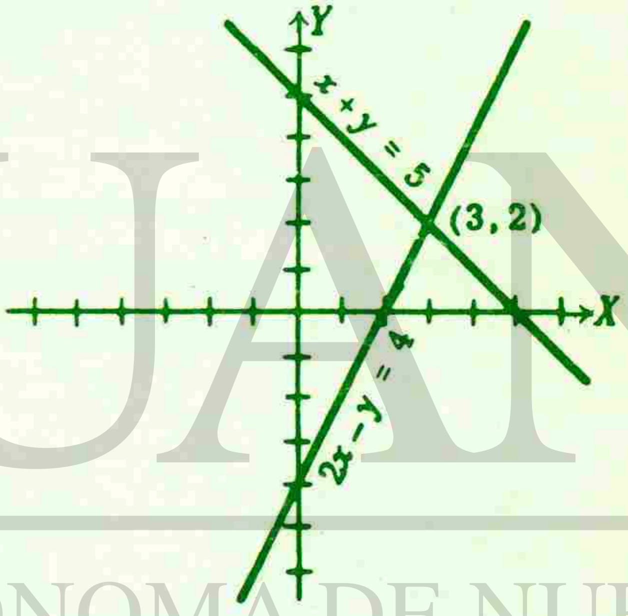
MATEMATICAS II



ESTELA JAIMES AGUILAR

MATEMATICAS II

ESTELA JAIMES AGUILAR

EL PRESENTE SEMESTRE MARCA UN

ASCENSO EN TU TRAYECTORIA DE ESTUDIANTE,

LA CIMA ESTA MENOS LEJANA

PROLOGO

Desde sus inicios, el algebra constituye una herramienta fundamental para hurgar en cualquier rama del conocimiento.

En la adquisición de dicha herramienta, el presente trabajo trata de ayudar al estudiante, cubriendo los objetivos señalados por la Comisión Académica del H. Consejo Universitario, la cual los ha agrupado en cuatro capítulos cuyos títulos indican el contenido.

Capítulo I	Operaciones con fracciones algebraicas
Capítulo II	Funciones y relaciones
Capítulo III	Funciones lineales
Capítulo IV	Sistemas de ecuaciones lineales

CONTENIDO

Capítulo I

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Hypatia mujer griega (400 d. C.) es considerada como la primera matemática.

Capítulo I

OPERACIONES CON FRACCIONES ALGEBRAICAS

Hypatia mujer griega (400 d. C.) es considerada como la primera matemática.

CAPITULO I

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1.1 INTRODUCCION

Es el tema de fracciones a desarrollar en esta unidad, uno de los de más amplia aplicación en la vida diaria y en la mayoría de las ramas del conocimiento, motivo por el cual hay que aprender a manejarlas correctamente.

1.2 FRACCIONES

Definiciones

La división entre dos cantidades x e y expresada en la forma $\frac{x}{y}$, se llama fracción. Se lee "x sobre y".

La expresión que se coloca sobre la línea* de fracción recibe el nombre de numerador.

La expresión que se coloca abajo de la línea de fracción, se le llama denominador.

El denominador debe ser siempre diferente de cero, por no estar permitida la división entre cero.

Al numerador y al denominador se les conoce también como términos de la fracción.

* La posición de la línea de fracción, puede ser horizontal o inclinada. Usaremos la posición horizontal.

Si consideramos las fracciones

$$\frac{3}{4}\ ,\quad \frac{4x^2}{xy}\ ,\quad \frac{a^2b^3}{2wz}\ ,\quad \frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

los numeradores son las expresiones

$$3\ ,\quad 4x^2\ ,\quad a^2b^3\ ,\quad x^2-5x+6$$

y los denominadores son

$$4\ ,\quad xy\ ,\quad 2wz\ ,\quad x-3$$

1.3 REDUCCION A TERMINOS MINIMOS

Hay fracciones que pueden ser expresadas en forma simple, reduciendo a la unidad todos los factores comunes en el numerador y denominador, proceso conocido como reducción de una fracción a su más simple expresión.

Otras fracciones no admiten simplificación, por no ser factorizables sus términos, o por no contener factores comunes, entonces se dice que son irreducibles.

Una fracción queda reducida a su forma más simple, cuando el numerador y denominador no contienen más factores comunes que 1 y -1

La reducción a términos mínimos se apoya en los siguientes

PRINCIPIOS BASICOS

1. Si $a \neq 0$ entonces $\frac{a}{a} = 1$

El cociente de dos cantidades iguales, siempre es igual a la unidad.

2. Si $b \neq 0$ y $c \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

Una fracción no se altera si el numerador y el denominador se multiplican o se dividen por una misma cantidad. La fracción así obtenida es equivalente a la primera o viceversa.

3. $\forall\ a \in R$ se tiene que $a \cdot 1 = a$

Axioma de identidad para la multiplicación.

4. Si $a \neq 0, m \in N, n \in N$

entonces $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

El cociente de potencias de una misma base, es igual a la misma base, elevada a una potencia que es la resta de los exponentes de las potencias dadas.

5. Si $a \neq 0$ entonces $\frac{1}{a}$ es el inverso multiplicativo de a

6. Si $a \neq 0$ entonces $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1$

Todo número multiplicado por su inverso multiplicativo, es igual a la unidad.

7. $\frac{a}{1} = a$

Al dividir cualquier cantidad entre la unidad, la cantidad no se altera.

8. Si $a \neq 0$ entonces el inverso de $\frac{1}{a}$ es $\frac{1}{\frac{1}{a}}$

9. Si $b \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$

10. Si $a \neq 0$, $b \neq 0$ entonces el inverso multiplicativo de $\frac{a}{b}$ es $\frac{b}{a}$

TEOREMAS BASICOS

Teorema 1.

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

Demostración:

$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$ Proposición dada

$\frac{(-1)\,x}{(-1)\,y} = \frac{x}{y}$ Porque $-x = (-1)\,x$

$\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$ Por el principio básico 1.

Teorema 2.

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$$

La demostración de este teorema se deja al estudiante.

Teorema 3.

Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

Demostración:

Tomando como base el producto ab tenemos:

$ab\left(\frac{1}{ab}\right) = 1$	Inverso multiplicativo
$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)\left[ab\left(\frac{1}{ab}\right)\right] = 1\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)$	Multiplicación para la igualdad
$\left[\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)\right]\frac{1}{ab} = 1\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)$	Conmutatividad y asociatividad para la multiplicación.
$(1)\,(1)\frac{1}{ab} = 1\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)$	Inverso multiplicativo.
$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$	Identidad para la multiplicación.

Ejemplo 1.

Expresar en forma simple la fracción $\frac{4}{16}$

Solución:

La simplificación se puede hacer de diferentes maneras:

a) $\frac{4}{16} = \frac{4 \div 4}{16 \div 4} = \frac{1}{4}$ — Una fracción no se altera, si sus términos se dividen entre una misma cantidad.

b) $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ — Haciendo la división oral, "cuarta de cuatro es 1 y cuarta de dieciséis es 4".

c) $\frac{4}{16} = \frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 4}$ — Factorizando.

$= \frac{1}{4} \times 1$ — Reduciendo a la unidad los factores iguales.

$= \frac{1}{4}$ — Axioma de identidad para la multiplicación.

Hay que estar atentos al hecho de que, factores iguales en el numerador y en el denominador se reducen a uno y no a cero, error que puede cometerse en simplificación de fracciones donde se agotan todos los factores del numerador.

En el ejemplo anterior si se procede de la manera siguiente:

$\frac{4}{16} = \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}(4)} = \frac{0}{4}$ es incorrecto

Ejemplo 2.

Reducir a su forma más simple $\frac{4x^2}{16xy}$

Solución:

$\frac{4x^2}{16xy}$ — Fracción dada.

$= \frac{4\,x \cdot x}{4 \cdot 4\,x \cdot y}$ — Factorizando

$= \frac{x}{4y}$ — Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Ejemplo 3.

Simplificar $\frac{4a^2 + 6a}{2a^2}$

Solución:

$\frac{4a^2 + 6a}{2a^2}$ — Fracción dada.

$= \frac{2a\,(2a + 3)}{2a\,(a)}$ — Factorizando

$= \frac{2a + 3}{a}$ — Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Ejemplo 4.

Expresar en forma simple $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

Solución:

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$ Fracción dada.

$$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)}$$ Factorizando el numerador.

$$=x-2$$ Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Ejemplo 5.

Reducir a sus términos mínimos la fracción $\frac{y^2-4y+4}{y^2-4}$

Solución:

$$\frac{y^2-4y+4}{y^2-4}$$ Fracción dada.

$$=\frac{(y-2)^2}{(y-2)(y+2)}$$ Factorizando

$$=\frac{y-2}{y+2}$$ Por el cociente de potencias de una misma base se tiene $\frac{(y-2)^2}{(y-2)} = (y-2)^{2-1} = y-2$

Esta fracción nos sirve para ejemplificar errores que se pueden cometer, cuando en lugar de reducir a la unidad factores iguales, se cancelan sumandos iguales.

No debe procederse de la siguiente manera:

$$\frac{\cancel{y^2}-4y+\cancel{4}}{\cancel{y^2}-\cancel{4}}=-4y$$ **Incorrecto**

En fracciones aritméticas se ve más claro el error.

a) $\frac{4+3}{3}=\frac{7}{3}$ **Correcto**

$$\frac{4+\cancel{3}}{\cancel{3}}=4$$ **Incorrecto**

b) $\frac{8+2}{2}=\frac{10}{2}=5$ **Correcto**

$$\frac{8+\cancel{2}}{\cancel{2}}=8$$ **Incorrecto**

En ocasiones al simplificar una fracción, es necesario cambiar el signo a determinados factores, contenidos en el numerador o en el denominador, para poder reducirlos a la unidad. En estos casos utilizamos la proposición

$$\frac{x}{y}=\frac{-x}{-y}=-\frac{-x}{y}=-\frac{x}{-y}$$

que nos dice que al cambiar el signo a un **número impar** de factores, contenidos indistintamente en el numerador o en el denominador, **el signo de la fracción cambia** y cuando el cambio se realiza en **un número par de factores, el signo de la fracción se conserva.**

Aquí también no hay que confundir factor con sumando. Un factor puede contener uno o más sumandos, los cuales cambiarán su signo si el factor que los contiene cambia de signo.

Ejemplo 6.

Simplificar la fracción $\frac{5x-5y}{y^2-x^2}$

Solución:

$$\frac{5x-5y}{y^2-x^2}$$ Fracción dada.

$$=\frac{5(x-y)}{(y-x)(y+x)}$$ Factorizando.

$$=-\frac{5(x-y)}{(x-y)(y+x)}$$ Al cambiar el signo a un factor, cambia el signo de la fracción.

$$=-\frac{5}{x+y}$$ Reduciendo a la unidad factores iguales y conmutando los sumandos del factor $(y+x)$

Ejemplo 7.

Simplificar $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{16 - x^2}$

Solución:

$\dfrac{x^2 - 7x + 12}{16 - x^2}$ Fracción dada.

$= \dfrac{(x-3)(x-4)}{(4+x)(4-x)}$ Factorizando.

$= -\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x+4)(x-4)}$ Al cambiar el signo a un factor cambia el signo de la fracción.

$= -\dfrac{x-3}{x+4}$ Se reducen a uno los factores iguales.

$= \dfrac{3-x}{x+4}$ Cambiando nuevamente el signo de la fracción.

EJERCICIO 1.1

Expresar en su forma más simple las siguientes fracciones.

1. $\dfrac{8}{32}$
2. $\dfrac{25}{100}$
3. $\dfrac{15}{180}$
4. $\dfrac{48}{192}$
5. $\dfrac{7x^2y}{14xy^2}$
6. $\dfrac{9a^3b^2c}{3a^4b^5c^3}$
7. $\dfrac{25x^2y^2z^4}{75x^4y^5z}$
8. $\dfrac{5(x^2-y^2)}{15(x-y)^2}$

9. $\dfrac{8x^2 + 16x}{8x}$
10. $\dfrac{2w^3 - 4w^2}{4w^2}$
11. $\dfrac{y^2 - 25}{5 - y}$
12. $\dfrac{16 - b^2}{b - 4}$
13. $\dfrac{1 - c^2}{c - 1}$
14. $\dfrac{m^2 - 25}{m^2 - 9m + 20}$
15. $\dfrac{a^2 - b^2}{b^2 - a^2}$
16. $\dfrac{8x^2 - 18y^2}{(2x + 3y)^2}$
17. $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$
18. $\dfrac{2a^2 + 4ab + 2b^2}{8(a + b)^3}$
19. $\dfrac{2c - 2d}{d^2 - c^2}$
20. $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x + 4}$
21. $\dfrac{x^2 - 15x + 56}{x^2 - 64}$
22. $\dfrac{x^3 - y^3}{3y - 3x}$
23. $\dfrac{(a^2 - b^2)(a - b)}{(a + b)(a^2 - 2ab + b^2)}$
24. $\dfrac{2x^2 - xy - 15y^2}{4x^2 + 20xy + 25y^2}$
25. $\dfrac{m^3 - n^3 + m^2 + mn + n^2}{m^3 - n^3}$
26. $\dfrac{3w + 6z - bw - 2bz}{w^2 + 4wz + 4z^2}$
27. $\dfrac{ax + ay + bx + by}{x^2 + 2xy + y^2}$
28. $\dfrac{a^2 - 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2}{a - b + c + d}$

1.4 MULTIPLICACION DE FRACCIONES

El producto de dos fracciones se obtiene multiplicando numerador por numerador y denominador por denominador.

Teorema 4.

Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Demostración:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left[a\left(\frac{1}{b}\right)\right]\left[c\left(\frac{1}{d}\right)\right]$$ Por principio básico 9 y asociatividad.

$$= (ac)\left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right)$$ Conmutatividad.

$$= (ac)\left(\frac{1}{bd}\right)$$ Teorema 3

$$= \frac{ac}{bd}$$ Principio básico 9.

Al multiplicar fracciones, es conveniente no efectuar la multiplicación de los numeradores y denominadores, sino únicamente indicar su producto, con el fin de factorizar y simplificar más fácilmente.

Ejemplo 1.

Multiplicar $\frac{45}{44} \cdot \frac{11}{9}$

Solución:

$$\frac{45}{44} \cdot \frac{11}{9}$$ Fracciones dadas

$$= \frac{(45)(11)}{(44)(9)}$$ Aplicando el teorema de multiplicación de fracciones.

$$= \frac{5 \cdot 9 \cdot 11}{4 \cdot 11 \cdot 9}$$ Factorizando

$$= \frac{5}{4}$$ Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Si en este ejemplo, se efectúa la multiplicación de los factores del numerador y del denominador, la simplificación se hace más complicada.

$$\frac{45}{44} \cdot \frac{11}{9} = \frac{45\,(11)}{44\,(9)} = \frac{495}{396}$$

Ejemplo 2

Multiplicar y simplificar $\frac{x^2y}{4wz} \cdot \frac{8w^2z^2}{2xy^2}$

Solución:

$$\frac{x^2y}{4wz} \cdot \frac{8w^2z^2}{2xy^2}$$ **Fracciones dadas.**

$$= \frac{(x^2y)(8w^2z^2)}{(4wz)(2xy^2)}$$ **Aplicando el teorema de la multiplicación de fracciones.**

$$= \frac{xwz}{y}$$ **Aplicando el cociente de potencias de una misma base y reduciendo a la unidad factores iguales.**

Ejemplo 3

Multiplicar y simplificar $\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x - y}{x^2 - 2xy + y^2}$

Solución:

$$\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x - y}{x^2 - 2xy + y^2}$$ **Fracciones dadas**

$$= \frac{(x^2-y^2)(x-y)}{(x+y)(x^2-2xy+y^2)}$$

Indicando la multiplicación.

$$= \frac{(x+y)(x-y)(x-y)}{(x+y)(x-y)(x-y)}$$

Factorizando

$$= 1$$

Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Como se indicó anteriormente cuando el numerador y el denominador tienen el mismo número de factores iguales, éstos se reducen a la unidad y no a cero como erróneamente pudiera pensarse.

$$\frac{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}\cancel{(x-y)}}{\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}\cancel{(x-y)}} = 0$$

Incorrecto.

EJERCICIO 1.2

Multiplicar las fracciones dadas a continuación y expresar su producto en la forma más simple.

1. $\frac{7}{5} \cdot \frac{25}{4}$

2. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9}$

3. $\frac{8}{17} \cdot \frac{51}{32}$

4. $\frac{75}{288} \cdot \frac{72}{125}$

5. $\frac{a^3b^2}{3c^2d^4} \cdot \frac{9c^4d^5}{2a^6b^4}$

6. $\frac{2w^2z^2}{1-z} \cdot \frac{1-z^2}{16w^3z^3}$

7. $\frac{a^4-b^4}{7a+7b} \cdot \frac{14}{a^2+b^2}$

8. $\frac{20y^2}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{10ay^2-10by^2}$

9. $\frac{15c+15d}{25x^2} \cdot \frac{5cx^2-5dx^2}{c^2-d^2}$

10. $\frac{1-a^3}{1-a^2} \cdot \frac{1+a}{1+a+a^2}$

11. $\frac{x^2-2x+1}{4x^2+12a+9} \cdot \frac{4x+6}{3x-3}$

12. $\frac{1-4b+4b^2}{y^2+10y+25} \cdot \frac{(y+5)^3}{5-10b}$

13. $\frac{c^2d^2-16}{16a^2-25b^2} \cdot \frac{16a^2-40ab+25b^2}{3cd-12}$

14. $\frac{x^2+10x+24}{a^2-8a+12} \cdot \frac{a^2-36}{x^2+12x+36}$

15. $\frac{15b^2+2b-8}{10b+8} \cdot \frac{6a-6b}{9b-6}$

1.5 DIVISION DE FRACCIONES

Para dividir dos fracciones se aplica el principio que dice "inviértase el divisor y multiplíquese".

