UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

COLEGIO CIVIL, ESC. PREPARATORIA No. 3 (NOCTURNA PARA TRABAJADORES)

MATEMATICAS 3

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

RECTOR
ING. GREGORIO FARIAS LONGORIA

PREPARATORIA NUM. 3

DIRECTOR
ING. JUAN E. MOYA BARBOSA

VOTO DE AGRADECIMIENTO

A todos los maestros de la materia, compañeros y amigos, por su apoyo brindado.

A todas las demás personas, mecanógrafas, dibujante e impresor, sin su valiosa ayuda no hubiera sido posible la realización de este libro.

A todos ellos, Muchas Gracias

EL AUTOR

Este texto cumple con los requerimientos de la Comisión Académica del H. Consejo Universitario, desarrollando íntegramente el contenido del Programa Oficial para Matemáticas III aprobado por el H. Consejo Universitario y de aplicación obligatoria en todas las escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Nuevo León.

Autor:

Ing. Juan M. Ortiz

MATEMATICAS 3

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

PREPARATORIA No. 3

Monterrey, N. L.

CONTENIDO

1

NUMEROS COMPLEJOS

2

LA ECUACION CUADRATICA

3

SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS

4

SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES ARITMETICAS, GEOMETRICAS Y TEOREMA DEL BINOMIO.

5
PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

MENSAJE

El presente trabajo tiene como finalidad que aprendas y apliques los conceptos de:

- Números Complejos.
- La solución de Ecuaciones Cuadráticas.
- La solución de Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas.
- Sucesiones y Series: Progresiones y el Teorema del Binomio.
- Permutaciones y Combinaciones.

Se ha tratado de expresar la teoría en forma concisa, utilizando un lenguaje sencillo y claro, proporcionando siempre uno o varios ejemplos donde se refleja la aplicación del concepto que se ha pretendido explicar.

Intenta ser un material de consulta permanente del alumno, para lo cual incluye un buen número de ejercicios resueltos al detalle y que sirven de prototipo a seguir en los ejercicios de aplicación.

Confío en que sabrás aprovechar este material que te ofrezco aportando tu mayor esfuerzo y dedicación al estudio. Debes ser constante. No todo se consigue al primer intento, la perseverancia y el deseo sincero nos permiten lograr nuestros propósitos. ¡Mantengamos vivo siempre nuestro deseo de superación!

Ing. Juan Miguel Ortíz Guerra.

OBJETIVO GENERAL DEL CURSO:

El alumno será capaz de:

Aplicar los conceptos generales de: Números Complejos; la solución de Ecuaciones Cuadráticas y Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas; así como Sucesiones y Series, Progresiones y el Teorema del Binomio; y también Permutaciones y Combinaciones.

1

Números Complejos

PRIMERA UNIDAD
NUMEROS COMPLEJOS

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

1. Aplicará los conocimientos adquiridos sobre números complejos para efectuar las operaciones fundamentales.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

I. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

1.1 Definirá qué es número real.

1.2 Definirá qué son números imaginarios puros.

1.3 Enunciará el concepto de número complejo, escrito en forma rectangular.

1.4 Representará gráficamente a los números complejos escritos en forma rectangular.

1.5 Efectuará con precisión las cuatro operaciones básicas con los números complejos en forma rectangular.

INTRODUCCION

Los números complejos fueron analizados por vez primera, en un libro de álgebra publicado en 1572, sin embargo, no fué sino hasta alrededor de 1800 cuando se les dio una interpretación geométrica y fueron entendidos como objetos cuya existencia podía ser plenamente justificada.

La idea fue originada, en forma independiente, por el noruego C. Wessel en 1797, por el francés J. R. Argand en 1806, y por el alemán Karl F. Gauss en esa misma época.

Comprenderemos la necesidad de extender nuestro concepto de número real, cuando en expresiones como $x^2 + 4 = 0$ no encontramos ningún número real que pueda tomar x para hacer cierta la igualdad. Sabemos que cualquier número (positivo o negativo) cuando es elevado al cuadrado es siempre positivo y sumándole otro número positivo jamás nos dará cero, ¿verdad?

Estudiaremos entonces, un nuevo sistema numérico, es decir, un nuevo conjunto de números, los complejos y sus propiedades.

I. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS.

A. Números reales.

Recordemos el concepto de Números Reales.

Se le llama Números Reales, al conjunto de números que comprende a los Racionales y a los Irracionales, $R = Q \cup I$.

También se les define como aquellos números que pueden expresarse como decimales.

Son <u>números Racionales</u> (Q) aquellos que pueden ser representados por una fracción, o sea el cociente de dos enteros, exceptuando la división por cero, $Q = \frac{P}{q}$ donde $q \neq 0$.

Ejemplos: Son números Racionales:

a) **Todos los números enteros:**

$$8 = \frac{8}{1} = \frac{16}{2} = \frac{24}{3}, \text{ etc. . .}$$

b) **Las fracciones propias y las impropias:**

$$\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{4}, \text{ etc. . .}$$

c) **El cero:**

El cero puede ser dividido por cualquier otro número (excepto el cero) y el cociente siempre será cero.

$$0 = \frac{0}{7} = \frac{0}{5} = \frac{0}{n}, \text{ donde } n \in \mathbb{N}$$

La división por cero no tiene sentido, ya que para que el cociente $\frac{5}{0}$ tenga significado, necesitamos encontrar un número x tal que $x \cdot 0 = 5$ Este número no existe.

En el caso de la división $\frac{0}{0}$, podemos decir que $\frac{0}{0} = N$, ya que $0 \cdot N = 0$ para cualquier valor de N, por lo que una vez más afirmamos que la división por cero no conduce a un resultado útil, por lo tanto, no es permisible.

Cualquier número racional tiene una representación decimal, exacta o periódica y viceversa.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{1}{8} = 0.125$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666\ldots$$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428}\ldots$$

$$0.\overline{36} = \frac{4}{11}$$

Son **números Irracionales** (I) aquellos cuya representación decimal está formada por infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

También se les define como "todo número real que no es racional".

Ejemplos:

$\sqrt{3}$, π , $\sqrt[3]{7}$, etc. . .

B. Números imaginarios puros.

Cuando estos números fueron introducidos por vez primera hace aproximadamente 400 años, parecieron una cosa tan extraña que se les denominó "imaginarios", aún cuando no son más "irreales" que los números "reales".

La expresión $\sqrt[n]{A} = R$, si y solo si $R^n = A$ nos define el concepto de raíz enésima principal de un número, donde:

$\sqrt{\ }$ = radical

n = índice del radical

A = radicando

R = raíz

Así tenemos que:

$\sqrt[2]{25} = 5$ porque $(5)^2 = 25$

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $(2)^3 = 8$

$\sqrt[5]{32} = 2$ porque $(2)^5 = 32$

$\sqrt[2]{4} = 2$ porque $(2)^2 = +4$, y también

$\sqrt[2]{4} = -2$ porque $(-2)^2 = +4$

De aquí que toda raíz cuadrada de un número tiene dos valores, uno positivo y otro, negativo.

Pero si ahora queremos analizar **cuando *n* es par y A es negativo**, tendremos:

Por ejemplo:

$\sqrt[2]{-4} = x$ "si" $(x)^2 = -4$

y puesto que no hay valor real de x que al ser elevado al cuadrado sea negativo, entonces, procederemos así:

$$\sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{4(-1)} = \sqrt[2]{4} \cdot \sqrt[2]{-1} = \pm\ 2\ \sqrt[2]{-1} = \pm\ 2i$$

obteniendo, de esta manera, un número imaginario.

Establecemos que:

$\sqrt[2]{-1}$ no es un número real,

$\sqrt[2]{-1} =$ Es la unidad de los números imaginarios y lo representamos por la letra i

"Se llaman números imaginarios puros a los números de la forma *bi*, donde *b* es real y diferente de cero, e $i = \sqrt[2]{-1}$ "

Ejemplos:

$$3i\ ,\ -\frac{1}{2}i\ ,\ i\ ,\ -2i\ ,\ \text{etc.}\ldots$$

En el sistema de los números imaginarios son válidas las propiedades de los números reales, pero debemos expresar siempre en términos de *i* :

Ejemplos:

a) $\sqrt[2]{-25} = \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[2]{-1} = 5i$

b) $\sqrt[2]{-6} = \sqrt[2]{6} \cdot \sqrt[2]{-1} = i\sqrt{6}$

c) $-\sqrt[2]{-45} = -\sqrt[2]{9} \cdot \sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[2]{-1} = -3i\sqrt{5}$

d) $2\sqrt[2]{-9} + 5\sqrt[2]{-16} = 2\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} + 5\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}$

$= 6i + 20i = 26i$

El producto y el cociente de dos números imaginarios puros, son números reales:

Ejemplos:

a) $\sqrt[2]{-3} \cdot \sqrt[2]{-27} = i\sqrt{3} \cdot i\sqrt{27} = i^2\sqrt[2]{81} = -9$

b) $\dfrac{\sqrt[2]{-10}}{\sqrt[2]{-2}} = \dfrac{i\sqrt{10}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}} = \sqrt{5}$

Potencias sucesivas de $i, i^2, i^3, \ldots i^8$:

Hemos visto que $i = \sqrt[2]{-1}$,

i^2 será $i \times i$, sustituyendo el valor de *i*:

$i^2 = \sqrt[2]{-1} \cdot \sqrt[2]{-1}$

$i^2 = (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$ por: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$i^2 = (-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ 1a. ley de los exponentes.

$i^2 = (-1)^1 = -1$

Por tanto, *i* es un número imaginario tal que elevado al cuadrado da el número real -1.

$i = \sqrt[2]{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)(\sqrt[2]{-1}) = -\sqrt[2]{-1}$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = +1$

$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(\sqrt[2]{-1}) = \sqrt[2]{-1}$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = (1)(-1) = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = (-1)(\sqrt[2]{-1}) = -\sqrt[2]{-1}$

$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (1)(1) = +1$

El valor de las potencias de *i* se repite en ciclos de cuatro.

EJERCICIO I - 1

1.- **Expresar en términos de i:**

a) $2\sqrt{-81} =$

b) $3\sqrt{-50} =$

c) $(-24)^{\frac{1}{2}} =$

d) $6\sqrt{-2} =$

e) $3\sqrt{-\frac{2}{3}} =$

f) $\sqrt{-\frac{1}{6}} =$

g) $\frac{1}{2}\sqrt{-100} =$

h) $5\sqrt{-.01} =$

2.- **Hallar la suma o diferencia:**

a) $\sqrt{-3} + \sqrt{-12} =$

b) $3\sqrt{-6} + 2\sqrt{-24} =$

c) $\sqrt{-36} + \sqrt{-4} - \sqrt{-9} =$

d) $\sqrt{-\frac{4}{5}} + \sqrt{-\frac{5}{4}} =$

e) $i + i^2 + i^3 + i^4 =$

3.- **Encontrar el producto:**

a) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-25} =$

b) $\sqrt{-100} \cdot \sqrt{-100} =$

c) $(-\sqrt{-5})(\sqrt{-5}) =$

d) $(-\sqrt{-5})^2 =$

e) $2i \cdot 4i \cdot 3i^2 =$

4.- **Hallar el cociente:**

a) $\dfrac{\sqrt{-90}}{\sqrt{-10}} =$

b) $\dfrac{2\sqrt{-50}}{5\sqrt{-2}} =$

c) $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-12}} =$

d) $\dfrac{\sqrt{-14}}{2\sqrt{-7}} =$

e) $\dfrac{25\sqrt{-3}}{3\sqrt{-5}} =$

C. Números complejos.

Se les llama números complejos a los números formados por la suma de un número real y un número imaginario.

Ejemplos:

$$2 + 5i,\ \frac{1}{2} - \frac{3}{4}i,\ -1 + \frac{2}{3}i,\ etc. \ldots$$

Son de la forma $a + bi$, donde a y b son reales y diferentes de cero, e $i = \sqrt[2]{-1}$.

---

a es la parte real y bi es la parte imaginaria del número complejo. Esta es llamada la forma canónica o forma rectangular.

Si $a = 0$, el número complejo $a + bi$ es:
$0 + bi = bi$ imag. puro

Si $b = 0$, el número complejo $a + bi$ es:
$a + 0i = a$ número real

Por consiguiente, en los números complejos están incluidos todos los números reales y todos los números imaginarios puros.

D. Representación gráfica de los números complejos.

La idea de representar gráficamente un número complejo es realmente muy simple ya que éstos se pueden representar por puntos en un sistema rectangular, puesto que todo número complejo queda identificado por una pareja de números reales (a, b).

Establecemos una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números complejos y los puntos del Plano XY. Así los puntos del eje X corresponden a números reales y los puntos del eje Y a números imaginarios puros; éste es llamado el **Plano Complejo.**

La localización de puntos en el Plano Complejo constituyen el Diagrama de Argand.

Ejemplo: Localizar en el plano complejo los siguientes números complejos en forma rectangular.

A $(2 + 3i)$

B $(-3 + 2i)$

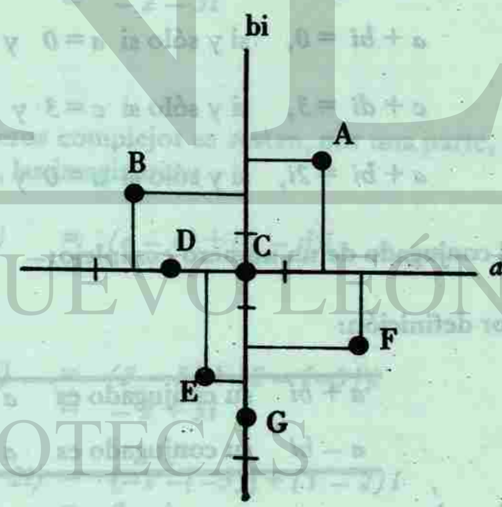
C $(0 + 0i)$

D $(-2 + 0i)$

E $(-1 - 3i)$

F $(3 - 2i)$

G $(0 - 4i)$



PLANO COMPLEJO
DIAGRAMA DE ARGAND

E. Operaciones fundamentales con números complejos.

Definición de igualdad de dos números complejos:

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean iguales es, que sus partes reales sean iguales y sus partes imaginarias sean también iguales.

Es decir:

$$a + bi = c + di \text{, si y sólo si, } a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplos:

$$3 + 5i = \frac{6}{2} + \frac{10}{2}i$$

$$6 + 8i \neq 6 - 8i$$

entonces:

$a + bi = 0$, si y sólo si $a = 0$ y $b = 0$

$c + di = 3$, si y sólo si $c = 3$ y $d = 0$

$a + bi = 2i$, si y sólo si $a = 0$ y $b = 2$

El conjugado de un número complejo:—

por definición:

$a + bi$ su conjugado es $a - bi$, y

$a - bi$ su conjugado es $a + bi$

Ejemplo:

$5 - 3i$ y $5 + 3i$ son conjugados recíprocamente.

Los números complejos tienen todas las propiedades de los números reales.

OPERACIONES FUNDAMENTALES.

1) ADICION:

Para sumar dos números complejos se suman, por una parte, las partes reales y, por otra, las imaginarias:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplos:

a) $(5 + 4i) + (3 + 2i) = (5 + 3) + (4 + 2)i = 8 + 6i$

b) $(-6 + 2i) + (4 - 5i) = (-6 + 4) + (2 - 5)i = -2 - 3i$

2) SUSTRACCION.

Para restar dos números complejos se restan, por una parte, las partes reales y, por otra, las imaginarias:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplos:

a) $(3 + 2i) - (5 - 3i) = (3 - 5) + [2 - (-3)]i = -2 + 5i$

b) $(-1 + i) - (-3 + 2i) = [-1 - (-3)] + (1 - 2)i = 2 - i$

3) MULTIPLICACION.

Para multiplicar dos números complejos se efectúa la operación como si se tratase de dos binomios, sustituyendo luego i^2 por -1.

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

Ejemplos:

a) $(5+3i)(2-2i) = 10-10i+6i-6i^2 = 10-4i-6(-1) = 16-4i$

b) $(3-2i)(4+i) = 12+3i-8i-2i^2 = 12-5i-2(-1) = 14-5i$

4) DIVISION.

Para dividir dos números complejos, usamos la propiedad del número 1, multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor.

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos.

a) $\dfrac{1+i}{3-i} = \dfrac{1+i}{3-i}\cdot\dfrac{3+i}{3+i} = \dfrac{3+i+3i+i^2}{3^2-i^2} = \dfrac{2+4i}{10} = \dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}i$

b) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{-i}{-i} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{-(-1)} = \dfrac{-i}{+1} = -i$

c) $\dfrac{2-5i}{4+3i} = \dfrac{2-5i}{4+3i}\cdot\dfrac{4-3i}{4-3i} = \dfrac{8-6i-20i+15i^2}{16-9i^2}$

$= \dfrac{8-26i+15(-1)}{16-9(-1)} = \dfrac{-7-26i}{25}$

$= -\dfrac{7}{25}-\dfrac{26}{25}i$

EJERCICIO I - 2

1.- Localizar en el plano complejo los siguientes números complejos en forma rectangular:

A $(3+2i)$ E $(1+0i)$

B $(-\frac{1}{2}+3i)$ F $(0+i)$

C $(-2-2i)$ G $(0+3i)$

D $(1-3i)$ H $(0-2i)$

2.- Efectuar las sumas:

a) $(5-2i)+(6+3i) =$

b) $\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{8}i\right) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right) =$

c) $3i+(3+9i) =$

d) $(-10+7i)+(10+7i) =$

e) $(3+2i)+(6-5i)+(-2+8i) =$

3.- Efectuar las restas:

a) $(6 + 3i) - (4 - 2i) =$

b) $(5 - 3i) - (-2 + 5i) =$

c) $(5 + 7i) - (5 - 7i) =$

d) $(1 - i)^2 - (1 + i)^2 =$

e) $\sqrt{-9} - (3 - i) =$

4.- Efectuar los productos:

a) $5i(2 - i) =$

b) $(5 + 3i)^2 =$

c) $(2 + i)(2 - i) =$

d) $(4 - i)(3 + 2i) =$

e) $(-5 + 3i)(5 + 3i) =$

5.- Encontrar los cocientes y expresar en forma rectangular:

a) $\frac{1}{3 + i} =$

b) $\frac{2 + i}{5} =$

c) $\frac{2i}{3 + 8i} =$

d) $\frac{5 + 4i}{2 - 3i} =$

e) $\frac{2 + i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}} =$

RESUMEN

Números Reales: Comprenden al conjunto unión de los Racionales e Irracionales.

Números Racionales: Son los que pueden ser representados por una fracción, o sea el cociente de dos enteros, exceptuando la división por cero.

Números Irracionales: Se les define por exclusión, como: "todo número real que no es racional".

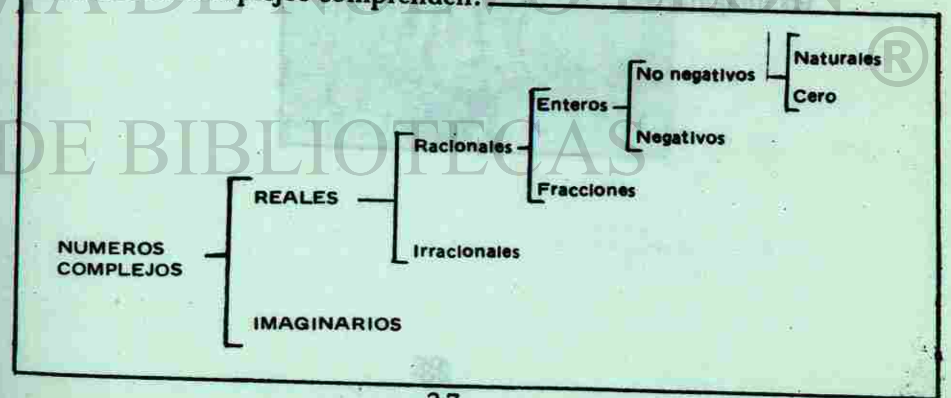
También se les define como aquellos números cuya representación decimal está formada por infinitas cifras que no se repiten periódicamente.

Número Imaginario Puro: Es aquel número indicado por la raíz de índice par de un número negativo; y también, lo definimos como el producto de un número real cualquiera, positivo o negativo, pero diferente de cero, por la unidad imaginaria, $bi\ (i = \sqrt[2]{-1})$.

Número Complejo: Es la suma algebráica de un número real, diferente de cero, con un número imaginario.

Forma rectangular de un número complejo: $a + bi$, donde a y b son reales y diferentes de cero, e $i = \sqrt[2]{-1}$

Los números complejos comprenden:



En el sistema de los números imaginarios y también en el de los números complejos son válidas **las propiedades de los números reales.**

Potencias sucesivas de i:

El valor de las potencias de i se repiten en ciclos de cuatro:

$$i = \sqrt[2]{-1}$$
$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -\sqrt[2]{-1}$$
$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$
$$i^6 = i^2$$
$$i^7 = i^3$$
$$i^8 = i^4 \quad , \quad \text{etc.}$$

Operaciones fundamentales con números complejos:

1) ADICION: Se suman, por separado, las partes reales y las partes imaginarias.

2) SUSTRACCION: Se restan, por separado, las partes reales y las partes imaginarias.

3) MULTIPLICACION: Se efectúa la operación como si se tratara de dos binomios, sustituyendo luego i^2 por -1.

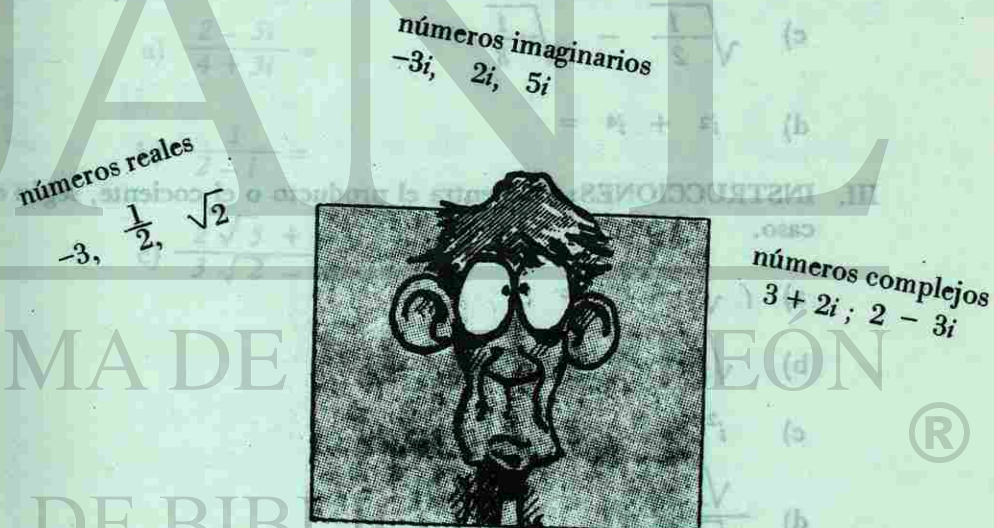
4) DIVISION: Usamos la propiedad del número 1, multiplicando el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, se simplifica y se expresa finalmente en la forma $a + bi$.

El conjugado de un número complejo:

Por definición:

$a + bi$ es el conjugado de $a - bi$, y

$a - bi$ es el conjugado de $a + bi$.



AUTOEVALUACION

I. INSTRUCCIONES: Expresa en términos de i.

a) $5 \sqrt[2]{-\frac{1}{5}} =$

b) $\frac{1}{2} \sqrt[2]{-36} =$

c) $(-8)^{1/2} =$

d) $\sqrt[2]{-50} =$

II. INSTRUCCIONES: Encuentra la suma o diferencia; según el caso.

a) $\sqrt{-18} + \sqrt{-18} =$

b) $\sqrt{-25} + \sqrt{-4} - \sqrt{-49} =$

c) $\sqrt{-\frac{1}{2}} - \sqrt{-\frac{1}{8}} =$

d) $i^2 + i^4 =$

III. INSTRUCCIONES: Encuentra el producto o el cociente, según el caso.

a) $(\sqrt{-5})^2 =$

b) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-3} =$

c) $i^2 \cdot i^4 =$

d) $\frac{\sqrt{-2}}{\sqrt{-8}} =$

e) $\frac{\sqrt{-1000}}{\sqrt{-10}} =$

IV. INSTRUCCIONES: Traza el Diagrama de Argand, con los siguientes números complejos.

a) $(4 + 2i)$

b) $(-1 + 4i)$

c) $(-3 - i)$

d) $(2 + 0i)$

e) $(0 - 2i)$

f) $(3 - 3i)$

V. INSTRUCCIONES: Efectúa las sumas o restas, según se indica:

a) $(2 + i) + (6 - 3i) - (-1 - 4i) =$

b) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} i) + (-\frac{1}{4} - \frac{1}{6} i) =$

c) $(3 + 4i) - (3 - 4i) =$

VI. INSTRUCCIONES: Efectúa los productos o cocientes, según se indica:

a) $\frac{2 - 5i}{4 + 3i} =$

b) $\frac{1}{2 - i} =$

c) $\frac{2\sqrt{3} + i\sqrt{2}}{3\sqrt{2} - 4i\sqrt{3}} =$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I. a) $i\sqrt{5}$

b) $3i$

c) $2i\sqrt{2}$

d) $5i\sqrt{2}$

II. a) $6i\sqrt{2}$

b) 0

c) $\frac{1}{4}\, i\sqrt{2}$

d) 0

III. a) -5

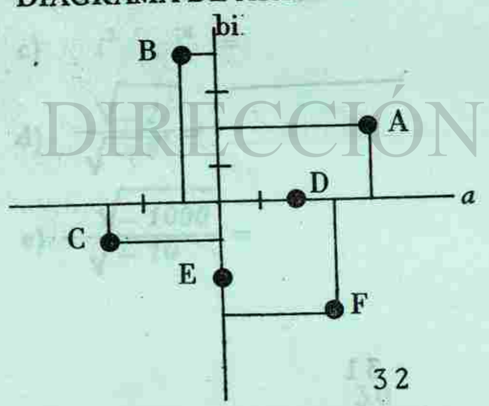
b) $-2\sqrt{6}$

c) -1

d) $\frac{1}{2}$

e) 10

IV. DIAGRAMA DE ARGAND:



A $(4+2i)$
B $(-1+4i)$
C $(-3-i)$
D $(2+0i)$
E $(0-2i)$
F $(3-3i)$

V. a) $9+2i$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}i$

c) $8i$

VI. a) $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i$

b) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

c) $\frac{1}{33}\sqrt{6}+\frac{15}{33}i$

2

La Ecuación Cuadrática

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I. a) $i\sqrt{5}$

b) $3i$

c) $2i\sqrt{2}$

d) $5i\sqrt{2}$

II. a) $6i\sqrt{2}$

b) 0

c) $\frac{1}{4}\, i\sqrt{2}$

d) 0

III. a) -5

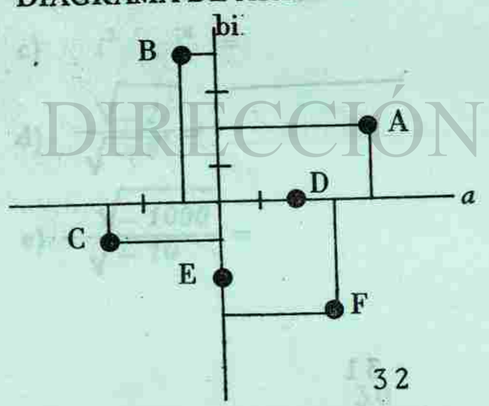
b) $-2\sqrt{6}$

c) -1

d) $\frac{1}{2}$

e) 10

IV. DIAGRAMA DE ARGAND:



A $(4+2i)$
B $(-1+4i)$
C $(-3-i)$
D $(2+0i)$
E $(0-2i)$
F $(3-3i)$

V. a) $9+2i$

b) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}i$

c) $8i$

VI. a) $-\frac{7}{25}-\frac{26}{25}i$

b) $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i$

c) $\frac{1}{33}\sqrt{6}+\frac{15}{33}i$

2

La Ecuación Cuadrática

SEGUNDA UNIDAD
LA ECUACION CUADRATICA

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS:

1. Aplicará diversos métodos para resolver en forma precisa las ecuaciones cuadráticas en una variable.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

I. SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS.

1.1 Expresará la forma general de una ecuación cuadrática en una variable.

1.2 Clasificará las ecuaciones cuadráticas atendiendo a su forma.

1.3 Encontrará la solución de las ecuaciones cuadráticas incompletas: Puras y Mixtas.

1.4 Representará gráficamente la función cuadrática.

1.5 Determinará "los ceros" de una función cuadrática por el método gráfico.

1.6 Encontrará la solución de una ecuación cuadrática por el método de factorización.

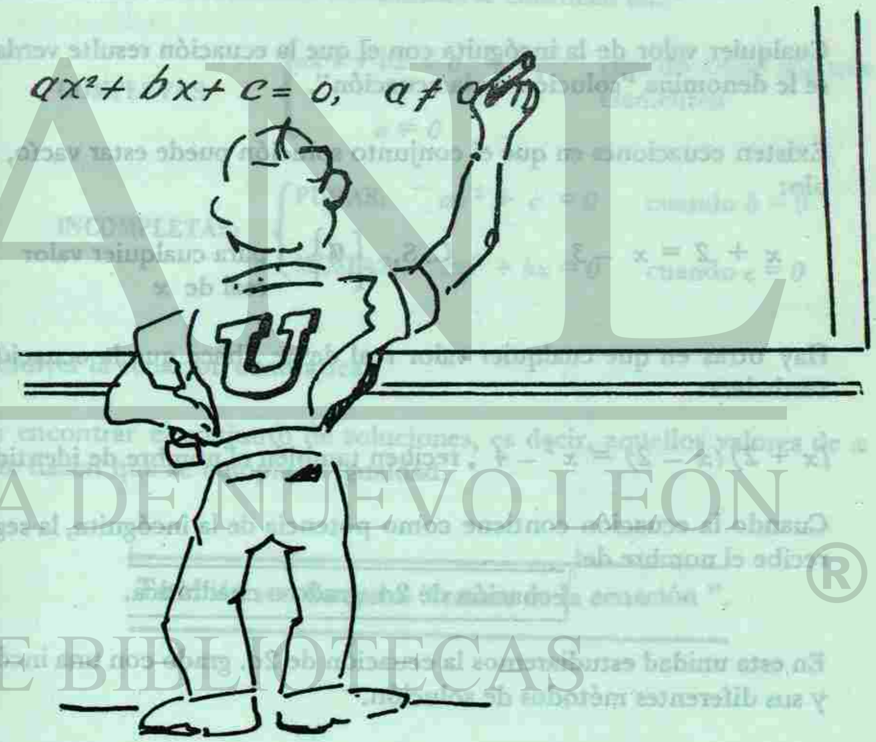
1.7 Encontrará la solución de una ecuación cuadrática por el método de completar el trinomio cuadrado perfecto.

