductivo procede de lo general a lo particular y el razonamiento inductivo procede de lo particular a lo general.

3. Deductiva, inductiva.

5. Ver punto 1.2.1

7. 2n, 2n—1

9. Naturales, pares e impares.

11. $2n + 1 = 2n + 1$

13. $4(n + 1) = 4(n + 1)$

Ejercicio 1.2 (Página 19)

1. $c^4 + 4\,c^3 d + 6\,c^2\,d^2 + 4\,cd^3 + d^4$

3. $m^6 - 6\,m^5 + 15\,m^4 - 20\,m^3 + 15\,m^2 - 6\,m + 1$

5. $r^9 + 9\,r^8\,s + 36\,r^7\,s^2 + 84\,r^6\,s^3 + 126\,r^5\,s^4$

$+ 126\,r^4\,s^5 + 84\,r^3\,s^6 + 36\,r^2\,s^7 + 9\,r\,s^8 + s^9$

7. $32\,x^5 - 80\,x^4\,y + 80\,x^3\,y^2 - 40\,x^2\,y^3$

$+ 10\,x\,y^4 - y^5$

9. $y^6 - 9\,y^4 + 27\,y^2 - 27$

11. $a^{18} + 9\,a^{16}\,b^2 + 36\,a^{14}\,b^4 + 84\,a^{12}\,b^6 + 126\,a^{10}\,b^8$

$+ 126\,a^8\,b^{10} + 84\,a^6\,b^{12} + 36\,a^4\,b^{14} + 9\,a^2\,b^{16} + b^{18}.$

13. $64a^6 + 576a^5b + 2160a^4b^2 + 4320a^3b^3$
$+ 4860a^2b^4 + 2916ab^5 + 729b^6$

15. $\frac{c^5}{d^5} - \frac{5c^4}{d^4} + \frac{10c^3}{d^3} - \frac{10c^2}{d^2} + \frac{5c}{d} - 1$

17. 1; 2; 6; 24; 120; 720; 5,040; 40,320; 362,880; 3'628,800.

19. $35\,w^3z^4$

21. $210\,s^4t^6$

23. $10'264,320\,a^4b^8$

25. $1001\,w^{10}$

Ejercicio 2.1 (Página 31)

1. Ver definición en la página 25

3. La gráfica de una sucesión la forman puntos aislados y la gráfica de una función la constituyen segmentos de rectas o de curvas.

5. La ley de desarrollo.

7. a) función lineal.
b) función exponencial.
c) inverso multiplicativo de una función lineal.

9. 2, 1, 0, −1, −2

11. $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$

13. $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$

15. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

17. 1, 4, 16, 64, 256

19. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$

21. geométrica

23. armónica

25. aritmética

Ejercicio 2.2 (Página 36)

1. Ver definición en la página 33

3. La ley de desarrollo

5. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

7. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

9. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$

11. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$

13. $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$

15. $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$

Ejercicio 3.1 (Página 48)

1. Ver definición en la página 41

3. $a_n = a_1 + (n-1)d$

5. Restando a cualquier término el término anterior.

7. 71

9. -8

11. $a_{12} = 45$, $S_n = 276$

13. $n = 7$, $S_n = -14$

15. $a_1 = 4$, $a_{20} = 80$

17. $\{2n\}$

Ejercicio 3.2 (Página 55)

1. $r = 2$, $S_{12} = 8190$

3. $a_1 = 2$, $S_5 = 122$

5. $a_n = \dfrac{1}{405}$, $n = 6$

7. $\pm\dfrac{3}{20}$, $\dfrac{3}{80}$

9. 1.23 cm, 1.498 m

11. Ver definiciones en las páginas 50 y 54.

Ejercicio 4.1 (Página 64)

1. 720

3. 4

5. 36

7. 9

Ejercicio 4.2 (Página 69)

1. 12, 6720, 2730

3. $\dfrac{20!}{5!}$

5. 720

7. 210

9. 27'907,200

11. 504

Ejercicio 4.3 (Página 73)

1. Ver definición en la página 71

3. $C(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

5. 15,504

7. 120

9. 210

Ejercicio 5.1 (Página 90)

1. Ver el párrafo segundo de la página 79

3. La horizontal es paralela a una superficie de nivel y la vertical sigue la dirección de la plomada.

5. 

7. Cuando los lados inicial y final son los mismos.

9. a) $315°$, $-405°$, $675°$

b) $-328°$, $392°$, $752°$

c) $345°$, $-375°$, $-735°$

d) $-292° 30'$, $= 652° 30'$, $427° 30'$

11. a) + , b) − , c) + , d) − ,

e) + , f) −

13. La horizontal que pasa por el ojo del observador y la visual dirigida hacia un punto situado abajo de él.

15. minutos y segundos

17. Ver definición en la página 83

19. 180°

21. Nulo, agudo, recto, obtuso, colineal, entrante y perigonal

23. a) complementarios

b) complementarios

c) conjugados

d) suplementarios

e) conjugados

Ejercicio 5.2 (Página 102)

1. a) equilátero, isósceles y escaleno

b) equiángulo, rectángulo y oblicuángulo.