Teorema

Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Demostración:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$$

Fracciones por dividir

$$= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

La división se puede expresar en forma de fracción.

$$= \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{c}}$$ Una fracción no se altera si el numerador y el denominador se multiplican por la misma cantidad.

$$= \frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}}{1}$$ Inverso multiplicativo

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$ División entre la unidad

$$= \frac{ad}{bc}$$ Teorema de la multiplicación de fracciones.

Al dividir fracciones, debe observarse la misma recomendación que al multiplicarlas, de no efectuar la multiplicación de los polinomios para que la simplificación sea más fácil.

Ejemplo 1

Dividir $\frac{4}{5} \div \frac{8}{15}$

Solución:

$$\frac{4}{5} \div \frac{8}{15}$$ Fracciones por dividir.

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8}$$ Invirtiendo el divisor y cambiando la operación.

$$= \frac{4\,(15)}{5\,(8)}$$ Multiplicación en forma indicada.

$$= \frac{4\cdot 3\cdot 5}{5\cdot 4\cdot 2}$$ Factorizando

$$= \frac{5\cdot 4\cdot 3}{5\cdot 4\cdot 2} = \frac{3}{2}$$ Conmutando y reduciendo a la unidad factores iguales.

Ejemplo 2

Dividir y simplificar $\frac{x^2 - y^2}{w^2 - z^2} \div \frac{x - y}{w^2 - 2wz + z^2}$

Solución:

$$\frac{x^2 - y^2}{w^2 - z^2} \div \frac{x - y}{w^2 - 2wz + z^2}$$ Fracciones por dividir

$$= \frac{x^2 - y^2}{w^2 - z^2}\cdot\frac{w^2 - 2wz + z^2}{x - y}$$ Inviértase el divisor y multiplíquese.

$$= \frac{(x + y)\,(x - y)\,(w - z)^2}{(w + z)\,(w - z)\,(x - y)}$$ Factorizando

$$= \frac{(x + y)\,(w - z)}{(w + z)}$$ Reduciendo a la unidad factores iguales.

EJERCICIO 1.3

Efectúe las divisiones indicadas y exprese el cociente en la forma más simple.

1. $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$
2. $\frac{5}{4} \div \frac{15}{8}$
3. $4 \div \frac{2}{7}$
4. $\frac{6}{7} \div 2$
5. $\frac{7a^2 b}{5xy^4} \div \frac{ab}{x^2 y^2}$
6. $\frac{9c^2 d^4}{w^2 z^6} \div \frac{3c^3 d^5}{w^3 z^8}$
7. $\frac{2\,(a - b)}{5\,(x - y)} \div \frac{4\,(a - b)}{10\,(x - y)}$
8. $\frac{a^2 - b^2}{x^2 - y^2} \div \frac{a - b}{x - y}$

9. $\dfrac{7x^2y^6z^3}{s^4t^2} \div \dfrac{21x^3y^4z^4}{8s^6t^4} \div \dfrac{16y^2s^2t^2}{3xz}$

10. $\dfrac{\frac{w^2}{4}-1}{1-\frac{c^2}{d^2}} \div \dfrac{\frac{w}{2}-1}{1+\frac{c}{d}} \div \dfrac{\frac{w}{2}+1}{1-\frac{c}{d}}$

11. $\dfrac{5x^2-5y^2}{3a^2-3b^2} \div \dfrac{x^2-2xy+y^2}{9a^2-9b^2}$

12 $\dfrac{1-9b^2}{4-c^2} \div \dfrac{1-6b+9b^2}{c-2}$

13. $\dfrac{1+a^3}{1+b+b^2} \div \dfrac{1-a+a^2}{1-b^3}$

14. $\dfrac{8c^3-1}{27d^3+1} \div \dfrac{4c^2+2c+1}{9d^2-3d+1}$

15. $\dfrac{5x-15}{5y-20} \div \dfrac{x^2-5x+6}{y^2-9y+20}$

16. $\dfrac{a^2+10a+24}{b^2-8b+12} \div \dfrac{a^2+4a-12}{b^2-7b+6}$

17. $\dfrac{y^2+14y+49}{x^2-20x+100} \div \dfrac{y^2+11y+28}{x^2-2x-80}$

18. $\dfrac{9c^2-48c+64}{4w^2+4wz+z^2} \div \dfrac{6c^2-4c-32}{2w^2-3wz-2z^2}$

19. $\dfrac{ax+ay+bx+by}{w+z} \div \dfrac{(a^2-b^2)(x+y)}{aw+az-bw-bz}$

20. $\dfrac{y^3-8x^3+y^2+2xy+4x^2}{y^2-4x^2} \div \dfrac{y^2+2xy+4x^2}{y^2+4xy+4x^2}$

1.6 MINIMO COMUN MULTIPLO DE NUMEROS ENTEROS

Un número $p \in N$ es múltiplo de un número $q \in N$ si p es divisible entre q

Así los múltiplos de un número $p \in N$ forman el conjunto

$M = \{ p, 2p, 3p, 4p, \ldots \}$

Si $p = 8$ entonces el conjunto

$\{ 8, 16, 24, 32, \ldots \}$ contiene sus múltiplos. Observemos que los múltiplos de un número son infinitos.

Ahora estamos interesados en el mínimo común múltiplo de dos números.

Si consideramos los múltiplos de 6 y 15 obtenemos los conjuntos A y B respectivamente.

$A = \{ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, \ldots \}$

$B = \{ 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, \ldots \}$

La intersección de estos conjuntos

$A \cap B = \{ 30, 60, 90, 120, \ldots \}$

forma el conjunto de los múltiplos comunes a los números 6 y 15.

El elemento menor de este conjunto, 30, es el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los números dados.

En consecuencia, el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales, es el menor, de todos los números que son divisibles entre cada uno de los números considerados.

1.7 MINIMO COMUN MULTIPLO DE NUMEROS UTILIZANDO LOS FACTORES PRIMOS.

Si utilizamos la factorización prima, podemos obtener el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números, de una manera más rápida, siguiendo los pasos dados a continuación.

1. Expresar cada número por sus factores primos, si éstos se repiten, escribirlos en forma de potencia.

2. Formar el m.c.m. con el producto de los factores primos no comunes y de los comunes, el que esté elevado a la potencia mayor.

Ejemplo 1

Obtener el m.c.m. de 8, 9 y 12.

Solución:

Los factores primos respectivos son:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $12 = 2^2 \cdot 3$

$\Rightarrow$ el m.c.m. $= 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$

Ejemplo 2

Obtener el m.c.m. de 6, 9, y 15.

Solución:

Los factores primos respectivos son:

$$\begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3^2$, $15 = 3 \cdot 5$

$\Rightarrow$ el m.c.m. $= 2 \times 3^2 \times 5 = 90$

1.8 MINIMO COMUN MULTIPLO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Para obtener el mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas, es necesario aplicar la siguiente técnica.

1. **Se factorizan completamente cada una de las expresiones dadas.**

2. **Si al factorizar una expresión se obtienen factores primos iguales, éstos se expresan en forma de potencia.**

3. **Se forma el mínimo común múltiplo, por el producto de todos los factores no comunes y de los comunes se toma el que esté elevado a la potencia mayor.**

4. **El m. c. m. se deja expresado por los factores, sin efectuar la multiplicación.**

Ejemplo 1.

Obtener el mínimo común múltiplo de.

$a^3 + b^3$, $a^2 - b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$

Solución:

Factorizando cada expresión.

$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $(a - b)(a + b)$, $(a - b)^2$

Formando el m.c.m.

m.c.m. $= (a + b)(a - b)^2 (a^2 - ab + b^2)$

Ejemplo 2.

Obtener el m.c.m. de

$4x - 16$, $x^2 - 10x + 25$, $x^2 - 9x + 20$

Solución:

Factorizando cada expresión

$4(x-4)$, $(x-5)^2$, $(x-5)(x-4)$

Formando el m.c.m.

m.c.m. $= 4(x-4)(x-5)^2$

EJERCICIO 1.4

Obtener el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los números dados en cada uno de los siguientes problemas, utilizando la factorización prima.

1. 8, 18
2. 9, 21
3. 6, 14
4. 24, 15
5. 4, 30
6. 20, 16
7. 4, 5, 12
8. 3, 7, 14
9. 5, 9, 30
10. 9, 12, 16

Obtener el m.c.m. de las siguientes expresiones algebraicas.

11. $5xy^4$, x^2y^2 , $15x^2y$
12. $9a^2b^4$, $3a^3b^5$, $6ab$
13. $8-c^3$, $2-c$, $4+2c+c^2$
14. $4-x^2$, $x-2$, $2+x$
15. $8x-8y$, $2x+2y$, $5x^2-5y^2$
16. $7x-21$, $2x+6$, x^2+6x+9
17. $10a+10b$, $4a^2-4b^2$, $4a^2-8ab+4b^2$

18. $x^2-8x+15$, x^2-6x+9 , $x^2-10x+25$
19. $ax+ay+bx+by$, $aw+az+bw+bz$
20. $6z^2-4z-32$, $9z^2-48z+64$

1.9 SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES CON EL MISMO DENOMINADOR.

Para sumar fracciones que tienen el mismo denominador, se suman los numeradores y el denominador se conserva igual.

Ejemplo 1.

Sumar $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

Solución:

$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$ Fracciones dadas.

$=\frac{1+3+5}{2}=\frac{9}{2}$ Sumando los numeradores y conservando el mismo denominador.

Ejemplo 2.

Sumar $\frac{x-1}{4}+\frac{5x}{4}-\frac{x+1}{4}$

Solución:

$\frac{x-1}{4}+\frac{5x}{4}-\frac{x+1}{4}$ Fracciones dadas.

$=\frac{x-1+5x-(x+1)}{4}$ Suma de los numeradores.

$$= \frac{x - 1 + 5x - x - 1}{4}$$ Supresión del paréntesis.

$$= \frac{5x - 2}{4}$$ Reducción de términos semejantes.

Ejemplo 3.

Sumar las fracciones

$$\frac{5a\,(a+1)}{a-1} - \frac{3a^2}{a-1} - \frac{7a}{a-1}$$

Solución :

$$\frac{5a\,(a+1)}{a-1} - \frac{3a^2}{a-1} - \frac{7a}{a-1}$$ Fracciones dadas.

$$= \frac{5a^2 + 5a - 3a^2 - 7a}{a-1}$$ Suma de los numeradores.

$$= \frac{2a^2 - 2a}{a-1}$$ Reducción de términos semejantes.

$$= \frac{2a\,(a-1)}{a-1}$$ Factorización.

$$= 2a$$ Reducción a la unidad de factores iguales.

EJERCICIO 1.5

Sumar las siguientes fracciones que tienen el mismo denominador.

1. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$
2. $\frac{4}{3} + \frac{2}{3} + 1$

3. $\frac{1}{7} + \frac{5}{7} - \frac{3}{7}$
4. $\frac{7}{4} - \frac{3}{4} + \frac{8}{4}$
5. $\frac{10}{3b} - \frac{1}{3b}$
6. $\frac{2c}{c-2} - \frac{4}{c-2}$
7. $\frac{x-1}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{x+1}{4}$
8. $\frac{5}{a+1} - \frac{3a}{a+1} + \frac{8a}{a+1}$
9. $\frac{6x}{x-1} + \frac{2}{x-1} - \frac{2+6x}{x-1}$
10. $\frac{y^2}{y^2-4} - \frac{2}{y^2-4} - \frac{2}{y^2-4}$

1.10 SUMA ALGEBRAICA DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR.

Esta suma se obtiene transformando las fracciones por sumar en equivalentes con el mismo denominador. Teniendo presente que dos fracciones son equivalentes, si una se obtiene a partir de la otra, multiplicando o dividiendo el numerador y el denominador por la misma cantidad.

La transformación se lleva a cabo, realizando los siguientes pasos.

1. Obtener el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones por sumar. Al mínimo común múltiplo de los denominadores de dos o más fracciones, se le llama **mínimo común denominador (m.c.d.)**.
2. Dividir el m.c.d. entre el denominador de cada fracción.
3. Multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior por el numerador y el denominador de la fracción respectiva.

4. Sumar los numeradores y conservar el mismo denominador.

5. Simplificar la fracción suma.

Ejemplo 1.

Sumar $\frac{7}{4}+\frac{8}{5}+\frac{1}{6}$ transformando a fracciones equivalentes.

Solución:

1. El m.c.m. de 4, 5 y 6 es 60.

2. Dividiendo el m.c.m. entre cada uno de los denominadores tenemos $60 \div 4 = 15$, $60 \div 5 = 12$, $60 \div 6 = 10$.

3. Multiplicando el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente respectivo, transformamos las fracciones dadas en equivalentes con el mismo denominador.

$$\frac{7}{4} = \frac{7\,(15)}{4\,(15)} = \frac{105}{60}$$

$$\frac{8}{5} = \frac{8\,(12)}{5\,(12)} = \frac{96}{60}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1\,(10)}{6\,(10)} = \frac{10}{60}$$

4. Sumando y simplificando.

$$\frac{105}{60}+\frac{96}{60}+\frac{10}{60}$$

$$= \frac{105 + 96 + 10}{60}$$

$$= \frac{211}{60}$$

Ejemplo 2.

Sumar $\frac{2}{x-1}$, $\frac{3}{x+1}$ y $\frac{5}{x^2-1}$

Transformando a fracciones equivalentes.

Solución:

1. El mínimo común denominador es.

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

2. Al dividir el m.c.d. entre cada uno de los denominadores dados se tiene:

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x-1$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-1} = 1$$

3. Al multiplicar el numerador y el denominador de cada fracción por el cociente respectivo obtenido en el paso anterior, tenemos:

$$\frac{2}{x-1} = \frac{2\,(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x+2}{x^2-1}$$

$$\frac{3}{x+1} = \frac{3\,(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{3x-3}{x^2-1}$$

$$\frac{5}{x^2-1} = \frac{5\,(1)}{(x^2-1)(1)} = \frac{5}{x^2-1}$$

4. La suma se reduce a sumar fracciones con el mismo denominador.

$$\frac{2x+2}{x^2-1}+\frac{3x-3}{x^2-1}+\frac{5}{x^2-1}$$

$$=\frac{2x+2+3x-3+5}{x^2-1}$$

$$=\frac{5x+4}{x^2-1}$$

El proceso para sumar fracciones se agiliza si combinamos las fracciones en una sola, siguiendo los pasos dados a continuación.

1. Factorizar completamente cada uno de los denominadores de las fracciones dadas, para obtener el mínimo común denominador.
2. Dividir el m.c.d., entre cada uno de los denominadores de las fracciones por sumar.
3. Multiplicar el cociente obtenido en el paso anterior, por el numerador de la fracción respectiva.
4. Colocar este producto como sumando de la fracción suma.
5. Reducir términos semejantes en el numerador, conservando el común denominador.
6. Simplificar la fracción a su mínima expresión.

Ejemplo 1.

Sumar y simplificar $\quad \dfrac{a+4}{2a^2-2a}+\dfrac{-5}{2a-2}$

Solución:

$$\frac{a+4}{2a(a-1)}+\frac{-5}{2(a-1)}$$ Factorizando los denominadores.

$$=\frac{a+4+(-5)a}{2a(a-1)}$$ Realizando los pasos 2, 3 y 4 del procedimiento (Pág. 28)

$$=\frac{-4a+4}{2a(a-1)}$$ Reduciendo términos semejantes en el numerador.

$$=\frac{-4(a-1)}{2a(a-1)}$$ Factorizando el numerador.

$$=\frac{-2}{a}$$ Reduciendo a la unidad los factores iguales.

Ejemplo 2.

Sumar y simplificar $\quad \dfrac{x+5}{2x^2-2}+\dfrac{3}{1-x}+\dfrac{5}{2x+2}$

Solución:

$$=\frac{x+5}{2(x^2-1)}+\frac{3}{1-x}+\frac{5}{2(x+1)}$$ Factorizando los denominadores.

$$=\frac{x+5}{2(x+1)(x-1)}-\frac{3}{x-1}+\frac{5}{2(x+1)}$$ Cambiando el signo a uno de los denominadores.

$$=\frac{1(x+5)-3\cdot 2(x+1)+5(x-1)}{2(x+1)(x-1)}$$ Pasos 2, 3 y 4 del procedimiento (Pág. 28)

$$=\frac{x+5-6x-6+5x-5}{2(x+1)(x-1)}$$ Efectuando las operaciones en el numerador.

$= \dfrac{-6}{2(x+1)(x-1)}$ Reduciendo términos semejantes.

$= \dfrac{-3}{x^2-1}$ Dividiendo ambos términos entre 2.

EJERCICIO 1.6

Sumar las siguientes fracciones que tienen diferente denominador y expresar el resultado en la forma más simple.