1.8 Encontrará la solución de ecuaciones cuadráticas por el método de la fórmula general.

1.9 Utilizará el método de sustitución de variable para transformar una ecuación "de forma cuadrática" en una cuadrática equivalente y la resolverá por cualquiera de los métodos descritos.

1.10 Resolverá ecuaciones que contengan radicales.

1.11 Resolverá problemas expresados mediante palabras (de razonamiento), cuya solución implique ecuaciones cuadráticas.



INTRODUCCION

Sabemos que una ecuación es una declaración de que dos expresiones son iguales.

Así tenemos:

$2 + 3 = 5$	**ecuación verdadera**
$7 - 4 = 1$	**ecuación falsa**
$x + 5 = 9$	**ecuación condicional**

Esta última se llama condicional, porque puede ser cierta o falsa, según los valores que se le den a x .

Cualquier valor de la incógnita con el que la ecuación resulte verdadera, se le denomina "solución de la ecuación".

Existen ecuaciones en que el conjunto solución puede estar vacío, ejemplo:

$x + 2 = x - 3$ **C. S.** $\{\emptyset\}$ **para cualquier valor real de** x

Hay otras en que cualquier valor real de x , hace que la ecuación sea verdadera:

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ **, reciben también el nombre de identidades.**

Cuando la ecuación contiene como potencia de la incógnita, la segunda, recibe el nombre de: **ecuación de 2o. grado o cuadrática.**

En esta unidad estudiaremos la ecuación de 2o. grado con una incógnita y sus diferentes métodos de solución.

También, ecuaciones que aunque no son propiamente cuadráticas se les incluye dentro de esta familia. Finalmente, estudiaremos algunos problemas interesantes cuyo planteo requiere una ecuación cuadrática.

I. SOLUCION DE ECUACIONES CUADRATICAS.

A. Forma canónica de la ecuación cuadrática en la variable x.

$ax^2 + bx + c = 0$ donde $a, b, c \in R$ y $a \neq 0$

B. Clasificación de las ecuaciones cuadráticas por su forma:

Por su forma las ecuaciones cuadráticas se clasifican en:

COMPLETAS $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$ cuando tiene sus tres elementos

INCOMPLETAS: $\begin{cases} \text{PURAS:} & ax^2 + c = 0 & \text{cuando } b = 0 \\ \text{MIXTAS:} & ax^2 + bx = 0 & \text{cuando } c = 0 \end{cases}$

Resolver la ecuación cuadrática:

Es encontrar el conjunto de soluciones, es decir, aquellos valores de x que hacen que se cumpla la igualdad.

También son llamadas " raíces de la ecuación ".

C. **Métodos de resolución de las ecuaciones cuadráticas.**

INCOMPLETAS. Carecen de un elemento y son, a saber:

1. **PURAS:** Son de la forma $ax^2 + c = 0$. Para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación; despejaremos a x en función de los valores conocidos:

Ejemplo 1.–

$$2x^2 - 72 = 0$$

$$x^2 = \frac{72}{2}$$

$$x^2 = 36$$

$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{36}$ extraemos raíz cuadrada en ambos lados.

$$x = \pm 6$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = +6 \qquad x_2 = -6$$

Ejemplo 2.–

$$25x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -\frac{9}{25}$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{-\frac{9}{25}}$$

$$x = \pm \frac{3}{5} i$$

Las raíces de la ecuación son:

$$x_1 = +\frac{3}{5} i \qquad x_2 = -\frac{3}{5} i$$

2. **MIXTAS:** Son de la forma $ax^2 + bx = 0$. Para encontrar los valores de x que satisfacen la ecuación, aplicaremos el método de descomposición en factores y el siguiente teorema:

Dados los números reales a y b
$ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ ó $b = 0$

Ejemplo:

$$2x^2 + 6x = 0$$

$$2x(x+3) = 0$$

$$2x = 0 \qquad x + 3 = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -3$$

EJERCICIO II - 1

1.- Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas PURAS.

a) $4x^2 - 1 = 0$ e) $9x^2 + 25 = 0$

b) $12x^2 - 3 = 0$ f) $y^2 + 27 = 0$

c) $4x^2 - \frac{1}{25} = 0$ g) $2x^2 + 50 = 0$

d) $4y^2 - 2 = 0$ h) $9y^2 + \frac{1}{4} = 0$

2.- Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas MIXTAS.

a) $9x^2 + 15x = 0$ e) $3x^2 + 6x = 0$

b) $x^2 - x = 0$ f) $3x^2 - 5x = 0$

c) $2x^2 + x = 0$ g) $y^2 - 7y = 0$

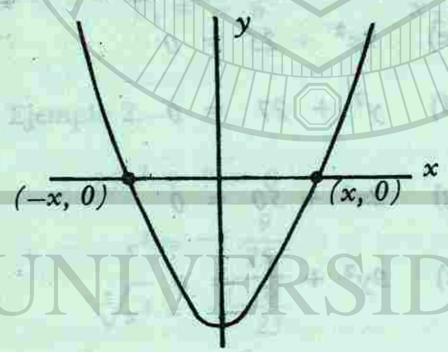
d) $9y^2 - 3y = 0$ h) $5x^2 + 15x = 0$

COMPLETAS.– Tienen sus tres elementos, y se pueden resolver por los siguientes métodos:

1. **GRAFICAMENTE:** La gráfica de la función cuadrática

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

es una curva uniforme abierta, llamada PARABOLA; cuando el coeficiente de x^2 es positivo la curva "se abre hacia arriba" y cuando el coeficiente de x^2 es negativo "se abre hacia abajo".



Los puntos de la gráfica sobre el eje de las X, (la abscisa de este punto) son los valores de x que hacen que $y = 0$.

Este valor de x es un "cero de la función" y es una raíz de la ecuación.

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

Por tanto, las soluciones, o raíces reales (si las hay) de una ecuación cuadrática pueden obtenerse a partir de la gráfica de la ecuación cuadrática y son los valores de las abscisas de los puntos en que la parábola corta o toca al eje X.

Si la curva no corta al eje X, no hay solución en el dominio de los números reales, entonces, las raíces son imaginarias o complejas.

EJEMPLO 1.-

Resolver gráficamente la ecuación cuadrática:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Graficaremos en un Sistema Coordenado Rectangular XY la ecuación dada, para ello:

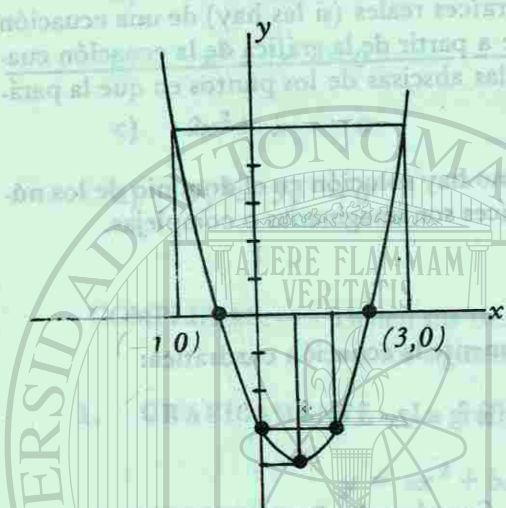
1o.- Asignamos valores a la variable independiente x.

2o. Substituimos estos valores en la ecuación y calculamos los valores de la variable dependiente y.

3o. Registramos estos valores en un tabulador.

4o. Localizamos en el plano cartesiano los valores de las parejas ordenadas (x, y), uniendo estos puntos trazamos la gráfica de la función cuadrática que es una curva uniforme abierta llamada parábola.

$$y = x^2 - 2x - 3$$



$$y = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$$

$$y = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 0$$

$$y = (0)^2 - 2(0) - 3 = -3$$

$$y = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$$

$$y = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$$

$$y = (3)^2 - 2(3) - 3 = 0$$

$$y = (4)^2 - 2(4) - 3 = 5$$

GRAFICA DE LA FUNCION CUADRATICA

$y = x^2 - 2x - 3$

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

TABULADOR

Determinar el conjunto solución o raíces de la ecuación, es encontrar los valores de x para cuando $y = 0$ en la ecuación $y = x^2 - 2x - 3$ y nos queda, entonces:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Aquí la x solo puede tomar ciertos valores para que se cumpla la igualdad, a diferencia de $y = x^2 - 2x - 3$ en la que para cada valor asignado a x, calculamos otro para y.

En la gráfica leemos el valor de las abscisas de los puntos en que la parábola corta al eje X [coordenada $(x, 0)$] , se le conoce también como los "ceros de la función".

$$\text{C. S. } \{-1, 3\}$$

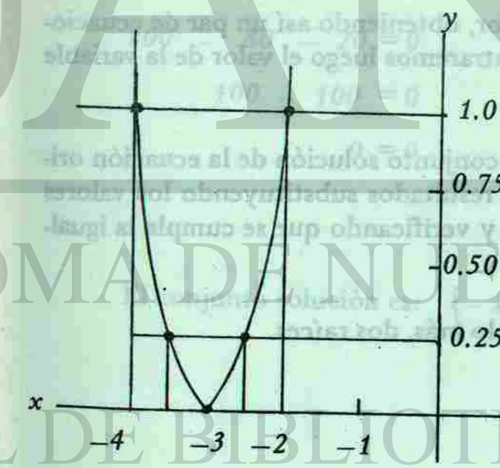
EJEMPLO 2.-

Resolver gráficamente la ecuación cuadrática

$$y = x^2 + 6x + 9$$

Procederemos como en el ejemplo anterior.

x	-2	-2.5	-3	-3.5	-4
y	1	0.25	0	0.25	1



$$x_1 = x_2 = -3$$

RAIZ DOBLE

$$\text{C. S. } \{-3\}$$

EJERCICIO II - 2

Resolver gráficamente las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $y = 6x^2 - 5x - 6 = 0$

b) $y = x^2 - x - 6 = 0$

c) $y = x^2 + x - 6 = 0$

d) $y = 2x^2 + 3x - 5 = 0$

e) $y = 4x^2 - 12x + 9 = 0$

f) $y = x^2 + 6x + 5 = 0$

g) $y = 2x^2 + 5x - 12 = 0$

h) $y = 8 + 5x - 2x^2 = 0$

2.- POR FACTORIZACION: La resolución de ecuaciones cuadráticas por este método es como sigue:

1o) Factorizamos el trinomio cuadrado (si es factorizable) y aplicamos el teorema estableciendo que cada factor es igual a cero. Si el trinomio no es factorizable, podremos encontrar el conjunto solución por el método de la fórmula general.

2o) Igualamos a cero cada factor, obteniendo así un par de ecuaciones de primer grado; encontraremos luego el valor de la variable que hace cierta la igualdad.

De esta forma determinaremos el conjunto solución de la ecuación original, pudiendo comprobar estos resultados substituyendo los valores encontrados en la ecuación dada y verificando que se cumpla la igualdad.

Toda ecuación cuadrática tiene, a lo más, dos raíces.

EJEMPLO 1.-

Resolver la ecuación cuadrática por factorización:

$$x^2 - 8x - 20 = 0$$
$$(x - 10)(x + 2) = 0$$

si y sólo si

$x - 10 = 0$	$x + 2 = 0$
$x_1 = 10$	$x_2 = -2$

COMPROBACION

Cuando $x = 10$	cuando $x = -2$
$x^2 - 8x - 20 = 0$	$x^2 - 8x - 20 = 0$
$(10)^2 - 8(10) - 20 = 0$	$(-2)^2 - 8(-2) - 20 = 0$
$100 - 80 - 20 = 0$	$4 + 16 - 20 = 0$
$100 - 100 = 0$	$20 - 20 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

El conjunto solución es: $\{-2, 10\}$

EJEMPLO 2.-

Hallar el conjunto solución de la ecuación cuadrática, por factorización:

$$2x^2 - 5x - 12 = 0$$
$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

si y sólo si

$$2x + 3 = 0 \qquad\qquad x - 4 = 0$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \qquad\qquad x_2 = 4$$

COMPROBACION

cuando $x_1 = -\frac{3}{2}$	cuando $x_2 = 4$
$2x^2 - 5x - 12 = 0$	$2x^2 - 5x - 12 = 0$
$2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(-\frac{3}{2}\right) - 12 = 0$	$2(4)^2 - 5(4) - 12 = 0$
$2\left(\frac{9}{4}\right) + \frac{15}{2} - 12 = 0$	$32 - 20 - 12 = 0$
$\frac{9}{2} + \frac{15}{2} - 12 = 0$	$32 - 32 = 0$
$\frac{24}{2} - 12 = 0$	$0 = 0$
$12 - 12 = 0$	
$0 = 0$	C. S. $\left\{-\frac{3}{2}, 4\right\}$

EJERCICIO II - 3

Resolver por factorización las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + 2 = 3x$ f) $40x^2 - 31x + 6 = 0$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0$ g) $2x^2 - 2 = x - 4x$

c) $x^2 + 2x - 8 = 0$ h) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

d) $x^2 - 3x - 10 = 0$ i) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

e) $x^2 + 14x = -49$ j) $2x^2 - x - 6 = 0$

3.- POR "COMPLETANDO EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO": La resolución de ecuaciones cuadráticas por este método es como sigue:

Se trata de formar un trinomio cuadrado perfecto (T. C. P.) en el lado izquierdo de la igualdad. Ilustraremos este método con un ejemplo:

$$4x^2 - 4x - 15 = 0$$

PRIMER PASO:

Trasponer el término constante al lado derecho de la igualdad.

$$4x^2 - 4x = 15$$

SEGUNDO PASO:

Dividir miembro a miembro de la igualdad entre el coeficiente del término cuadrado y simplificar.

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{4x}{4} = \frac{15}{4}$$

$$x^2 - x = \frac{15}{4}$$

TERCER PASO:

Formar un T. C. P. en el lado izquierdo de la igualdad, para ello, agregar en ambos lados "el cuadrado de la mitad del coeficiente de x ".

$$\underbrace{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{T. C. P.}} = \frac{15}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

CUARTO PASO:

Expresar el lado izquierdo de la igualdad, como un binomio al cuadrado, es decir, factorizar el T. C. P. y efectuar operaciones.

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4}$$

QUINTO PASO:

Extraer, en ambos lados de la igualdad, raíz cuadrada, utilizando el signo $\pm$ en el lado derecho.

$$\sqrt[2]{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt[2]{\frac{16}{4}} \qquad x_1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$x - \frac{1}{2} = \pm \frac{4}{2} \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{4}{2} \qquad \text{C. S. } \left\{\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$$

EJERCICIO II - 4

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método "completando el trinomio cuadrado perfecto".

a) $4x^2 - 8x - 21 = 0$

b) $2x^2 + 7x + 6 = 0$

c) $x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

e) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

f) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

g) $6x^2 + 13x - 5 = 0$

h) $x^2 + x - 2 = 0$

4.- **APLICANDO LA FORMULA GENERAL:** Consideremos la ecuación cuadrática general

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbf{R} \text{ y } a \neq 0$$

si resolvemos esta ecuación aplicando el método de "completando el trinomio cuadrado perfecto" obtendremos una fórmula que nos permite hallar las raíces de cualquier ecuación cuadrática, sin limitación alguna, con solo substituir los valores de a, b y c en la fórmula por los valores particulares de cada caso.

Veamos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{T. C. P.}} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FORMULA GENERAL $\Rightarrow$ $$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

EJEMPLO 1.-

Resolver la ecuación cuadrática aplicando el método de la fórmula general.

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$a = 1$ $\qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b = -5$ $\qquad x = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$

$c = 4$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

C. S. $\{1, 4\}$

$$x_2 = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

EJEMPLO 2.-

Resolver la ecuación cuadrática aplicando el método de la fórmula general.

$$2x^2 - 2x + 1 = 0$$

$a = 2$ $\qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b = -2$

$c = 1$ $\qquad x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4}$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{2}{4} \pm \frac{2}{4}i$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

C. S. $\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right\}$

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

EJERCICIO II - 5

Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando el método de la fórmula general:

a) $3x^2 + 7x - 6 = 0$

b) $4x^2 + 7x = 2$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $4y^2 + 12y + 9 = 0$

e) $x^2 - 5x - 6 = 0$

f) $x^2 - 6 = x$

g) $3x^2 - 2x - 8 = 0$

h) $16x^2 - 8x + 1 = 0$

i) $x^2 - 2x - 1 = 0$

j) $x^2 - 4x + 1 = 0$

k) $2x^2 - 9x = 5$

l) $x^2 - 2x + 10 = 0$

m) $y^2 + 2y + 5 = 0$

n) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

o) $x^2 - 8x + 25 = 0$

p) $2x^2 - 6x + 9 = 0$

q) $x^2 + x + 1 = 0$

r) $2x^2 - 2x + 5 = 0$

D. Ecuaciones de Forma Cuadrática.

Hay ecuaciones que no son cuadráticas pero que pueden transformarse en cuadráticas y resolverse como tales:

Son de la forma:

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$ siendo $a, b, c, n \in$ Rac. y a y $n \neq 0$

Para resolverlas procederemos como sigue:

Hacemos el cambio de variable $x^n = y$, entonces la ecuación se transforma en otra que sí es una ecuación cuadrática en la nueva variable y.

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \qquad x^n = y$$

$$a(x^n)^2 + bx^n + c = 0$$

$$ay^2 + by + c = 0$$

Resolvemos para y, y de estos valores obtenemos los de x.

Deberemos siempre comprobar los valores obtenidos, substituyendo en la ecuación original, dado que algunas soluciones de la ecuación derivada no lo son de la ecuación original.

Son ejemplos de ecuaciones de forma cuadrática los siguientes:

$$x^4 - 3x^2 - 10 = 0$$

$$8x^6 - 19x^3 - 27 = 0$$

$$4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$$

$$(x+6) - (x+6)^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$$

$$2x^{-2} - x^{-1} - 3 = 0 \quad \text{, etc., etc. . .}$$

EJEMPLO 1.-

Resolver para x, la ecuación de forma cuadrática:

$$x^{-\frac{4}{3}} - 5x^{-\frac{2}{3}} + 4 = 0$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})^2 - 5x^{-\frac{2}{3}} + 4 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$(y-4)(y-1) = 0$$

$$y - 4 = 0 \qquad y - 1 = 0$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = 1$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = y$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 4$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} = (2^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$x = 2^{-3}$$

$$x = \frac{1}{2^3}$$

$$x_1 = \frac{1}{8}$$

$$x^{-\frac{2}{3}} = 1$$

$$(x^{-\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}} =$$

$$x = 1$$

$$x_2 = 1$$

COMPROBACION

Cuando $x = \frac{1}{2^3}$

$$\left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{4}{3}} - 5\left(\frac{1}{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}} + 4 = 0$$

$$\frac{1}{2^{-4}} - \frac{5}{2^{-2}} + 4 = 0$$

$$2^4 - 5(2^2) + 4 = 0$$

$$16 - 20 + 4 = 0$$

$$20 - 20 = 0$$

$$0 = 0$$

Cuando $x = 1$

$$(1)^{-\frac{4}{3}} - 5(1)^{-\frac{2}{3}} + 4 =$$

$$1 - 5 + 4 = 0$$

$$5 - 5 = 0$$

$$0 = 0$$

C. S. $\left\{1, \frac{1}{8}\right\}$

EJEMPLO 2.-

Resolver para x, la ecuación de forma cuadrática:

$$x - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y-6)(y+5) = 0$$

$$y - 6 = 0 \qquad y + 5 = 0$$

$$y_1 = 6 \qquad y_2 = -5$$

$$x^{\frac{1}{2}} = y$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 6 \qquad x^{\frac{1}{2}} = 5$$

$$(x^{\frac{1}{2}})^2 = (6)^2 \qquad (x^{\frac{1}{2}})^2 = (5)^2$$

$$x_1 = 36 \qquad x_2 = 25$$

C. S. $\{36\}$

COMPROBACION

Cuando $x_1 = 36$

$$x - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$(36) - (36)^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$36 - 6 - 30 = 0$$

$$36 - 36 = 0$$

$$0 = 0$$

Cuando $x = 25$

$$x - x^{\frac{1}{2}} - 30 = 0$$

$$(25) - (25)^{\frac{1}{2}} - 30 \overset{?}{=} 0$$

$$25 - 5 - 30 \neq 0$$

$$25 - 35 \neq 0$$

$$-5 \neq 0$$

no es solución!

EJERCICIO II - 6

Resolver las ecuaciones de forma cuadrática.

a) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$	h) $x^4 = 25x^2 - 144$
b) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$	i) $x^4 + 27 = 12x^2$
c) $4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$	j) $8x^6 - 19x^3 - 27 = 0$
d) $y^{-4} - 5y^{-2} + 4 = 0$	k) $8x^{-6} + 7x^{-3} = 1$
e) $3x^{-2} - 4x^{-1} - 4 = 0$	l) $(x+6) - (x+6)^{\frac{1}{2}} - 2 = 0$
f) $2x^{-2} - x^{-1} - 3 = 0$	m) $x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$
g) $6x^{-2} + 5x^{-1} - 6 = 0$	n) $x^{\frac{4}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}} + 4 = 0$

E. Ecuaciones con radicales de segundo orden.

Son así llamadas las ecuaciones en que aparecen variables bajo el signo radical de índice dos.

El método de resolución consiste en trasponer términos de modo que nos quede el radical sólo, en un miembro de la ecuación; elevaremos al cuadrado tantas veces como sea necesario para eliminar el signo radical, luego despejaremos la variable en función de los valores conocidos. Este procedimiento (elevar al cuadrado) da lugar, a veces, a ecuaciones que no son equivalentes a la ecuación original y por lo tanto los valores encontrados no siempre la satisfacen; por esta razón es esencial que todas las raíces de las ecuaciones con radicales sean comprobadas para poder ser aceptadas como soluciones verídicas.

Algunos autores llaman a las soluciones de una ecuación derivada, que no lo son de la ecuación original, raíces extrañas; por lo tanto el conjunto solución lo forman solo los valores que sí satisfacen la ecuación original.

EJEMPLO 1.-

Resolver la ecuación con radical:

$$\sqrt[2]{x+2} + 4 = x$$

$$\sqrt[2]{x+2} = x - 4$$

$$\left(\sqrt[2]{x+2}\right)^2 = (x-4)^2$$

$$x + 2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 8x - x + 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$(x-7)(x-2) = 0$$

$$x - 7 = 0 \qquad x - 2 = 0$$

$$x_1 = 7 \qquad x_2 = 2$$

COMPROBACION

Cuando $x = 7$	Cuando $x = 2$
$\sqrt{x+2} + 4 \overset{?}{=} x$	$\sqrt{x+2} + 4 \overset{?}{=} x$
$\sqrt{7+2} + 4 \overset{?}{=} 7$	$\sqrt{2+2} + 4 \overset{?}{=} 2$
$\sqrt{9} + 4 \overset{?}{=} 7$	$\sqrt{4} + 4 \overset{?}{=} 2$
$3 + 4 = 7$	$2 + 4 \neq 2$
$7 = 7$	$6 \neq 2$
	no es solución!

Por lo tanto, la ecuación tiene solo una raíz.

C. S. $\{7\}$

EJEMPLO 2.-

Resolver la ecuación con radicales:

$$\sqrt{2x-3} = 7 - \sqrt{2x+4}$$

$$\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 = \left(7 - \sqrt{2x+4}\right)^2$$

$$2x - 3 = 49 - 14\sqrt{2x+4} + 2x + 4$$

$$14\sqrt{2x+4} = 53 + 3$$

$$\frac{14\sqrt{2x+4}}{14} = \frac{56}{14}$$

$$\sqrt{2x+4} = 4$$

$$\left(\sqrt{2x+4}\right)^2 = (4)^2$$

$$2x + 4 = 16$$

$$2x = 16 - 4$$

$$2x = 12$$

$$x = \frac{12}{2}$$

$$x = 6$$

COMPROBACION

$$\sqrt{2x-3} = 7 - \sqrt{2x+4}$$

$$\sqrt{2(6)-3} = 7 - \sqrt{2(6)+4}$$

$$9 = 7 - 16$$

$$3 = 7 - 4$$

$$3 = 3$$

C. S. $\{6\}$

EJERCICIO II - 7

Resolver las ecuaciones con radicales y verificar en cada caso las soluciones obtenidas:

a) $\sqrt{2x+5} = 3$

b) $\sqrt{1-5x} + \sqrt{1-x} = 2$

c) $\sqrt{8x-7} - x = 0$

d) $\sqrt{3x+1} = \sqrt{x} + 3$

e) $\sqrt{x} = \dfrac{6}{\sqrt{x}}$

f) $\sqrt{3x+1} + 1 = x$

g) $\sqrt{2y+3} + \sqrt{y+1} = \sqrt{y-2}$

h) $\sqrt{2} + \sqrt{x} = \sqrt{x+2}$

i) $\sqrt{3x-1} + \sqrt{2} = 3\sqrt{x-1}$

j) $\sqrt{2x+13} - \sqrt{x+10} = 1$

F. Problemas diversos que se resuelven por ecuaciones cuadráticas.

Muchos problemas con enunciado, en particular aquellos que tratan con productos o cocientes que contienen la incógnita incluyen en su solución ecuaciones cuadráticas.

Se sugiere el siguiente método para establecer la ecuación con la cual se resuelven:

1o. Leer y re-leer el problema con sumo cuidado y estudiarlo hasta lograr entenderlo con claridad.

2o. Identificar las cantidades conocidas y las desconocidas del problema.

3o. Seleccionar una de las incógnitas representándola por medio de un símbolo, x ; a continuación se expresan las otras incógnitas en términos de este símbolo.