3. No , porque el equilátero tiene sus tres lados iguales.

5. matemático griego

7. En el teorema de Pitágoras

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

9. 50°

11. Tres

13. Iguales

Ejercicio 5.3 (Página 111)

1. Seno, coseno, tangente, cotangente, secante, y cosecante

3. $\text{sen } B = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$, $\tan B = \frac{4}{3}$

$\cot B = \frac{3}{4}$, $\sec B = \frac{5}{3}$, $\csc B = \frac{5}{4}$

5. i) 10 , ii) $5\sqrt{5}$

iii) $\sqrt{58}$, iv) $4\sqrt{10}$

7. 1 , 1 , $\sqrt{2}$ y 1 , 2 , $\sqrt{3}$

9. cos 60° , cot 45° , csc 30° , tan 30°

sec 75° , sen 15°

11. $8\sqrt{2}$

13. $2\sqrt{34}$

Ejercicio 5.4 (Página 118)

1. Conocer sus tres lados y sus tres ángulos.

3. Ver las reglas en la página 113

5. a) ángulo cuyo seno es 0.5

b) ángulo cuya cotangente es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) ángulo cuya tengente es 1

d) ángulo cuya secante es ∞

7. $\dfrac{2000\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 5.5 (Página 129)

1. Con la base sobre el eje X

3. $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 150° = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 150° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \tan 150° = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$

$\cot 30° = \sqrt{3}$ $\quad \cot 150° = -\sqrt{3}$

$\sec 30° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \sec 150° = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$

$\csc 30° = 2$ $\quad \csc 150° = 2$

$\operatorname{sen} 210° = \dfrac{-1}{2}$ $\quad \operatorname{sen} 330° = \dfrac{-1}{2}$

$\cos 210° = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos 330° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \tan 330° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 210° = \sqrt{3}$ $\quad \cot 330° = -\sqrt{3}$

$\sec 210° = \dfrac{-2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \sec 330° = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\csc 210° = -2$ $\quad \csc 330° = -2$

5. Ver definición en la página 127

7. I y IV $\quad$ I y IV

9. a) Igual a las funciones de 330°

b) Igual a las funciones de 135°

c) Igual a las funciones de 270°

d) Igual a las funciones de 225°

Ejercicio 5.6 (Página 138)

1. $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

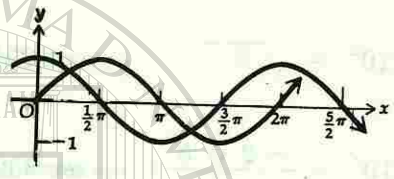
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

$\sec(-\theta) = \sec\theta$

$\csc(-\theta) = -\csc\theta$

3.



5. No

7. Ver gráficas en las páginas 137

Ejercicio 5.7 **(Página 150)**

1. $1 \equiv 1$

3. $\cos a = \dfrac{1}{\sec a}$, $\tan a = \dfrac{1}{\cot a}$

5. Ver tranformación en la página 141

7. Ver demostración en la página 143

9. Ver demostración en la página 147

Ejercicio 5.8 **(Página 170)**

1. Ver enunciado en la página 152

3. Ver demostración en la página 153

5. Ver expresiones en la página 154

7. Cuatro

9. En los casos III y IV

B I B L I O G R A F I A

MURRAY R. SPIEGEL — **Algebra Superior.** México. Mc Graw-Hill, 1970.

ELBRIDGE P. VANCE — **Introducción a la Matemática Moderna.** México, Fondo Educativo Interamericano, 1978.

EUGENE D. NICHOLS — **Matemáticas.** México, Interamericana, 1977.

NATHAN O. NILES — **Trigonometría Plana.** México, Editorial Limusa, 1979.

HOOPER - L. GRISWOLD — **Trigonometría.** México, Publicaciones Cultural, 1966.

DULCIANI-BERMAN-WOOTON — **Algebra Moderna y Trigonometría.** México, Publicaciones Cultural, 1967.

LOUIS LEITHOLD — **El Cálculo con Geometría Analítica.** México. Harper and Row Latinoamericana, 1982.

LOVAGLIA-ELMORE-CONWAY — **Algebra.** México, Harper and Row Latinoamericana, 1972.

MOISE-DOWNS — **Geometría Moderna.** U.S.A., Addison-Wesley Publishing Company, 1966

Este trabajo se terminó de imprimir en los talleres de Técnica Gráfica de Monterrey, S. A. el 15 de Febrero de 1986.