1. $\dfrac{2b-1}{10} + \dfrac{b+1}{4}$

2. $\dfrac{7x}{8} - \dfrac{3x}{6} + \dfrac{5x}{24}$

3. $\dfrac{4}{a^3} - \dfrac{8}{a^2} + \dfrac{4}{a}$

4. $\dfrac{a-1}{3a+6} - \dfrac{6}{12+6a}$

5. $\dfrac{3}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

6. $\dfrac{m^2+3}{m^2-1} + \dfrac{2}{m+1}$

7. $\dfrac{1}{y+3} + \dfrac{y}{y+2}$

8. $\dfrac{1-c}{4-c} + \dfrac{c-13}{3c-12}$

9. $\dfrac{w}{5w+1} + \dfrac{3w}{5w-1} - \dfrac{20w^2}{25w^2-1}$

10. $\dfrac{2}{a-b} - \dfrac{2}{a+b} + \dfrac{4a}{b^2-a^2}$

11. $\dfrac{8x}{y^2-x^2} + \dfrac{4}{x-y} - \dfrac{4}{x+y}$

12. $\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x-1}{x^2+4x+4}$

13. $\dfrac{a+6}{a} - \dfrac{a+7}{a+1} + \dfrac{6}{a^2+3a+2}$

14. $\dfrac{s+5}{s+4} - \dfrac{s+4}{s+5} + \dfrac{s^2+6s+7}{s^2+9s+20}$

15. $\dfrac{2}{x^2+7x+12} + \dfrac{3}{x^2-3x-18} - \dfrac{4}{x^2-2x-24}$

1.11 FRACCIONES COMPLEJAS.

Una fracción cuyo numerador, denominador o ambos contienen fracciones, se llama **fracción compleja.**

La forma más simple de una fracción compleja es aquella donde el numerador y denominador contienen una sola fracción, como se ejemplifica.

$$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}}$$

En esta fracción, los términos a y d se llaman **extremos** y los términos b y c se llaman **medios** de la fracción.

Una fracción compleja se simplifica si la transformamos en una división.

$\dfrac{\dfrac{a}{b}}{\dfrac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$ Expresándola como división.

$= \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$ Invirtiendo el divisor.

$= \dfrac{ad}{bc}$ Multiplicando las fracciones.

La simplificación de una fracción compleja de esta forma se hace directamente si aplicamos el principio que dice "Producto de extremos entre producto de medios".

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

La línea que separa las dos fracciones, se llama línea principal y se escribe más fuerte y más larga que las otras líneas.

Ejemplo 1.

Simplificar la fracción compleja

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{2+5}{6}}{\frac{9-4}{9}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{7\cdot 9}{6\cdot 5} = \frac{7\cdot 3}{2\cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Ejemplo 2

Simplificar $\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}-1}$

Solución:

$$\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}-1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{x^2(1+x)}{x(1-x^2)}$$

$$= \frac{x^2(1+x)}{x(1+x)(1-x)} = \frac{x}{1-x}$$

EJERCICIO 1.7

Simplificar las siguientes fracciones complejas.

1. $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}$

2. $\dfrac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{4}}$

3. $\dfrac{\frac{7}{5}-1}{\frac{3}{15}}$

4. $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}$

5. $\dfrac{\frac{7}{5}-1}{1-\frac{4}{5}}$

6. $\dfrac{1-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}}{1+\frac{\frac{7}{4}}{\frac{3}{2}}}$

7. $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-x}$

8. $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

9. $\dfrac{\frac{x}{1-2x}+\frac{x}{1+2x}}{\frac{1}{1+2x}+3}$

10. $\dfrac{\frac{4}{a-b}+\frac{4b}{a^2+ab+b^2}}{\frac{5}{a^2+ab+b^2}+\frac{5b}{a^3-b^3}}$

Capítulo II

FUNCIONES Y RELACIONES

René Descartes científico, filósofo y matemático francés; fué el iniciador del sistema de coordenadas cartesianas.

CAPITULO II

FUNCIONES Y RELACIONES

2.1 INTRODUCCION

René Descartes (1596—1650) filósofo y matemático francés, fué quien primeramente concibió la idea de coordenadas y representó una pareja de números por un punto en el plano. Idea que fucionó el algebra con la geometría y dió origen a la Geometría Analítica.

2.2 COORDENADAS RECTANGULARES

El sistema ideado por Descartes, para localizar un punto en el plano, tiene como referencia dos líneas que se cortan en ángulo recto, una en posición horizontal y la otra vertical, líneas que reciben el nombre de ejes, el horizontal, se conoce también como eje de las "X" o de las abscisas y el vertical, como eje de las "Y" o de las ordenadas. Estos ejes, dividen el plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, los cuales se enumeran siguiendo un giro en contra de las manecillas del reloj, considerando como primer cuadrante el superior derecho.

El punto de intersección de las dos líneas se llama origen, el cual marca el cero al asociar los números reales con cada uno de los ejes.

En esta asociación, se cumple el principio de correspondencia biunívoca o uno a uno, entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos de cada uno de los ejes. (Recuérdese la definición de conjuntos equivalentes.)

Los números positivos quedan localizados a la derecha del eje de las Y y arriba del eje de las X y los números negativos se localizan a la izquierda del eje de las Y y abajo del eje de las X.

En los extremos positivos de ambos ejes, se suelen dibujar puntas de flechas. Fig. 2.1

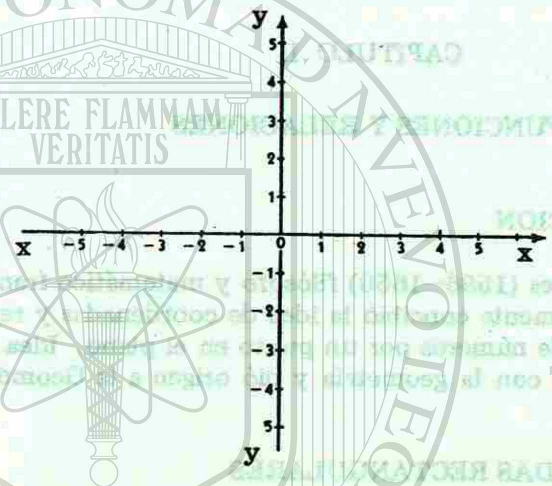


Figura 2.1

El principio de correspondencia biunívoca también se cumple al relacionar pares ordenados de números reales y puntos en el plano, o sea que cada par ordenado representa un punto en el plano y a cada punto del plano, se le asocia un par ordenado y sólo uno.

A los elementos de un par ordenado se les identifica con los nombres de abscisa y ordenada, en el orden primero y segundo respedtivamente, también se conocen como caoordenadas del punto. Un par ordenado cualesquiera se representa en la forma (x, y), donde x representa la abscisa y y la ordenada del punto. Todo punto sobre el eje X tiene como ardenada el número cero, cuya pareja ordenada es (x, 0) y un punto sobre el eje Y tiene como abscisa el número cero, asociado con la pareja (0, y), el origen tiene como coordenadas (0, 0).

Con lo expuesto anteriormente y aplicando el concepto de producto cartesiano de dos conjuntos, el plano bidimensional se define como el producto cartesiano

$$R \times R = \left\{ (x, y) \mid x \in R, y \in R \right\}$$

Localización de puntos en el plano

La localización de puntos en el plano, dada una pareja ordenada de números, se realiza de la manera siguiente:

Primero

Marcar sobre el eje de las X la distancia que representa el primer elemento de la pareja ordenada, a la derecha del origen si es positivo y hacia la izquierda del origen si es nagativo, utilizando una escala apropiada.

Segundo

Marcar sobre el eje de las Y la distancia representada por el segundo elemento de la pareja ordenada, hacia arriba del origen si es positivo y hacia abajo del origen si es negativo.

Tercero

Levantar perpendiculares a ambos ejes en los puntos marcados.

Cuarto

El punto de intersección de estas líneas perpendiculares, representa el punto del plano, asociado con el par ordenado dado. Fig. 2.2

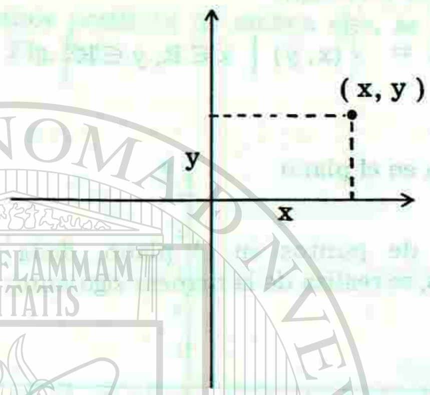


Figura 2.2

Los signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes son como se indican en la Fig. 2.3

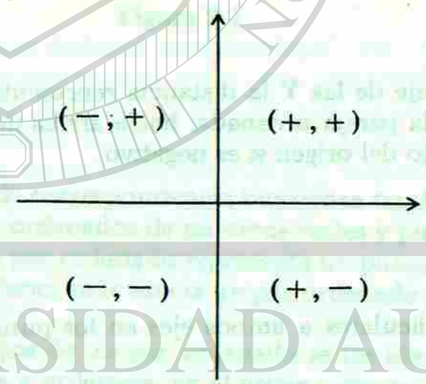


Figura 2.3

Ejemplo 2.1

Localizar en el sistema de coordenadas rectangulares los puntos (4 , 2) y (− 3 , − 5). Fig 2.4

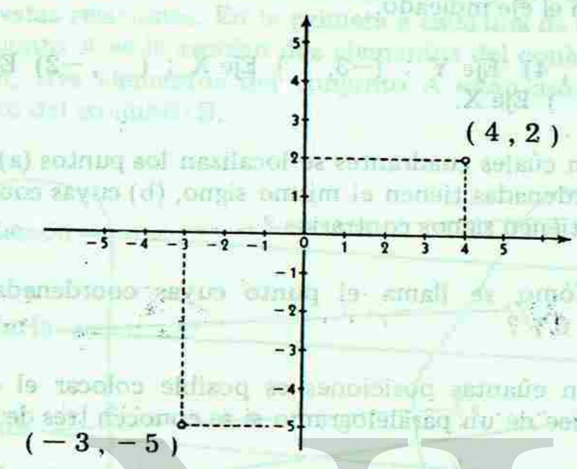


Figura 2.4

EJERCICIO 2.1

1. Localizar en el sistema cartesiano los puntos (5 , 7) , (5 , − 7) , (− 5 , 7) y (− 5 , − 7)

2. Localizar en el sistema cartesiano los puntos (3 , 0) , (− 3 , 0) , (0 , 3) , (0 , − 3) y (0 , 0) .

3. En los siguientes pares ordenados, escribir la coordenada faltante, para que el punto se localice en el cuadrante indicado.

   (−5,   ) III cuadrante, (4,   ) I cuadrante,
   (, 2) II cuadrante, (7,   ) IV cuadrante.

4. ¿ Qué valor tiene la ordenada de un punto situado en el eje de las Y ?

5. ¿ Qué valor tiene la abscisa de un punto situado en el eje de las X ?

6. En los siguientes pares ordenados, decir que valor debe tener la coordenada faltante, para que el punto se localice en el eje indicado.

(, 4) Eje Y ; (−3,) Eje X ; (, −2) Eje Y ; (8,) Eje X.

7. ¿ En cúales cuadrantes se localizan los puntos (a) cuyas coordenadas tienen el mismo signo, (b) cuyas coordenadas tienen signos contrarios ?

8. ¿ Cómo se llama el punto cuyas coordenadas son (0 , 0) ?

9. ¿ En cúantas posiciones es posible colocar el cuarto vértice de un paralelogramo si se conocen tres de ellos ?

10. Un paralelogramo tiene tres de sus vértices localizados en los puntos (2, 2) , (3 , 5) y (6 , 2) . Encontrar las coordenadas del cuarto vértice en sus tres posiciones posibles y dibujar los tres paralelogramos.

11. Localizar los puntos cuyas coordenadas se dan a continuación y dar alguna característica de la recta que representan, al unirlos.

a) (5, − 2) , (5, − 1) , (5, 0) , (5, 1) , (5, 2)

b) (−2, −2) , (−1, −2) , (0, −2) , (1, −2) , (5, −2)

c) (−2, −2) , (−1, −1) , (0, 0) , (1, 1) , (2, 2)

12. Localizar los puntos dados a continuación, unirlos con líneas rectas y decir alguna característica de la figura que representa.

a) (−3, 0) , (0, 6) , (3, 0)

b) (0, 0) , (4, 0) , (4, 3)

c) (−5, −1) , (−5, −6) , (1, −1) , (1. −6)

2.3 RELACIONES

Toda relación establece una correspondencia entre dos conjuntos cualesquiera. Relación que puede representarse por medio de los diagramas de Venn. En las figuras 2.5 y 2.6 se representan dos de estas relaciones. En la primera a cada una de los elementos del conjunto A se le asocian dos elementos del conjunto B. En la degunda, tres elementos del conjunto A están asociados con el elemento del conjunto B.

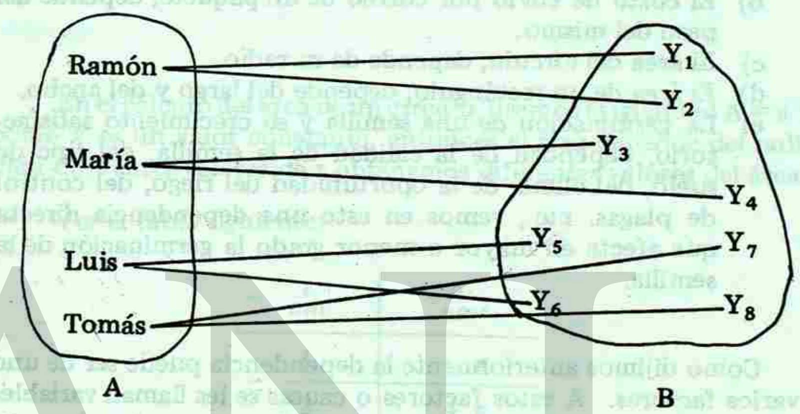


Fig. 2.5

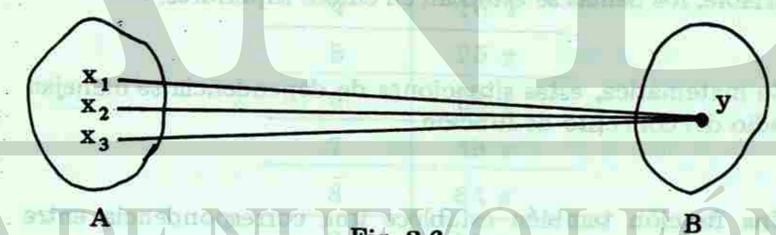


Fig. 2.6

En los números reales, una relación es un conjunto de parejas ordenadas de números.

Un tipo especial de relación, cuya importancia en matemática es básica, es conocida con el nombre de función.

2.4 FUNCIONES

Es muy frecuente encontrarnos en la vida diaria con situaciones o hechos que dependen de uno o varios factores, muy similar a lo que en física llamamos la relación causa—efecto, como ejemplos tenemos:

a) La calificación que un alumno obtiene en un curso, depende del interés en el estudio.
b) El costo de envío por correo de un paquete, depende del peso del mismo.
c) El área del círculo, depende de su radio.
d) El área de un rectángulo, depende del largo y del ancho.
e) La germinación de una semilla y su crecimiento satisfactorio, dependen de la calidad de la semilla, del tipo de suelo, del clima, de la oportunidad del riego, del control de plagas, etc., vemos en esto una dependencia directa que afecta en mayor o menor grado la germinación de la semilla.

Como dijimos anteriormente la dependencia puede ser de uno o varios factores. A estos factores o causas se les llaman **variables independientes** y los hechos o efectos, reciben el nombre de **variables dependientes**. Aquí se analizan hechos que dependen de una sola variable, los demás se estudian en cursos superiores.

En matemática, estas situaciones de dependencia se manejan por medio del concepto de función.

Una función también establece una correspondencia entre dos conjuntos, tal correspondencia se puede dar con diagramas, gráficas, tablas y fórmulas.

Así si relacionamos el conjunto de maestros de una escuela y el conjunto de grupos de la misma, podemos formar parejas, haciendo corresponder un grupo a cada maestro. Si representamos estos dos conjuntos por medio de los diagramas de Venn, tenemos la ilustración en la Fig. 2.7

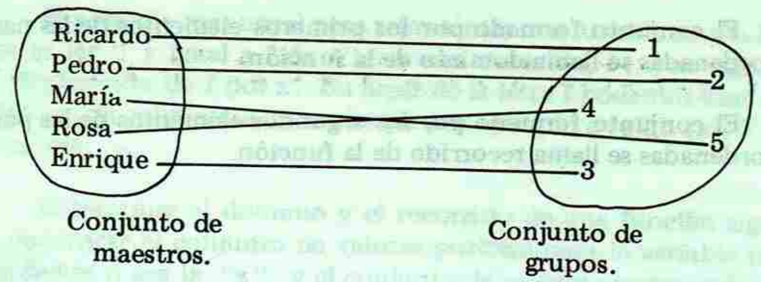


Fig. 2.7

En el cálculo del área de un círculo, usamos la igualdad $A = \pi r^2$ como π es un valor constante, entonces el área depende del radio. Para diferentes valores de r obtenemos diferentes valores del área.

Ver la tabla siguiente.

r cm	A cm^2
1	π
2	4π
3	9π
4	16π
5	25π
6	36π
7	49π
8	64π
9	81π
10	100π

Definición de Función

Una función es una relación, o sea un conjunto de pares ordenados, en el cual dos pares ordenados no tienen el mismo primer elemento.

El conjunto formado por los primeros elementos de las parejas ordenadas se llama **dominio de la función.**

El conjunto formado por los segundos elementos de las parejas ordenadas se llama **recorrido de la función.**

Ejemplo 2.2

Función $= \left\{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\right\}$

Dominio $= \left\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\right\}$

Recorrido $= \left\{9, 4, 1, 0, 1, 4, 9\right\}$

Ejemplo 2.3

Función $= \left\{(-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\right\}$

Dominio $= \left\{-2, -1, 0, 1, 2\right\}$

Recorrido $= \left\{-2, -1, 0, 1, 2\right\}$

Cuando una función se representa por medio de una igualdad o fórmula, aparecen las variables antes mencionadas que generalmente son "x" e "y" o cualquiera de las últimas letras del alfabeto.

La letra "x" representa la variable independiente, a la cual se le asignan valores reales, excluyendo los que hagan a la función imaginaria o infinita. El conjunto de valores que toma la variable independiente "x" es el dominio de la función.