4o. Encontrar qué cantidades o combinaciones entre ellas son iguales.

5o. A partir de las combinaciones encontradas se establece una ecuación cuadrática.

6o. Resolver la ecuación obtenida y verificar el conjunto solución en el problema original.

Aquí debe observarse que a veces un problema que se resuelve mediante una ecuación cuadrática tiene una solución única, mientras que la ecuación tiene dos soluciones. En tales casos la raíz que no satisface las condiciones del problema se descarta.

EJEMPLO 1.-

Hallar dos enteros positivos consecutivos cuyo producto sea 210.

Sea x = un número entero positivo.
$x + 1$ = su consecutivo

$$x(x+1) = 210$$
$$x^2 + x - 210 = 0$$
$$(x - 14)(x + 15) = 0$$
$$x - 14 = 0 \qquad x + 15 = 0$$
$$x_1 = 14 \qquad x_2 = -15$$

se descarta!

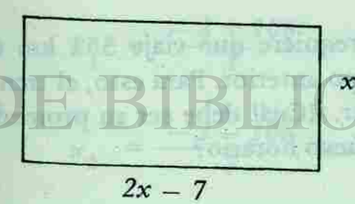
Como los números solicitados son positivos, tomaremos solamente el valor $x = 14$, los números son, entonces:

un número = 14
su consecutivo 14 + 1 = 15

Comprobación:
14(14 + 1) = 210
14 (15) = 210
210 = 210

EJEMPLO 2.-

El largo de un jardín rectangular es 7 metros menos que dos veces su ancho. Si el área del jardín es 204m^2, ¿Cuáles son las dimensiones del jardín?



Sea:
ancho del jardín $= x$
largo del jardín $= 2x - 7$
Area $= 204m^2$
dimensiones = ?

$$x(2x-7)=204$$

$$2x^2-7x-204=0$$

$a=2$

$b=-7$

$c=-204$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(2)(-204)}}{2(2)}$$

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+1632}}{4}=\frac{7\pm 41}{4}$$

$$x_1=\frac{7+41}{4}=\frac{48}{4}=12$$

$$x_2=\frac{7-41}{4}=\frac{-34}{4}=-8.5$$

no es solución!

SOLUCION:

ancho del jardín $= \quad x = 12$

largo del jardín $= 2x-7=17$

COMPROBACION:

$(12)(17)=204$

$204=204$

EJEMPLO 3.-

Un nuevo horario para un tren requiere que viaje 351 km en un cuarto de hora menos que el tiempo anterior. Para esto, el tren debe aumentar su velocidad en 2 km/hr. ¿Cuál debe ser su promedio de velocidad para poder cumplir el nuevo horario?

Sea x la velocidad promedio real del tren en km/hr.

Sabemos que: $t=\dfrac{d}{v}$, entonces:

tiempo anterior − tiempo nuevo $=\dfrac{1}{4}$ hr

$$\frac{351}{x}-\frac{351}{x+2}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{351(x+2)-351x}{x(x+2)}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{351x+702-351x}{x^2+2x}=\frac{1}{4}$$

$$x^2+2x=4(702)$$

$$x^2+2x-2808=0$$

$a=1$

$b=2$

$c=-2808$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-2808)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+11{,}232}}{2}=\frac{-2\pm 106}{2}$$

$$x_1=\frac{-2+106}{2}=\frac{104}{2}=52$$

$$x_2=\frac{-2-106}{2}=\frac{-108}{2}=-54$$

no es solución!

La velocidad promedio del tren será de $52 + 2 = 54$ Km/hr.

COMPROBACION:

$$\frac{351}{52} - \frac{351}{54} = \frac{1}{4} \qquad \text{C. S. } \{54\}$$

$$6.75 - 6.50 = 0.25$$

$$0.25 = 0.25$$

EJEMPLO 4.-

La diferencia en tiempos que tardan dos pintores A y B, en pintar 1 m^2 de una barda es de 1 minuto. Juntos pueden pintar 27 m^2 en 1 hora. ¿Cuánto tiempo le tomará a cada uno por separado para pintar 1 m^2?

Consideremos que:

x = Número de minutos requeridos por el pintor más rápido para pintar 1 m^2 (supongamos que sea A), entonces:

$x + 1$ = Número de minutos requeridos por el pintor B.

Ahora:

$\frac{1}{x}$ = Es la fracción de 1 m^2 que el pintor A puede pintar en un minuto.

$\frac{1}{x+1}$ = Es la fracción de 1 m^2, que el pintor B logra pintar en un minuto.

De aquí que: trabajando juntos será:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ = fracción de 1 m^2 que ambos pintan en 1 minuto.

Pero nos dice el problema, que juntos pueden pintar 27 m^2 en 1 hora; en 1 minuto harán:

$\frac{27}{60}$, simplificando queda: $\frac{9}{20}$ de m^2

Entonces podemos establecer que:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{x+1+x}{x(x+1)} = \frac{9}{20}$$

$$\frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{9}{20}$$

$$9(x^2+x) = 20(2x+1)$$

$$9x^2 + 9x - 40x - 20 = 0$$

$$9x^2 - 31x - 20 = 0$$

$a = 9 \qquad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b = -31$

$c = -20 \qquad x = \dfrac{-(-31) \pm \sqrt{(-31)^2 - 4(9)(-20)}}{2(9)}$

$$x = \frac{31 \pm \sqrt{961 + 720}}{18} = \frac{31 \pm 41}{18}$$

$$x = \frac{31 + 41}{18} = \frac{72}{18} = 4$$

$$x = \frac{31 - 41}{18} = \frac{-10}{18} = -\frac{5}{9}$$

no es solución!

La raíz $-\frac{5}{9}$, se elimina ya que es un tiempo negativo y no tiene sentido en este problema.

Por consiguiente:

$x = 4$

$x + 1 = 5$

SOLUCION:

A – tarda 4 minutos en pintar 1 m^2

B – tarda 5 minutos en pintar 1 m^2

EJERCICIO II - 8

1.- Problemas de números:

a) Hallar dos números positivos sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68

b) Hallar dos números sabiendo que la suma de sus cuadrados es 34 y que uno de ellos es igual al doble del otro menos 1.

c) Hallar tres números enteros consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 110.

d) Hallar un número sabiendo que la suma del triple del mismo con el doble de su recíproco es 5.

e) Si a 10 veces un número le sumamos 12 se obtiene un resultado igual a dos veces el cuadrado del número. Encontrar el número.

2.- Problemas geométricos:

a) Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 50 m y su área es 150 m^2.

b) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 34 cms. Hallar las longitudes de los catetos, sabiendo que uno de ellos es 14 cms., mayor que el otro.

c) Hallar las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su longitud es igual al triple de su altura, y que si se disminuye en 1 cm la altura y se aumenta en 3 cm la longitud, el área será 72 cm^2.

d) El perímetro de un triángulo rectángulo es 60 cms., y su hipotenusa mide 25 cms. Hallar las longitudes de los otros dos lados.

e) Un terreno rectangular tiene 50 m. de ancho y 60 m. de largo. Si el ancho y el largo se aumentan en la misma cantidad, el área aumenta en 1200 m^2. Encontrar la cantidad en que se ha aumentado el ancho y el largo del terreno.

3. Problemas de móviles:

a) Un piloto realiza un vuelo de 600 kilómetros. Sabiendo que si aumenta la velocidad en 40 km/hr podría recorrer dicha distancia empleando 30 minutos menos, hallar su velocidad.

b) Un policía de caminos salió de su cuartel y viajó con velocidad constante durante 28 kms. y entonces se le notificó de un accidente. Manejó hasta el lugar del accidente que estaba a 8 kms. a una velocidad que era 45 kms/hr mayor que su velocidad de crucero anterior. Si habían transcurrido 54 minutos desde que se inició su servicio hasta que llegó al accidente, encuentre su velocidad de crucero.

c) Un ranchero recorrió 100 km. hasta una ciudad para recoger un automóvil nuevo regresándose al mismo lugar en él. Su velocidad promedio a la ciudad fue de 10 kms/hr más que la velocidad de regreso; el recorrido completo lo realizó en 3 horas y 40 minutos. Encuentre la velocidad para cada parte del viaje.

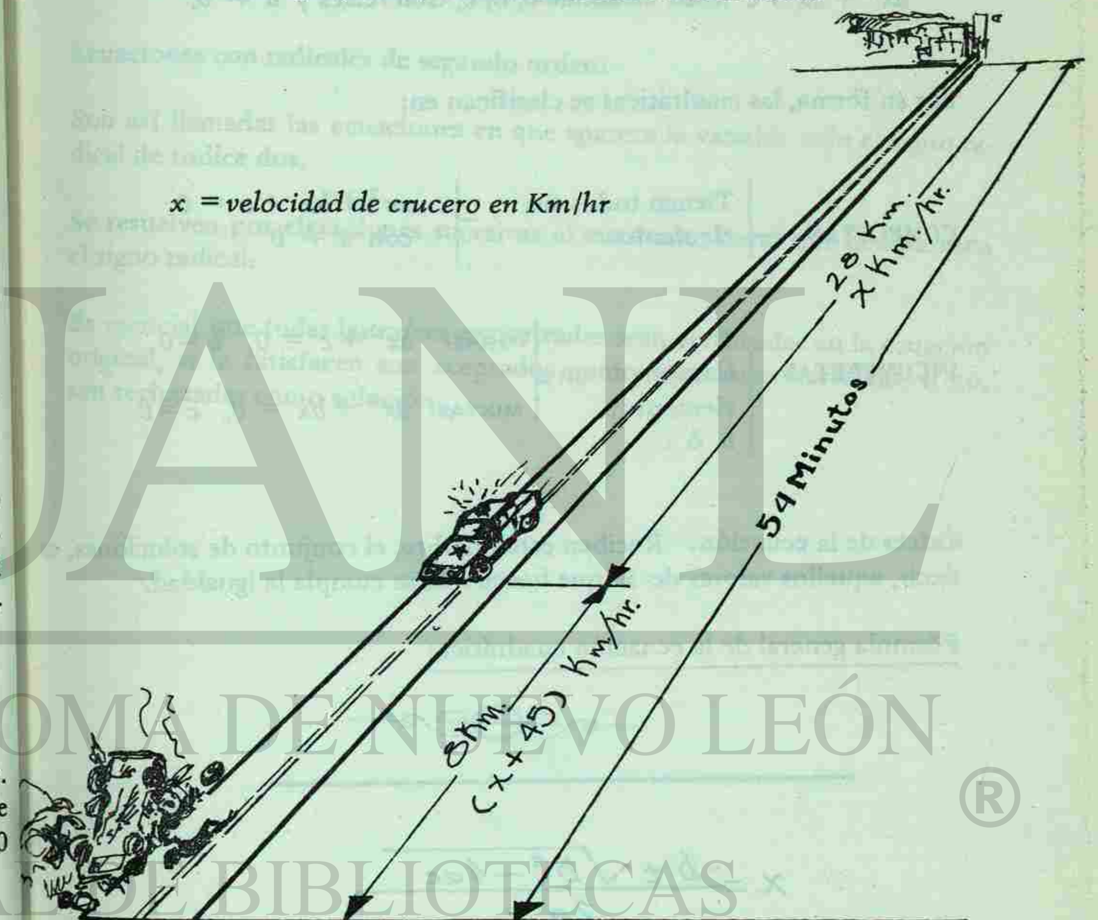
4. Problemas de tiempos de trabajos:

a) Dos hermanos lavaron las paredes de su cuarto en 3 horas. ¿Cuántas horas requerirá cada uno para lavar las paredes de cuartos iguales, si el mayor puede hacer el trabajo en 2 horas 30 minutos menos que el otro?

b) Dos operarios A y B, juntos, realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Hallar el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada uno por sí solo.

c) El operario B tarda 6 horas más que el A en efectuar un trabajo. Hallar cuánto tiempo tardarían en realizarlo cada uno de ellos sabiendo que juntos, invierten 4 horas en terminarlo.

x = velocidad de crucero en Km/hr



RESUMEN

Ecuaciones Cuadráticas: Reciben este nombre las ecuaciones en que aparece el cuadrado de la variable, también se les conoce como ecuaciones de segundo grado.

Forma general de la ecuación cuadrática en una variable:

$ax^2 + bx + c = 0$ donde $a, b, c,$ son reales y $a \neq 0$.

Por su forma, las cuadráticas se clasifican en:

COMPLETAS — Tienen todos sus elementos — $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

INCOMPLETAS — Carecen de un elemento: b ó c —
- PURAS: $ax^2 + c = 0, \; b = 0$
- MIXTAS: $ax^2 + bx = 0, \; c = 0$

Raíces de la ecuación: Reciben este nombre, el conjunto de soluciones, es decir, aquellos valores de x que hacen que se cumpla la igualdad.

Fórmula general de la ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ecuaciones de "forma cuadrática":

$ax^{2n} + bx^n + c = 0$ donde $a, b, c, n,$ son racionales, con a y n diferentes de cero.

Son ecuaciones que no son propiamente cuadráticas pero que pueden ser transformadas en cuadráticas y resolverse como tales.

Ecuaciones con radicales de segundo orden:

Son así llamadas las ecuaciones en que aparece la variable bajo el signo radical de índice dos.

Se resuelven por elevaciones sucesivas al cuadrado, hasta que desaparezca el signo radical.

Es esencial que todas las raíces encontradas sean verificadas en la ecuación original, si la satisfacen son aceptados como soluciones verídicas, si no, son rechazadas como solución.

AUTOEVALUACION

I. **INSTRUCCIONES:** Resuelve las siguientes cuestiones cuadráticas incompletas.

a) $x^2 + 32 = 0$

b) $8x^2 + \frac{1}{2} = 0$

c) $6x^2 - 2x = 0$

d) $3x^2 + 2x = 0$

II. **INSTRUCCIONES:** Resuelve las siguientes cuestiones cuadráticas completas, por el método que se solicita.

a) Gráfico: $y = 4x^2 - 4x + 5 = 0$

b) Factorización: $2x^2 + 7x + 6 = 0$

c) Completar T. C. P. $2x^2 - x - 6 = 0$

d) Fórmula General: $2x^2 - 2x + 1 = 0$

III. **INSTRUCCIONES:** Resuelve la ecuación "de forma cuadrática".

$$x^{-\frac{2}{3}} - 5x^{-\frac{1}{3}} + 4 = 0$$

IV. **INSTRUCCIONES:** Resuelve la ecuación con radicales:

$$\sqrt{x^2 - 9} = x - 3$$

V. **INSTRUCCIONES:** Resuelve el siguiente problema, cuya solución implica una ecuación cuadrática:

"Hallar dos números positivos, sabiendo que la suma de sus cuadrados es 20 y que uno de ellos es igual al triple del otro menos 2"

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

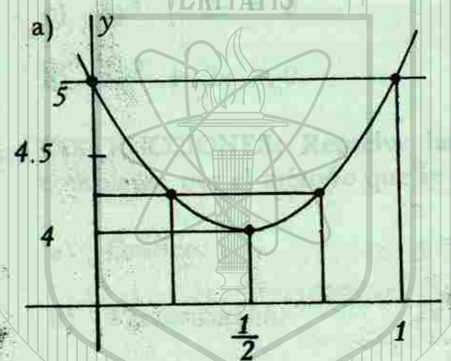
I. a) $x = \pm 4i\sqrt{2}$

b) $x = \pm \frac{1}{4}i$

c) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{2}{3}$

II. a)



C. S. $= \{\emptyset\}$
las raíces no son reales.

b) $x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = -2$

c) $x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i;\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

III. $x_1 = \frac{1}{64};\ x_2 = 1$

IV. $x = 3$

V. C.S. $\{2, 4\}$

3

Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

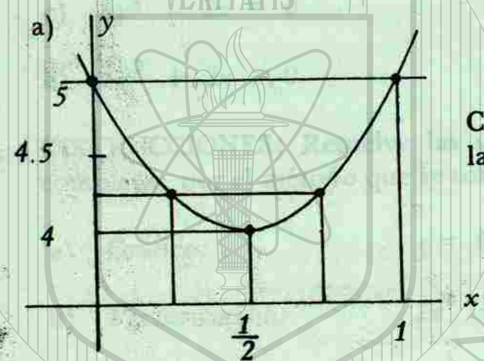
I. a) $x = \pm 4i\sqrt{2}$

b) $x = \pm \frac{1}{4} i$

c) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{1}{3}$

d) $x_1 = 0;\ x_2 = -\frac{2}{3}$

II. a)



C. S. $= \{\emptyset\}$
las raíces no son reales.

b) $x_1 = -\frac{3}{2};\ x_2 = -2$

c) $x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{3}{2}$

d) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i;\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

III. $x_1 = \frac{1}{64};\ x_2 = 1$

IV. $x = 3$

V. C.S. $\{2, 4\}$

3

Sistemas de Ecuaciones Cuadráticas

TERCERA UNIDAD
SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS.

1. Aplicará los diferentes métodos en la resolución de ecuaciones cuadráticas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

I. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS.

1.1 Enunciará la forma de una ecuación cuadrática general con dos variables.

1.2 Identificará las Secciones Cónicas, su ecuación, su forma y alguna característica distintiva.

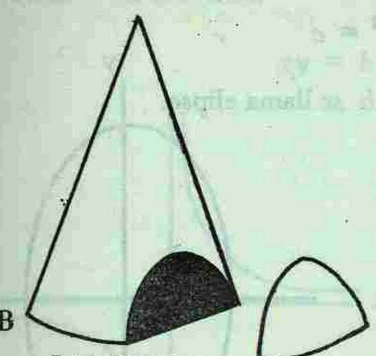
1.3 Comprenderá la resolución de sistemas de ecuaciones cuadráticas, por graficación.

1.4 Encontrará la solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas, por el método de sustitución:
- a) Un sistema formado por una ecuación de primer grado y una de segundo grado.
- b) Un sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas.

1.5 Encontrará la solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas, por el método de sumas o restas.

1.6 Encontrará la solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas, con términos xy y sin términos lineales, por el método de eliminación del término constante.

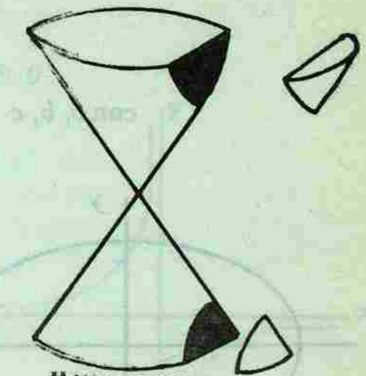
A



B

PARABOLA

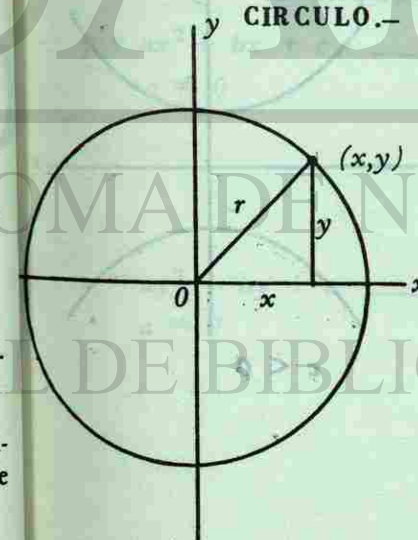
El plano es paralelo a AB



HIPERBOLA

El plano es perpendicular al plano de la base del cono doble invertido.

En seguida veremos solamente la ecuación y alguna característica sobresaliente de las secciones cónicas, ya que su estudio en detalle corresponde a Geometría Analítica; por ahora para los fines del tema que estudiamos basta con su identificación para comprender mejor el conjunto solución de un sistema de ecuaciones cuadráticas dado.



CIRCULO.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

es un círculo de radio r y centro en el origen.

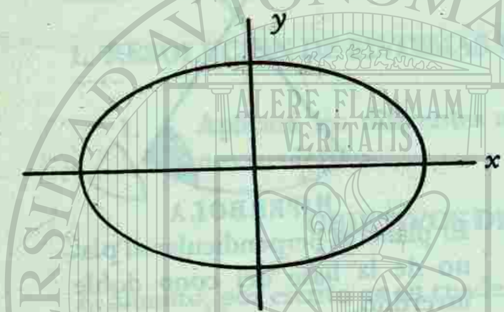
De acuerdo con el Teorema de Pitágoras las coordenadas de cualquier punto del círculo satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

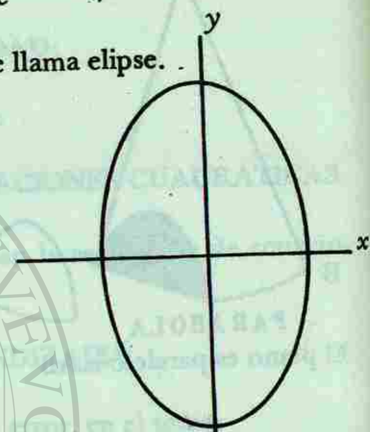
ELIPSE.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$$ax^2 + by^2 = c$$

con $a, b, c > 0$ y $a \neq b$ se llama elipse.



$a < b$



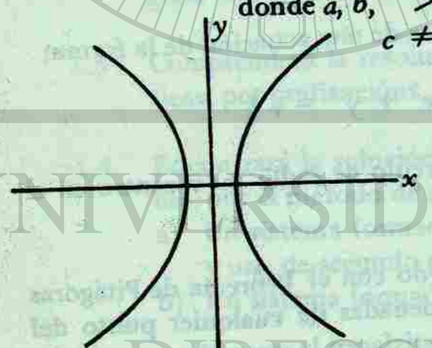
$a > b$

HIPERBOLA.– La gráfica de una ecuación de la forma:

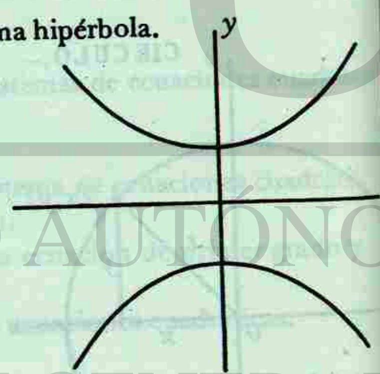
$$ax^2 - by^2 = c$$

donde $a, b, > 0$ se llama hipérbola.

$c \neq 0$



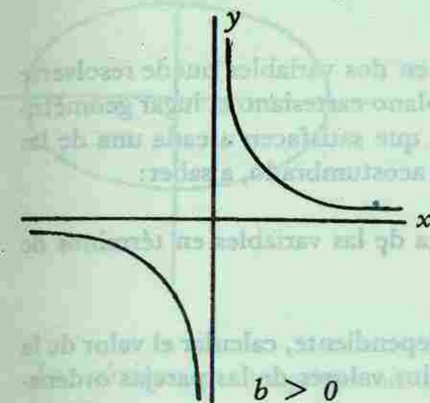
$c > 0$



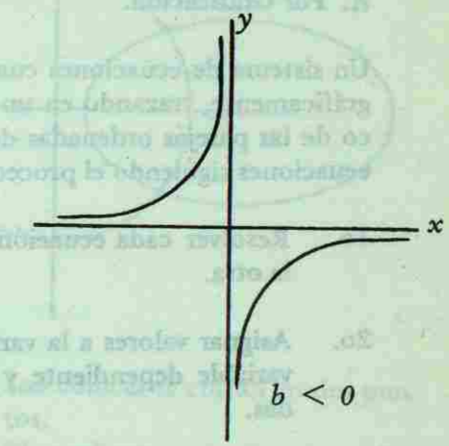
$c < 0$

HIPERBOLA EQUILATERA o RECTANGULAR.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$$xy = b \quad \text{donde } b \neq 0$$



$b > 0$



$b < 0$

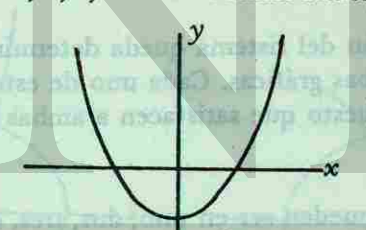
PARABOLA.– La gráfica de una ecuación de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{ó} \quad x = ay^2 + by + c$$

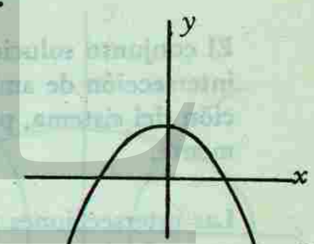
en donde $a \neq 0$, y $a, b, c,$ son constantes reales.

$y = ax^2 + bx + c$

$a \neq 0$



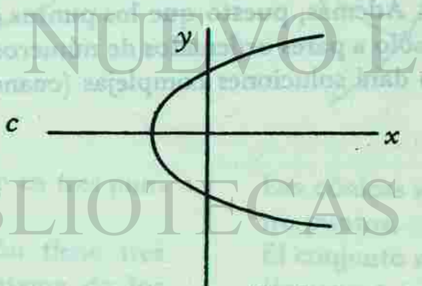
$a > 0$



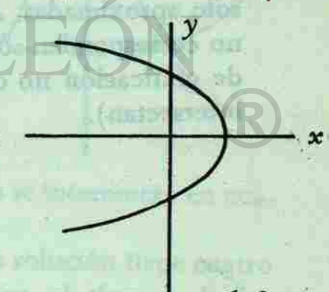
$a < 0$

$x = ay^2 + by + c$

$a \neq 0$



$a > 0$



$a < 0$

I. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS.

A. Por Graficación.

Un sistema de ecuaciones cuadráticas en dos variables puede resolverse gráficamente, trazando en un mismo plano cartesiano el lugar geométrico de las parejas ordenadas de valores que satisfacen a cada una de las ecuaciones siguiendo el procedimiento acostumbrado, a saber:

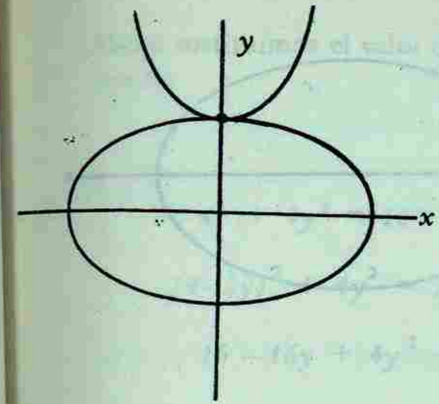
1o. Resolver cada ecuación para una de las variables en términos de la otra.

2o. Asignar valores a la variable independiente, calcular el valor de la variable dependiente y tabular los valores de las parejas ordenadas.

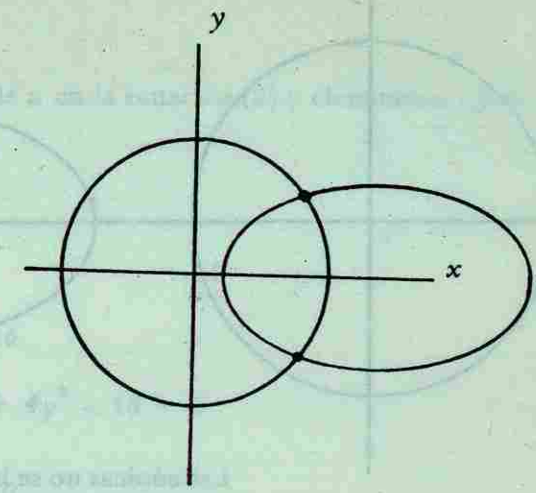
3o. Trazar la gráfica de cada ecuación, localizando en un mismo plano los puntos determinados por los pares de valores y uniéndolos con una curva de variación uniforme.

El conjunto solución del sistema queda determinado por los puntos de intersección de ambas gráficas. Cada uno de estos puntos son una solución del sistema, puesto que satisfacen a ambas ecuaciones simultáneamente.

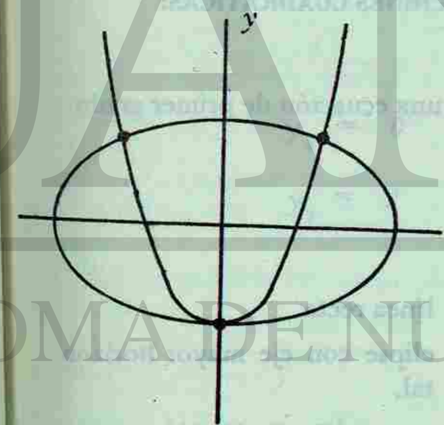
Las intersecciones pueden ser en uno, dos, tres, cuatro o ningún punto, en cualquier caso, las soluciones que se obtienen a partir de gráficas son sólo aproximadas. Además, puesto que los puntos en un plano cartesiano no corresponden sólo a pares ordenados de números reales, este método de graficación no dará soluciones complejas (cuando las gráficas no se intersectan).



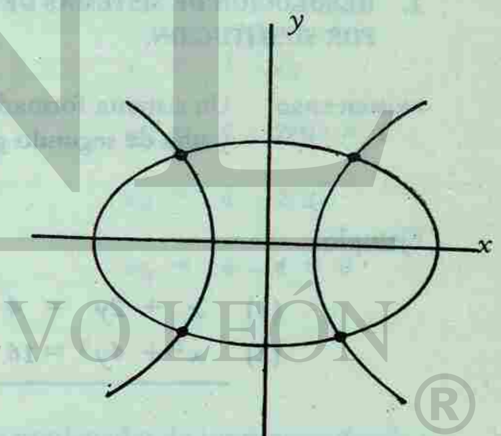
Las cónicas son tangentes en un punto.
El conjunto solución tiene un elemento en el sistema de los números reales.



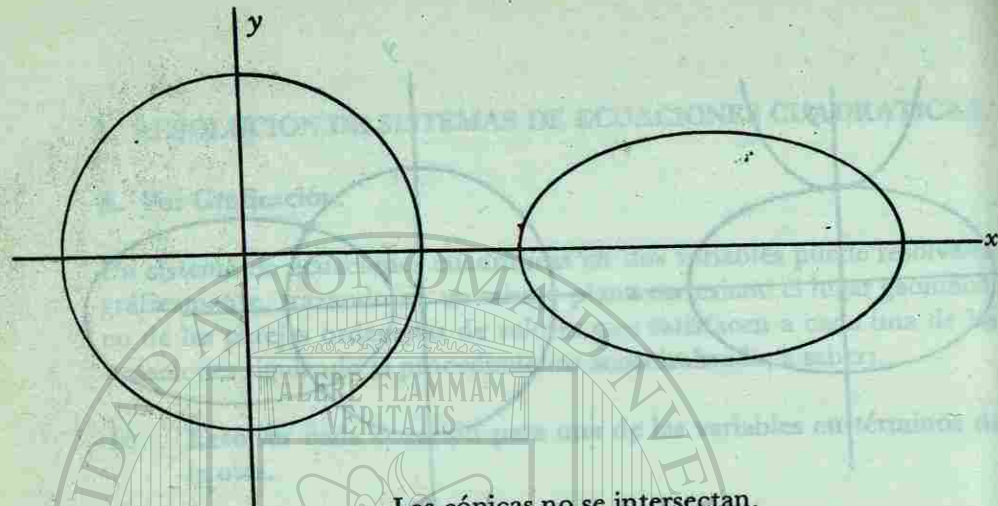
Las cónicas se cortan en dos puntos.
El conjunto solución tiene dos elementos en el sistema de los números reales.



Las cónicas se cortan en tres puntos.
El conjunto solución tiene tres elementos en el sistema de los números reales.



Las cónicas se intersectan en cuatro puntos.
El conjunto solución tiene cuatro elementos en el sistema de los números reales.



Las cónicas no se intersectan.
El conjunto solución es el conjunto vacío ($\emptyset$), en el sistema de los números reales.

B. Métodos Algebraicos.

1. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS: POR SUSTITUCION.

PRIMER CASO: Un sistema formado por una ecuación de primer grado y una de segundo grado:

Ejemplo:

(1)	$x + 2y = 4$	línea recta
(2)	$x^2 + 4y^2 = 16$	elipse con eje mayor horizontal.

De la ecuación (1), despejamos a x :

$$x = 4 - 2y$$

Ahora sustituímos el valor de x en la ecuación (2) y efectuamos operaciones:

$$x^2 + 4y^2 = 16$$

$$(4-2y)^2 + 4y^2 = 16$$

$$16 - 16y + 4y^2 + 4y^2 - 16 = 0$$

$$(\tfrac{1}{8})\ 8y^2 - 16y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$y = 0 \qquad y - 2 = 0$$

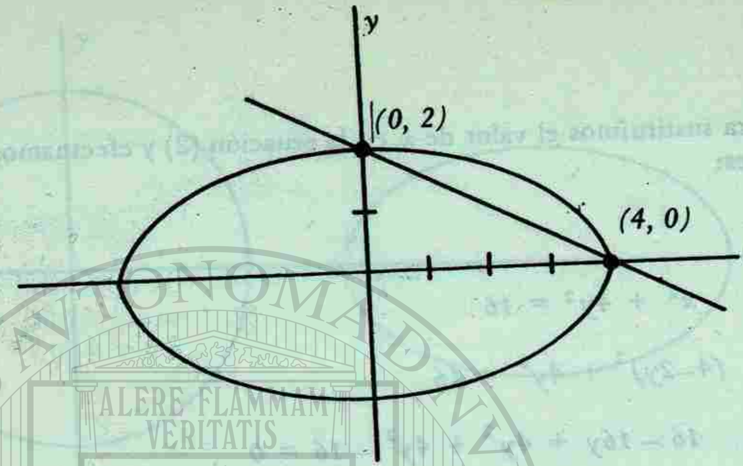
$$x = 4 - 2y$$

$$y_1 = 0 \qquad x_1 = 4 - 2(0) = 4$$

$$y_2 = 2 \qquad x_2 = 4 - 2(2)$$

$$x_2 = 4 - 4 = 0$$

C. S. $\{(4, 0), (0, 2)\}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.



COMPROBACION

	$x + 2y = 4$	$x^2 + 4y^2 = 16$
$P_1\ (4,0)$	$4 + 2(0) = 4$	$(4)^2 + 4(0)^2 = 16$
	$4 = 4$	$16 + 0 = 16$
		$16 = 16$
$P_2\ (0,2)$	$0 + 2(2) = 4$	$(0)^2 + 4(2)^2 = 16$
	$4 = 4$	$4(4) = 16$
		$16 = 16$

Nótese que hemos comprobado ambos elementos del conjunto solución en las dos ecuaciones.

EJERCICIO III - 1

Resolver, por sustitución, el sistema formado por una ecuación de primer grado y una ecuación de segundo grado:

a) $x^2 + y^2 = 25$, $x + 2y = 10$

b) $x + 2y = 4$, $y^2 - xy = 7$

c) $3x - 7 + 2y = 0$, $3x^2 - y^2 + 4 = 0$

d) $x^2 - xy + y = 5$, $2x + y = 3$

e) $x^2 + xy = 6$, $3x - y = 2$

f) $3x^2 + 2y^2 = 11$, $x - y = 1$

g) $x + 5y = 5$, $y^2 - x^2 = 1$

h) $y^2 = 2x$, $2x - y = 1$

i) **La suma de los dígitos de un número de dos cifras es 11. La suma de los cuadrados de las dos cifras es 65. Hallar el o los números.**

j) **La suma de dos números es 9 y la suma de sus recíprocos es $\frac{1}{2}$. Hallar los números.**

k) **Un rectángulo tiene 40 m. de perímetro y 96 m^2 de área. Hallar sus dimensiones.**

l) **La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 34 cm., y su área es de 120 cm^2. Hallar la longitud de la hipotenusa.**

SEGUNDO CASO: Un sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 1.-

(1) $x^2 + y^2 = 8$ CIRCULO

(2) $xy = 4$ HIPERBOLA EQUILATERA

De la ecuación (2), despejamos a x:

$$x = \frac{4}{y}$$

Ahora, sustituímos el valor de x en la ecuación (1) y efectuamos operaciones:

$$x^2 + y^2 = 8$$

$$\left(\frac{4}{y}\right)^2 + y^2 = 8$$

$$\frac{16}{y^2} + \frac{y^2}{1} = 8$$

$$\frac{16 + y^4}{y^2} = 8$$

$$16 + y^4 = 8y^2$$

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0$$

$$(y^2 - 4)(y^2 - 4) = 0$$

$$y^2 - 4 = 0$$

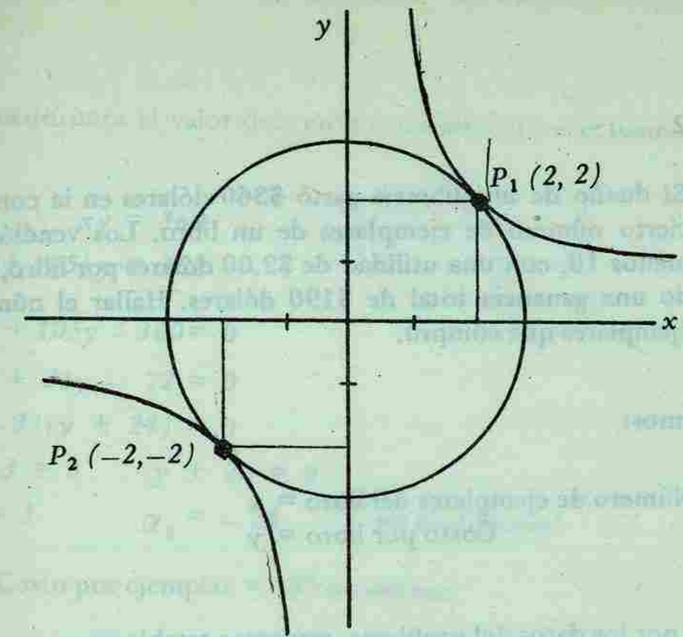
$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$y_1 = +2; \quad x = \frac{4}{y} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_2 = -2; \quad x = \frac{4}{y} = \frac{4}{-2} = -2$$

C. S. $\{(2, 2), (-2, -2)\}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.



COMPROBACION:

	$x^2 + y^2 = 8$	$xy = 4$
	$(2)^2 + (2)^2 = 8$	$(2)(2) = 4$
P_1 (2, 2)	$4 + 4 = 8$	$4 = 4$
	$8 = 8$	
	$(-2)^2 + (-2)^2 = 8$	$(-2)(-2) = 4$
P_2 (−2, −2)	$4 + 4 = 8$	$4 = 4$
	$8 = 8$	

Ejemplo 2.-

El dueño de una librería gastó \$360 dólares en la compra de cierto número de ejemplares de un libro. Los vendió todos, menos 10, con una utilidad de \$2.00 dólares por libro, teniendo una ganancia total de \$190 dólares. Hallar el número de ejemplares que compró.

Consideremos:

Número de ejemplares del libro $= x$
Costo por libro $= y$

Entonces, por los datos del problema, podemos establecer que:

(1) $xy = 360$

(2) $(x - 10)(y + 2) = 360 + 190$

Efectuemos las operaciones indicadas en la ecuación (2):

$$xy + 2x - 10y - 20 = 550$$

$360 + 2x - 10y - 570 = 0$ substituyendo a xy por su valor.

$$\left(\frac{1}{2}\right)\ 2x - 10y - 210 = 0$$

$$x - 5y - 105 = 0$$

$$x = 5y + 105$$

Ahora, sustituímos el valor de x en la ecuación (1) y efectuamos operaciones:

$$xy = 360$$

$$(5y + 105)\, y = 360$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)\ 5y^2 + 105y - 360 = 0$$

$$y^2 + 21y - 72 = 0$$

$$(y - 3)(y + 24) = 0$$

$$y - 3 = 0 \qquad y + 24 = 0$$

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -24 \quad \text{no es solución!}$$

Costo por ejemplar = \$3.oo dólares

Por lo tanto, el número de ejemplares que se compraron es:

$$xy = 360$$

$$x = \frac{360}{y} = \frac{360}{3} = 120 \quad \text{ejemplares}$$

COMPROBACION

Número de libros vendidos = 120 – 10 = 110

Precio de venta = Costo + Utilidad = 3 + 2 = \$ 5 dólares

Importe total de la venta = Costo + ganancia total

= 360 + 190 = 550

(110) (5) = 550

550 = 550

C. S. {Se compraron 120 ejemplares del libro}

EJERCICIO III - 2

Resolver, por sustitución, el sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas:

a) $x^2 + y^2 = 40$
$xy = 12$

b) $x^2 + 4y^2 = 16$
$xy = 4$

c) $x^2 + 4y^2 = 25$
$xy = 6$

d) $y^2 = 2x - 8$
$x^2 + y^2 = 16$

e) $x^2 + y = 11$
$x^2 - x - 2y = 2$

f) $\dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{y} = 4$
$xy = 16$

g) Un comerciante compró una cantidad de sombreros en $100.00 dólares. Si cada sombrero hubiera costado $ 1.00 menos, habría comprado 5 sombreros más con el mismo dinero. Encontrar el número de sombreros que compró.

h) El Sr. Gómez compró algunas acciones en $1,875.00 dólares. Las vendió todas menos 15 por $1,740.00, ganando $4.00 dólares por acción. ¿Cuántas acciones compró?

2. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS POR SUMAS O RESTAS.

Consideremos un sistema en que ambas ecuaciones son de la forma:

$$ax^2 + by^2 = c$$

el método para resolverlo, consiste en eliminar una de las variables por suma o resta.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

(1) $4x^2 + y^2 = 13$

(2) $x^2 + y^2 = 10$

Multiplicamos por (-1) la ecuación (2) y sumamos ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + y^2 = 13 \\ -x^2 - y^2 = -10 \\ \hline 3x^2 = 3 \end{array}$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt[2]{1}$$

$$x = \pm 1$$

Sustituímos el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales:

$$x^2 + y^2 = 10$$

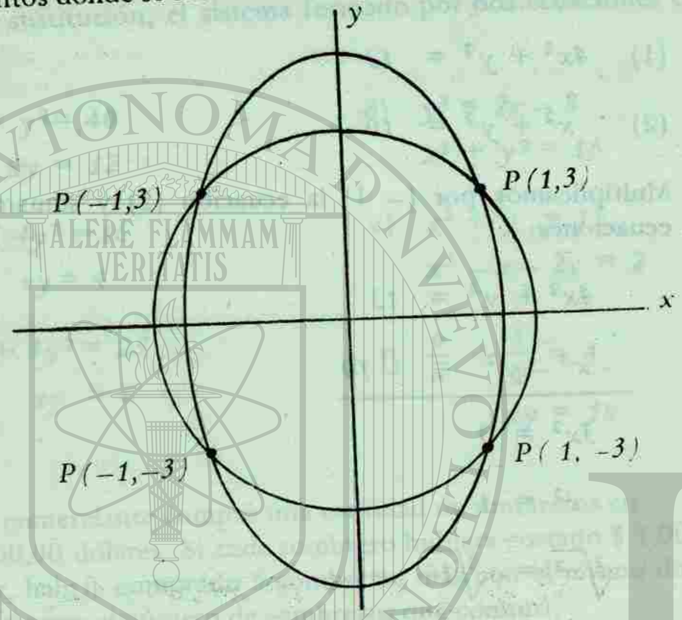
$$y^2 = 10 - x^2$$

$$y^2 = 10 - 1$$

$$y^2 = 9$$

$$y = \pm 3$$

C. S. $\{ (1, 3), (-1, 3), (-1, -3), (1, -3) \}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.



COMPROBACION

$x = \pm 1 \qquad y = \pm 3$

$4x^2 + y^2 = 13$	$x^2 + y^2 = 10$
$4(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 = 13$	$(\pm 1)^2 + (\pm 3)^2 = 10$
$4 + 9 = 13$	$1 + 9 = 10$
$13 = 13$	$10 = 10$

EJERCICIO III - 3

Resolver los sistemas de ecuaciones cuadráticas por el método de sumas o restas:

a) $2x^2 - 3y^2 = 6$
$3x^2 + 2y^2 = 35$

b) $x^2 + y^2 = 10$
$9x^2 + y^2 = 18$

c) $5x^2 - 3y^2 = -11$
$7x^2 - 5y^2 = -13$

d) $4x^2 + 5y^2 = 21$
$3x^2 + 4y^2 = 16$

e) $2x^2 - y^2 = 5$
$3x^2 + 4y^2 = 57$

f) $x^2 + y^2 = 45$
$x^2 - y^2 = 27$

g) $2x^2 + 3y^2 = 35$
$4x^2 - y^2 = 7$

h) $16x^2 - 3y^2 = 1$
$4x^2 + 5y^2 = 6$

i) $3x^2 - y^2 = 7$
$2x^2 + 3y^2 = 23$

j) $4x^2 - 3y^2 = -2$
$3x^2 + 4y^2 = 11$

3. RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES CUADRATICAS: POR ELIMINACION DEL TERMINO CONSTANTE.

Consideremos un sistema de dos ecuaciones, sin términos lineales y con término xy, de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$

donde a, b, c, d pueden ser cero.

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$(1) \quad x^2 + 6xy = 28$$

$$(2) \quad xy + 8y^2 = 4$$

Para eliminar el término constante, multiplicamos la ecuación (2) por − 7:

$$\begin{array}{r} x^2 + 6xy = 28 \\ - 7xy - 56y^2 = -28 \\ \hline x^2 - xy - 56y^2 = 0 \end{array}$$

, resolvemos para x :

$$(x - 8y)(x + 7y) = 0$$

$$x - 8y = 0 \qquad x + 7y = 0$$

$$x_1 = 8y \qquad x_2 = -7y$$

Sustituímos los valores encontrados para x, en la ecuación (1):

$$\begin{aligned} x^2 + 6xy &= 28 \\ (8y)^2 + 6(8y)y &= 28 \\ 64y^2 + 48y^2 &= 28 \\ 112y^2 &= 28 \\ y^2 &= \frac{28}{112} \\ y^2 &= \frac{1}{4} \\ \sqrt[2]{y^2} &= \sqrt[2]{\frac{1}{4}} \\ y &= \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y_1 = +\frac{1}{2}, \quad x = 8y$$

$$x = 8(+\tfrac{1}{2})$$

$$x_1 = 4$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}, \quad x = 8(-\tfrac{1}{2})$$

$$x_2 = -4$$

$$\begin{aligned} x^2 + 6xy &= 28 \\ (-7y)^2 + 6(-7y)y &= 28 \\ 49y^2 - 42y^2 &= 28 \\ 7y^2 &= 28 \\ y^2 &= \frac{28}{7} \\ y^2 &= 4 \\ \sqrt[2]{y^2} &= \sqrt[2]{4} \\ y &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$y_3 = +2, \quad x = -7y$$

$$x = -7(+2)$$

$$x_3 = -14$$

$$y_4 = -2, \quad x = -7(-2)$$

$$x_4 = 14$$

C. S. $\left\{ (4, \frac{1}{2}), (-4, -\frac{1}{2}), (-14, 2), (14, -2) \right\}$ que son las coordenadas de los puntos donde se intersectan las gráficas.

EJERCICIO III - 4

Resolver los sistemas de ecuaciones cuadráticas por eliminación del término constante:

a) $\begin{aligned} x^2 + 3xy &= -5 \\ y^2 - xy &= 6 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x^2 - 2xy - 2y^2 &= 1 \\ 2x^2 + xy + y^2 &= 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x^2 - 4xy &= 4 \\ x^2 - 2y^2 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x^2 - xy &= 12 \\ xy - y^2 &= 3 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 7 \\ x^2 + y^2 &= 10 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 2x^2 - xy &= 6 \\ x^2 - y^2 &= 3 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} x^2 - 3xy + 2y^2 &= 15 \\ 2xy + y^2 &= 0 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ 3xy + 4y^2 &= 10 \end{aligned}$

i) El producto de los dígitos de un número de dos cifras excede al cuadrado de las unidades en 16. La suma de los cuadrados de los dígitos es 80. Hallar el número.

j) Hallar dos números cuya suma de sus cuadrados excede al doble producto de ellos en 4, y cuya diferencia de cuadrados es mayor que la mitad de su producto en 4.

RESUMEN

La ecuación cuadrática general en dos variables es de la forma:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde: a, b, c, d, e, f son constantes reales y al menos una de las constantes a, b, o c es diferente de cero.

Secciones Cónicas: Se obtienen al cortar un cono circular recto con un plano.

Ecuación del Círculo: $x^2 + y^2 = r^2$ de radio r y centro en el origen.

Ecuación de la Elipse: $ax^2 + by^2 = c$ con $a, b, c > 0$ y $a \neq b$

Ecuación de la Hipérbola: $ax^2 - by^2 = c$ con $a, b > 0$ y $c \neq 0$

Ecuación de la Hipérbola Equilátera: $xy = b$ con $b \neq 0$

Ecuación de la Parábola: $y = ax^2 + bx + c$, ó $x = ay^2 + by + c$ donde: $a \neq 0$ y a, b, c, son constantes reales.

Un par de ecuaciones en que el mayor grado de la incógnita es dos, constituyen un Sistema de Ecuaciones Cuadráticas en dos variables.

El conjunto solución del sistema queda determinado por las coordenadas de los puntos de intersección de ambas gráficas. Cada uno de estos puntos son una solución del sistema, puesto que satisface a ambas ecuaciones simultáneamente.

AUTOEVALUACION

1. Resolver, por sustitución, el sistema formado por una ecuación de primer grado y una de segundo grado.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

2. Resolver, por sustitución, el sistema formado por dos ecuaciones cuadráticas.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 25 \\ xy &= -12 \end{aligned}$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones cuadráticas por el método de sumas o restas.

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 16 \\ x^2 + y^2 &= 34 \end{aligned}$$

4. Resolver el siguiente problema, cuya solución implica un sistema de ecuaciones cuadráticas.

"Cierto número de personas alquilan un camión en \$32,000.00. En el momento de la salida, faltan dos personas y por eso los demás tienen que pagar cada una \$800.00 más. ¿Cuántas personas había al contratar el camión?

5. Resolver el sistema de ecuaciones cuadráticas por eliminación del término constante.

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy &= 28 \\ xy + 4y^2 &= 8 \end{aligned}$$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

1. C. S. $\{(0, -5), (4, 3)\}$

2. C. S. $\{(-3, 4), (4, -3)\}$

3. C. S. $\{(5, 3), (-5, 3), (5, -3), (-5, -3)\}$

4.- Había 10 personas

5. C. S. $\{(-14, 4), (14, -4), (4, 1), (-4, -1)\}$

1) *¿Qué hay de erróneo en lo que sigue?*
Para dividir 17 caballos entre tres personas, de modo que una de ellas reciba la mitad, otra la tercera parte y la última una novena parte, se sugirió la solución siguiente: Tomar prestado otro caballo, lo cual da un total de 18; darle la mitad a la primera persona, o sea, 9 caballos, a la segunda persona una tercera parte, o sea 6 caballos y una novena parte a la tercera, es decir, 2 caballos; lo cual constituye, 9+6+2 =17 caballos.
Ahora ya podemos devolverle el caballo restante a su dueño.

2) *Utilizando los dígitos que van del 1 al 9, una sola vez, llene los cuadros que siguen, hasta obtener una suma de 15, vertical, horizontal y diagonalmente.*

4

I.- Sucesiones y Series.

II.- Progresiones Aritméticas, y Geométricas.

III.- Teorema del Binomio.

1) *¿Qué hay de erróneo en lo que sigue?*
Para dividir 17 caballos entre tres personas, de modo que una de ellas reciba la mitad, otra la tercera parte y la última una novena parte, se sugirió la solución siguiente: Tomar prestado otro caballo, lo cual da un total de 18; darle la mitad a la primera persona, o sea, 9 caballos, a la segunda persona una tercera parte, o sea 6 caballos y una novena parte a la tercera, es decir, 2 caballos; lo cual constituye, 9+6+2 =17 caballos.
Ahora ya podemos devolverle el caballo restante a su dueño.

2) *Utilizando los dígitos que van del 1 al 9, una sola vez, llene los cuadros que siguen, hasta obtener una suma de 15, vertical, horizontal y diagonalmente.*

4

I.- Sucesiones y Series.

II.- Progresiones Aritméticas, y Geométricas.

III.- Teorema del Binomio.

CUARTA UNIDAD
SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES Y TEOREMA DEL BINOMIO

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. SUCESIONES Y SERIES.

1. Aplicará, en ejercicios, en forma precisa los conceptos de sucesiones y series finitas e infinitas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error en el tema:

I. SUCESIONES Y SERIES.

1.1 Definirá el concepto de sucesión.

1.2 Identificará los elementos de una sucesión.

1.3 Representará gráficamente las sucesiones dadas.

1.4 Determinará los elementos de una sucesión mediante una fórmula o regla específica dada.

1.5 Determinará los elementos de una sucesión, dada la fórmula que le rige y el primer elemento de la misma.

1.6 Definirá el concepto de serie.

1.7 Diferenciará entre sucesión y su serie correspondiente, ya sean finitas o infinitas.

1.8 Enunciará el significado del símbolo: $\sum_{n=1}^{K} a_n$

1.9 Determinará los elementos de una serie, expresando en notación sigma.

1.10 Determinará los elementos de sumatorias finitas e infinitas.

1.11 Representará cualquier término de una serie específica, mediante una expresión algebraica.

INTRODUCCION

Son llamadas sucesiones a conjuntos como los siguientes:

4, 8, 12, 16, 20, ... 4n ....

1, 4, 9, 16, 25, ... n^2 ....

1, 3, 5, 7, 9, ... 2n−1 ....

1, 10, 100, 1000, ... 10^{n-1} ....

Son conjuntos de números ordenados que tienen una determinada ley de formación.

En esta unidad, estudiaremos con detalle, el concepto de sucesiones, su representación matemática y su formación.

Veremos también, el concepto de Serie, su significado, su representación Σ, y su relación con las sucesiones.

I. SUCESIONES Y SERIES.

A. Sucesiones.

Una **sucesión** es un conjunto de elementos dispuestos en un orden definido y que guardan una determinada ley de formación.

Cada elemento de la sucesión se llama **término**.

Si el número de términos es finito, la sucesión se denomina sucesión finita, y en caso contrario, sucesión infinita.

Como una sucesión es un conjunto de términos ordenados, a cada uno de ellos le corresponde el orden primero, segundo, tercero, etc., es decir, existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre el conjunto de los números naturales y los términos de la sucesión.

Se trata de un tipo especial de funciones, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$ o un subconjunto propio de él.

Consideremos la función $f(n) = n^2$, $n \in \mathrm{N}$

$$\begin{array}{rcccc} n: & 1, & 2, & 3, & 4\ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ f(n): & 1, & 4, & 9, & 16\ldots \end{array}$$

Esto define una función cuyos elementos son los pares ordenados $[n, f(n)]$:

$$f(n) = \{n^2\} = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16) \ldots (n, n^2) \ \ldots\}$$

El dominio de la función es: $\{1, 2, 3, 4 \ldots\}$

El rango de la función es: $\{1, 4, 9, 16 \ldots\}$ que constituyen los términos de la sucesión.

Una sucesión puede escribirse enumerando solamente los elementos del rango en el orden de los números naturales con los cuales se asocian.

La sucesión, entonces, se denota por:

$$\{a_n\} = \{ (1, a_1), (2, a_2), (3, a_3) \ldots \}$$

o indistintamente por:

$$\{a_n\} = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots \}$$

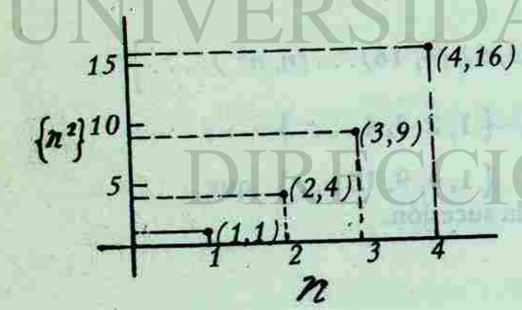
donde a_1 se llama primer término de la sucesión; a_2, segundo término, y en general, para cualquier número natural n, a_n es el término n-ésimo de la sucesión. Se les pone el subíndice a los términos para indicar el lugar que ocupa en la sucesión.

Una sucesión $\{a_n\}$ es una función que asocia a cada entero positivo n, un número a_n.

entonces:

$\{a_n\} = \{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots n^2, \ldots$ se llama **la sucesión de los cuadrados de los números enteros.**

Las sucesiones pueden representarse gráficamente en un sistema coordenado rectangular, por ejemplo, la gráfica de la sucesión anterior es:



La gráfica de la sucesión la forman un conjunto de puntos aislados.