La letra "y" representa la variable dependiente o función, cuyo valor depende del valor que se le dé a la variable "x". El conjunto de valores de la variable dependiente forma el recorrido de la función.

El símbolo más usual para representar una función es $y = f(x)$ que se lee " y igual a f de x", en esta notación, $f(x)$ no significa multiplicación de f por x. En lugar de la letra f podemos usar otra letra ya sea minúscula o mayúscula por ejemplo $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, $G(x)$ etc.

Determinar el dominio y el recorrido de una función significa encontrar el conjunto de valores posibles para la variable independiente o sea la "x" y el conjunto de valores correspondientes a la función o sea la variable dependiente.

Ejemplo 2.4

Determinar el dominio y el recorrido de la función $f(x) = x^2$.

Solución:

A la variable "x" le podemos asignar cualquier valor real, sin que la función se convierta en imaginaria o infinita, por lo tanto el dominio de la función es el conjunto de los números reales. Para obtener el recorrido de la función, observamos que la variable "x" está elevada al cuadrado y toda potencia par de un número negativo es positiva, entonces el recorrido de la función es el conjunto de los números reales positivos incluyendo el cero.

Dominio $= \left\{x \mid x \in R\right\}$ Recorrido $= \left\{y \mid y \geqslant 0\right\}$

El cálculo de la función se realiza sustituyendo el valor escogido para "x" y efectuando las operaciones algebraicas necesarias.

Si calculamos el valor de $f(x) = x^2$ para diferentes valores de "x" obtenemos:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(-3) &= (-3)^2 = 9 \\
f(-2) &= (-2)^2 = 4 \\
f(-1) &= (-1)^2 = 1 \\
f(0) &= (0)^2 = 0 \\
f(1) &= (1)^2 = 1 \\
f(2) &= (2)^2 = 4 \\
f(3) &= (3)^2 = 9
\end{aligned}
$$

x	f (x)
− 3	9
− 2	4
− 1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Ejemplo 2.5

Calcular el dominio y el recorrido de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución:

Al observar el segundo miembro de la igualdad nos damos cuenta que la variable independiente aparece en el denominador de la fracción $\frac{1}{x}$ por lo tanto la variable x no puede tomar el valor 0 ya que la división entre cero no está permitida en los reales, entonces el dominio de la función son los números reales excepto el cero.

$$\text{Dominio} = \left\{ x \mid x \in R \,,\; x \neq 0 \right\}$$

El recorrido de la función lo forman todos los números reles, excepto también el cero, ya que el valor cero lo obtiene la función solamente si la variable "x" es infinita (∞) y el infinito no está incluído en los números reales.

$$\text{Recorrido} = \left\{ y \mid y \in R \,,\; y \neq 0 \right\}$$

Cálculo de algunos valores de la función $f(x) = \frac{1}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$f(-4) = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

$f(-3) = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

$f(-2) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$

$f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$f(2) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$f(3) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$f(4) = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

x	f (x)
-4	$-\frac{1}{4}$
-3	$-\frac{1}{3}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$

2.5 GRAFICA DE UNA FUNCION

En los ejemplos del punto anterior observamos que al dar un valor a la variable x, obtenemos un valor de la variable y, formando así tantas parejas ordenadas como valores diferentes demos a la variable independiente. Estas parejas ordenadas se localizan en el sistema de coordenadas rectangulares y la unión de estos puntos forma la gráfica de la función.

Definición.

La gráfica de una función es la representación geométrica del conjunto de puntos del lugar geométrico.

Ejemplo 2.6

Encontrar la gráfica de $f(x) = x$

Damos valores a la variable "x" y encontramos los correspondientes valores de la función.

$f(x) = x$
$f(-2) = -2$
$f(-1) = -1$
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 2$

Si localizamos los puntos representados por las parejas ordenadas $(-2, -2)$, $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 2)$ en el sitema cartesiano y los unimos, obtenemos el segmento de recta que aparece en la Fig. 2.8

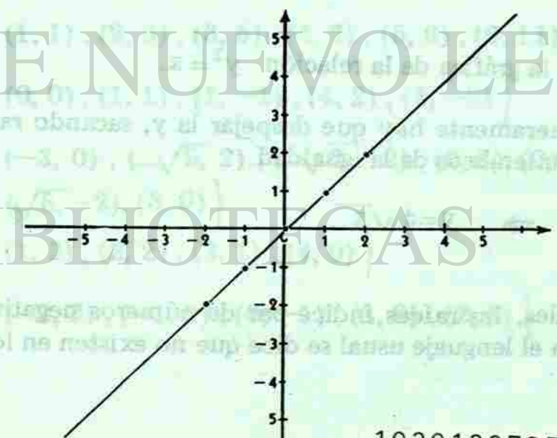


Fig. 2.8

Ejemplo 2.7

Obtener la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ localizando los puntos:

$(-2, -\frac{1}{2})$, $(-1, -1)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(\frac{1}{2}, 2)$

$(1, 1)$, $(2, \frac{1}{2})$ que se obtienen dando a "x" los valores

$-2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ y 2 Ver Fig. 2.9

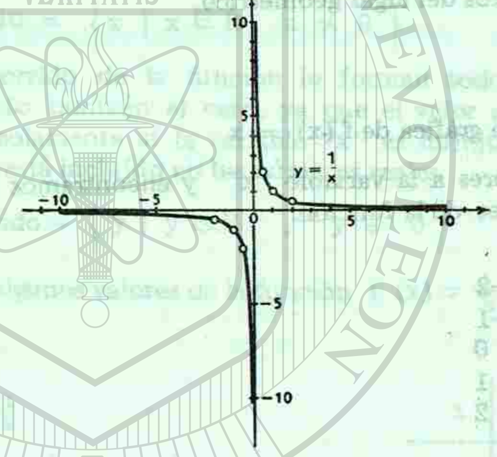


Fig. 2.9

Ejemplo 2.8

Encontrar la gráfica de la relación $y^2 = x$.

Aquí primeramente hay que despejar la y, sacando raíz cuadrada a ambos miembros de la igualdad.

$$y^2 = x \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x}$$

En los reales, las raíces índice par de números negativos son imaginarias.(En el lenguaje usual se dice que no existen en los reales).

En consecuencia debemos excluír del dominio de la relación todos los números negativos.

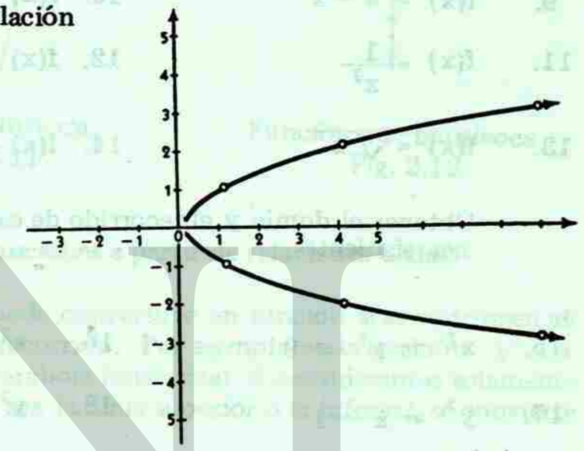
Sin embargo el recorrido de la relación es el conjunto de los números reales, puesto que para un valor de x obtenemos dos valores de y.

Dominio $= \{ x \mid x \geqslant 0 \}$ Recorrido $= \{ y \mid y \in R \}$

Cálculo de la relación

$y = \pm\sqrt{x}$

x	y
0	0
1	±1
4	±2
9	±3



EJERCICIO 2.2

Determinar si los siguientes conjuntos de pares ordenados, definen una función o una relación.

1. $\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), (6, 11)\}$
2. $\{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2)\}$
3. $\{(-3, 0), (-\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, -2), (0, 3), (0, -3), (\sqrt{5}, 2), (\sqrt{5}, -2), (3, 0)\}$
4. $\{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$
5. $\{(-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$

6. Localizar en el sistema cartesiano, cada conjunto de puntos de las funciones y relaciones definidas en los problemas del 1 al 5, unir los puntos para obtener la gráfica, dar también el dominio y el recorrido de cada una de ellas.

Obtener el dominio y el recorrido de cada una de las funciones dadas a continuación y graficar.

7. $f(x) = x + 3$	8. $f(x) = 2x - 2$
9. $f(x) = 4 - x$	10. $f(x) = x^2 - 1$
11. $f(x) = \frac{1}{x^2}$	12. $f(x) = 4 - x^2$
13. $f(x) = \sqrt{x}$	14. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Obtener el domio y el recorrido de cada una de las relaciones siguientes.

15. $x^2 + y^2 = 9$	16. $x^2 + y^2 = 1$
17. $y^2 = x - 1$	18. $y^2 = x + 3$

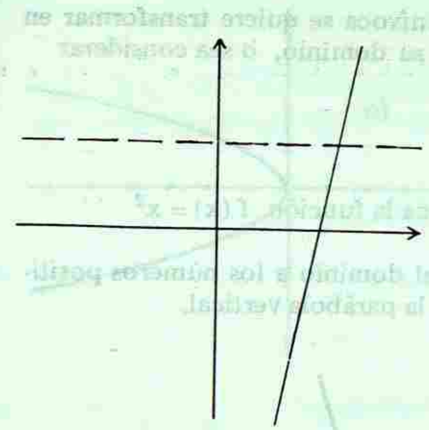
Las funciones se clasifican en biunívocas y no—biunívocas.

Una función es **biunívoca o uno a uno** si dos pares ordenados no tiene el mismo segundo elemento, o sea que cada valor de "**x**" está asociado con un valor de "y" y sólo uno.

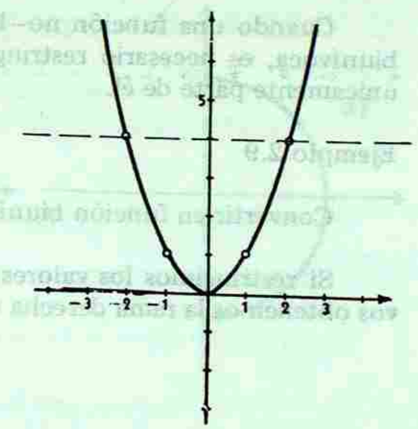
Una función no—biunívoca es aquella donde dos pares ordenados o más tienen el mismo segundo elemento.

Para determinar gráficamente si una función es o no biunívoca, se traza una recta horizontal y si ésta corta a la curva en más de un punto, la función es no- biunívoca. Si la recta corta o intersecta a la curva en un sólo punto, entonces es función biunívoca.

Las gráficas 2.11 y 2.12 ilustran estos hechos.



Función biunívoca
Fig. 2.11



Función no—biunívoca
Fig. 2.12

Obtención de funciones a partir de relaciones dadas.

Una relación puede convertirse en función si se restringen algunos valores de su recorrido. Por ejemplo en la relación $y^2 = x$ cuya gráfica es una parábola horizontal, si consideramos solamente una de sus ramas ya sea la rama superior o la inferior, se convierte en función.

En la ecuación $y = \pm\sqrt{x}$ se desprecia uno de los signos de la raíz.

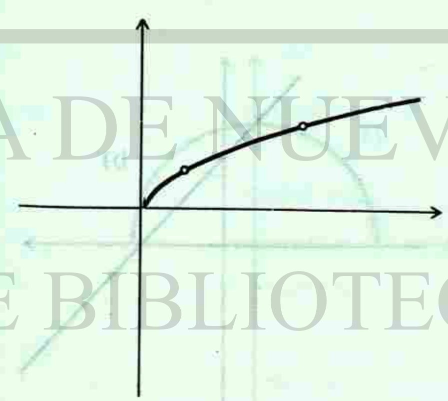


Fig. 2.13

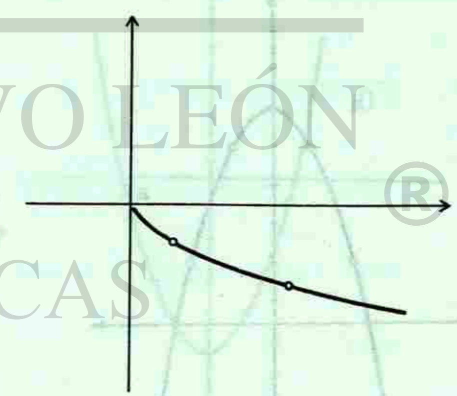


Fig. 2.14

Cuando una función no—biunívoca se quiere transformar en biunívoca, es necesario restringir su dominio, o sea considerar únicamente parte de él.

Ejemplo 2.9

Convertir en función biunívoca la función $f(x) = x^2$

Si restringimos los valores del dominio a los números positivos obtenemos la rama derecha de la parábola vertical.

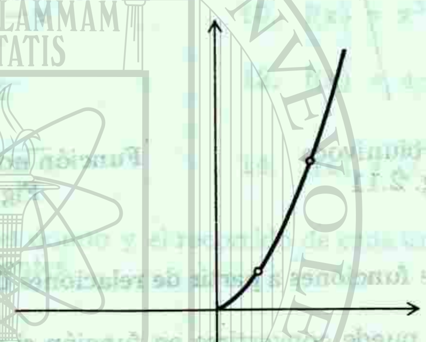
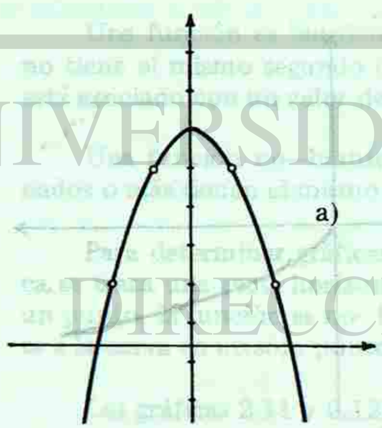
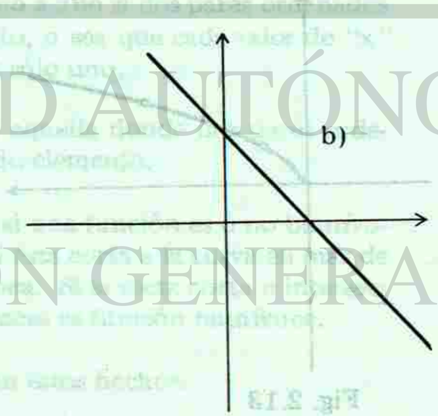


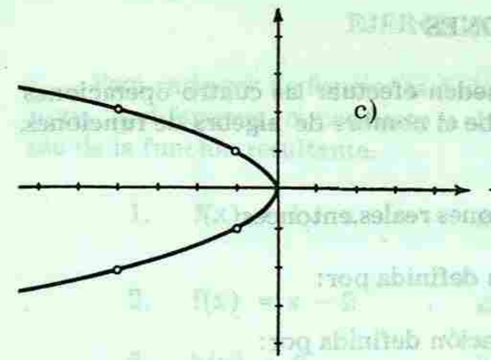
Fig 2.15

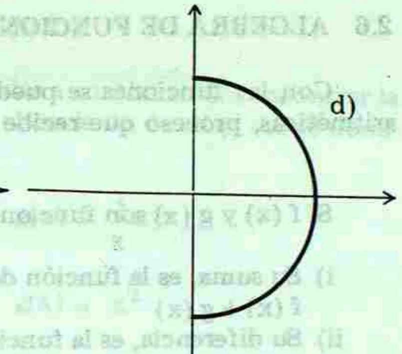
EJERCICIO 2.3

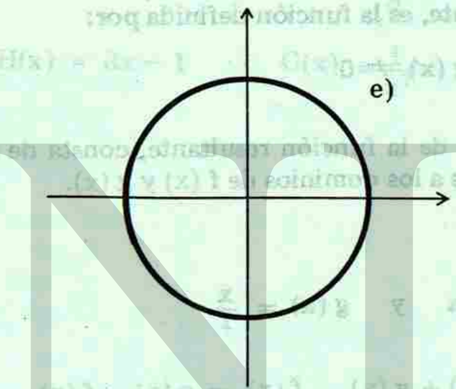
Determinar gráficamente si las siguientes figuras representan una función o una relación. Si es función, decir si es biunívoca o no-biunívoca.

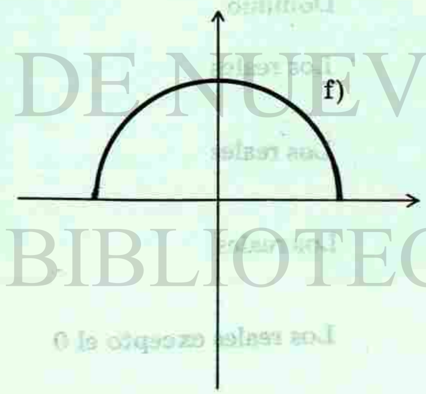


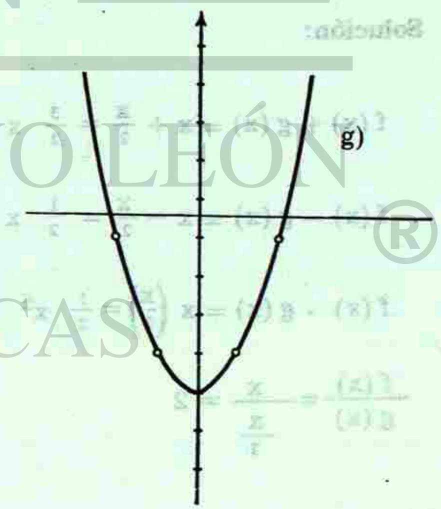












2.6 ALGEBRA DE FUNCIONES

Con las funciones se pueden efectuar las cuatro operaciones aritméticas, proceso que recibe el nombre de **algebra de funciones.**

Si f (x) y g (x) son funciones reales,entonces:

i) **Su suma, es la función definida por:**
$f(x)+g(x)$

ii) **Su diferencia, es la función definida por:**
$f(x)-g(x)$

iii) **Su producto, es la función definida por:**
$f(x)\cdot g(x)$

iv) **Su cociente, es la función definida por:**
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$

El dominio de la función resultante, consta de aquellos valores de x comunes a los dominios de f (x) y g (x).