GRAFICA DE LA SUCESION $\{n^2\} = 1, 4, 9, 16, \ldots n^2, \ldots$

Podemos calcular cualesquier término de una sucesión sustituyendo adecuadamente en la expresión para el n-ésimo término del número natural que se asocia con el orden que ocupa dicho término.

Así, si queremos expresar el 12o. término de esta sucesión, sustituímos $n = 12$ en la fórmula $a_n = n^2$, lo cual nos da:

$$a_{12} = (12)^2 = 144.$$

Luego 144 es el término décimo-segundo de la sucesión.

Otro método para determinar una sucesión es dar el primer término y una fórmula llamada "fórmula de inducción o de recurrencia" o también regla de formación.

Ejemplo:

$a_n = 3a_{n-1} + 2$ y $a_1 = 3$, tenemos entonces:

$$a_1 = 3$$
$$a_2 = 3(3) + 2 = 11$$
$$a_3 = 3(11) + 2 = 35$$
$$a_4 = 3(35) + 2 = 107 \text{, por lo tanto:}$$

$$a_n = 3, 11, 35, 107, \ldots, 3a_{n-1} + 2, \ldots \quad n \in \mathbb{N}$$

B. Series.

Una **serie** es la suma indicada de los términos de una sucesión.

No debemos confundir una serie con su <u>suma.</u>

Al igual que las sucesiones, las series pueden ser finitas o infinitas, según el número de términos.

Usamos la letra griega Σ (sigma), que corresponde a la inicial de la palabra sumatoria para representar una serie ya sea finita o infinita, seguida de una fórmula para el n-ésimo término e indicamos cuales términos se han de sumar, poniendo numerales arriba y abajo de la sigma mayúscula.

Una serie, entonces, se denota por:

$$\sum_{n=1}^{K} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_K \qquad \text{serie finita}$$

o bien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad \text{serie infinita}$$

EJEMPLO 1. Expresar la sumatoria de los términos correspondientes a los recíprocos de n, $1 \leqslant n \leqslant 4$:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \qquad \text{serie finita}$$

"sumatoria desde $n = 1$ hasta 4 de $\frac{1}{n}$ ".

EJEMPLO 2. Expresar la sumatoria de todos los números pares de dos cifras:

$$\sum_{n=5}^{49} 2n = 10 + 12 + 14 + \ldots + 98 \qquad \text{serie finita}$$

EJEMPLO 3. Expresar la sumatoria de los primeros cuatro términos correspondientes a la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right) = \left(\frac{1+1}{1}\right) + \left(\frac{2+1}{2}\right) + \left(\frac{3+1}{3}\right) + \left(\frac{4+1}{4}\right) + \ldots$$

$$= 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \ldots$$

serie infinita

EJERCICIO IV - 1

1. Escribir los primeros cuatro términos de las sucesiones, cuando el n-ésimo término para cada caso es el que se indica, y $n \in$ N:

a) $\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$ e) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

b) $\left\{\frac{2n-1}{n^2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$

c) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ g) $\left\{\frac{2^n}{n^2+1}\right\}$

d) $\left\{2^n\right\}$ h) $\left\{n^3\right\}$

2. Graficar las sucesiones, $n \in$ N:

a) $\left\{2n-1\right\}$ c) $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

b) $\left\{2^n\right\}$ d) $\left\{2n\right\}$

3.- Escribir los primeros cuatro términos de las sucesiones, dados el primer término y la fórmula de inducción:

a) $a_n = a_{n-1} + 2, \quad a_1 = 1$

b) $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}, \quad a_1 = 5$

c) $a_n = 2a_{n-1} + 4, \quad a_1 = 3$

d) $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, \quad a_1 = -3$

4.- Expresar la sumatoria de todos los términos de las siguientes series finitas:

a) $\sum_{k=1}^{5} (k+2) =$

b) $\sum_{k=2}^{5} 3^k =$

c) $\sum_{k=2}^{5} k^3 =$

d) $\sum_{x=1}^{5} \frac{1}{x^2} =$

e) $\sum_{k=0}^{4} \frac{1}{k^2+2} =$

f) $\sum_{x=0}^{5} (x+1)^2 =$

5.- Expresar la sumatoria de los primeros cuatro términos de las siguientes series infinitas:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1) =$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} =$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2} =$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2} =$

6. Encontrar una expresión para el n-ésimo término (regla de formación) de las siguientes series y expresar en notación sigma:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 100^2$

b) $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + \ldots + 100^{101}$

c) La sumatoria de todos los múltiplos de 3 entre 70 y 170.

d) La sumatoria de todos los números pares de tres cifras.

e) La sumatoria de los cuadrados de los recíprocos de los números naturales menores de 10.

7. Encontrar una expresión para el n-ésimo término (regla de formación) de las siguientes series y calcular el valor del término que se solicita.

a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots + a_n + \ldots,$ *7o. término*

b) $1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + a_n + \ldots,$ *10o. término*

c) $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + a_n + \ldots,$ *8o. término*

d) $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots + a_n + \ldots,$ *9o. término*

e) $(-3)+(-6)+(-9)+(-12) + \ldots + a_n + \ldots,$ *11o. término*

f) $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + a_n + \ldots,$ *10o. término*

g) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + 4\cdot 5 + \ldots + a_n + \ldots,$ *13o. término*

h) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + a_n + \ldots,$ *10o. término*

i) $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + a_n + \ldots,$ 8o. término

j) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + a_n + \ldots,$ 9o. término

k) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + a_n + \ldots,$ 15o. término

l) $1 + 8 + 27 + 64 + \ldots + a_n + \ldots,$ 5o. término

PASATIEMPO MATEMATICO

1) *Un reloj tarda cinco segundos en dar seis campanadas. ¿Cuánto tardará en dar doce? !No!. La contestación no es 10 segundos*

2) *Una botella y su tapón cuestan $110.00. La botella cuesta $100.00 más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella? ¡No! La respuesta no es $100.00*

RESPUESTAS

1) *Las campanadas en sí no ocupan un tiempo apreciable; los 5 segundos corresponden a los 5 intervalos entre las 6 campanadas. Entre 12 campanadas hay 11 intervalos. Por lo tanto la respuesta correcta es 11 segundos.*

2) *Si la botella costara $100.00 y el tapón $10.00, la botella costaría solamente $90.00 más que el tapón.*

costo tapón $ 5.00
costo botella 105.00

CUARTA UNIDAD
SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES Y TEOREMA DEL BINOMIO

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

II. PROGRESIONES.

2. Aplicará los conceptos de progresión, en problemas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

II. PROGRESIONES.

2.1 Definirá progresiones aritméticas.

2.2 Calculará los componentes de una progresión aritmética.

2.3 Utilizará las fórmulas de las progresiones aritméticas, para la solución de ejercicios y problemas sencillos.

2.4 Definirá progresiones geométricas.

2.5 Calculará los componentes de una progresión geométrica.

2.6 Utilizará las fórmulas de las progresiones geométricas, para la solución de ejercicios y problemas sencillos.

II. PROGRESIONES.

Las progresiones aritméticas suceden en los problemas relacionados a la producción de alimentos, en el análisis del movimiento de un cuerpo en caída libre que inicialmente se encontraba en reposo y en general, en "todo aquello en que la variación es constante y uniforme".

A. Progresión Aritmética.

Es una sucesión en la cual la diferencia que se obtiene al restar cualquier término del inmediato anterior es siempre la misma.

Esta diferencia es llamada la diferencia común de la progresión y se designa por la letra d.

Por tanto:

La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n - a_{n-1} = d$ para $n > 1$ es llamada sucesión aritmética o progresión aritmética.

Ejemplo:

La sucesión 2, 5, 8, 11, 14, . . . es una progresión aritmética cuya diferencia común es 3.

Podemos formar una progresión airtmética agregando la diferencia común al término inmediato anterior al que queremos encontrar.

Esto es:

a_1 = Primer término de la progresión aritmética.

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d, \quad \text{etc.}$$

entonces, el n-ésimo término será:

$$\underbrace{a_1}_{1o.},\ \underbrace{a_1 + d}_{2o.},\ \underbrace{a_1 + 2d}_{3o.},\ \underbrace{a_1 + 3d}_{4o.},\ \ldots\ \underbrace{a_1 + (n-1)d}_{n\text{-ésimo}},\ \ldots$$

Observemos que el coeficiente de d, en cada término es una unidad menor que el número de orden correspondiente al término.

Si a_n es el n-ésimo término, tenemos entonces la fórmula:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

donde:

a_1 = primer término de la progresión aritmética

d = diferencia común

n = número de términos

Podemos encontrar cualquier término deseado de una progresión airtmética, sustituyendo adecuadamente el entero positivo apropiado para n.

Ejemplo:

Hallar el término 23o. de la progresión aritmética 7, 13, 19, . . .

tenemos aquí que: $a_1 = 7$, $d = 6$, y $n = 23$

entonces:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{23} = 7 + (23-1)(6)$$

$$a_{23} = 7 + (22)(6)$$

$$a_{23} = 139$$

LA SUMA DE n TERMINOS.

Karl Friedrich Gaus (1777 - 1855), matemático, astrónomo y físico de origen alemán, siendo casi un niño, razonó así, ante la petición de su profesor, de obtener la suma de los primeros 100 enteros positivos, sin efectuar la suma:

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 98 + 99 + 100 = ?$$

Observó que cualquier pareja de términos que equidistan de los extremos de la serie, suman 101. Como son 100 números, habrá 50 parejas, por lo tanto hay 50 veces el sumando 101, o sea:

$$\text{Suma total} = 50 \times 101 = 5{,}050.$$

Veamos, ahora, la sustentación matemática del pensamiento de Gaus:

Sea S_n, la suma de los primeros n términos de una progresión aritmética.

entonces:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

escribiendo la serie en orden inverso, tendremos:

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

sumando ambas expresiones, nos queda:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n)$$

por tanto, la fórmula para la suma es:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

donde:

S_n = suma de n términos
n = número de términos
a_1 = primer término
a_n = n-ésimo término

También podemos expresar la suma de n términos de esta otra manera:

sabemos que:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

sustituyendo este valor en la fórmula encontrada tendremos:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

MEDIOS ARITMETICOS.– Siempre es posible interpolar cualquier número de términos entre dos números dados, de tal modo que todo el conjunto forme una progresión aritmética.

Se llaman "medios aritméticos" los términos intermedios entre el primero y el último de una progresión aritmética.

Si queremos insertar un cierto número de medios aritméticos entre dos números dados, debemos calcular el valor $\underline{d}$, de la fórmula, y entonces los términos de la progresión pueden hallarse por la suma repetida de este valor.

Ejemplo: Insertar cuatro medios aritméticos entre 9 y 24.

Aquí tenemos: $a_1 = 9,\quad a_n = 24,\quad n = 6$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$24 = 9 + 5d$$
$$d = \frac{24-9}{5} = 3$$

entonces:

$9, \underline{12}, \underline{15}, \underline{18}, \underline{21}, 24$

Cuando tres números forman una progresión aritmética, el término central se llama "medio aritmético" entre los otros dos; es lo que se conoce comúnmente como el promedio de esos dos números.

Así si a, m, b forman una progresión aritmética y el medio aritmético es m.

Y puesto que: $m - a = b - m$

tendremos: $m + m = a + b$

$$2m = a + b$$
$$m = \frac{a+b}{2}$$

Ejemplo:

Calcular el <u>medio aritmético</u> o <u>promedio</u> de 90 y 100:

$90, m, 100$

$$m = \frac{90+100}{2}$$
$$m = \frac{190}{2}$$
$$m = 95$$

de tal manera que se forma una progresión aritmética con:

90, 95, 100 donde la <u>diferencia común</u> es igual a 5.

A continuación veremos algunas aplicaciones de progresiones aritméticas:

EJEMPLO 1.—

Hallar el tiempo que se empleará en saldar una deuda de \$15,000.00, pagando \$1,000.00 el primer mes, \$1,250.00 el segundo, \$1,500.00 el tercero, etc.

tenemos la progresión aritmética:

1,000, 1,250, 1,500, . . .

entonces:

$a_1 = 1{,}000$

$d = 250$

$S_n = 15{,}000$

$n = ?$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$
$$15{,}000 = \frac{n}{2}[2(1000) + (n-1)250]$$
$$30{,}000 = n(2{,}000 + 250n - 250)$$
$$30{,}000 = n(1{,}750 + 250n)$$
$$\left(\frac{1}{250}\right)\ 30{,}000 = 1750n + 250n^2$$
$$n^2 + 7n - 120 = 0$$
$$(n-8)(n+15) = 0$$
$$n - 8 = 0 \qquad n + 15 = 0$$
$$n_1 = 8 \qquad n_2 = -15$$

no es solución!

C. S. $\{$Se saldará la deuda en 8 meses$\}$

EJEMPLO 2.–

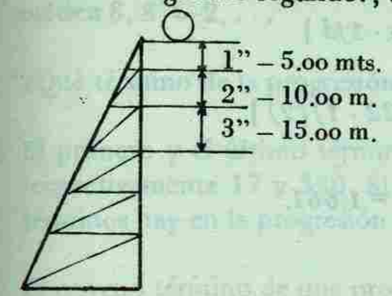
A un empleado le ofrecieron dos planes para el pago de sus honorarios: empezaría a ganar 12 millones anuales pagaderos por semestres, con aumentos de 1.5 millones anuales o si prefería le podían dar $500,000.00 cada semestre de aumento. ¿Cuál plan cree usted que le conviene más a éste empleado?

	PLAN 1 $1.5 millones de aumento anual	PLAN 2 $500,000.00 de aumento semestral
1er. año	6.00 + 6.00 = 12.00	6.0 + 6.5 = 12.5
2o. año	6.75 + 6.75 = 13.50	7.0 + 7.5 = 14.5
3o. año	7.50 + 7.50 = 15.00	8.0 + 8.5 = 16.5
4o. año	8.25 + 8.25 = 16.50	9.0 + 9.5 = 18.5

La primera alternativa nos dice que el aumento anual de 1.5 millones luce más atractivo que tan sólo un aumento de $500,000.00 por semestre, pero analizándolo detenidamente podemos darnos cuenta que la segunda alternativa ofrece un sueldo anual mayor en 0.5, 1.0, 1.5, y 2.0 millones por año respectivamente.

EJEMPLO 3.–

Un cuerpo que parte del reposo cae 5 metros el 1er. segundo, 10 metros el 2o. segundo, 15 metros el 3er. segundo. ¿Cuánto caerá en el octavo segundo? y ¿Cuánto en el vigésimo segundo?, ¿Cuál será el recorrido total?



5, 10, 15, 20, . . .

$a_1 = 5$

$d = 5$

$a_8 = ?$

$a_{20} = ?$

$S_{20} = ?$

$a_8 = a_1 + (n-1)d \qquad a_{20} = a_1 + (n-1)d \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_8 = 5 + (8-1)(5) \qquad a_{20} = 5 + (20-1)(5) \qquad = \frac{20}{2}(5 + 100)$

$a_8 = 5 + 35 = 40m \qquad a_{20} = 5 + 95 = 100m \qquad S_{20} = 1,050\ m.$

EJEMPLO 4.–

El primer término de una P.A. es 34 y el último término es 10. Si la diferencia común es –2. Hallar elnúmero de términos y su suma.

$a_1 = 34 \qquad a_n = a_1 + (n-1)d \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$a_n = 10 \qquad 10 = 34 + (n-1)(-2) \qquad = \frac{13}{2}(34 + 10)$

$d = -2 \qquad 10 = 34 - 2_n + 2 \qquad S_n = \frac{13}{2}(44)$

$n = ? \qquad n = \frac{10 - 34 - 2}{-2} \qquad S_n = 286$

$S_n = ? \qquad n = 13$

EJEMPLO 5.—

Hallar la suma de los primeros 22 términos de una P.A. en la cual la diferencia común es 7 y el primer término es 2.

$$a_1 = 2 \qquad S_n = \frac{n}{2}[\,2a_1 + (n-1)d\,]$$
$$d = 7$$
$$n = 22 \qquad S_{22} = \frac{22}{2}[\,2(2) + (22-1)(7)\,]$$

$$S_{22} = 11\,(4 + 147) = 1{,}661.$$

EJERCICIO IV - 2

1. Encuentre el valor de a_1, a_n, n, d y S_n que no estén dados, y escriba los términos de la progresión aritmética.

   a) $a_1 = 1,\ d = 2,\ n = 7$
   b) $a_1 = 9,\ d = -1,\ n = 6$
   c) $a_1 = 22,\ a_n = 2,\ n = 5$
   d) $a_1 = -17,\ a_n = 11,\ n = 6$
   e) $a_n = 1,\ n = 6,\ d = -10$
   f) $a_n = 3,\ n = 8,\ S_n = 80$
   g) $a_1 = -5,\ n = 7,\ S_n = 28$
   h) $a_1 = 1,\ a_n = 51,\ d = 10$
   i) $a_n = -8,\ a_1 = 10,\ S_n = 7$
   j) $a_n = 23,\ d = 3,\ S_n = 100$

2. Interpolar los medios aritméticos que se solicitan y calcular el valor de su suma:

   a) 8 m.a. entre 47 y 2
   b) 5 m.a. entre 8 y 26
   c) 4 m.a. entre 9 y 24.
   d) 2 m.a. entre -1 y 1
   e) 5 m.a. entre $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$

3. Hallar el término 28o. de la progresión aritmética $-10\frac{1}{2}$, -9, $-7\frac{1}{2}$, . . .

4. Hallar la suma de los primeros 22 términos de la progresión aritmética 8, 3, -2, . . .

5 ¿Qué término de la progresión 5, 14, 23, . . . es 239?

6. El primero y el último término de una progresión aritmética son respectivamente 17 y 350. Si la diferencia común es 9, ¿cuántos términos hay en la progresión y cuál es su suma?

7. El noveno término de una progresión aritmética es $\frac{1}{6}$; el término 16o. es $2\frac{1}{2}$. Hallar el primer término.

8. Hallar cuántos enteros consecutivos a partir de 10 se deben tomar para que su suma valga 2,035.

9. ¿Cuántos términos de la progresión aritmética 24, 22, 20, . . . se necesitan para que su suma sea 150? Escriba los términos.

10. Hallar la suma de todos los números naturales pares de dos cifras.

11. Hallar la suma de los enteros pares entre 21 y 81.

12. Hallar la suma de todos los números naturales impares de dos cifras.

13. Hallar la suma de los enteros impares entre 2 y 50.

14. Hallar la suma de los enteros divisibles por 3 y que son mayores que 2 y menores que 100.

15. Hallar la suma de todos los enteros comprendidos entre 100 y 800 que sean múltiplos de 3.

16. Hallar la suma de los enteros divisibles por 5 que están entre 50 y 200.

17. ¿Cuántos múltiplos de 11 tienen 3 cifras?

18. Hallar cuántos números divisibles por 6 hay entre 0 y 200.

19. Hallar la suma de todos los enteros de dos dígitos múltiplos de 9

20. Hallar la suma de todos los enteros positivos menores que 400 que sean múltiplos de 9.

B. Progresión Geométrica.

Las progresiones geométricas suceden en los problemas relacionados con el crecimiento de la población, con la desintegración radioactiva y también en problemas de interés (%) compuesto devengado sobre dinero.

Progresión Geométrica.

Es una sucesión en la cual el cociente que se obtiene al dividir cualquier término por su inmediato anterior es siempre el mismo.

Este cociente es llamado **la razón de la progresión** y se designa por la letra r.

Por tanto:

La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n = r\,a_{n-1}$ para toda n > 1 es llamada sucesión geométrica o progresión geométrica.

Ejemplo: La sucesión 5, 10, 20, 40, 80, . . . es una progresión geométrica cuya razón es 2.

Podemos formar una progresión geométrica multiplicando por la razón el término inmediato anterior al que queremos encontrar.

Esto es:

a_1 = **1er. término de la progresión geométrica.**
$a_2 = a_1 r$
$a_3 = (a_1 r)r = a_1 r^2$
$a_4 = (a_1 r^2)r = a_1 r^3$, etc. etc.

entonces, el n-ésimo término será:

$$\underbrace{a_1}_{1o.},\ \underbrace{a_1 r}_{2o.},\ \underbrace{a_1 r^2}_{3o.},\ \underbrace{a_1 r^3}_{4o.},\ \ldots\ \underbrace{a_1 r^{n-1}}_{n\text{-ésimo}}$$

Observemos que el exponente de r, en cada término es una unidad menor que el número de orden correspondiente al término.

Si a_n es el n-ésimo término, tenemos entonces la fórmula:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

donde:

a_1 = **1er. término de la progresión geométrica.**
r = **razón**
n = **número de términos.**

Podemos encontrar cualquier término deseado de una progresión geométrica, sustituyendo adecuadamente el entero positivo apropiado para n.

Ejemplo: Hallar el 6o. término de la progresión geométrica: 2, –6, 18, . . .

tenemos aquí que: $a_1 = 2, \; r = -3 \;$ y $\; n = 6$

entonces:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_6 = 2(-3)^5$$
$$a_6 = 2(-243) = -486$$

LA SUMA DE n TERMINOS.

Sea S_n, la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica:

entonces:

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1}$$

multiplicando ambos miembros por r, tenemos:

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots + a_1 r^{n-2} + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

restando ambas igualdades, resulta:

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$
$$S_n(1-r) = a_1 (1 - r^n)$$

por lo tanto, la fórmula para la suma es:

$$S_n = \frac{a_1 (1 - r^n)}{1 - r}$$

También podemos expresar la suma de n términos de esta otra manera:

Sabemos que:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$r a_n = a_1 r^n$$ sustituyendo este valor en la fórmula anterior, tenemos:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{a_1 - r a_n}{1 - r}$$

donde:

S_n = Suma de n términos

a_1 = 1er término de la progresión geométrica

r = razón

a_n = n-ésimo término

n = número de términos

MEDIOS GEOMETRICOS.

Siempre es posible interpolar cualquier número de términos entre dos números dados, de tal modo que todo el conjunto forme una progresión geométrica.

Se llaman "medios geométricos" los términos intermedios entre el primero y el último de una progresión geométrica.

Si queremos insertar un cierto número de medios geométricos entre dos números dados, debemos calcular el valor de la razón, r, de las fórmulas y entonces los términos de la progresión pueden hallarse por la multiplicación repetida de este valor.

Ejemplo: Insertar cuatro medios geométricos entre 1 y 32:

Aquí tenemos: $a_1 = 1$, $a_n = 32$ y $n = 6$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$32 = 1(r)^5$$
$$2^5 = r^5$$
$$r = 5$$

entonces:

$\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{4}$, $\underline{8}$, $\underline{16}$, 32

Cuando tres números forman una progresión geométrica, el término central se llama "medio geométrico" entre los otros dos, también se conoce como "media proporcional" de esos dos números.

Así si a, G, b forman una progresión geométrica, el medio geométrico es G.

Y puesto que: $\dfrac{G}{a} = \dfrac{b}{G}$

tendremos: $G^2 = ab$

$$G = \pm \sqrt[2]{ab}$$

Ejemplo: Calcular la <u>media proporcional</u> de 4 y 1:

4, G, 1 $\quad G = \sqrt[2]{(4)(1)}$

$$G = \sqrt[2]{4}$$
$$G = 2$$

de tal manera que se forma una progresión geométrica con:

4, 2, 1 $\quad$ donde la <u>razón</u> es igual a $\dfrac{1}{2}$

A continuación veremos algunas aplicaciones de progresiones geométricas.

EJEMPLO 1.–

La población de una ciudad crece a razón del 10% anual. Si la población actual es de 1 millón de habitantes. Hallar la población esperada dentro de 10 años.

Población actual = 1'000,000 = 10^6 habitantes

Población al final del primer año $= 10^6 + 10\,\%\ (10^6)$
$= 10^6 + 0.1\,(10^6)$
$= 10^6\ (1 + 0.1)$
$= 1.1\,(10^6)$

$a_1 = 1.1\,(10^6)$
$r = 1.1$
$a_{10} = ?$
$n = 10$

$$a_{10} = a_1 r^{n-1}$$
$$a_{10} = 1.1\,(10^6)(1.1)^9$$
$$a_{10} = (10^6)(1.1)^{10}$$
$$a_{10} = 2'593{,}742 \text{ habit.}$$

EJEMPLO 2.–

Una persona se propone ahorrar 1 centavo el primer día del mes, 2 centavos el segundo día, cuatro centavos el tercer día, ocho centavos el cuarto día y así sucesivamente, cada día ahorrando el doble que el día anterior. ¿Cuánto habrá ahorrado al final de los 31 días del mes?

$a_1 = 0.01$
$r = 2$
$n = 31$
$a_n = ?$
$s_n = ?$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$a_{31} = (0.01)(2)^{30}$$
$$a_{31} = \$10'737{,}418.00$$

$$S_{31} = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$$

$$S_{31} = \frac{0.01 - 2(10'737,418)}{1-2}$$

$$S_{31} = \$\, 21'474,835.99$$

EJEMPLO 3.–

Supongamos que tenemos una hoja de papel muy fino, de una milésima de centímetro de espesor, lo cual equivale a decir que un montón de mil hojas de esas tendría una altura de 1 cm. Rompemos por la mitad esa hoja de papel y ponemos los dos trozos uno encima del otro; volvemos a partirlas por la mitad y colocamos los cuatro pedazos uno encima del otro; los volvemos a partir por la mitad y a colocar los trozos en montón, y así sucesivamente hasta 50 veces. ¿Cuál será la altura del montón que nos resulte?

1er corte = 2^1 milésimas de cm.
2o corte = 2^2 milésimas de cm.
3o corte = 2^3 milésimas de cm.

.

.

.

50o corte = 2^{50} milésimas de cm.

$a_1 = 2 \qquad a_{50} = a_1 r^{n-1}$

$r = 2 \qquad a_{50} = 2(2)^{49}$

$n = 50 \qquad a_{50} = 2^{50}$

$a_{50} = ?$

$$2^{50} = (2^{10})^5$$
$$= (1.024 \times 10^3)^5$$
$$= 1.1258998 \times 10^{15}$$

1 km = 1000 mt $\qquad = 1.125\,899\,800\,000\,000$ *milésimas cm.*

1 km = 1000 (100) cm $\qquad = 1\,125\,899\,800\,000$ *cms.*

1 km = 10^5 cm. $\qquad = 11'258,998$ *kms.*

EJEMPLO 4.–

Cada una de las personas que viven hoy día, tuvo 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, etc. Tiene dos antepasados de una generación antes; 4 o sea, 2^2 de hace dos generaciones; 8 o sea, 2^3 de hace 3 generaciones; 16 o sea, 2^4 antepasados de hace cuatro generaciones, y así sucesivamente. En general tendrá 2^n antepasados de hace n generaciones. Supongamos que cada generación viva 30 años.

Según ésto todos tenemos 2^{20} = 1'048,576 antepasados de hace 20 generaciones, es decir de hace 600 años.
Entonces, ¿podríamos concluir que hace 600 años había en la Tierra más de un millón de veces los habitantes de hoy en día? ¿Qué opina usted?

EJERCICIO IV - 3

1. Encuentre el valor de a_1, a_n, n, r y S_n que no estén dados, y escriba los términos de la progresión geométrica.

a) $a_1 = 2,\ n = 5,\ r = 2$

b) $a_1 = 1,\ n = 5,\ r = 4$

c) $a_1 = 1,\ r = -2,\ a_n = 64$

d) $a_1 = \frac{1}{2},\ r = -2,\ a_n = 32$

e) $a_1 = 243,\ n = 5,\ a_n = 3$

f) $n = 9,\ r = \frac{1}{2},\ a_n = 1$

g) $a_1 = 2,\ a_n = 32,\ S_n = 62$

h) $a_n = 64,\ r = -2,\ S_n = 43$

i) $a_1 = \frac{1}{2},\ r = -2,\ S_n = -170.5$

j) $a_n = \frac{1}{5},\ r = \frac{1}{5},\ n = 7$

2. Interpolar los medios geométricos que se solicitan y calcular el valor de su suma.

a) 3 m.g. entre 2 y 162

b) 6 m.g. entre 128 y 1

c) 4 m.g. entre $-\frac{1}{4}$ y 8

d) 4 m.g. entre $\frac{8}{9}$ y $\frac{27}{4}$

e) 5 m.g. entre 9 y 576

3. Hallar la suma de cada una de las siguientes series geométricas:

a) $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 256$

b) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^7$

4. ¿Cuántos términos hay en la serie?

$$64 + 32 + 16 + \ldots + \frac{1}{64}$$

5. Hallar el valor de x en la serie.

$$2 + 2^2 + 2^2 + \ldots + 2^x = 510$$

6. Si los socios de una organización que tiene actualmente 320 miembros aumentan el número a razón del 50 % cada año ¿Cuántos socios habrá dentro de 5 años? (Suponiendo que no muere ni se retira ningún socio).

7. La diferencia entre dos números es 48. Si su media aritmética excede a la media geométrica en 18, hallar los números.

8. El sexto y décimo término de una P.G. son respectivamente 20 y 320 Hallar el segundo término.

CUARTA UNIDAD
SUCESIONES Y SERIES, PROGRESIONES Y TEOREMA DEL BINOMIO.

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

III. TEOREMA DEL BINOMIO.

3. Aplicará la fórmula general del binomio, para desarrollar expresiones de la forma $(a \pm b)^n$, siendo n elemento del conjunto de los números naturales.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, en su cuaderno y sin error al terminar la unidad, en el tema:

III. TEOREMA DEL BINOMIO.

3.1 Indicará la regla de la expresión binomial.

3.2 Expresará la fórmula general del binomio.

3.3 Desarrollará expresiones de la forma $(a \pm b)^n$, donde n pertenece al conjunto de los números naturales.

3.4 Calculará, sin efectuar su desarrollo, al r-ésimo término de cualquier binomio de la forma $(a \pm b)^n$, siendo n elemento del conjunto de los números naturales.

III. TEOREMA DEL BINOMIO.

Sir Isaac Newton (1642 - 1727). Físico, matemático y astrónomo inglés, estudioso de la época, en cuya memoria, se ha dado su nombre al Teorema del Binomio, por haber encontrado, entre otras muchas cosas, la forma de calcular el coeficiente de cualquier término en el desarrollo binomial.

Aquí estudiaremos "el cálculo de la potencia de un binomio $(a \pm b)^n$, cuando $n \in N$".

En cursos anteriores aprendiste a encontrar el cuadrado de un binomio, mediante una "regla de desarrollo". Es: El cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo, ¿Recuerdas?

Bien, pues ahora veremos que el binomio puede ser elevado, también a otras potencias mayores, e incluso menores.

Estudiaremos la regla de formación para obtener la llamada "expansión binomial", mediante el importante Teorema del Binomio.

Desarrollo de las potencias de un binomio.–

Para todo entero positivo n, $(a + b)^n$, es el producto de n factores iguales $(a + b)$, o sea:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ factores}}$$

Por tanto, por multiplicaciones sucesivas de $(a + b)$ obtenemos:

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

En estos desarrollos se observa que:

1o. En cada desarrollo, el número de términos es igual al exponente del binomio más 1. (número de términos = $n + 1$)

2o. El primer término a, del binomio, comienza en el primer término del desarrollo con exponente igual al grado del binomio, disminuye luego sucesivamente en 1 en cada término que sigue, siendo así factor en todos los términos del desarrollo, excepto en el último.

3o. El segundo término b, del binomio, comienza en el segundo término del desarrollo con exponente uno; aumenta después sucesivamente en 1 en cada uno de los términos siguientes, resultando así factor en todos los términos, excepto en el primero.

4o. El grado de cada término es igual al grado del binomio, $\underline{n}$.

5o. El coeficiente del primer término es 1, y el del segundo es igual al exponente del binomio.

6o. El coeficiente de un término cualquiera es igual "al producto del coeficiente del término inmediato anterior, por el exponente de a en ese término, dividido entre el número que indica el orden de ese mismo término en el desarrollo binomial".

7o. Los términos que equidistan de los extremos, tienen coeficientes iguales.

EJEMPLO 1.—

Obtener el desarrollo binomial de $(2a+1)^6$.

número de término $= n + 1 = 7$	observación No. 1
1er. término del desarrollo $= (2a)^6$	observación 2 y 5
2o. término del desarrollo $= 6(2a)^5\,(1)$	observación 2,3,4, y 5
3o. término del desarrollo $= \dfrac{6 \times 5}{2}\,(2a)^4(1)^2$	observación 2,3,4,5 y 6

y así sucesivamente, tendremos entonces:

$$(2a+1)^6 = (2a)^6 + 6(2a)^5(1) + 15(2a)^4(1)^2 + 20(2a)^3(1)^3 + 15(2a)^2(1)^4 + 6(2a)(1)^5 + (1)^6$$

$$= 64a^6 + 192a^5 + 240a^4 + 160a^3 + 60a^2 + 12a + 1$$

EJEMPLO 2.—

Obtener el desarrollo binomial de:

$$(x-1)^5 = [x+(-1)]^5 = x^5 + 5(x)^4(-1) + 10(x)^3(-1)^2 + 10(x)^2(-1)^3 + 5(x)(-1)^4 + (-1)^5$$

$$= x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Obsérvese que cuando el binomio es substractivo, puede expresarse como una suma, considerando negativo el segundo término. Los signos de los términos del desarrollo binomial + y − se van alternando.

Otra manera de calcular los coeficientes.—

El Triángulo de Pascal.— Blaise Pascal (1623 - 1662). Pensador, matemático y científico francés, estudioso también de este teorema, escribió El Traité du triangle arithmetique, donde muestra la importancia del triángulo en el cálculo de los coeficientes de las potencias de un binomio.

Observemos el siguiente arreglo triangular:

1	$= (x+y)^0$	= 1
1 1	$= (x+y)^1$	= 1 1
1 2 1	$= (x+y)^2$	= 1 2 1
1 3 3 1	$= (x+y)^3$	= 1 3 3 1
1 4 6 4 1	$= (x+y)^4$	= 1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1	$= (x+y)^5$	= 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1	$= (x+y)^6$	= 1 6 15 20 15 6 1

TRIANGULO ISOSCELES, UN TERMINO CUALQUIERA (EXCEPTO EXTREMOS) ES LA SUMA DE LOS TERMINOS DEL RENGLON INMEDIATO ANTERIOR ENTRE LOS CUALES ESTA ESCRITO

TRIANGULO RECTANGULO, UN TERMINO CUALQUIERA (EXCEPTO EXTREMOS) ES LA SUMA DEL TERMINO SITUADO INMEDIATAMENTE ARRIBA Y EL QUE PRECEDE A ESTE.

Sin embargo, el método de Pascal, requiere de la elaboración previa de este arreglo numérico para consultar los coeficientes del desarrollo binomial de que se trate.

Es poco práctico, comparado con el método propuesto por Newton. (observación No. 6).

EJERCICIO IV - 4

Obtener el desarrollo binomial y simplificar.

a) $(a+b)^7 =$

b) $(2a-b)^5 =$

c) $(x - \frac{2}{y})^4 =$

d) $(x - \frac{1}{2})^5 =$

e) $(\frac{x}{3} - \frac{y}{2})^4 =$

f) $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^6 =$

g) $(a + \frac{1}{a^2})^6 =$ n) $(x^{-2} - y^2)^5 =$

h) $(x - \frac{1}{x})^5 =$ o) $(x^{1/2} + y)^6 =$

i) $(\frac{1}{x} + \frac{1}{y^2})^6 =$ p) $(x - y^{1/2})^6 =$

j) $(\frac{x}{2} + \frac{2}{x})^5 =$ q) $(2x - y^{-2})^6 =$

k) $(2x - \frac{y}{2})^6 =$ r) $(\sqrt{x^3} - 1)^4 =$

l) $(x^2 - \frac{3}{x})^4 =$ s) $(1 - \sqrt{x})^4 =$

m) $(2x - \frac{1}{3x})^4 =$ t) $(a + \frac{b}{2})^{10} =$

LA FORMULA GENERAL DEL BINOMIO.–

Consideremos el binomio $(a + b)^n$, $n \in$ N:

1er. término $= a^n$

2o. término $= na^{n-1}b$

3o. término $= \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2$

4o. término $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$

5o. término $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$

FACTORIAL n: Con este nombre se conoce la forma abreviada de escribir los factores sucesivos de números positivos y se representa por $n!$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$$

o bien

$$n! = n \cdot (n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por definición: $0! = 1$

$$(r-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (r-1)$$

Ejemplos:

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4 \times (3 \times 2 \times 1) = 4 \cdot 3!$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 3 \times (2 \times 1) = 3 \cdot 2!$$

$$2! = 2 \times 1 = 2 \times (1) = 2 \cdot 1!$$

$$1! = 1 = 1 \times 0!$$

$$0! = 1$$

Considerando esta simplificación, la fórmula general del binomio es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}a^{n-4}b^4 + \ldots + b^n$$

El Teorema del Binomio $(a + b)^n$, también es válido para valores negativos y fraccionarios de n, convirtiéndose en estos casos en una serie infinita.

El r-ésimo término de la Fórmula del Binomio:

Puede obtenerse una regla fácil para calcular, sin desarrollar, el término de orden r en la expansión binomial.

Observemos en el Teorema del Binomio, un término cualesquiera, el quinto $(r = 5)$, por ejemplo, notaremos que:

<u>El numerador del coeficiente:</u> Se forma con la multiplicación sucesiva de $n(n-1)(n-2)(n-3)$ y cuenta con 4 factores, es decir, $(r-1)$ factores.

<u>El denominador del coeficiente:</u> Es $(r-1)!$, o bien $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

<u>El exponente de a:</u> Es $n - 4$ o bien $n - (r-1)$.

<u>El exponente de b:</u> Es 4 o bien $(r-1)$

<u>El grado del término:</u> Es n

Por lo tanto:

$$\text{r-ésimo término} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\text{ hasta } (r-1) \text{ factores}}{(r-1)!}\, a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$$

Obsérvese que el coeficiente numérico, tiene el mismo número de factores $(r-1)$ tanto en el numerador como en el denominador.

EJEMPLO 1.—

Encuentre el 6o. término de $\left(a + \frac{1}{a}\right)^8$

$n = 8$
$r = 6$
$r - 1 = 5$

$$\text{6o. término} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times \cancel{5} \times \cancel{4}}{1 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{4} \times \cancel{5}} (a)^{8-5} \left(\frac{1}{a}\right)^5$$

$$= 56\, a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{56}{a^2}$$

EJEMPLO 2.—

En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $(a + b)^{12}$:

$n = 12$

$r = ?$

$$\text{r-ésimo término} = C \cdot a^{n-(r-1)}\, b^{r-1}$$

Como los exponentes de a y b deben ser iguales, entonces

$$\begin{aligned} n - (r-1) &= r - 1 \\ 12 - r + 1 &= r - 1 \\ 13 + 1 &= 2r \\ r &= \frac{14}{2} \\ r &= 7 \end{aligned}$$

COMPROBACION

$$\text{7o. término} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}\, a^{12-(7-1)}\, b^{7-1}$$

$$= 924\, a^6\, b^6$$

EJERCICIO IV - 5

Determine, sin desarrollar, el término que se solicita:.

a) 5o. término de $(\frac{a}{2} + \frac{2}{a})^8$

b) 4o. término de $(2x + 3y)^9$

c) 9o. término de $(a + 1)^{11}$

d) 6o. término de $(x^2 + \frac{1}{x})^9$

e) 7o. término de $(a^{-2} + a^2)^{10}$

f) 9o. término de $(x^2 - y^2)^{12}$

g) 6o. término de $(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{x^2})^7$

h) 8o. término de $(1 - \frac{1}{x})^{12}$

i) término medio de $(2a - \frac{1}{2a})^{10}$

j) término medio de $(2x + 3y)^8$

k) término medio de $(2a - \frac{b}{2})^{12}$

l) término medio de $(2x - y)^6$

m) Hallar el término libre de literales de $(a - \frac{1}{a})^8$

n) Hallar el término libre de literales de $(x^2 - \frac{1}{x})^9$

o) ¿En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $(a + \frac{b}{2})^{10}$?

p) ¿En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $(\frac{x}{3} - \frac{y}{2})^6$?

RESUMEN

SUCESIONES: Una sucesión es un conjunto de elementos dispuestos en un orden definido y que guardan una determinada ley de formación.

También se le define como un tipo especial de función, cuyo dominio es el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3 \ldots\}$ o un sub-conjunto propio de él. $[n, f(n)]$

Las sucesiones pueden ser finitas o infinitas, según el número de términos.

Una sucesión se representa por:

$$\{a_n\} = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3) \ldots\}$$

o bien

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$$

La gráfica de las sucesiones, se puede representar en un Sistema Coordenado Rectangular, y la forman un conjunto de puntos aislados.

Los términos de una sucesión se determinan, sustituyendo adecuadamente en la expresión para el n-ésimo término el número natural que se asocie con el orden que ocupa dicho término.

También podemos encontrar los términos de una sucesión, si se nos da una fórmula o regla de formación y el valor del primer término.

SERIES: Una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión.

Las series pueden ser finitas o infinitas, según su número de términos.

Las series se representan mediante el símbolo: Σ , seguido de una fórmula para el n-ésimo término, y se ponen numerales arriba y abajo del símbolo para indicar cuáles términos se han de sumar.

Una serie se representa por:

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_k$$

serie finita

o bien:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

serie infinita

PROGRESIONES ARITMETICAS: La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n - a_{n-1} = d$ para $n > 1$, es llamada sucesión aritmética o progresión aritmética.

Los componentes de una progresión aritmética son:

a_1 = primer término

a_n = último término

d = diferencia común

n = número de términos

S_n = suma de n términos.

Las fórmulas aplicables en las progresiones aritméticas son:

1) Para el cálculo del n-ésimo término:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

2) Para el cálculo de la suma de n términos:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[\,2a_1 + (n-1)d\,\right]$$

MEDIOS ARITMETICOS: Se llaman "medios aritméticos los términos intermedios entre el primero y el último de una progresión aritmética.

Cuando tres números forman una progresión aritmética, el término central se le llama "medio aritmético" comúnmente conocido como el promedio de esos dos números, y se obtiene con la semi-suma de ambos.

PROGRESIONES GEOMETRICAS: La sucesión $\{a_n\}$, en la que $a_n = r\,a_{n-1}$ para $n > 1$, es llamada sucesión geométrica o progresión geométrica.

Los componentes de una progresión geométrica son:

a_1 = primer término

a_n = último término

r = razón común

n = número de términos

S_n = suma de n términos.

Las fórmulas aplicables en las progresiones geométricas son:

1) Para el cálculo del n-ésimo término:

$$a_n = a_1\,r^{n-1}$$

2) Para el cálculo de la suma de n términos:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a_1 - r\,a_n}{1-r}$$

MEDIOS GEOMETRICOS: Se llaman "medios "medios geométricos" los términos intermedios entre el primero y el último de una progresión geométrica.

Cuando tres números forman una progresión geométrica, el término central se le llama "medio geométrico" o también "media proporcional" de esos dos números, y se obtiene con la raíz cuadrada del producto de ambos números.

La fórmula general del binomio es:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + b^n$$

para todo $n \in R$

Factorial n: Con este nombre se conoce la forma abreviada de escribir los factores sucesivos de los números positivos, y se representa por $n!$.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$$

o también

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

La fórmula para el cálculo del r-ésimo término de la expansión binomial es:

$$\text{r-ésimo término} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots \text{hasta } (r-1) \text{ factores}}{(r-1)!} \, a^{n-(r-1)} \, b^{r-1}$$

donde:

r = término de la expansión binomial que se desea calcular.

n = grado del binomio, $(a + b)$

a = primer término del binomio

b = segundo término del binomio

NOTA: El coeficiente numérico, tiene el mismo número de factores $(r - 1)$ tanto en el numerador como en el denominador.

AUTOEVALUACION

I. INSTRUCCIONES: Encuentra los términos que se solicitan de las sucesiones o series siguientes.

a) Los cuatro primeros términos de $\left\{\frac{3n-2}{n^2}\right\}$ para $n \in N$

b) Los cinco primeros términos de: $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $a_1 = 2$

c) Grafica la sucesión $\{3^n\}$

d) Expresa la sumatoria de todos los términos de la serie finita.

$$\sum_{k=1}^{5} (2k+3) =$$

e) Expresa la sumatoria de los primeros cuatro términos de la serie infinita:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} =$$

f) Encontrar una expresión para el n-ésimo término (regla de formación) de la serie y expresar en notación sigma:

"La sumatoria de todos los múltiplos de 5 entre 21 y 241".

g) Encontrar una expresión para el n-ésimo término (regla de formación) de la serie y calcular el valor del término que se solicita:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + a_n + \ldots$$

7o. término = ?

II. INSTRUCCIONES: Resuelve las operaciones siguientes.

PROGRESIONES ARITMETICAS

a). Interpolar 4 m.a. entre $-3/4$ y $1/2$ y calcular el valor de su suma.

b). Hallar cuántos enteros consecutivos a partir de 9 se deben tomar para que su suma valga 3,204.

c) El 7o. término de una progresión aritmética es $2\frac{1}{3}$ y el 15o término es $7\ 2/3$. Hallar el primer término.

d) Si: $a_n = 3$, $a_1 = -\frac{1}{2}$ y $S_n = 18.75$, hallar d y n.

III. INSTRUCCIONES: Resuelve las siguientes operaciones.

PROGRESIONES GEOMETRICAS

a) Interpolar 4 m.g. entre $-\frac{1}{8}$ y 4 y calcular su suma.

b) La suma de una serie geométrica es 520.84, el primer término es $\frac{1}{25}$ y el último es 625; dar los primeros siete términos.

c) Si se repartiera dinero entre 16 personas, dándole a la primera \$0.20, a la segunda \$0.60, a la tercera \$1.80, ¿cuánto le tocaría a la 16ava. persona?

d) Si: $a_1 = \frac{3}{4}$, $a_n = 48$ y $S_n = 32.25$, hallar: n y r

IV. INSTRUCCIONES: Realiza las siguinetes operaciones.

TEOREMA DEL BINOMIO.

Obtener el desarrollo binomial y simplificar:

a) $(x - \frac{1}{x^2})^7 =$

b) $(a + b^{\frac{1}{2}})^4 =$

V. INSTRUCCIONES: Determinar, sin desarrollar, el término que se indica:

a) término medio de $(2a - \frac{b}{2})^{10} =$

b) ¿En qué término son iguales los exponentes de a y b en el desarrollo de $(\frac{a}{2} + b)^8$?

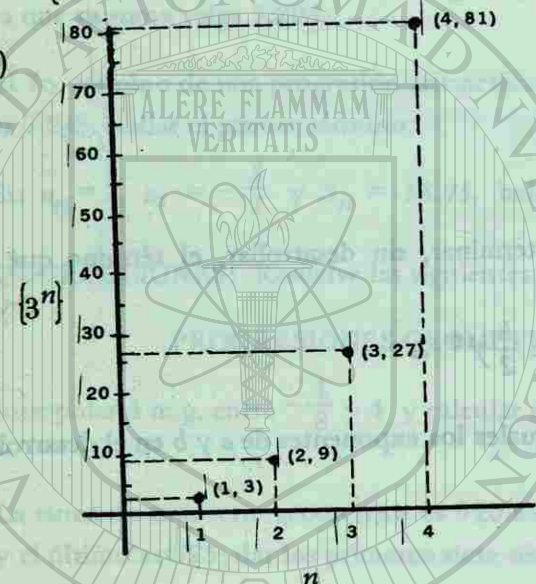
RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I.

a) $\left\{\dfrac{3n-2}{n^2}\right\} = 1, 1, \dfrac{7}{9}, \dfrac{5}{8}, \ldots$

b) $\{a_n\} = 2, 3, 5, 9, 17, \ldots$

c)



d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k+3) = 5 + 7 + 9 + 11 + 13.$

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots$

f) $\displaystyle\sum_{x=5}^{48} 5x = 25 + 30 + 35 + \ldots\ldots + 240$

g) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + a_n + \ldots.$

$a_n = 2n$

7o. término = 14

II. PROGRESIONES ARITMETICAS.

a) $-3/4, -1/2, -1/4, 0, 1/4, 1/2.\ ;\ S_n = -3/4$

b) $n = 72$

c) $a_1 = -\dfrac{5}{3}$

d) $d = \dfrac{1}{4}$ y $n = 15$

III. PROGRESIONES GEOMETRICAS.

a) $-\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{2}, 1, -2, 4;\ S_n = 2.625$

b) $\dfrac{1}{25}, -\dfrac{1}{5}, 1, -5, 25, -125, 625\ ;\ r = -5$

c) $a_{16} = \$\ 2'869,781.40$

d) $n = 7$ y $r = -2$

IV. TEOREMA DEL BINOMIO.

a) $\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^7 = x^7 - 7x^4 + 21x - \dfrac{35}{x^2} + \dfrac{35}{x^5} - \dfrac{21}{x^8} + \dfrac{7}{x^{11}} - \dfrac{1}{x^{14}}$

b) $(a + b^{\frac{1}{2}})^4 = a^4 + 4a^3\sqrt[2]{b} + 6a^2b + 4ab\sqrt[2]{b} + b^2$

V.

a) 7o. término = $924\ a^6 b^6$

b) 5o término = $\dfrac{70}{16}\ a^4 b^4$

PASATIEMPO MATEMATICO

1) Una señora fue en una ocasión al mercado a vender una canasta de huevos. El primer comprador se llevó "la mitad más medio huevo". Al segundo le vendió "la mitad de los que le quedaban más medio huevo". Y al tercero le dio "la mitad de lo que entonces le quedaba más medio huevo". Se quedó con tres. Si la señora jamás rompió ningún huevo en sus ventas, ¿cuántos tenía al principio?
Solución: 31 huevos

2) Truco para adivinar el pensamiento:
El adivinador de pensamiento (M) le pide a un amigo (A) que piense un número, lo multiplique por 5, que sume 6, que multiplique por 4, que sume 9, que multiplique por 5, y que le diga el resultado.
(A) piensa, por ejemplo, el número 12, y calcula sucesivamente: 60, 66, 264, 273 y 1365, y dice en voz alta este último número.
(M) resta 165 de este resultado, le quedan 1200, quite los dos ceros y le dice a (A) que el número que pensó era el 12.

El truco se ve fácilmente si traducimos con símbolos las operaciones efectuadas. Si el número que (A) elige es x, las operaciones sucesivas darán $(5x)$, $(5x+6)$, $(20x+24)$, $(20x+33)$ y $(100x+165)$. Cuando le comunican a (M) este número, es evidente que puede determinar el valor de x, si le resta 165 y divide por 100.

5

Permutaciones y Combinaciones

PASATIEMPO MATEMATICO

1) Una señora fue en una ocasión al mercado a vender una canasta de huevos. El primer comprador se llevó "la mitad más medio huevo". Al segundo le vendió "la mitad de los que le quedaban más medio huevo". Y al tercero le dio "la mitad de lo que entonces le quedaba más medio huevo". Se quedó con tres. Si la señora jamás rompió ningún huevo en sus ventas, ¿cuántos tenía al principio?
Solución: 31 huevos

2) Truco para adivinar el pensamiento:
El adivinador de pensamiento (M) le pide a un amigo (A) que piense un número, lo multiplique por 5, que sume 6, que multiplique por 4, que sume 9, que multiplique por 5, y que le diga el resultado.
(A) piensa, por ejemplo, el número 12, y calcula sucesivamente: 60, 66, 264, 273 y 1365, y dice en voz alta este último número.
(M) resta 165 de este resultado, le quedan 1200, quite los dos ceros y le dice a (A) que el número que pensó era el 12.

El truco se ve fácilmente si traducimos con símbolos las operaciones efectuadas. Si el número que (A) elige es x, las operaciones sucesivas darán $(5x)$, $(5x+6)$, $(20x+24)$, $(20x+33)$ y $(100x+165)$. Cuando le comunican a (M) este número, es evidente que puede determinar el valor de x, si le resta 165 y divide por 100.

5

Permutaciones y Combinaciones

QUINTA UNIDAD
PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

I. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

1. Aplicará los conceptos de permutación y combinación, en la solución de problemas.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error en el tema:

I. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

1.1 Utilizará el principio fundamental de conteo, en la solución de problemas.

1.2 Definirá el concepto de permutación.

1.3 Usará la fórmula para obtener el número de permutaciones de un conjunto de elementos diferentes, tomados "n" a un tiempo, en la solución de problemas sencillos.

1.4 Empleará la fórmula para obtener el número de permutaciones cuando algunos de los elementos del conjunto están repetidos.

1.5 Definirá el concepto de combinación.

1.6 Diferenciará entre permutaciones y combinaciones.

1.7 Utilizará el teorema concerniente a las combinaciones de "n" objetos, tomados en grupos de "r" a un tiempo, en la solución de problemas sencillos.

INTRODUCCION

En la industria, en la administración gubernamental y en la investigación científica ocurren con frecuencia los problemas que requieren "el cálculo del número de todos los subconjuntos que pueden formarse con un conjunto dado de símbolos, objetos o sucesos".

Por ejemplo, una compañía telefónica debe proporcionar a cada suscriptor un número único, irrepetible; el departamento de tránsito debe asignar placas de identificación, todas diferentes, para los vehículos. Ambos deben tener la suficiente amplitud para cubrir el número de elementos previsto.

El problema es, entonces:

Calcular cuántos subconjuntos distintos se pueden formar con un conjunto dado de símbolos.

En esta unidad, estudiaremos:

Colecciones y ordenaciones de símbolos, objetos o sucesos.

Desarrollaremos los principios fundamentales que permiten calcular el número deseado de subconjuntos sin necesidad de enumerar sus elementos.

I. PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

A. Principio Fundamental de Conteo.

Supongamos que hay dos carreteras que van de Monterrey a México y tres carreteras de México a Acapulco. ¿De cuántos modos distintos se puede viajar de Monterrey a Acapulco por carretera?

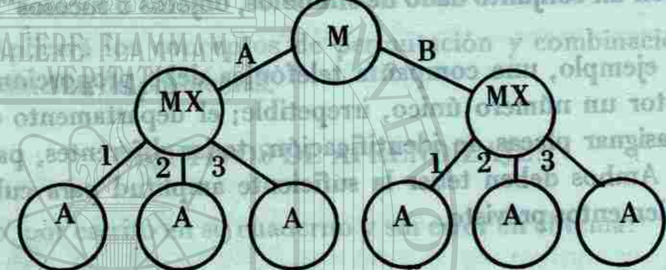


DIAGRAMA DE ARBOL

Podremos viajar por la carretera A para llegar a México y continuar por 1 hasta Acapulco, A – 1; o bien continuar por 2, A – 2; y también por 3, A – 3. Esto hace 3 modos distintos iniciando el viaje por la carretera A. Por la carretera B, tendremos también otras 3 alternativas diferentes: B – 1, B – 2 y B – 3.

Tenemos entonces que podemos viajar de Monterrey a Acapulco de 2 x 3 modos diferentes.

Esto es:

$$\underbrace{(A-1)+(A-2)+(A-3)}_{\text{3 alternativas}} \quad + \quad \underbrace{(B-1)+(B-2)+(B-3)}_{\text{3 alternativas}}$$

2 x 3 = 6 modos diferentes

Principio fundamental:

Si un evento puede producirse de h_1 modos, y después de ello, un segundo evento puede producirse de h_2 modos distintos, los dos eventos pueden producirse juntos en, $h_1 \times h_2$ modos diferentes.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras diferentes pueden seleccionarse parejas de entre 4 muchachas y 3 varones?

Consideremos:

muchachas	*varones*
1,2,3,4	*a,b,c*

$$1\begin{cases}1-a\\1-b\\1-c\end{cases}\quad 2\begin{cases}2-a\\2-b\\2-c\end{cases}\quad 3\begin{cases}3-a\\3-b\\3-c\end{cases}\quad 4\begin{cases}4-a\\4-b\\4-c\end{cases}$$

Cada muchacha puede ser seleccionada de 4 modos diferentes, luego, cada varón puede ser seleccionado de 3 modos; por tanto, cada pareja puede seleccionarse de 4 x 3 = 12 modos diferentes.