Ejemplo 2.10

Si $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{x}{2}$

Obtener $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y dé su dominio

Solución:

	Dominio
$f(x)+g(x) = x+\frac{x}{2} = \frac{3}{2}x$	Los reales
$f(x)-g(x) = x-\frac{x}{2} = \frac{1}{2}x$	Los reales
$f(x)\cdot g(x) = x\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}x^2$	Los reales
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x}{\frac{x}{2}} = 2$	Los reales excepto el 0

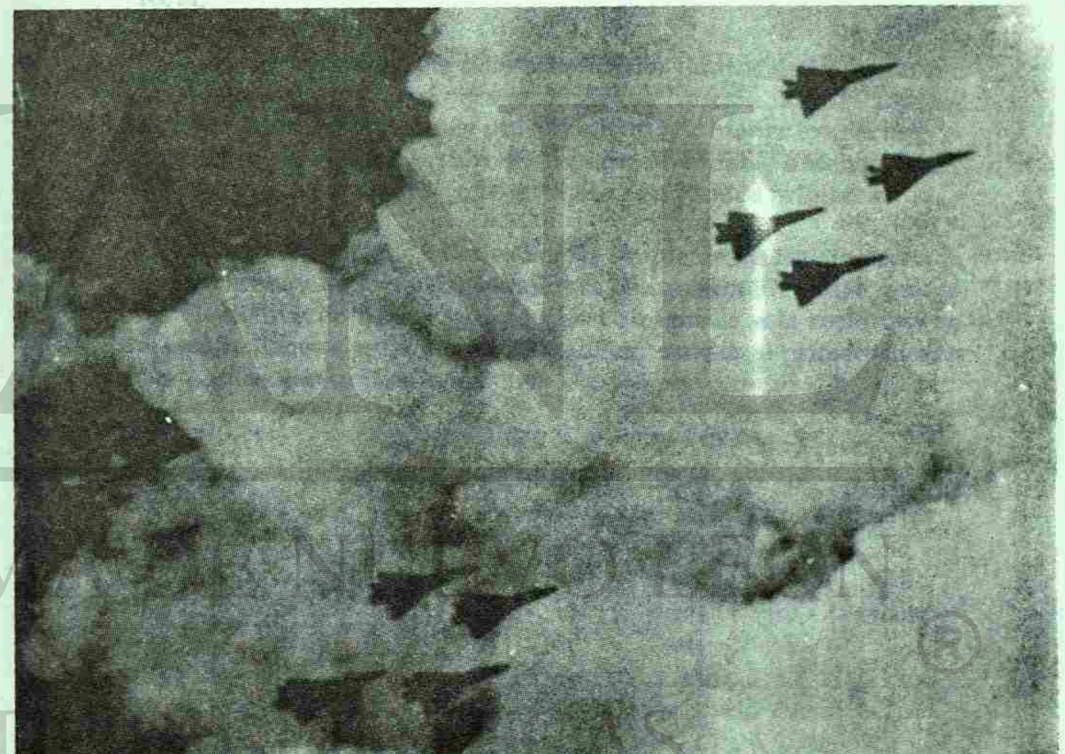
EJERCICIO 2.4

Para cada par de funciones dadas a continuación, encontrar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de ellas, dar el dominio de la función resultante.

1. $f(x) = 1-x$, $g(x) = \frac{1}{x}$
2. $f(x) = x-2$, $g(x) = x^2$
3. $h(x) = 5$, $l(x) = 2x$
4. $g(x) = -x^2$, $h(x) = \frac{x}{3}$
5. $H(x) = 3x-1$, $G(x) = \frac{1}{x^2}$

Capítulo III

FUNCIONES LINEALES



En la aerodinámica moderna, la base del diseño de los motores a reacción es la matemática.

CAPITULO III

FUNCIONES LINEALES

3.1 DEFINICION

Una función lineal es aquella función biunívoca que se caracteriza, analíticamente, en que el exponente de la variable independiente es unitario y geométricamente, por representar una línea recta.

Por geometría plana sabemos que dos puntos definen una recta y sólo una, entonces para graficar una función lineal, basta con dar dos valores a la variable independiente y obtener los correspondientes valores de la función, pero es recomendable obtener un tercer punto y observar que esté alineado con los dos primeros.

La función f (x) = x es la más simple de las funciones lineales, por ser y = x recibe el nombre de función identidad, ya que los elementos de cada par ordenado son iguales y la recta que representa tiene la característica de dividir en dos al primer y tercer cuadrantes. Su gráfica se da en la Fig. 3.1.

Ejemplo 3.1 Graficar la función f (x) = x

Solución:

$f(x) = x$
$f(-1) = -1$
$f(0) = 0$
$f(1) = 1$

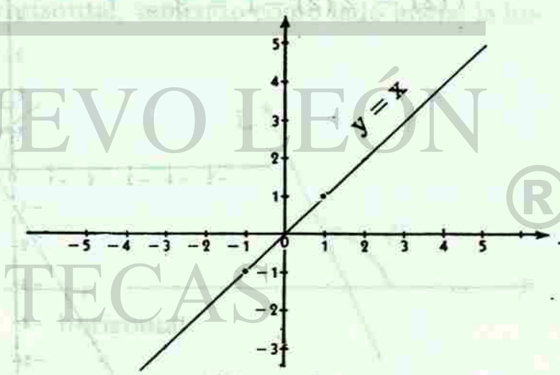


Figura 3.1

Ejemplo 3.2 Graficar la función f (x) = x + 3

Solución:

$$f(x) = x + 3$$
$$f(1) = 1 + 3 = 4$$
$$f(2) = 2 + 3 = 5$$
$$f(3) = 3 + 3 = 6$$

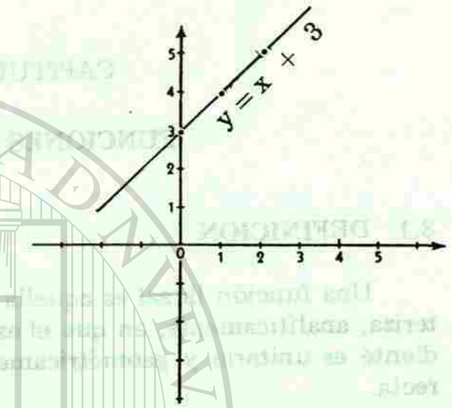


Figura 3.2

Ejemplo 3.3 Encontrar la gráfica de f (x) = 2x −1

Solución:

$$f(x) = 2x - 1$$
$$f(-2) = 2(-2) - 1 = -5$$
$$f(0) = 2(0) - 1 = -1$$
$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

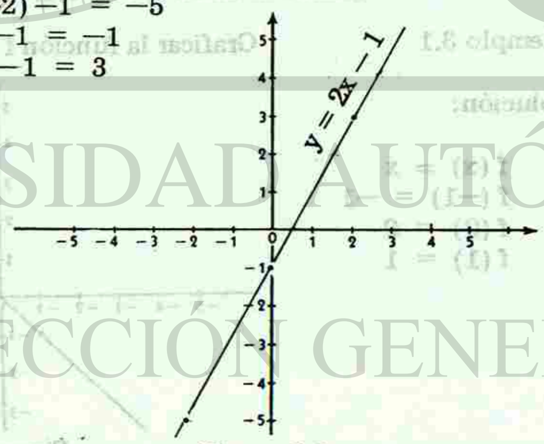


Figura 3.3

EJERCICIO 3.1

Graficar las siguientes funciones lineales, dando tres valores a la variable independiente.

1. $f(x) = 4 - x$
2. $f(x) = \frac{x}{2}$
3. $f(x) = -x$
4. $f(x) = 5x + 2$
5. $f(x) = 3x$
6. $f(x) = k$
7. $f(x) = 6 - 2x$
8. $f(x) = 0$
9. $y = \frac{2-x}{2}$
10. $y = \frac{x-1}{3}$
11. $y = \frac{9x}{2} - 1$
12. $8x + 4 - y = 0$

3.2 INCLINACION Y PENDIENTE DE LA RECTA

Toda línea recta tiene determinada posición en el plano, posición que se analiza, por lo que en geometría llamamos ángulo de inclinación de la recta.

Definición

Se llama ángulo de inclinación de una recta L, al ángulo que forma la recta con la horizontal, teniendo como lado inicial la horizontal. Fig. 3.4

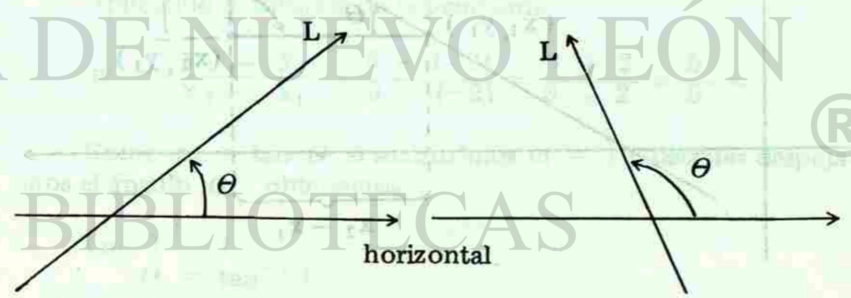


Figura 3.4

La tangente trigonométrica de un ángulo agudo, en un triángulo rectángulo, se define como la relación que hay entre el cateto opuesto y el adyacente. Ver Fig. 3.5

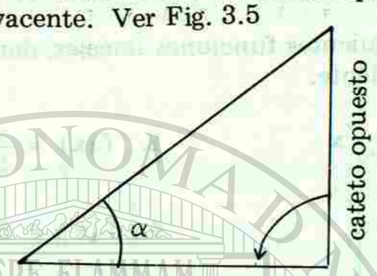


Figura 3.5

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

La tangente trigonométrica del ángulo de inclinación, se llama pendiente de la recta y se representa por la letra m.

Si θ (theta) representa el ángulo de inclinación entonces $m = \tan \theta$

Conociendo dos puntos sobre la recta

$$P_1\ (x_1,\ y_1)\ ,\ P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$$

podemos expresar la pendiente como la diferencia de ordenadas entre la diferencia de abscisas como se indica en la Fig. 3.6

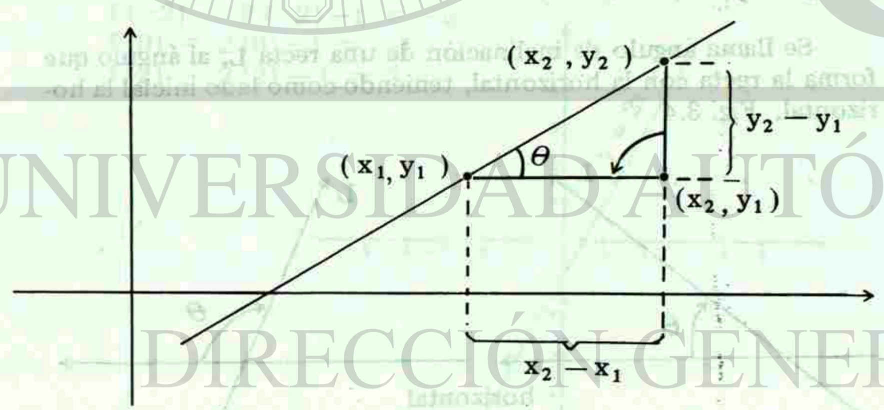


Figura 3.6

$$m = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}$$

$$m = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 3.4

Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos (−2, −2) y (3, 3)

Solución:

Localizando los puntos dados en coordenadas cartesianas, tenemos:

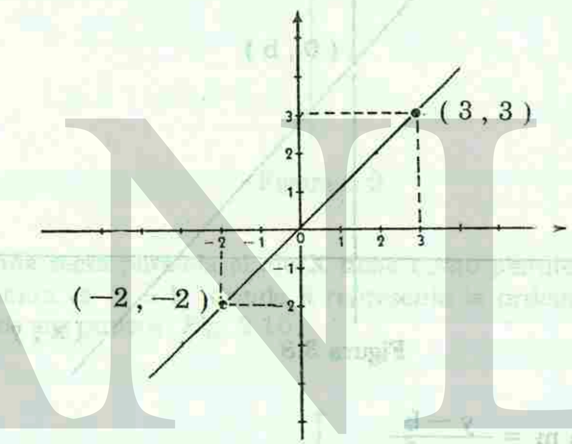


Figura 3.7

Aplicando la fórmula de la pendiente

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - (-2)}{3 - (-2)} = \frac{3 + 2}{3 + 2} = \frac{5}{5} = 1$$

Como $m = \tan \theta$ si sustituímos $m = 1$ y despues despejamos el ángulo θ , obtenemos

$$\tan \theta = 1$$
$$\theta = \tan^{-1} 1$$
$$\theta = 45^{o}$$

Este último valor lo puedes obtener consultando las tablas trigonométricas para la función tangente o bien usar una calculadora con funciones trigonométricas.

La expresión $\theta = \tan^{-1} 1$ significa que θ es el ángulo cuya tangente vale o es la unidad, también se puede escribir $\theta =$ arctan 1 que se lee θ es igual al arco cuya tangente es 1.

Si una recta corta el eje Y en un punto (0, b) y tiene como pendiente m, podemos utilizar la igualdad con la que se calcula la pendiente para encontrar la ecuación de la recta, haciendo intervenir el punto conocido (0, b) y otro desconocido (x, y) que esté sobre la recta Fig. 3.8

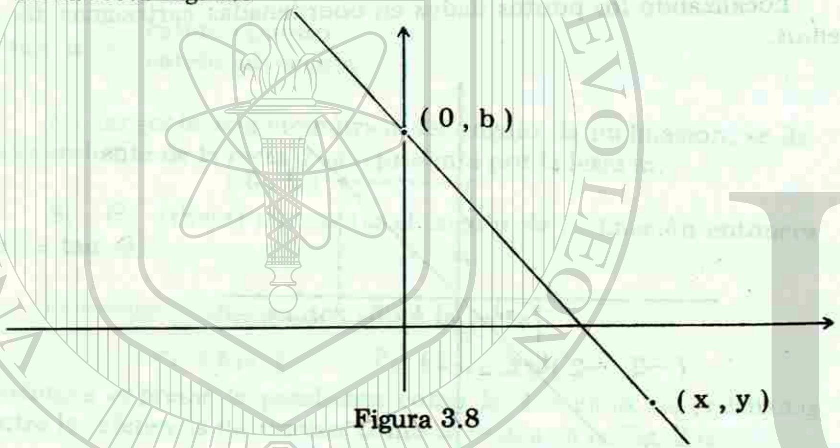


Figura 3.8

Entonces $m = \dfrac{y - b}{x - 0}$

Despejando la variable "y", tenemos:

$$y - b = m(x - 0)$$

$$\boxed{y = mx + b}$$ **Ecuación de la recta con intersección en el eje Y.**

Como el punto (o, b) es la intersección con el eje Y, a la ordenada b se le llama **ordenada al origen.**

Si $b = 0$ entonces la ordenada al origen es cero y la recta pasa por el origen, su ecuación es $y = mx$ que representa la ecuación de toda recta a través del origen, donde el valor de la pendiente m define su posición.

Si la pendiente es igual a cero, la ecuación $y = mx$ se convierte en $y = 0$ que es la ecuación del eje de las X, indicando el hecho de que todo punto sobre el eje horizontal, tiene como ordenada el valor cero. Fig. 3.9

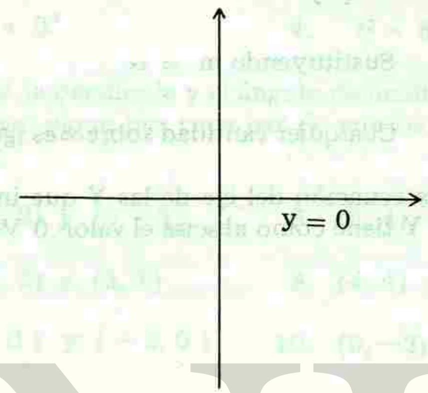


Figura 3.9

Toda recta paralela al eje X tiene como pendiente $m = 0$ y su ecuación es $y = k$ donde k representa la ordenada de cualesquiera de sus puntos Fig. 3.10.

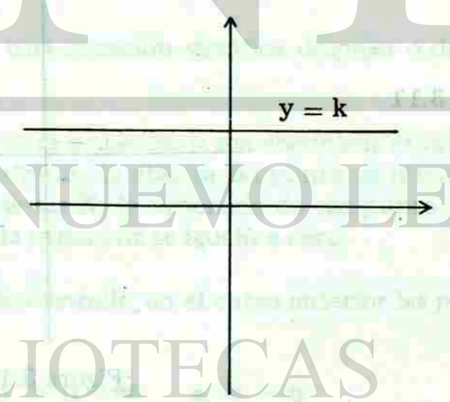


Figura 3.10

Como sabemos, el eje vertical o eje de las Y forma un ángulo recto o de 90° con el horizontal y su pendiente es $m = \tan 90^\circ = \frac{1}{0} = \infty$. Si sustituímos este valor en la fórmula $y = mx$ puesto que el eje Y también pasa por el origen, obtenemos:

$y = mx$		Ecuación inicial
$x = \frac{y}{m}$		Despejando x
$x = \frac{y}{\infty}$		Sustituyendo $m = \infty$
$x = 0$		Cualquier cantidad sobre ∞ es igual a 0

$x = 0$ es la ecuación del eje de las Y que indica que todo punto sobre el eje Y tiene como abscisa el valor 0 Ver Fig. 3.11.