Cuando ocurren más de dos sucesos, se puede ampliar el principio fundamental del modo siguiente:

Si después de haber ocurrido los dos primeros sucesos, ocurre un tercero de h_3 modos diferentes, un cuarto de h_4 modos diferentes, y por último, un enésimo de h_n modos diferentes, entonces, los n sucesos pueden ocurrir en el orden indicado de:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot h_4 \ldots h_n \text{ modos.}$$

EJEMPLO 1. ¿Cuántas placas de identificación de automóviles pueden fabricarse usando en cada placa 2 letras y 4 dígitos?

SOLUCION. En este problema, se pueden usar cualesquier letra o cualesquier dígito más de una vez en cada placa, ejemplo: AA–1111.

Se considerará que el primer dígito puede ser cero.

El primer suceso es la elección de la letra que ocupe el primer lugar en la placa, puesto que hay 27 letras para escoger, $h_1 = 27$. De manera análoga $h_2 = 27$. Puesto que cualquiera de los números 0,1,2,3,....9, se pueden usar en cualquiera de los otros cuatro lugares de la placa, entonces $h_3 = 10$, $h_4 = 10$, $h_5 = 10$, $h_6 = 10$.

Por lo tanto, el número total de placas es:

$$27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 7'290{,}000$$

Si consideramos ahora, que ninguna letra y ningún dígito deben repetirse en la placa, el número de placas posibles será: $h_1 = 27$, $h_2 = 26$ (puesto que para el segundo lugar sólo quedan 26 letras disponibles), $h_3 = 10$, $h_4 = 9$, $h_5 = 8$, $h_6 = 7$. Por lo tanto, el númerototal de placas sin repetir letras, ni dígito alguno será:

$$27 \times 26 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 3'538{,}000$$

EJEMPLO 2. ¿Cuántos números impares menores que 1000 pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6?

SOLUCION. Puesto que los números menores que 1000 pueden tener 1,2 ó 3 dígitos, consideraremos cada caso en forma separada:

No. de 1 dígito		No. de 2 dígitos		No. de 3 dígitos
U.		D. U.		C. D. U.
$\boxed{3}$	+	$\boxed{5}\boxed{3}$	+	$\boxed{4}\boxed{5}\boxed{3}$

Llenamos el lugar de las unidades con un dígito impar, y después llenamos los lugares restantes.

$$3 + 15 + 60 = 78 \text{ números impares}$$

EJEMPLO 3. Tres muchachas se suben a un camión urbano de transporte colectivo, en el que hay 5 asientos vacíos. ¿En cuántas formas diferentes pueden sentarse?

SOLUCION. La primera muchacha puede seleccionar su asiento de 5 formas diferentes, la segunda lo puede hacer de 4 formas y la tercera muchacha de 3.

Por tanto, las tres muchachas pueden sentarse de:

$$5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ formas distintas}$$

EJEMPLO 4. ¿En cuántas formas diferentes podemos colocar 5 cartas en 4 buzones?

SOLUCION. La primera carta puede depositarse en cualquiera de los 4 buzones: esto es en 4 formas diferentes. La segunda carta puede depositarse también en cualquiera de los 4 buzones, es decir, también en 4 formas distintas; y lo mismo sucede con cada una de las cartas restantes.

Entonces:

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5 = 1{,}024 \text{ formas diferentes.}$$

EJERCICIO V – 1

Resolver los ejercicios siguientes aplicando el Principio Fundamental de Conteo.

1. ¿Cuántos números pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4, a) de dos cifras diferentes, b) de tres cifras diferentes?. Enuméralos.

2. ¿Cuántos números distintos de dos cifras pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5, si: a) cada cifra puede usarse sólo una vez en cada número, y b) cada cifra puede usarse más de una vez en cada número?.

3. ¿Cuántos números diferentes de dos cifras pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6, a) de a lo más tres cifras distintas y b) de a lo menos tres cifras diferentes?.

4. ¿Cuántos números de tres cifras diferentes menores de 500 pueden formarse con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7, a) sin repetir cifra en cada número y b) si se permite la repetición de cifras en cada número?.

5. ¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los cinco dígitos 3,4,5,6,7, a) sin utilizar los dígitos más de una vez, b) cuántos son menores que 500, c) cuántos son impares y d) cuántos son múltiplos de cinco?.

6. ¿Cuántos números de tres cifras, siendo la primera diferente de cero, pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,4, si: a) si se permiten repeticiones, b) no se permiten repeticiones?.

7. ¿Cuántos números de 4 cifras podemos escribir en nuestro sistema decimal?.

8. Si una persona tiene 4 chamarras deportivas y 5 pants. ¿Cuántas combinaciones pueden formarse, cada una de ellas con una chamarra y un pantalón?.

9. ¿De cuántas formas diferentes puede escogerse un cuarteto, de entre 3 bajos, 4 tenores, 2 barítonos y 4 sopranos?.

10. En una escuela se van a hacer elecciones para mesa directiva. Hay 3 candidatos para presidente, 2 para vice-presidente, 4 para secretario, y dos para tesorero. ¿De cuántas formas diferentes puede quedar integrada la mesa directiva?.

11. Tres vendedores competidores llegan a un pueblo en que hay 5 hoteles. ¿En cuántas formas distintas pueden alojarse de tal modo que no queden dos en el mismo hotel?.

12. ¿De cuántas formas diferentes podemos colocar 4 lápices en tres bolsas distintas, considerando que cada bolsa es suficientemente grande para guardar los cuatro lápices?.

13. Si lanzamos 4 monedas al aire, ¿en cuántas formas diferentes pueden caer?.

14. Si tenemos 3 dados, de distintos colores, ¿de cuántas maneras diferentes pueden caer si lanzamos los tres dados?.

15. ¿De cuántas formas diferentes podrá contestarse completamente un cuestionario de 5 preguntas, si debe responderse solamente sí o no a cada una de ellas?.

16. Un estudiante tiene que elegir un idioma y una materia, de entre 5 idiomas y 4 materias. Hallar el número de formas distintas en que puede hacerlo.

17. ¿De cuántas formas se pueden repartir dos premios entre 10 personas, sabiendo que ambos premios, a) no se pueden conceder a una misma persona y b) si se pueden conceder a la misma persona?.

18. Un estadio tiene 8 puertas de acceso. ¿De cuántas maneras puede

una persona entrar por una puerta y, a) salir por otra distinta, b)salir por una puerta cualquiera?.

19. ¿Cuántas placas diferentes de identificación de automóviles pueden hacerse si cada una tiene 5 símbolos, los dos primeros son letras y el resto son dígitos?. Podemos incluir el cero, pero las letras "I" y "O" no pueden ser usadas.

20. Un teléfono tiene 10 botones, numerados del 0 al 9. Para obtener línea directa se debe marcar el 1 ó el 0, a continuación, un código zonal de tres dígitos, y finalmente, un número de siete dígitos. ¿Cuántos números telefónicos pueden marcarse?.

B. Permutaciones.

Nos hemos interesado por el número de modos en que puede disponerse una colección de objetos en un orden dado.

A cada una de esas ordenaciones diferentes de un conjunto de n elementos se le llama permutación del conjunto.

Ejemplo: ¿De cuántas formas diferentes podemos ordenar los elementos del conjunto {A,B,C} ?

Podemos ordenarlas en 6 diferentes formas, veamos:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Cada una de estas ordenaciones es una permutación. Aun constan de los mismos elementos, no hay ninguno igual si consideramos el orden en que están colocados.

Una Permutación es cada una de las maneras posibles en que pueden ser ordenados los elementos de un conjunto finito.

El símbolo nPn representa el número de permutaciones de n objetos distintos, tomados a razón de n cada vez.

Las permutaciones de un conjunto de n elementos, pueden también efectuarse considerando sólo una parte (r) de los elementos del conjunto.

Ejemplo: Las permutaciones de los elementos del conjunto {A,B,C} considerados en grupos de 2, son:

AB, BA, BC, CB, AC, CA.

1. Fórmula para obtener el número de permutaciones de elementos diferentes de un conjunto.

Consideremos que el símbolo nPr represente el número de permutaciones de n elementos tomados en grupos de r elementos a la vez.

Entonces, tendremos:

$$\underbrace{\boxed{n} \times \boxed{n-1} \times \boxed{n-2} \times \ldots \times \boxed{n-(r-1)}}_{r \text{ factores}}$$

Es decir:

El primer lugar de la ordenación, se puede ocupar de n modos distintos, después de que se ha ocupado esta primera posición, nos quedan $(n-1)$ modos para ocupar el segundo lugar; luego nos quedará $(n-2)$ que es el resto de los elementos del conjunto para la tercera posición, y así sucesivamente, hasta el r-ésimo término que será $[n-(n-1)]$.

Cuando tenemos un conjunto de n elementos y disponemos r de ellos $(r \leqslant n)$ en un orden determinado, llamamos a esta disposición "una permutación de n elementos tomados de r en r", y su fórmula es:

$$nPr = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

siendo $n > r$

Para obtener el número de permutaciones de un conjunto de n elementos cuando disponemos de todos a la vez, hacemos en la fórmula anterior, $r = n$.

De este modo se obtiene:

$$nPn = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$nPn = n!$$

Ejemplo 1. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 personas en una fila de 6 asientos?

Solución:

$nPn = n!$
${}_6P_6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
${}_6P_6 = 720$ *maneras distintas*

Ejemplo 2. ¿De cuántas maneras distintas pueden tomar asiento tres personas en un salón donde hay 7 asientos?

Solución:

$nPr = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$
${}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5$
${}_7P_3 = 210$ *maneras distintas*

2. Permutaciones cuando algunos de los elementos estan repetidos.

No se aplican, las fórmulas anteriores, si alguno de los objetos son iguales, ya que se obtuvieron bajo la suposición de que el conjunto de n objetos son todos distintos entre sí.

Por ejemplo, la palabra GALAXIA, tiene siete letras pero no podemos hacer 7! permutaciones usando las siete letras a la vez, ya que tres de ellas son iguales.

Asignemos sub-índices a las tres A, para ayudarnos a encontrar el número de permutaciones distintas: $G\,A_1\,L\,A_2\,X\,I\,A_3$, tenemos ahora, siete objetos distintos. Habiendo distinguido las A tendremos 7! permutaciones distintas.

Dejando a G, L, e I en posiciones fijas permutamos las A entre sí, esto puede hacerse de 3! maneras distintas:

$G\,A_1\,L\,A_2\,X\,I\,A_3$	$G\,A_1\,L\,A_3\,X\,I\,A_2$
$G\,A_2\,L\,A_1\,X\,I\,A_3$	$G\,A_2\,L\,A_3\,X\,I\,A_1$
$G\,A_3\,L\,A_1\,X\,I\,A_2$	$G\,A_3\,L\,A_2\,X\,I\,A_1$

No podríamos distinguir entre sí estos seis arreglos si se removiesen los índices.

A cada permutación de las siete letras corresponden 3! permutaciones si se considera a las A distintas, entonces el número de permutaciones P de siete objetos de los cuales tres son iguales multiplicado por 3! nos da el número de permutaciones de 7 objetos diferentes:

$$3!\,P = 7!$$

$$P = \frac{7!}{3!} = 840$$

Este razonamiento puede ser aplicado a los casos en que haya dos, tres o más grupos de objetos idénticos entre los n objetos.

Por tanto: "El número de permutaciones P de n objetos tomados todos a un tiempo, donde $n_1, n_2, n_3, \ldots$ de los objetos son iguales y los demás distintos, es":

$$P = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots}$$

Ejemplo: ¿Cuántas permutaciones pueden hacerse con las 11 letras de la palabra MISSISSIPPI?

Solución: Tenemos 4 I, 4 S y 2 P, por tanto:

$$P = \frac{11!}{4!\,4!\,2!} = 34{,}650$$

3. Permutaciones cuando los elementos estan ordenados en forma circular.

Hasta este momento hemos supuesto que una permutación se forma colocando un objeto tras de otro en una línea. Hay, por tanto, un primero

un último objetos. Si los objetos se arreglan en un círculo, sin embargo, no hay primero o último objeto, y las fórmulas anteriores no se aplican directamente. Un arreglo circular nos presenta un nuevo aspecto, ya que una simple rotación no cambiaría la posición relativa de los objetos entre sí. Una rotación no constituye una permutación diferente.

Para encontrar el número de maneras en que se pueden arreglar n objetos diferentes en un círculo, elegimos primeramente una posición para uno de los objetos. Después pueden colocarse los demás en sus posiciones de $(n-1)!$ diferentes maneras.

Ejemplo: ¿De cuántas maneras pueden sentarse 6 personas alrededor de una mesa circular?

$P\ circ = (n-1)!$

$P\ circ = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneras.

EJERCICIO V – 2

1. Evalúa las expresiones:

a) ${}_5P_0 =$

b) ${}_5P_1 =$

c) ${}_5P_2 =$

d) ${}_5P_3 =$

e) ${}_5P_4 =$

f) ${}_5P_5 =$

g) ${}_5P_4 = {}_5P_5$

h) ${}_nP_2 = 90,\ n = ?$

2. ¿Cuántos números pueden formarse con los dígitos 0,1,2,3,..., 9 a) de tres cifras, b) de tres cifras y menores que 700 y c) que tengan a lo más tres cifras?.

3. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila de siete asientos, 4 hombres y 3 mujeres si, a) pueden sentarse en cualquier orden y b) alternándose?.

4. ¿De cuántas maneras se pueden colocar siete cuadros diferentes en una fila sabiendo que uno de ellos debe de estar, a) en el centro, b) en uno de los extremos?.

5. Un profesor de idiomas desea mantener juntos en un estante los libros de un mismo idioma. Si tiene 12 espacios para 5 libros franceses, 4 italianos y 3 alemanes, ¿de cuántas maneras los puede colocar en el estante?.

6. ¿De cuántas maneras se pueden colocar nueve libros diferentes sobre una estantería de forma que: a) 3 de ellos estén siempre juntos y b) sin poner condición alguna.

7. Hallar los números que se pueden formar con cuatro de los 5 dígitos 1, 2, 3, 4, 5, si: a) éstos no se pueden repetir en cada número, b) sí se pueden repetir. Si los dígitos no se pueden repetir, ¿cuántos números de 4 cifras se pueden formar, c) empezando por 2 y d) terminando en 25?.

8. ¿Cuántos números comprendidos entre 3,000 y 5,000 se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4 , 5, 6, si cada dígito no se puede repetir en cada número?.

9. a) Hallar los números de cinco cifras que se pueden formar con los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, . . . 9, pudiendo éstos repetirse. ¿Cuántos de estos números, b) empiezan por 40, c) son pares, d) son divisibles por 5?.

10. Hallar cuántos números de cuatro cifras se pueden formar con los 10 dígitos 0, 1, 2, 3, 4, ... 9, si cada uno sólo se emplea una vez. ¿Cuántos de estos números son impares?.

11. Un hombre distribuye una moneda de $50.00, dos de $100.00, tres de $200.00 y cuatro de $500.00 entre 10 niños. ¿De cuántas maneras puede repartirse este dinero entre los muchachos si cada uno ha de quedarse con una moneda?.

12. Encuentre el número de permutaciones que pueden formarse usando todas las letras de las palabras, a) Alabama, b) Arkansas, c) Missisippi.

13. a) Hallar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra "cooperador" tomadas todas a la vez. ¿Cuántas de estas palabras, b) tienen juntas las tres "o" , y c) empiezan por las dos "r"?. (Las palabras no necesitan tener significado).

14. Se dispone de tres ejemplares de 4 libros diferentes. ¿De cuántas maneras se pueden colocar en una estantería?.

15. ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda?.

16. ¿De cuántas maneras pueden sentarse ocho personas alrededor de una mesa redonda, si dos personas insisten en sentarse una al lado de la otra?.

17. ¿De cuántas maneras se pueden colocar cuatro hombres y cuatro mujeres alrededor de una mesa redonda de manera que cada mujer esté entre dos hombres?.

18. Siete niños tomados de la mano forman un círculo. ¿De cuántas maneras pueden formar un círculo?. ¿De cuántas maneras pueden formar una línea?.

19. Un brazalete de una joven tiene cinco amuletos, si los saca y los pone en su tocador formando un círculo, ¿cuántos ordenamientos distintos puede tener?.

20. Cinco niños y cinco niñas forman una línea alternando niños y niñas, a) ¿de cuántas maneras pueden formar una línea ?, y b) ¿de cuántas maneras diferentes podrían formar un círculo en el que los niños y las niñas esten alternados?.

C. Combinaciones.

A diferencia de una permutación, que es una disposición ordenada de determinados objetos, una combinación es "un conjunto de objetos distintos en el que el orden de disposición carece de importancia".

Al elegir un comité dentro de un grupo de personas lo que interesa son los individuos que constituyen el comité más que cualquier arreglo de los integrantes del mismo.

La diferencia entre permutaciones y combinaciones, es la ordenación de los objetos en cuestión.

Cuando todos los elementos de un conjunto se toman a un tiempo hay tan sólo una combinación, es decir, "las combinaciones de n elementos considerados en grupos de n elementos es igual a 1".

Ejemplo: Las combinaciones de los elementos del conjunto [A,B,C] considerados en grupos de tres es una sola.

Al considerar las combinaciones de una parte de los elementos de un conjunto, obtendremos más de una manera, veamos:

Recordemos que las permutaciones de los elementos del conjunto [A,B,C] considerados en grupos de dos son:

AB, BA, AC, CA, BC y CB

es decir, son 6 permutaciones; en cambio las combinaciones

posibles son solamente 3:

AB, AC, y BC

ya que, por ejemplo, AB y BA son dos permutaciones pero una sola combinación.

1. Fórmula para obtener el número de combinaciones de los elementos de un conjunto.

Consideremos que el símbolo:

$$nCr$$

represente el número de combinaciones de n elementos tomados en grupos de r elementos a la vez.

En cada una de las nCr combinaciones, consistentes de r objetos diferentes, estos r objetos pueden reordenarse, permutándose en r! maneras distintas. Así, por cada combinación habrá r! permutaciones.

De modo que para las nCr combinaciones habrá:

r! nCr permutaciones diferentes

Puesto que éstas constituyen todas las permutaciones posibles de los n objetos, tomados de r en r, tenemos:

$$r!\, nCr = nPr$$

$$nCr = \frac{nPr}{r!}$$

o bien:

$$nCr = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Nota: Hay exactamente r factores tanto en el numerador como en el denominador.

Si hacemos que $r = n$, en la fórmula anterior, obtendremos:

$$nCn = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-n+1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Lo que confirma lo dicho, de que sólo existe una combinación de n objetos considerados en grupos de n objetos.

Ejemplo 1. ¿Cuántos sub-conjuntos de 3 elementos, combinaciones de 3 diferentes elementos, pueden formarse con los elementos del conjunto {a, b, c, d, e} ?

Analizando el problema, encontramos:

{a, b, c, }	{a, c, d}	{b, c, e}	{c, d, e}
{a, b, d}	{a, c, e}	{a, d, e}	
{a, b, e}	{b, c, d}	{b, d, e}	

Ninguno de estos 10 sub-conjuntos contiene los mismos elementos que otro.

Cada uno de ellos permite las 3! permutaciones, de tal modo que nos darán 10 (3!), o sea, 60 permutaciones de 3 elementos escogidos entre 5 elementos.

Recordemos que: $_5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ permutaciones.

Por lo anteriormente dicho, tenemos:

$$_5C_3 \cdot (3!) = {}_5P_3$$

$$_5C_3 = \frac{_5P_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10 \text{ combinaciones.}$$

Ejemplo 2. ¿De cuántos modos podemos seleccionar 3 folletos diferentes de viaje, de un conjunto de 12 folletos diferentes?

$$_{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220 \text{ modos}$$

2. **Simplificación de la fórmula nCr.-**

Si n es relativamente grande y $r \leqslant n$, pero también grande, la expresión puede simplificarse, utilizando:

$$nCr = nC\,n-r$$

En efecto, el número de sub-conjuntos de r elementos seleccionados de un conjunto de n elementos, donde $n > r$, es exactamente el mismo que el número de sub-conjuntos de $(n-r)$ elementos seleccionados del mismo conjunto de n elementos. Cada vez que tomamos un conjunto de r elementos del conjunto n, nos queda otro conjunto de $(n-r)$ elementos.

Ejemplo. Evaluar la expresión:

$$_{52}C_{48} = \frac{52.51.50.49.(\cancel{48.47.46\ldots\ldots6.5})}{(\cancel{48.47.46\ldots\ldots6.5})\,4.3.2.1}$$

$$_{52}C_{48} = {}_{52}C_{52-48} = {}_{52}C_4 = \frac{52.51.50.49}{4.3.2.1} = 270{,}725$$

La fórmula $nCr = nC\,n-r$ nos hace ver el significado de nCo, puesto que:

$$\begin{aligned} &\text{Si } n = r, \text{ tenemos:} \\ &nCn = nC\,n-n \\ &nCn = nCo \\ \text{y como } &nCn = 1, \text{ nos queda:} \\ &nCo = 1 \end{aligned}$$

Esto significa que, solamente existe un sub-conjunto de un conjunto dado que no tenga ningún elemento: el conjunto vacío ϕ .

Es decir, hay solamente una manera de no seleccionar ningún elemento de un conjunto de n elementos.

3. **Número total de combinaciones de n objetos tomando algunos o todos a la vez.**

Consideremos un conjunto de n elementos; deseamos saber el número total de sub-conjuntos que contiene uno o más, o todos, de los n elementos del conjunto.

El número total es:

$$nC_1 + nC_2 + nC_3 + \cdots + nCn$$

Ejemplo: Un estudiante tiene seis textos diferentes, ¿De cuántas formas puede llevar uno, o varios, o todos, a la escuela?

Escogiendo 1 cada vez: ${}_6C_1 = 6$
Escogiendo 2 cada vez: ${}_6C_2 = 15$
Escogiendo 3 cada vez: ${}_6C_3 = 20$
Escogiendo 4 cada vez: ${}_6C_4 = 15$
Escogiendo 5 cada vez: ${}_6C_5 = 6$
Escogiendo 6 cada vez: ${}_6C_6 = 1$
Total $= 63$

Podríamos haber llegado a este mismo resultado razonando en la forma siguiente: para cada libro podemos escoger dos caminos; o tomarlo para llevarlo, o dejarlo, lo que hace:

$$2^6 = 64 \text{ combinaciones}$$

Pero esto incluye la combinación en donde todos los seis libros hubieran sido dejados en la casa; así pues, tendremos:

$$2^6 - 1 = 64 - 1 = 63 \text{ combinaciones}$$

De esto obtendremos una fórmula para determinar el número total de combinaciones de n objetos tomando algunos o todos a la vez:

$$nC_{(1,2,\ldots n)} = 2^n - 1$$

EJERCICIO V – III

1. **Evalúe las siguientes expresiones:**

a) ${}_5C_0 =$ e) ${}_5C_4 =$

b) ${}_5C_1 =$ f) ${}_5C_5 =$

c) ${}_5C_2 =$ g) ${}_8C_5 = {}_8C_3$

d) ${}_5C_3 =$ h) $nC_2 = 15,\ n = ?$

2. En un curso de 15 muchachos y 10 señoritas, ¿de cuántas maneras puede formarse un comité de 3 muchachos y 2 señoritas?.

3. En un examen, el alumno debe contestar 8 de un total de 12 preguntas, debiendo incluir exactamente 5 de entre las 6 primeras. ¿De cuántas maneras puede hacer su examen?.

4. Si dos puntos determinan una línea recta, ¿cuál es el mayor número de líneas determinadas por diez puntos distintos en el espacio?.

5. ¿De cuántos modos distintos puede seleccionarse una comisión de dos hombres y dos mujeres de entre un grupo de 8 hombres y 6 mujeres?.

6. Si viven diez familias en un edificio de departamentos, ¿de cuántas maneras distintas podrá seleccionar un encuestador del censo a 4 familias para entrevistarlos?.

7. ¿Cuántos grupos de cuatro alumnos se pueden formar con 17 alumnos para representar a una escuela en un concurso de preguntas de matemáticas?.

8. ¿De cuántas maneras se pueden elegir cinco idiomas de entre ocho?.

9. ¿De cuántas formas se pueden repartir doce libros entre dos personas, A y B, de manera que a uno le toquen 9 y al otro 3?.

10. ¿De cuántas maneras se pueden elegir tres hombres de entre un grupo de quince, de forma que: a) uno de ellos debe figurar en cada grupo seleccionado, b) dos de ellos no deben figurar en cada grupo seleccionado, c) uno de ellos debe, y otros 2 no deben, figurar en cada grupo.

11. ¿Cuántos grupos de siete miembros se pueden formar con 6 químicos y 5 biólogos de manera que en cada uno se encuentren 4 químicos?.

12. ¿Cuántos grupos diferentes de dos hombres y una mujer se pueden formar con: a) 7 hombres y 4 mujeres, b) 5 hombres y 3 mujeres?.

13. ¿Cuántas diagonales tiene un octágono?.

14. En una reunión, después de que cada uno de los asistentes saludó una sola vez a cada uno de los restantes, se realizaron 45 salutaciones. Hallar el número de las personas que había en la reunión.

15. ¿En cuántas formas pueden seleccionarse cinco listones del mismo color de entre siete listones azules y ocho blancos?.

16. ¿Cuántos grupos de más de siete personas pueden formarse con diez personas?.

17. ¿Cuántos grupos de menos de cuatro personas pueden formarse con diez personas?.

18. ¿De cuántas maneras se puede colorear un cuadro con siete colores diferentes?.

19. ¿Cuántos grupos se pueden formar con ocho mujeres sabiendo que en cada uno de ellos debe haber por lo menos tres?.

20. ¿De cuántas maneras puede una señora invitar a merendar a: a) dos amigas, b) tres amigas, c) dos o más de sus ocho amigas?.

RESUMEN

Principio fundamental de Conteo:

Si un evento puede producirse de h_1 modos, y después de ello, un segundo evento puede producirse de h_2 modos distintos, y un tercero ocurre de h_3 modos diferentes, y por último, un n-ésimo evento ocurre de h_n modos diferentes; entonces, los n sucesos pueden ocurrir en el mismo orden indicado de:

$$h_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \; \ldots \; h_n \text{ modos diferentes}$$

Permutaciones:

Una permutación es cada una de las maneras posibles diferentes en que pueden ser ordenados los elementos de un conjunto finito.

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, tomados todos a la vez son:

$${}_nP_n = n!$$

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, tomando sólo una parte (r) de los objetos son:

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ siendo } n > r$$

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, cuando algunos de los objetos están repetidos:

" El número de permutaciones P de n objetos tomados todos a un tiempo, donde n_1, n_2, n_3. . . . de los objetos son iguales y los demás distintos es:"

$$P = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots}$$

Las permutaciones de n objetos distintos de un conjunto, cuando están ordenados en forma circular:

$$P \text{ circ.} = (n-1)!$$

Combinaciones:

Una combinación es un conjunto de objetos distintos considerados en cualquier orden.

La diferencia entre permutaciones y combinaciones es la ordenación de los objetos en cuestión.

Las combinaciones de n objetos distintos, tomados todos a un tiempo:

" Las combinaciones de n objetos considerados en grupos de n objetos es igual a 1 ".

$${}_nC_n = 1$$

Las combinaciones de n objetos distintos de un conjunto, tomando sólo una parte (r) de los objetos son:

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

Nota: **Hay exactamente r factores tanto en el numerador como en el denominador.**

Simplificación de la fórmula ${}_nC_r$:

Si n es relativamente grande y r también, la expresión puede simplificarse, utilizando:

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

Número total de combinaciones de n objetos tomando algunos o todos a la vez:

" Consideremos un conjunto de n elementos en que deseamos saber el número total de sub-conjuntos que contiene uno o más, o todos los n elementos del conjunto:"

El número total es:

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \dots + {}_nC_n$$

o también:

$${}_nC_{(1,2,3\dots n)} = 2^n - 1$$

AUTOEVALUACION

I. Principio fundamental de Conteo:

1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Si lanzamos tres monedas al aire, ¿en cuántas formas diferentes pueden caer?

b) Un estudiante tiene que elegir un idioma y una materia, de entre tres idiomas y dos materias. Hallar el número de formas distintas en que puede hacerlo.

II. Permutaciones.

a) Calcular:

$${}_7P_3 =$$

$${}_3P_3 =$$

$${}_3P_0 =$$

b) ¿Cuántas permutaciones se pueden hacer con las letras de la palabra MARTES, si:

1) Cuatro letras son usadas a un tiempo.
2) Se usan todas las letras.
3) Se usan todas las letras eligiendo una vocal para la primera posición.

c) ¿De cuántas maneras se pueden ordenar las letras de la palabra SINUSITIS?.

d) ¿Cuántos ordenamientos diferentes podemos tener cuando una familia de cinco miembros se sienta a comer en una mesa redonda?.

III. Combinaciones.

a) Calcular:

$_3C_0 =$

$_7C_5 =$

b) ¿De cuántas maneras se puede elegir un comité de cinco personas de entre ocho?.

c) ¿Cuántos grupos de menos de cuatro personas pueden formarse con seis personas?.

d) ¿De cuántas maneras se puede colorear un mapa con cinco colores diferentes?.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

I. Principio fundamental de Conteo:

a) 8 formas.

b) 6 formas.

II. Permutaciones:

a) 210, 6, 1

b) 1) 360 2) 720 3) 240

c) 10,080

d) 24

III. Combinaciones:

a) 1, 21

b) 56

c) 41

d) 31

ANEXO

SOLUCIONES

EJERCICIO I - 1

1. a) $18i$
   b) $15i\sqrt{2}$
   c) $2i\sqrt{6}$
   d) $6i\sqrt{2}$
   e) $i\sqrt{6}$
   f) $\frac{1}{6}\, i\sqrt{6}$
   g) $5i$
   h) $\frac{1}{2}\, i$

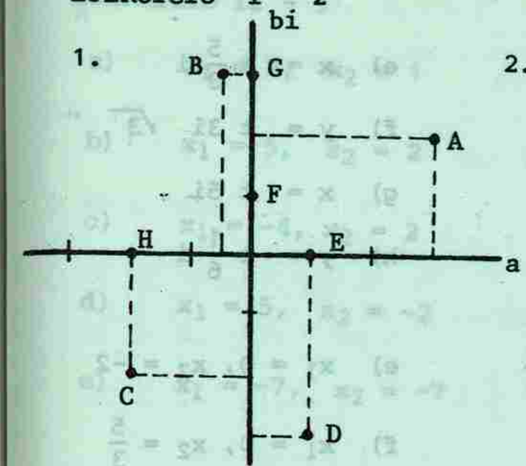
2. a) $3i\sqrt{3}$
   b) $7i\sqrt{6}$
   c) $5i$
   d) $\frac{9}{10}\, i\sqrt{5}$
   e) 0

3. a) -15
   b) -100
   c) 5
   d) -5
   e) 24

4. a) 3
   b) 2
   c) $\frac{1}{2}$
   d) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   e) $\frac{5}{3}\sqrt{15}$

EJERCICIO I - 2

1.



2. a) $11 + i$
   b) $\frac{5}{4} + \frac{7}{8}\, i$
   c) $3 + 12i$
   d) $14i$
   e) $7 + 5i$

3. a) $2 + 5i$
   b) $7 - 8i$
   c) $14i$
   d) $-4i$
   e) $-3 + 4i$

4. a) $5 + 10i$
   b) $16 + 30i$
   c) 5
   d) $14 + 5i$
   e) -34

5. a) $\frac{3}{10} - \frac{1}{10}\, i$
   b) $\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\, i$
   c) $\frac{16}{73} + \frac{6}{73}\, i$
   d) $-\frac{2}{13} + \frac{23}{13}\, i$
   e) $\frac{1}{7} + \frac{4}{7}\, i\sqrt{3}$

EJERCICIO II - 1

1. a) $x = \pm \frac{1}{2}$

b) $x = \pm \frac{1}{2}$

c) $x = \pm \frac{1}{10}$

d) $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$

e) $x = \pm \frac{5}{3} i$

f) $y = \pm 3i \quad \sqrt{3}$

g) $x = \pm 5i$

h) $y = \pm \frac{1}{6} i$

2. a) $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{5}{3}$

b) $x_1 = 0, \quad x_2 = 1$

c) $x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

d) $y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{3}$

e) $x_1 = 0, \ x_2 = -2$

f) $x_1 = 0, \ x_2 = \frac{5}{3}$

g) $y_1 = 0, \ y_2 = 7$

h) $x_1 = 0, \ x_2 = -3$

EJERCICIO II - 2

a) $x_1 = -\frac{2}{3}, \quad x_2 = \frac{3}{2}$

b) $x_1 = -2, \quad x_2 = 3$

c) $x_1 = -3, \quad x_2 = 2$

d) $x_1 = -2.5, \ x_2 = 1$

e) $x_1 = x_2 = 1.5$

f) $x_1 = -5, \ x_2 = -1$

g) $x_1 = -4, \ x_2 = 1.5$

h) $x_1 = -1.1, \ x_2 = 3.6$

EJERCICIO II - 3

a) $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

b) $x_1 = 5, \quad x_2 = 2$

c) $x_1 = -4, \ x_2 = 2$

d) $x_1 = 5, \quad x_2 = -2$

e) $x_1 = -7, \quad x_2 = -7$

f) $x_1 = \frac{3}{8}, \quad x_2 = \frac{2}{5}$

g) $x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -2$

h) $x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = \frac{3}{2}$

i) $x_1 = -\frac{1}{2}, \ x_2 = 4$

j) $x_1 = -\frac{3}{2}, \ x_2 = 2$

EJERCICIO II - 4

a) $x_1 = \frac{7}{2}, \ x_2 = -\frac{3}{2}$

b) $x_1 = -\frac{3}{2}, \quad x_2 = -2$

c) $x_1 = 1, \quad x_2 = -6$

d) $x_1 = 2, \ x_2 = \frac{1}{2}$

e) $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$

f) $x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}$

g) $x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{5}{2}$

h) $x_1 = 1, \quad x_2 = -2$

EJERCICIO II - 5

a) $x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -3$

b) $x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = -2$

c) $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

d) $y_1 = y_2 = -\frac{3}{2}$

e) $x_1 = 6, \quad x_2 = -1$

f) $x_1 = 3, \quad x_2 = -2$

g) $x_1 = 2, \ x_2 = -\frac{4}{3}$

h) $x_1 = x_2 = \frac{1}{4}$

i) $x_1 = 1 + \sqrt{2}, \ x_2 = 1 - \sqrt{2}$

j) $x_1 = 2 + \sqrt{3}, \ x_2 = 2 - \sqrt{3}$

k) $x_1 = 5, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$

l) $x_1 = 1 + 3i, \quad x_2 = 1 - 3i$

m) $y_1 = -1 + 2i, \quad y_2 = -1 - 2i$

n) $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} i, \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} i$

o) $x_1 = 4 + 3i, \quad x_2 = 4 - 3i$

p) $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} i, \quad x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} i$

q) $x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3}, \quad x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3}$

r) $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i, \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} i$

EJERCICIO II - 6

a) C. S. $\{ \sqrt{5}, -\sqrt{5}, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2} \}$

b) C. S. $\{ 2, -2, i - i \}$

c) C. S. $\{ 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \}$

d) C. S. $\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 - 1 \}$

e) C. S. $\{ \frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \}$

f) C. S. $\{ \frac{2}{3}, -1 \}$

g) C. S. $\{ \frac{3}{2}, -\frac{2}{3} \}$

h) C. S. $\{4, -4, 3, -3\}$

i) C. S. $\{3, -3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

j) C. S. $\{\frac{3}{2}, -1\}$

k) C. S. $\{2, -1\}$

l) C. S. $\{-2\}$

m) C. S. $\{8, -64\}$

n) C. S. $\{1, 8\}$

EJERCICIO II - 7

a) C. S. $\{2\}$

b) C. S. $\{0\}$

c) C. S. $\{1, 7\}$

d) C. S. $\{16\}$

e) C. S. $\{6\}$

f) C. S. $\{5\}$

g) C. S. $\{-2\}$

h) C. S. $\{0\}$

i) C. S. $\{3\}$

j) C. S. $\{6\}$

EJERCICIO II - 8

1.

a) C. S. $\{4, 17\}$

b) C. S. $\{3, 5, -\frac{11}{5}, -\frac{27}{5}\}$

c) C. S. $\{5, 6, 7, -5, -6, -7\}$

d) C. S. $\{\frac{2}{3}, 1\}$

e) C. S. $\{-1, 6\}$

2.

a) 10 x 15

b) 16, 30

c) 4 x 18

d) 15, 20

e) 10

3.

a) 200 km/hr.

b) 35 km/hr.

c) V ida = 50 km/hr.
V reg = 60 km/hr.

4.

a) A tarda 7.5 hr.
B tarda 5 hr.

b) A tarda 22.8 días
B tarda 17.8 días

c) A tarda 6 hr.
B tarda 12 hr.

EJERCICIO III - 1

a) C.S. $\{(0,5), (4,3)\}$

b) C.S. $\{(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}), (6, -1)\}$

c) C.S. $\{(-1 - 2i, 2 + 3i), (-1 + 2i, 2 - 3i)\}$

d) C.S. $\{(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}), (2, -1)\}$

e) C.S. $\{(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}), (-1, -5)\}$

f) C.S. $\{(\frac{9}{5}, \frac{4}{5}), (-1, -2)\}$

g) C.S. $\{(-\frac{5}{12}, \frac{13}{12}), (0, 1)\}$

h) C.S. $\{(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}), (\frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2})\}$

i) C.S. {47 y/o 74}

j) C.S. { 3 y 6 y/o 6 y 3 }

k) C.S. { 8 x 12 }

l) C.S. { 676 }

EJERCICIO III - 2

a) C.S. $\{(2,6), (-2, -6), (6,2), (-6, -2)\}$

b) C.S. $\{(2\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$

c) C.S. $\{(4, \frac{3}{2}), (-4, -\frac{3}{2}), (3,2) (-3, -2)\}$

d) C.S. $\{(4,0), (-6, -2i\sqrt{5})\}$

e) C.S. $\{(-\frac{8}{3}, \frac{35}{9}), (3, 2)\}$

f) C.S. $\{(6, \frac{8}{3}), (2, 8)\}$

g) C.S. {20 sombreros a \$5.00 c/u }

h) C.S. {75 acciones a \$25.00 c/u }

EJERCICIO III - 3

a) C.S. $\{(3,2), (-3, -2), (3, -2), (-3, 2)\}$

b) C.S. $\{(1,3), (1, -3), (-1, -3), (-1, 3)\}$

c) C.S. $\{(2i, i\sqrt{3}), (2i, -i\sqrt{3}), (-2i, i\sqrt{3}), (-2i, -i\sqrt{3})\}$

d) C.S. $\{(2,1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)\}$

e) C.S. $\{(\sqrt{7}, 3), (\sqrt{7}, -3), (-\sqrt{7}, 3), (-\sqrt{7}, -3)\}$

f) C.S. $\{(6,3), (6, -3), (-6, 3), (-6, -3)\}$

g) C.S. $\{(2,3), (2, -3), (-2, 3), (-2, -3)\}$

h) C.S. $\{(\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, -1), (-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -1)\}$

i) C.S. $\{(2, \sqrt{5}), (2, -\sqrt{5}), (-2, \sqrt{5}), (-2, -\sqrt{5})\}$

j) C.S. $\{(1, \sqrt{2}), (1, -\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2})\}$

EJERCICIO III - 4

a) C.S. $\{(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), (-1, 2), (1, -2)\}$

b) C.S. $\{(1,0), (-1, 0), (1, -1), (-1, 1)\}$

c) C.S. $\{(2,1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1)\}$

d) C.S. $\{(4,1), (-4, -1)\}$

e) C.S. $\{(1,3), (-1, -3), (3,1), (-3, -1)\}$

f) C.S. $\{(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0), (2, 1), (-2, -1)\}$

g) C.S. $\{(\sqrt{15}, 0), (-\sqrt{15}, 0), (1, -2), (-1, 2)\}$

h) C.S. $\{(-1, 2), (1, -2), (2, 1), (-2, -1)\}$

i) C.S. $\{84\}$

j) C.S. $\{\pm 8, \pm 6\}$

EJERCICIO IV - 1

1.

a) $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ldots$

b) $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

d) $2, 4, 8, 16, \ldots$

e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

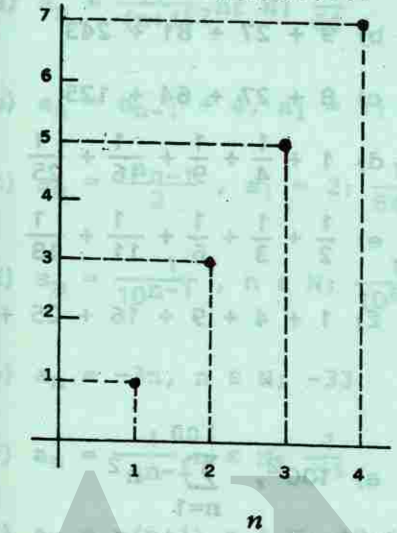
f) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

g) $1, \frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{16}{17}, \ldots$

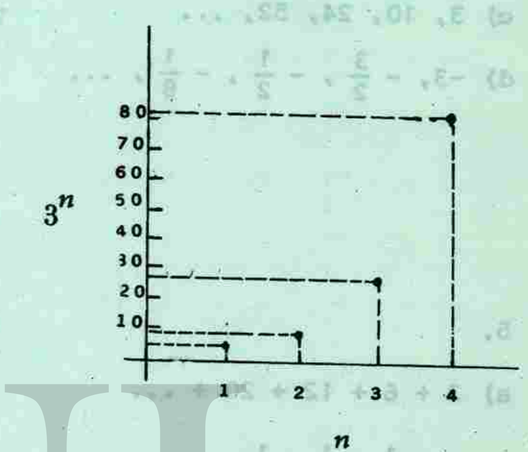
h) $1, 8, 27, 64 \ldots$

2. Graficar las sucesiones, $n \in N$:

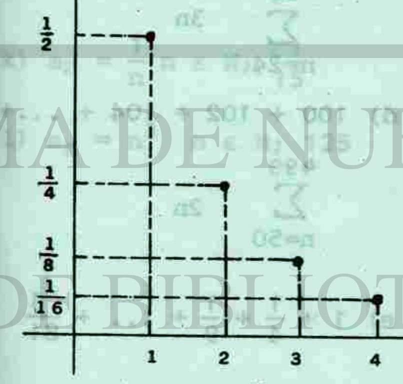
a) $\{2n-1\} = 1,3,5,7,\ldots$



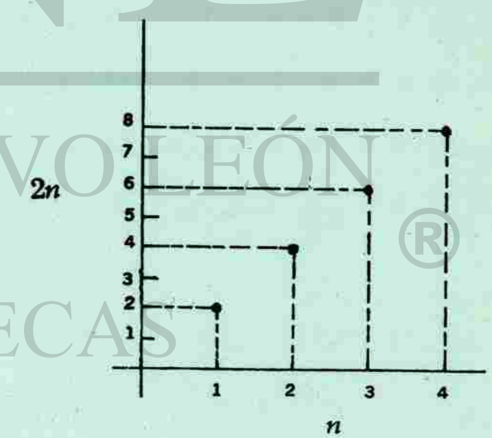
b) $\{3^n\} = 3,9,27, 81,\ldots$



c) $\{(\frac{1}{2})^n\} = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$



d) $\{2n\} = 2,4,6,8, \ldots$



3.

a) $1,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots$

b) $5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8}, \ldots$

c) $3,\ 10,\ 24,\ 52, \ldots$

d) $-3,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{8}, \ldots$

4.

a) $3 + 4 + 5 + 6 + 7$

b) $9 + 27 + 81 + 243$

c) $8 + 27 + 64 + 125$

d) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$

e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{18}$

f) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36$

5.

a) $2 + 6 + 12 + 20 + \ldots$

b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

c) $\frac{1}{2} + 2 + \frac{9}{2} + 8 + \ldots$

d) $0 + 1 + 3 + 6 + \ldots$

6.

a) $100^2,\ \sum_{n=1}^{100} n^2$

b) $100^{101},\ \sum_{n=1}^{100} n^{n+1}$

c) $72 + 75 + 78 + \ldots + 168,$

$$\sum_{n=24}^{56} 3n$$

d) $100 + 102 + 104 + \ldots + 998$

$$\sum_{n=50}^{499} 2n$$

e) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{81}$

$$\sum_{n=1}^{9} \left(\frac{1}{n}\right)^2$$

7.

a) $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ $n \in N$; $\frac{1}{64}$

b) $a_n = a_{n-1} + 4$, $a_1 = 1$; 37

c) $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, $a_1 = 2$; $\frac{1}{64}$

d) $a_n = \frac{1}{10^{n-1}}$, $n \in N$; $\frac{1}{10^8}$

e) $a_n = -3n$, $n \in N$; -33

f) $a_n = \frac{1}{5^{n-1}}$ $n \in N$; $\frac{1}{5^9}$

g) $a_n = n(n+1)$ $n \in N$; $13 \cdot 14$

h) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ $n \in N$; $\frac{1}{2^9}$

i) $a_n = 3^n$ $n \in N$; 3^8

j) $a_n = 2n-1$ $n \in N$; 17

k) $a_n = \frac{1}{n}$ $n \in N$; $\frac{1}{15}$

l) $a_n = n^3$ $n \in N$; 125

EJERCICIO IV - 2

1.
a) $a_n = 13$; $S_n = 49$; 1,3,5,7,9,11,13

b) $a_n = 4$; $S_n = 39$; 9,8,7,6,5,4.

c) $d = -5$; $S_n = 60$; 22,17,12,7,2

d) $d = 5.6$; $S_n = -18$; -17, -11.4, -5.8, -0.2, 5.4, 11

e) $a_1 = 51$; $S_n = 156$; 51, 41, 31, 21, 11,1

f) $a_1 = 17$; $d = -2$; 17, 15, 13, 11, 9,7, 5,3

g) $d = 3$; $a_n = 13$; -5, -2, 1,4,7,10,13

h) $n = 6$; $S_n = 156$; 1, 11,21,31,41,51

i) $d = -3$; $n = 7$; 10,7,4,1, -2,-5,-8

j) $a_1 = 2$; $n = 8$; 2,5,8,11,14,17,20,23

2.
a) $d = -5$; $S = 245$; 47,42,37,32,27,22,17,12,7,2.

b) $d = 3$; $S = 119$; 8,11,14,17,20,23,26

c) $d = 3$; $S = 99$; 9,12,15,18,21,24

d) $d = \frac{2}{3}$; $S = 0$; -1, -1/3, 1/3, 1.

e) $d = \frac{1}{6}$; $S = 0$; $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{6}$, 0, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$

3. $a_{28} = 30$

4. $S_{22} = -979$

5. $n = 27$

6. $n = 38$; $S_n = 6,973$

7. $a_1 = -\frac{5}{2}$

8. $n = 55$

9. $n_1 = 15$, $n_2 = 10$

10. $S_n = 2,430$

11. $S_n = 1,530$

12. $S_n = 2,475$

13. $S_n = 624$

14. $S_n = 1,683$

15. $S_n = 104,850$

16. $S_n = 3,875$

17. $n = 81$

18. $n = 33$

19. $S_n = 585$

20. $S_n = 8,910$

EJERCICIO IV - 3

1.
a) $a_n = 32$; $S_n = 62$; 2,4,6,8,16,32

b) $a_n = 256$; $S_n = 341$; 1,4,16,64,256

c) $n = 7$; $S_n = 43$; 1, -2,4,-8,16,-32,64

d) $n = 7$; $S_n = 21.5$; $\frac{1}{2}$, -1, 2, -4, 8, -16, 32

e) $r = \frac{1}{3}$; $S_n = 363$; 243, 81, 27, 9, 3

f) $a_1 = 2^8$; $S_n = 511$; 2^8, 2^7, 2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0

g) $r = 2$; $n = 5$; 2,4,8,16,32

h) $a_1 = 1$; $n = 7$; 1, -2,4,-8,16,-32,64

i) $n = 10$; $a_n = -256$; $\frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, 128, -256$

j) $a_1 = 3125$; $S_n = 3{,}906.2$; $3{,}125, 625, 125, 25, 5, 1, \frac{1}{5}$

2.

a) $2, 6, 18, 54, 162$; $S_n = 242$

b) $128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1$; $S_n = 255$

c) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, -4, 8$; $S_n = 5.25$

d) $\frac{8}{9}, 4/3, 2, 3, 9/2, 27/4$; $S_n = \frac{665}{36}$

e) $9, 18, 36, 72, 144, 288, 576$; $S_n = 1143$

3.

a) $\sum_{n=1}^{9} 2^{n-1} = 511$ b) $\sum_{n=1}^{8} 3^{n-1} = 3{,}280$

4. $n = 13$

5. $x = 8$

6. $a_n = 1620$

7. 49,1

8. $a_2 = \frac{5}{4}$

9. $S_n = 199.21875$

10. $S_n = 1.111111111$

11. 3,15,75,375,1875

12. $a_n = 531{,}441$ N

13. $a_n = 256$ N

14. El 2o plan le dará un mejor ingreso durante el 5o. año

El 1o. plan le dará un mejor ingreso total en el periodo de 5 años.

15. $a_n = \$651.85$

16. \$12,150.00

17. $p = 3/4$

18. P.A. = 2,5,8
P.G. = 3,9,27; r = 3

19. $a_{15} = \$9'565{,}938.00$

20. $a_{40} = \$5{,}497'558{,}000.00$

$S_n = \$10{,}995'115{,}999.99$

EJERCICIO IV - 4

a) $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

b) $32a^5 - 80a^4b + 80a^3b^2 - 40a^2b^3 + 10\,ab^4 - b^5$

c) $x^4 - \frac{8x^3}{y} + \frac{24x^2}{y^2} - \frac{32x}{y^3} + \frac{16}{y^4}$

d) $x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{16}x - \frac{1}{32}$

e) $\frac{x^4}{81} - \frac{2}{27}x^3y + \frac{1}{6}x^2y^2 - \frac{1}{6}xy^3 + \frac{y^4}{16}$

f) $\frac{a^6}{b^6} + \frac{6a^4}{b^4} + \frac{15a^2}{b^2} + 20 + \frac{15b^2}{a^2} + \frac{6b^4}{a^4} + \frac{b^6}{a^6}$

g) $a^6 + 6a^3 + 15 + \frac{20}{a^3} + \frac{15}{a^6} + \frac{6}{a^9} + \frac{1}{a^{12}}$

h) $x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$

i) $\frac{1}{x^6} + \frac{6}{x^5y^2} + \frac{15}{x^4y^4} + \frac{20}{x^3y^6} + \frac{15}{x^2y^8} + \frac{6}{xy^{10}} + \frac{1}{y^{12}}$

j) $\frac{x^5}{32} + \frac{5x^3}{8} + 5x + \frac{20}{x} + \frac{40}{x^3} + \frac{32}{x^5}$

k) $64x^6 - 96x^5y + 60x^4y^2 - 20x^3y^3 + \frac{15}{4}x^2y^4 - \frac{3}{8}xy^5 + \frac{y^6}{64}$

l) $x^8 - 12x^5 + 54x^2 - \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$

m) $\frac{1}{x^{10}} - \frac{5y^2}{x^8} + \frac{10y^4}{x^6} - \frac{10y^6}{x^4} + \frac{5y^8}{x^2} - y^{10}$

n) $\frac{1}{x^{10}} - \frac{5y^2}{x^8} + \frac{10y^4}{x^6} - \frac{10y^6}{x^4} + \frac{5y^8}{x^2} - y^{10}$

o) $x^3 + 6x^2y\sqrt{x} + 15x^2y^2 + 20xy^3 \sqrt[2]{x} + 15xy^4 + 6y^5 \sqrt[2]{x} + y^6$

p) $x^6 - 6x^5 \sqrt[2]{y} + 15x^4y^2 - 20x^3y\sqrt[2]{y} + 15x^2y^2 - 6xy^2 \sqrt[2]{y} + y^3$

q) $64x^6 - \frac{192x^5}{y^2} + \frac{240x^4}{y^4} - \frac{160x^3}{y^6} + \frac{60x^2}{y^8} + \frac{12x}{y^{10}} + \frac{1}{y^{12}}$

r) $x^6 - 4x^4 \sqrt[2]{x} + 6x^3 - 4x \sqrt[2]{x} + 1$

s) $1 - 4 \sqrt[2]{x} + 6x - 4x \sqrt[2]{x} + x^2$

t) $a^{10} + 5a^9 b + \frac{45}{4} a^8b^2 + 15a^7 b^3 + \frac{105}{8} a^6 b^4 + \frac{63}{8}a^5b^5 +$

$\frac{105}{32} a^4 b^6 + \frac{15}{16} a^3b^7 + \frac{45}{256} a^2b^8 + \frac{5}{256} ab^9 + \frac{b^{10}}{1024}$

EJERCICIO IV - 5

a) 70

b) $145,152x^6y^3$

c) $165a^3$

d) $-\frac{63}{16} x^8$

e) $210a^4$

f) $495x^8y^{16}$

g) $-\frac{21}{x^{16}}$

h) $-\frac{792}{x^7}$

i) -252

j) $90,720\ x^4y^4$

k) $924\ a^6b^6$

l) $-160x^3y^3$

m) 70 ; $r = 5$

n) 84 ; $r = 7$

o) $\frac{63}{8} a^5b^5$; $r = 6$

p) $-\frac{5}{54} x^3y^3$; $r = 4$

EJERCICIO V - 1

1. a) 12
   b) 24
2. a) 20
   b) 25
3. a) 36
   b) 1920
4. a) 120
   b) 196
5. a) 60; b) 24
   c) 36; d) 12
6. a) 100
   b) 48
7. 9,000
8. 20
9. 96
10. 48
11. 60
12. 81
13. 16
14. 216
15. 32
16. 20
17. a) 90
    b) 100
18. a) 56
    b) 64
19. 625,000
20. 20 Mil Millones

EJERCICIO V - 2

1. a) 1
   b) 5
   c) 20
   d) 60
   e) 120
   f) 120
   g) 120
   h) n = 10
2. a) 900
   b) 600
   c) 999
3. a) 5,040
   b) 144
4. a) 720
   b) 1440
5. 103,680
6. a) 30,240
   b) 362,880
7. a) 120
   b) 625
   c) 24
   d) 6
8. 240
9. a) 90,000
   b) 1,000
   c) 45,000
   d) 18,000

10. a) 4,536
    b) 2,240

11. 12,600

12. a) 210
    b) 3,360
    c) 34,650

13. a) 302,400
    b) 20,160
    c) 6,720

14. 369,600

15. 5,040

16. 1,440

17. 144

18. a) 720
    b) 5,040

19. 24

20. a) 28,800
    b) 2,880

EJERCICIO V - 3

1. a) 1
   b) 5
   c) 10
   d) 10
   e) 5
   f) 1
   g) si
   h) n = 6

2. 20,475

3. 120

4. 45

5. 420

6. 210

7. 2,380

8. 56

9. 440

10. a) 91
    b) 286
    c) 66

11. 150

12. a) 84
    b) 30

13. 20

14. 10

15. 77

16. 56

17. 175

18. 127

19. 219

20. 247

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Fuller, Gordon, Algebra Elemental, CECSA, México 1986.

Hart William L., College Algebra, D.C., Heat & Co. Boston 1953.

Lara Aparicio Miguel, Antología de matemáticas, Lecturas Universitarias, UNAM, México 1971.

Lovaglia, Florence M., Algebra, Harla, S.A. de C.V., Harper & Row Latinoamericana, México 1972.

Northrop Eugene P., Paradojas matemáticas, UTEHA, México 1977.

Peters, Max William, Schaaf, Algebra y Trignometría, Editorial Reverté Mexicana, México 1973.

Rees, Paul K. – Sparks Fred W., Algebra. Editorial Reverté Mexicana, Mexico 1970.

Rees y Sparks, Algebra Contemporanea, Mc Graw – Hill, México 1980.

R. Spiegel Murray, Algebra Superior, Serie Schaum, Mc. Graw Hill, México 1970.

Turner, V. Dean – Prouse Howard I., Introducción a las matemáticas, Editorial Trillas, México 1975.

Vance, Elbridge P., Introducción a la Matemática moderna, Addison - Wesley Publishing Co., Massachusetts 1966.

Wells Webster, Advanced Course in Algebra, D.C. Heath & Co. Boston