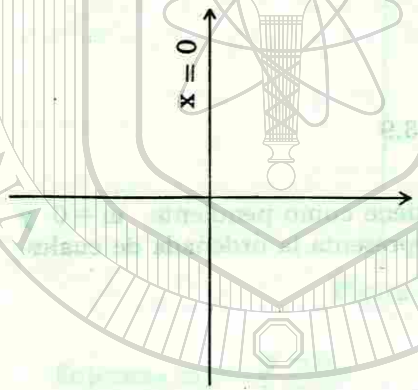


Figura 3.11

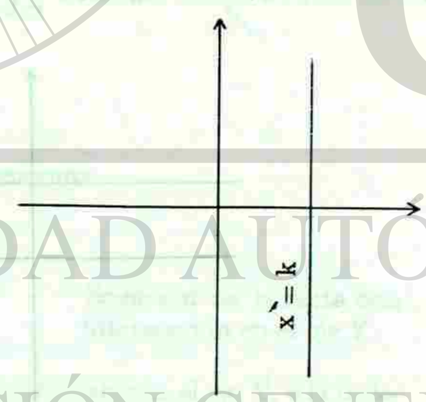


Figura 3.12

Toda recta paralela al eje Y tiene como ecuación $x = k$ donde k representa la abscisa de cualesquiera de sus puntos fig. 3.12

EJERCICIO 3.2

Obtener la pendiente de cada una de las rectas cuya inclinación es el ángulo

1. $\theta = 45^\circ$ 2. $\theta = 30^\circ$

3. $\theta = 0^\circ$ 4. $\theta = 60^\circ$

Encontrar la pendiente y el ángulo de inclinación de cada una de las rectas que pasan por cada par de puntos dados a continuación y graficar

5. $(-2, 2)$ y $(3, -3)$ 6. $(5, 4)$ y $(-2, -3)$

7. $(-4, 2)$ y $(3, 1)$ 8. $(4, 4)$ y $(6, 6)$

9. $(1, 0)$ y $(-3, 0)$ 10. $(0, -2)$ y $(3, 0)$

3.3 ECUACIONES DE LA FORMA $ax + b = 0$

Cuando una función lineal $f(x) = ax + b$ (donde $a = m$) se iguala a cero, se obtiene una ecuación lineal en una sola variable de la forma $ax + b = 0$, donde a y b actúan como constantes,"x" es la variable llamada incógnita.

Resolver una ecuación significa despejar o dejar sola la incógnita.

Al resolver la ecuación o sea encontrar el valor de la variable, estamos encontrando la abscisa del punto de intersección de la recta con el eje de las X, la ordenada de ese punto es cero ya que la función o sea la ordenada se igualó a cero.

Hemos demostrado en el curso anterior las proposiciones que nos dicen:

Si $a + b = 0 \Rightarrow a = -b$

Si $ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$

O sea, en toda igualdad al cambiar de miembro un sumando, cambia su signo y un factor al cambiar de miembro, pasa como divisor conservando su signo.

Aplicando estos teoremas, podemos resolver ecuaciones en forma directa, siguiendo los pasos dados a continuación.

Primero

Se dejan o se pasan al primer miembro de la ecuación, los términos que contengan la variable y se pasan al segundo miembro los términos independientes.

Segundo

Se suman los términos semejantes en ambos miembros, quedando en el primer miembro un único término con variable.

Tercero

El coeficiente del término que contiene la variable, pasa como divisor con el mismo signo al segundo miembro, quedando sola la variable.

Cuarto

Se efectúan operaciones en el segundo miembro.

Quinto

Si sustituímos el valor obtenido de la variable en la ecuación original y después de efectuar operaciones llegamos a una identidad, significa que la ecuación se resolvió correctamente.

Ejemplo 3.5

Resolver la ecuación $4x - 8 = 0$

Solución:

$4x - 8 = 0$ Ecuación dada

$4x = 0 + 8$ Primer paso

$4x = 8$ Segundo paso

$x = \frac{8}{4}$ Tercer paso

$x = 2$ Cuarto paso

Ejemplo 3.6

Resolver la ecuación $5x + 16 = 3x + 2$

Solución:

$5x + 16 = 3x + 2$ Ecuación dada

$5x - 3x = 2 - 16$ Primer paso

$2x = -14$ Segundo paso

$x = \frac{-14}{2}$ Tercer paso

$x = -7$ Cuarto paso

Comprobación

$5x + 16 = 3x + 2 \quad ; \quad x = -7$

Sustitución

$$5(-7) + 16 = 3(-7) + 2$$
$$-35 + 16 = -21 + 2$$
$$-19 = -19$$

EJERCICIO 3.3

Resolver las siguientes ecuaciones lineales y comprobar el resultado.

1. $8x - 16 = 0$
2. $7x - 14 = 0$
3. $3x - 18 = 2 - 2x$
4. $7x + 36 = 3x - 4$
5. $8x - 2x - 42 = 0$
6. $3x + 8 = 10 - x$
7. $60 - 10 = 3x + 2x$
8. $-8x - 35 = 2x + 15$

9. $40x - 6 = 36x + 30$ 10. $12x - 24 = -4x$

11. $3(2x + x) = 3(4 + 5)$ 12. $4(x - 2) = 8(5 - x)$

13. $(x - 1)^2 = (x + 1)^2$ 14. $(x - \frac{1}{2})^2 - x^2 = 0$

15. $(x-1)(x+1) = x^2 - 8x + 3$

16. $(z+4)(z-4) = z(z+1)$

17. $(2z-4)(2z-1) = 4(z^2-1)$

18. $(w+3)(w-1) = w(w+5)$

19. $(1-2x)^3 = 12x^2 - 8x^3 + x + 15$

20. $(w-1)(w^2+w+1) = w(w^2-2)$

3.4 ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE QUE CONTIENEN FRACCIONES.

Las ecuaciones con fracciones, aparecen muy a menudo en diferentes temas de la matemática y conviene saber manejarlas correctamente.

Para transformar una ecuación con fracciones, en una ecuación sin fracciones, es recomendable proceder como se indica en los pasos siguientes.

Primero

Basados en el hecho de que, una igualdad no se altera si sus dos miembros se multiplican por una misma cantidad, escogemos como factor el denominador de la fracción, o el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de los denominadores de las fracciones que contenga la ecuación dada y multiplicamos ambos miembros por ese número.

Segundo

Efectuamos operaciones y resolvemos para la variable o incógnita.

Ejemplo 3.7

Resolver la ecuación $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{2x}{3} + 2$

Solución:

$$\frac{3x}{2} - 3 = \frac{2x}{3} + 2$$

$$6\left(\frac{3x}{2} - 3\right) = 6\left(\frac{2x}{3} + 2\right)$$

$$\frac{18x}{2} - 18 = \frac{12x}{3} + 12$$

$$9x - 18 = 4x + 12$$

$$9x - 4x = 12 + 18$$

$$5x = 30$$

$$x = \frac{30}{5}$$

$$x = 6$$

Si en el ejemplo anterior optásemos por efectuar los operaciones con fracciones en ambos miembros, o igualar a cero la ecuación, debemos aplicar los siguientes principios.

1) En toda proporción (que es la igualación de dos fracciones o razones), los productos en cruz son iguales. O sea:

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

2) Cuando una ecuación está igualada a cero, basta con igualar a cero el numerador.

Aplicando el principio anterior y la propiedad de cancelación del cero, tenemos:

Si $\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0$

Ejemplo 3.8

Resolver la ecuación $\frac{3x}{2} - 3 = \frac{2x}{3} + 2$ aplicando el principio (1).

Solución:

$$\frac{3x}{2} - 3 = \frac{2x}{3} + 2$$

$$\frac{3x - 6}{2} = \frac{2x + 6}{3}$$

$$3(3x - 6) = 2(2x + 6)$$

$$9x - 18 = 4x + 12$$

$$9x - 4x = 12 + 18$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

O también igualando a cero la ecuación

$$\frac{3x}{2} - 3 - \frac{2x}{3} - 2 = 0$$

$$\frac{9x - 18 - 4x - 12}{6} = 0$$

Igualando a cero el numerador

$$9x - 18 - 4x - 12 = 0$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

EJERCICIO 3. 4

Resolver las siguientes ecuaciones que contienen fracciones.

1. $\frac{5x}{2} = 10$
2. $\frac{7x}{3} = 7$
3. $\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$
4. $\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = 0$

5. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3} + \frac{1}{5}$
6. $\frac{3x}{2} = \frac{x}{4} - \frac{5}{2}$
7. $\frac{4(x - 1)}{3} = \frac{2(x + 3)}{9}$
8. $\frac{(x - 1)^2}{4} = \frac{(x + 4)^2}{3}$
9. $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x - \frac{4}{5}x = \frac{1}{3}$
10. $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}x + \frac{5}{2}$

3.5 PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES LINEALES EN UNA VARIABLE

Quizá este tema es uno de los primeros, donde aplicamos el algebra a la solución de problemas concretos, que plantean situaciones del diario vivir y donde vemos una proyección del conocimiento matemático.

Si ponemos nuestro esfuerzo en relacionar, comparar y operar los datos del problema correctamente, tendremos asegurado el éxito.

A continuación sugerimos la secuela para analizar y resolver este tipo de problemas.

Primero

Leer y releer el enunciado, para captar correctamente la situación.

Segundo

Si en el enunciado aparecen vocablos nuevos, es recomendable consultar su significado.

Tercero

Una vez entendido el enunciado del problema, separar los datos conocidos de los desconocidos, haciendo un diagrama cuando sea posible.

Cuarto

Expresar el elemento desconocido más simple, por un símbolo, generalmente una de las últimas letras del alfabeto.

Quinto

Relacionar los elementos desconocidos de tal manera que queden en función de una sola variable.

Sexto

Escribir la ecuación que exprese la relación entre las cantidades constantes y variables, en ocasiones la ecuación es ya conocida.

Séptimo

Resolver la ecuación y comprobar el resultado.

Ejemplo 3.9

La edad de un padre es el doble de la edad de su hijo, dentro de cinco años, la edad del padre excederá a la de su hijo en 10 años. ¿Qué edad tiene actualmente el padre y el hijo?

Solución:

Las edades, son los elementos desconocidos, la más simple de ellas es la edad del hijo que vamos a llamar x. Entonces la edad del padre que es el doble, la expresamos por 2x.

Al transcurrir los cinco años las edades se escriben como

$x + 5$ = Edad del hijo dentro de 5 años
$2x + 5$ = Edad del padre dentro de 5 años

Para formar la ecuación tenemos el dato de que al transcurrir los cinco años, el padre tendrá 10 años más que su hijo, por lo tanto la edad del hijo más 10 será igual a la de su padre.

$$x + 5 + 10 = 2x + 5$$

Resolviendo y comprobando la ecuación, tenemos:

$$x - 2x = 5 - 15$$
$$-x = -10$$
$$x = 10$$

Con este dato $x = 10$ regresamos a la primera parte del planteamiento donde tenemos.

x = edad del hijo
$2x$ = edad del padre.

Entonces como $x = 10$, $2x = 20$.

El hijo tiene 10 años y el padre 20 años.

Ejemplo 3. 10

Encontrar el radio del círculo cuya área es 9π unidades cuadradas.

Solución:

Aquí se habla de dos conceptos relacionados con el círculo cuyo diagrama aparece en la Fig. 3.13, del cual sabemos que el área

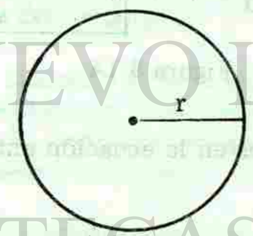


Figura 3.13

está dada por la igualdad $A = \pi r^2$ donde π (Pi) es igual a un valor constante que es 3.1416. . . ., la incógnita del planteamiento es el radio que aparece en la fórmula del área, siendo esta última función del radio.

$$A = \pi r^2 \qquad \text{y sabemos que } A = 9\pi \ u^2$$
$$9\pi = \pi r^2$$
$$9 = r^2$$
$$r = \sqrt{9} = 3$$

Como el radio es una distancia, al extraer la raíz cuadrada, consideramos el signo positivo únicamente.

Ejemplo 3.11

La longitud de un rectángulo excede a su anchura en 2 unidades. Si cada dimensión fuese incrementada en 4 unidades, el área se incrementaría en 56 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo.

Solución:

Si llamamos **x** al ancho del rectángulo, entonces el largo se expresa por x + 2. Como el área del rectángulo mayor, excede al área del menor en 56 unidades cuadradas, por lo tanto establecemos la ecuación $A_1 + 56 = A_2$ Ver Fig. 3.14

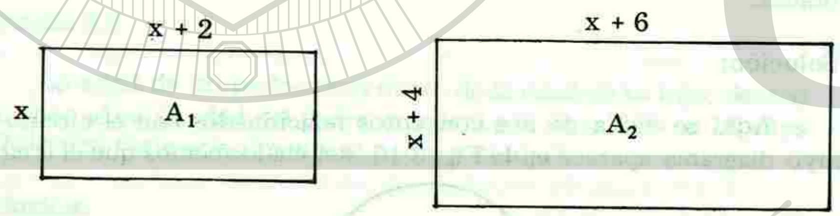


Figura 3.14

Sustituyendo valores en la ecuación anterior y resolviéndola, tenemnos:

$$A_1 + 56 = A_2$$
$$x(x+2) + 56 = (x + 4)(x + 6)$$
$$x^2 + 2x + 56 = x^2 + 10x + 24$$

$$8x = 32$$
$$x = 4$$

Ancho del rectángulo $x = 4$

Largo del rectángulo $x + 2 = 6$

EJERCICIO 3.5

Obtenga la solución a cada uno de los problemas siguientes, estableciendo una ecuación con una incógnita.

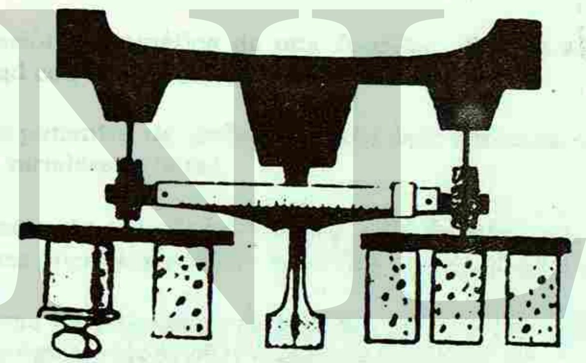
1. La suma de dos números consecutivos pares es 74. Encontrar los números.
2. La suma de dos números consecutivos impares es 156. Encontrar los números.
3. La edad de Hugo es el doble de la edad de Pedro. Dentro de 5 años la edad de Hugo excederá a la edad de Pedro en 9 años. ¿Qué edad tienen actualmente Hugo y Pedro?.
4. La edad de María es el triple de la edad de Rosa. Dentro de 8 años, Rosa será menor que María, cuatro años. Obtener las edades actuales de Rosa y María.
5. El ancho de un rectángulo es 4 unidades menor que su largo. Si cada dimensión se incrementara en 5 unidades, el área se incrementaría en 95 unidades cuadradas. Obtener las dimensiones del rectángulo.
6. La base de un triángulo es $\frac{4}{5}$ la longitud de su altura. Si la base se incrementara en 1 cm y la altura se disminuyera en 1 cm, el área del triángulo no se alteraría. Encuentre la longitud de la base y la altura.
7. Un número es 7 unidades mayor que otro. La suma de ellos es 49. Hallar los números.
8. Separar el número 100 en dos partes tales que una sea el triple de la otra.

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES REALES

- FUNCIONES REALES
  - ALGEBRAICAS
    - RACIONALES
      - POLINOMIAL
        - LINEAL
        - CUADRATICA
        - CUBICA etc.
      - NO POLINOMIAL
    - NO–RACIONALES
  - TRASCENDENTES
    - TRIGONOMETRICAS O CIRCULARES
    - LOGARITMICAS
    - EXPONENCIALES

Capítulo IV

FUNCIONES LINEALES



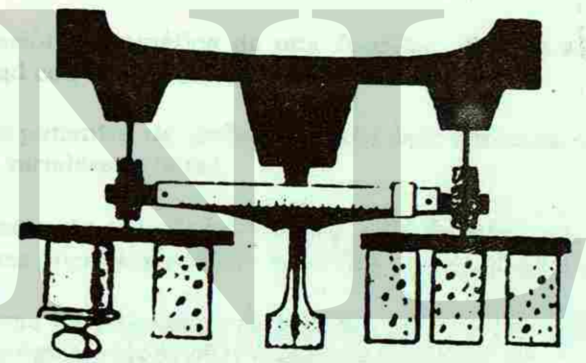
Una ecuación es comparable con una balanza de platillos, el fiel corresponde al signo de la igualdad.

CLASIFICACION DE LAS FUNCIONES REALES

- FUNCIONES REALES
  - ALGEBRAICAS
    - RACIONALES
      - POLINOMIAL
        - LINEAL
        - CUADRATICA
        - CUBICA etc.
      - NO POLINOMIAL
    - NO–RACIONALES
  - TRASCENDENTES
    - TRIGONOMETRICAS O CIRCULARES
    - LOGARITMICAS
    - EXPONENCIALES

Capítulo IV

FUNCIONES LINEALES



Una ecuación es comparable con una balanza de platillos, el fiel corresponde al signo de la igualdad.

UNIDAD IV

SOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

La expresión matemática de una función $y = f(x)$ representa una igualdad con dos variables.

Si los exponentes de ambas variables son unitarios, la ecuación con dos variables es lineal.

Un sistema de ecuaciones lineales, está formado por dos o más ecuaciones lineales, pudiendo tener dos o más variables.

Un sistema de ecuaciones de este tipo, se resuelve cuando el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones.

Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, implica el hecho de encontrar valores de las variables que satisfagan simultáneamente a ambas ecuaciones, de aquí el nombre de ecuaciones simultáneas, con el que también se conocen estas ecuaciones.

Como es conocido, una ecuación lineal con dos variables, representa una línea recta, dos ecuaciones lineales con dos variables representan dos líneas rectas y si estas líneas se intersectan, entonces las coordenadas del punto de intersección, son los valores de las variables que satisfacen ambas ecuaciones, o sea la solución del sistema, puesto que el punto de intersección pertenece a cada una de las rectas. Fig. 4.1.

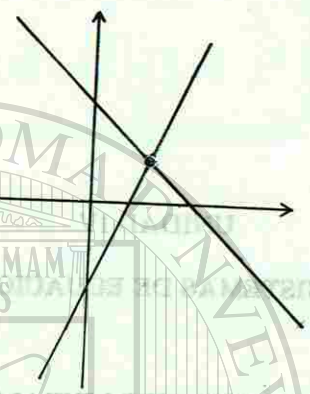


Figura 4.1

Si el sistema no tiene solución, esto significa que las rectas que representan las ecuaciones con dos variables, son paralelas o bien son la mism . recta, por consiguiente, el sistema no tiene solución y recibe el nombre de inconsistente, Fig. 4.2 y 4.3

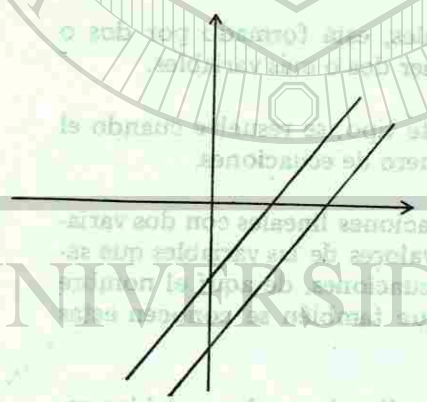


Figura 4.2

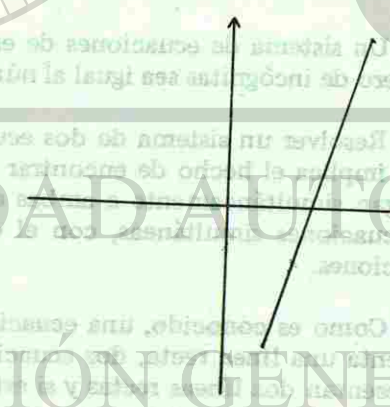


Figura 4.3

4.2 METODOS PARA RESOLVER UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

Un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, se pueden resolver analíticamente y geométricamente.

Analíticamente, existen varios métodos de eliminación de una variable a saber:

Métodos analíticos de eliminación de una variable
- Suma o Resta
- Sustitución
- Igualación

El método gráfico es único.

Comenzaremos la exposición con el método gráfico

Método Gráfico

El método gráfico es una extensión del análisis de gráficas de funciones, que consiste en despejar de cada una de las ecuaciones, la variable dependiente o función y graficar cada una de ellas, dando tantos valores a la variable independiente, como puntos se quieran obtener. Si el sistema es consistente, las dos rectas se intersectan, siendo la solución al sistema las coordenadas del punto de intersección (x, y), que deben medirse con la misma escala usada en la gráfica.

Si las rectas son paralelas o las rectas se empalman, eso significa que el sistema es inconsistente y no tiene solución.

Ejemplo 4.1

Encontrar gráficamente la solución al siguiente sistema de ecuaciones.

$$x + y = 8$$
$$x - y = 4$$

Solución:

Despejando la variable "y" de cada una de las ecuaciones, igualándola a f (x) y dando valores a la variable independiente "x", tenemos:

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ y &= 8 - x \\ f(x) &= 8 - x \\ f(4) &= 4 \\ f(6) &= 2 \\ f(8) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - y &= 4 \\ x - 4 &= y \\ f(x) &= x - 4 \\ f(2) &= -2 \\ f(3) &= -1 \\ f(4) &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos por localizar son (4, 4), (6, 2) y (8, 0) para la recta $y = 8 - x$, y para la segunda recta $y = x - 4$ son (2, −2), (3, −1) y (4, 0), Fig. 4.4

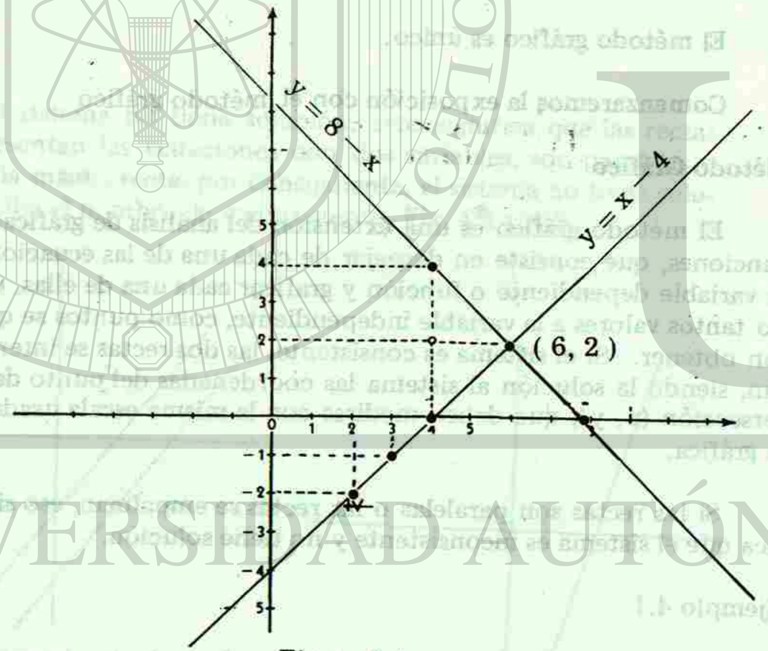


Figura 4.4

Observamos en la gráfica que las coordenadas del punto de intersección son x = 6 , y = 2 , siendo estos valores la solución al sistema.

Ejemplo 4.2

Resolver gráficamente el sistema formado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 4x + 2y &= 15 \end{aligned}$$

Solución:

Despejando la variable "y" de cada una de las ecuaciones

$$y = 5 - 2x, \qquad y = \frac{15 - 4x}{2}$$

Dando valores a la variable x

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 - 2x, \\ f(0) &= 5 \\ f(1) &= 3 \\ f(2) &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x) &= \frac{15 - 4x}{2} \\ f(3) &= \frac{15 - 12}{2} = \frac{3}{2} \\ f(4) &= \frac{15 - 16}{2} = -\frac{1}{2} \\ f(5) &= \frac{15 - 20}{2} = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

Graficando obtenemos

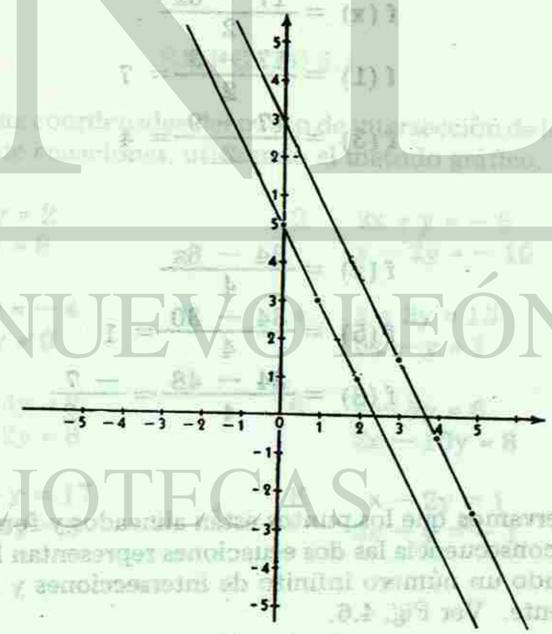


Figura 4.5

Como observamos en la figura 4.5, las rectas son paralelas y estas rectas nunca se cortan, por lo tanto el sistema es inconsistente y no tiene solución.

Ejemplo 4.3

Graficar el sistema de ecuaciones

$$3x + 2y = 17$$
$$6x + 4y = 34$$

e interpretar el resultado.

Solución:

Despejando la variable "y" de ambas ecuaciones.

$$y = \frac{17 - 3x}{2}, \qquad y = \frac{34 - 6x}{4}$$

Dando valores a la variable independiente "x"

$$f(x) = \frac{17 - 3x}{2}$$
$$f(1) = \frac{17 - 3}{2} = 7$$
$$f(3) = \frac{17 - 9}{2} = 4$$

$$f(x) = \frac{34 - 6x}{4}$$
$$f(5) = \frac{34 - 30}{4} = 1$$
$$f(8) = \frac{34 - 48}{4} = \frac{-7}{2}$$

Observamos que los puntos están alineados y forman una sola recta, en consecuencia las dos ecuaciones representan la misma recta, habiendo un número infinito de intersecciones y el sistema es inconsistente. Ver Fig. 4.6.

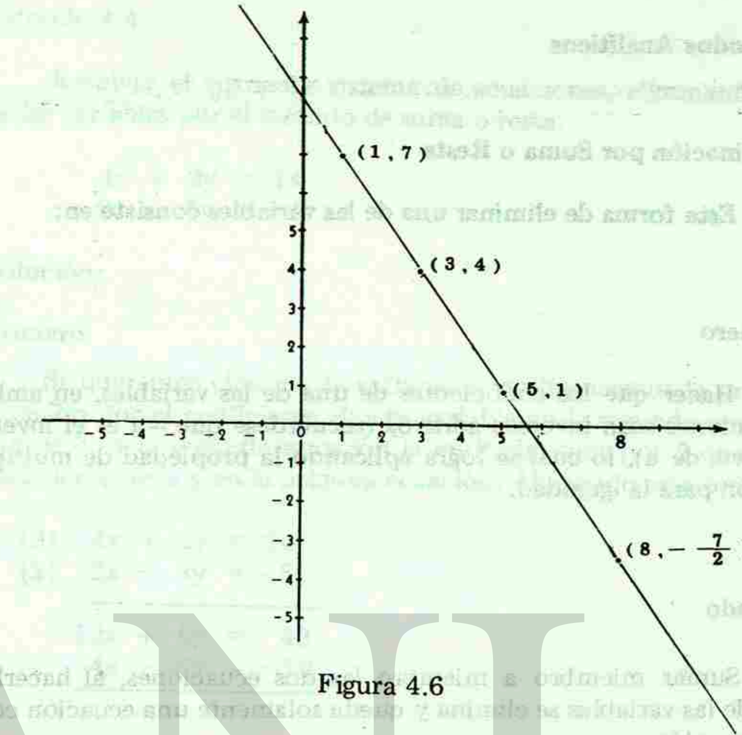


Figura 4.6

EJERCICIO 4.1.

Hallar las coordenadas del punto de intersección de los siguientes sistemas de ecuaciones, utilizando el método gráfico.

1. $x - y = 2$, $x + y = 8$
2. $2x + y = -5$, $x - 2y = -10$
3. $x + y = -4$, $x - y = 0$
4. $x + 3y = 13$, $5x - y = 1$
5. $3x + 4y = 2$, $5x + 2y = 8$
6. $x - 5y = 6$, $2x - 10y = 8$
7. $3x - y = 17$, $2x + 2y = 6$
8. $x - 2y = 1$, $2x - y = -1$

Métodos Analíticos

Eliminación por Suma o Resta

Esta forma de eliminar una de las variables consiste en:

Primero

Hacer que los coeficientes de una de las variables, en ambas ecuaciones sean inversos aditivos (recuérdese que $-a$ es el inverso aditivo de a), lo cual se logra aplicando la propiedad de multiplicación para la igualdad.

Segundo

Sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, al hacerlo, una de las variables se elimina y queda solamente una ecuación con una variable.

Tercero

Resolver la ecuación obtenida en el paso anterior.

Cuarto

Sustituír el valor de la variable obtenida, en cualesquiera de las ecuaciones iniciales y despejar la variable.

Quinto

Comprobar que estos valores obtenidos, satisfagan a ambas ecuaciones, sustituyéndolos en cada una de ellas, hasta llegar a una identidad.

Ejemplo 4.4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, eliminando una de las variables por el método de suma o resta.

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 14 \\ 2x - 3y &= -5 \end{aligned}$$

Solución:

Primero

Si queremos eliminar la variable y, multiplicamos la primera ecuación por el coeficiente de esa variable en la segunda ecuación que es 3 y la segunda ecuación la multiplicamos por 2 que es el coeficiente de la y en la primera ecuación. Haciendo esto tenemos

$$\begin{aligned} (3)\quad 4x + 2y &= 14 \\ (2)\quad 2x - 3y &= -5 \\ \hline 12x + 6y &= 42 \\ 4x - 6y &= -10 \\ \hline \end{aligned}$$

Segundo

Sumando miembro a miembro las ecuaciones

$$16x = 32$$

Tercero

Resolviendo la ecuación

$$16x = 32$$

$$x = \frac{32}{16}$$

$$x = 2$$

Cuarto

Sustituyendo este valor en la primera ecuación

$$4x + 2y = 14 \quad , \quad x = 2$$

$$4(2) + 2y = 14$$

$$2y = 14 - 8$$

$$y = \frac{6}{2}$$

$$y = 3$$

Quinto

Comprobación

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 14 \\ 4(2) + 2(3) &= 14 \\ 8 + 6 &= 14 \\ 14 &= 14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - 3y &= -5 \\ 2(2) - 3(3) &= -5 \\ 4 - 9 &= -5 \\ -5 &= -5 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.2

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de suma o resta.

1. $x - y = 3$
   $x + y = 3$

2. $2x + y = 0$
   $x + y = -1$

3. $5x + 3y = 15$
   $2x - y = 6$

4. $2x - 4y = 0$
   $3x + 2y = 8$

5. $4x + 5y = 22$
   $2x + 3y = 12$

6. $3x + 2y = -1$
   $4x - y = -16$

7. $6x + 3y = 2$
   $x - 2y = 2$

8. $3x + 7y - 8 = 0$
   $5y - 2y - 23 = 0$

9. $8x = 1 + y$
   $2x = 10 - 3y$

10. $8x - 12y = 2$
    $6x + 4y = 8$

11. $13x + 17y = 0$
    $21x - 9y = 0$

12. $11x - 23y = 5$
    $22y - 46y = 10$

13. $9x = 28 - 7y$
    $x = 2 - y$

14. $17x + y = 2$
    $15x = 5y$

15. $18w - 9z = 3$
    $7w - 5z = 1$

16. $17x - 10y = 4$
    $34x - 20y = 12$

Eliminación por Sustitución

Los pasos a seguir en este método son:

Primero

Escoger una de las ecuaciones y de ella despejar una de las variables en función de la otra.

Segundo

Sustituír el valor de la variable despejada en la otra ecuación.

Tercero

Simplificar y resolver para la variable que contenga la ecuación obtenida en el paso anterior.

Cuarto

Sustituír el valor obtenido en el paso tercero en la variable despejada en el primer paso.

Quinto

Comprobar la solución, en ambas ecuaciones.

Ejemplo 4.5

Resolver por el método de sustitución el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 2x + 6y &= 12 \end{aligned}$$

Solución:

Primero

Despejamos la variable x de la primera ecuación.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 3x &= 7 + 2y \\ x &= \frac{7 + 2y}{3} \end{aligned}$$

Segundo

Sustituímos el valor de x en la ecuación $2x + 6y = 12$

$$2\left(\frac{7 + 2y}{3}\right) + 6y = 12$$

Tercero

Multiplicamos por 3 cada miembro de la ecuación y la resolvemos.

$$(3)(2)\left(\frac{7 + 2y}{3}\right) + (3)\,6y = 3\,(12)$$

$$\begin{aligned} 14 + 4y + 18y &= 36 \\ 22y &= 36 - 14 \\ 22y &= 22 \\ y &= \frac{22}{22} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Cuarto

Sustituímos este valor $y=1$ en la igualdad $x=\frac{7 + 2y}{3}$

$$\begin{aligned} x &= \frac{7 + 2(1)}{3} \\ x &= \frac{7 + 2}{3} \\ x &= \frac{9}{3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Quinto

Comprobación

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 3(3) - 2(1) &= 7 \\ 9 - 2 &= 7 \\ 7 &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 6y &= 12 \\ 2(3) + 6(1) &= 12 \\ 6 + 6 &= 12 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.3

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $x + 2y = 9$
$4x + 3y = 16$

2. $5x + y = -8$
$3x + 2y = -2$

3. $6x - 10y = 2$
$2x = 2 + 4y$

4. $9x - 3y = 12$
$5x + 2y = -8$

5. $3x + 11y = 18$
$2x + 9y = -12$

6. $3z - 6w = 12$
$6z - 3w = -1$

7. $4x = 4 + 8y$
$3x + 5y = 25$

8. $10z - 5w = 4$
$15z + 20w = -5$

9. $2x + 11y = -24$
$7x + 15y = 10$

10. $y = 3x$
$2y = 6x$

Eliminación por Igualación

El desarrollo de este método es el siguiente.

Primero

Despejar de cada una de las ecuaciones dadas, la misma variable.

Segundo

Igualar estas expresiones. Esta igualación está basada en la verdad axiomática que dice: Si dos cantidades son iguales a una tercera entonces son iguales entre sí.

Tercero

Resolver la ecuación así obtenida, y se tendrá el valor de una de las variables.

Cuarto

Sustituír este valor, en cualesquiera de las igualdades del primer paso.

Quinto

Comprobar en cada una de las ecuaciones, el resultado obtenido.

Ejemplo 4.6

Resolver el sistema de ecuaciones dado a continuación, por el método de igualación.

$$\begin{aligned} x - 3y &= -14 \\ 5x + 2y &= 32 \end{aligned}$$

Solución:

Primero

Despejamos de cada una de las ecuaciones la variable x

$$x - 3y = -14 \quad \Rightarrow \quad x = 3y - 14$$

$$5x + 2y = 32 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{32 - 2y}{5}$$

Segundo

Igualamos estos valores de x

$$3y - 14 = \frac{32 - 2y}{5}$$

Tercero

Resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} 5(3y - 14) &= 32 - 2y \\ 15y - 70 &= 32 - 2y \\ 15y + 2y &= 32 + 70 \\ 17y &= 102 \\ y &= \frac{102}{17} \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Cuarto

Sustituímos $y = 6$ en la igualdad

$$x = 3y - 14 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 3(6) - 14 \\ x &= 18 - 14 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Quinto

Comprobamos los valores $x = 4$, $y = 6$ en cada una de las ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - 3y &= -14 \\ 4 - 3(6) &= -14 \\ 4 - 18 &= -14 \\ -14 &= -14 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x + 2y &= 32 \\ 5(4) + 2(6) &= 32 \\ 20 + 12 &= 32 \\ 32 &= 32 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4.4

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación

1. $x + y = 11$
   $x + 2y = 17$

2. $2x + y = -5$
   $x - 2y = -10$

3. $19x + 2z = 27$
   $21x - y = -9$

4. $16x - 4y = 11$
   $20x = 8y = 13$

5. $7w - 2z = -15$
   $3w + 5z = -24$

6. $y = 5x$
   $x = \frac{y}{9}$

Reuselva los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que mejor convenga.

7. $y - 5x = 0$
   $y = \frac{x}{2}$
   $\frac{x}{5} - y = 0$

8. $y = x$
   $2x + 3y = 5$
   $3x - 10y = -7$

4.3 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON TRES VARIABLES.

Los métodos analizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales con dos variables, se generalizan a sistemas que contienen más variables y más ecuaciones.

Resolveremos sistemas formados por tres ecuaciones con tres incógnitas.

Ejemplo 4.

Resolver el siguiente sistema por el método de suma o resta.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ x + 3y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

Solución:

Primero

Combinamos las ecuaciones primera y segunda y eliminamos la variable "y"

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + 2z &= 6 \\ \hline 3x + 3z &= 12 \end{aligned}$$

Segundo

Combinamos las ecuaciones segunda y tercera y eliminamos la misma variable "y"

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 2z & = & 6 \\ x & + & 3y & - & 3z & = & 2 \\ \hline 6x & - & 3y & + & 6z & = & 18 \\ x & + & 3y & - & 3z & = & 2 \\ \hline 7x & & & + & 3z & = & 20 \end{array}$$

Tercero

Resolvemos el sistema formado por las dos ecuaciones con dos variables, obtenidas en los pasos anteriores.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3z & = & 12 \\ 7x & + & 3z & = & 20 \\ \hline \end{array}$$

Lo único que tenemos que hacer aquí, es cambiar el signo en los dos miembros de una de las ecuaciones y sumarlas miembro a miembro.

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & + & 3z & = & 12 \\ -7x & - & 3z & = & -20 \\ \hline -4x & & & = & -8 \end{array}$$

$$x = \frac{-8}{-4}$$

$$x = 2$$

Con este valor $x = 2$ trabajamos una de las ecuaciones con dos variables.

$$\begin{aligned} 3x + 3z &= 12 \\ 3(2) + 3z &= 12 \\ 3z &= 12 - 6 \\ 3z &= 6 \end{aligned}$$

$$z = \frac{6}{3}$$

$$z = 2$$

Con los dos valores $x = 2$, $z = 2$ trabajamos una de las ecuaciones con tres variables.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2 + y + 2 &= 6 \\ y &= 6 - 2 - 2 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Cuarto

Comprobación

Sustituyendo los valores encontrados de las variables, en cada una de las tres ecuaciones se tiene:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2 + 2 + 2 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y + 2z &= 6 \\ 2(2) - 2 + 2(2) &= 6 \\ 4 - 2 + 4 &= 6 \\ 6 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3y - 3z &= 2 \\ 2 + 3(2) - 3(2) &= 2 \\ 2 + 6 - 6 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 4.5

1. $2x + 3y - z = 4$

   $x + 2y + 2z = 5$

   $3x - y + 3z = 5$

2. $x + 2y - z = -1$

$x - y + 3z = 7$

$2x + y + z = 4$

3. $x + y + z = 6$

$2x - 2y + z = 3$

$x - y - z = 0$

4. $2x - 3y + z = -3$

$x + y - z = -2$

$3x - y + z = -2$

5. $x + y - z = 2$

$x - 2y + 2z = 2$

$2x + 3y - z = 8$

EJERCICIO 1.1

1. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{12}$ 5. $\frac{x}{2y}$

7. $\frac{z^3}{3x^2y^3}$ 9. $x + 2$ 11. $-(y + 5)$

13. $-(1 + c)$ 15. -1 17. $\frac{x - y}{x + y}$

19. $\frac{-2}{c + d}$ 21. $\frac{x - 7}{x + 8}$ 23. 1

25. $\frac{m - n + 1}{m - n}$ 27. $\frac{a + b}{x + y}$

EJERCICIO 1.2

7. $\frac{35}{4}$ 3. $\frac{3}{4}$ 5. $\frac{3c^2 d}{2a^3 b^2}$

7. $2(a - b)$ 9. 3 11. $\frac{2(x - 1)}{3(2x + 3)}$

13. $\frac{4 + cd}{3(4a + 56)}$ 15. $a - b$

EJERCICIO 1.3

1. $\frac{2}{3}$ 3. 14 5. $\frac{7ax}{5y^2}$

7. 1 9. $\frac{1}{2}$ 11. $\frac{15(x + y)}{x - y}$

13. $(1 + a)(1 - b)$

15. $\dfrac{y - 5}{x - 2}$

17. $\dfrac{(x + 8)(y + 7)}{(x - 10)(y + 4)}$

19. 1

EJERCICIO 1.4

1. 72
3. 42
5. 60
7. 60
9. 90
11. $15x^2 y^4$
13. $8 - c^3$
15. $40(x^2 - y^2)$
17. $20(a + b)(a - b)^2$
19. $(a + b)(x + y)(w + z)$

EJERCICIO 1.5

1. $\dfrac{11}{2}$
3. $\dfrac{3}{7}$
5. $\dfrac{3}{b}$
7. x
9. $\dfrac{12x}{x - 1}$

EJERCICIO 1.6

1. $\dfrac{3}{20}(3b + 1)$
3. $\dfrac{4}{a^3}(a - 1)^2$
5. $\dfrac{2(2x - 1)}{x^2 - 1}$
7. $\dfrac{y^2 + 3y + 3}{(y + 3)(y + 2)}$

9. $\dfrac{2w}{25w^2 - 1}$

11. $\dfrac{-8}{x + y}$

13. $\dfrac{12}{a(a + 2)}$

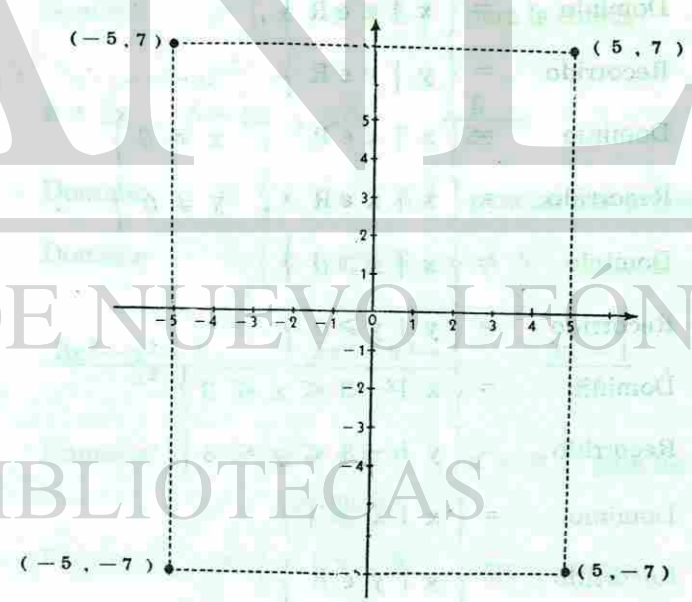
15. $\dfrac{x - 12}{(x + 4)(x + 3)(x - 6)}$

EJERCICIO 1.7

1. $\dfrac{1}{3}$
3. 2
5. 2
7. -1
9. $\dfrac{x}{3x + 2}$

EJERCICIO 2.1

1.



3. $-y \;,\; -x \;,\; y \;,\; -y$

donde x R , y R

5. 0 7 , a) *I* y *III* b) *II* y *IV*

9. En tres posiciones

11. a) Recta paralela al eje "y"

b) Recta paralela al eje "x"

c) Recta que corta los cuadrantes *I* y *III*

EJERCICIO 2.2

1. Función 3. Relación 5. Función

7. Dominio $= \{ x \mid x \in R \}$,

Recorrido $= \{ y \mid y \in R \}$

9. Dominio $= \{ x \mid x \in R \}$,

Recorrido $= \{ y \mid y \in R \}$

11. Dominio $= \{ x \mid x \in R \;,\; x \neq 0 \}$

Recorrido $= \{ x \mid x \in R \;,\; y \neq 0 \}$

13. Dominio $= \{ x \mid x \geqslant 0 \}$

Recorrido $= \{ y \mid y \geqslant 0 \}$

15. Dominio $= \{ x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3 \}$

Recorrido $= \{ y \mid -3 \leqslant y \leqslant 3 \}$

17. Dominio $= \{ x \mid x \geqslant 1 \}$

Recorrido $= \{ y \mid y \in R \}$

EJERCICIO 2.3

a) Función b) Función c) Relación

d) Relación e) Relación f) Función

g) Función

EJERCICIO 2.4

1. $\dfrac{x - x^2 + 1}{x} \;,\; \dfrac{x - x^2 - 1}{x} \;,\; \dfrac{1}{x} - 1 \;,\; x - x^2$

Dominio $= \{ x \mid x \in R \,,\; x \neq 0 \}$ para las tres primeras

Dominio $= \{ x \mid x \in R \}$ para la cuarta

3. $5 + 2x \;,\; 5 - 2x \;,\; 10x \;,\; \dfrac{5}{2x}$

Dominio $= \{ x \mid x \in R \}$ para las tres primeras

Dominio $= \{ x \mid x \in R \,,\; x \neq 0 \}$ para la cuarta

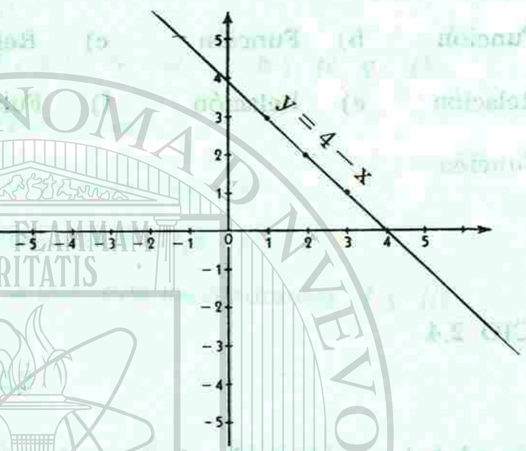
5. $\dfrac{3x^3 - x^2 + 1}{x^2} \;,\; \dfrac{3x^3 - x^2 - 1}{x^2} \;,\; \dfrac{3x - 1}{x^2} \;,\; 3x^3 - x^2$

Dominio $= \{ x \mid x \in R \;,\; x \neq 0 \}$ para las tres primeras

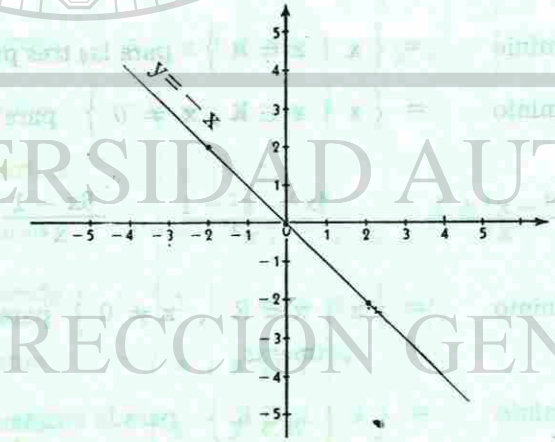
Dominio $= \{ x \mid x \in R \}$ para la cuarta.

EJERCICIO 3.1

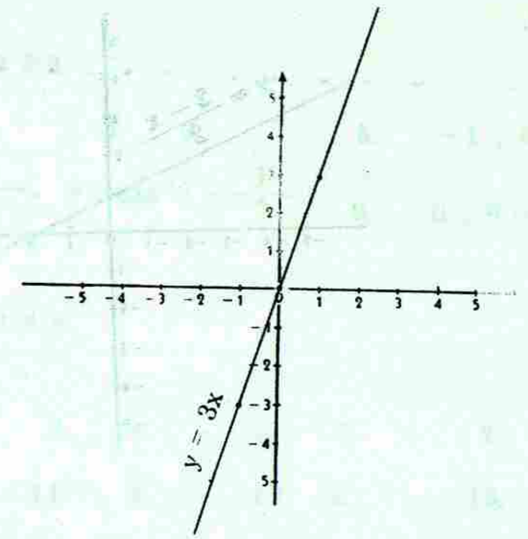
1.



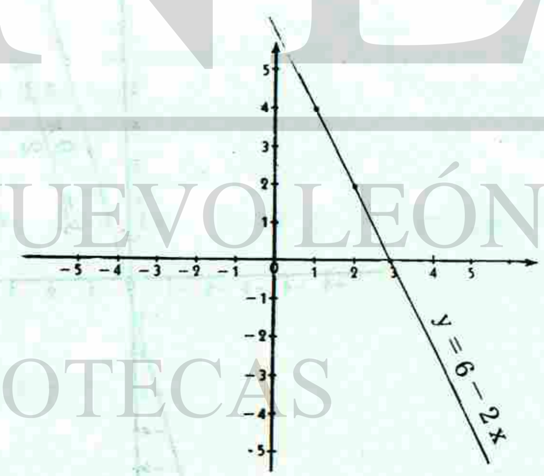
3.



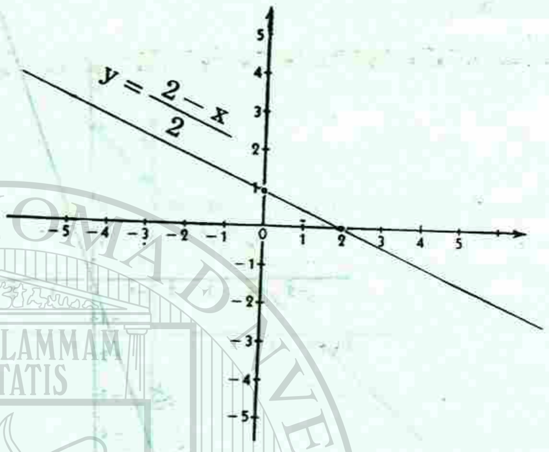
5.



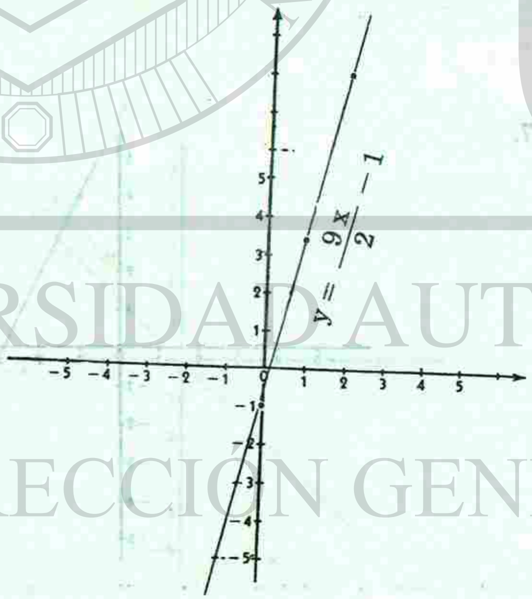
7.



9.



11.



EJERCICIO 3.2

1. 1 ,   3. 0   5. -1 , $\theta = 135^0$

7. $-\frac{1}{7}$, $\theta = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{7}\right)$ 9. 0 , $\theta = 0^0$

EJERCICIO 3.3

1. 2   3. 4   5. 7   7. 10

9. 9   11. 3   13. 0   15. $\frac{1}{2}$

17. $\frac{4}{5}$ 19. -2

EJERCICIO 3.4

1. 4   3. 3   5. 6   7. $\frac{9}{5}$

9. 10

EJERCICIO 3.5

1. 36 , 38   3. 9 , 18   5. 9 , 5   7. 21 , 28

EJERCICIO 4.2

1. $x = 4$, $y = -1$ 2. $x = 1$, $y = -2$ 3. $x = 3$, $y = 0$

4. $x = 2$, $y = 1$ 5. $x = 3$, $y = 2$ 6. $x = -3$, $y = 4$

7. $x = -2$, $y = -2$ 8. $x = 5$, $y = -1$ 9. $x = \frac{1}{2}$, $y = 3$

10. $x = \frac{3}{2}$ $y = -\frac{1}{4}$

EJERCICIO 4.3

1. $x = 1$, $y = 4$ 2. $x = -2$, $y = 2$ 3. $x = -3$, $y = -2$

4. $x = 0$, $y = -4$ 5. $x = -6$, $y = 0$ 6. $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{3}$

7. $x = 5$, $y = 2$ 8. $x = -\frac{1}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$ 9. $x = 10$, $y = -4$

10. $x = 0$, $y = 0$ 11. Inconsistente
12. Inconsistente

EJERCICIO 4.4

1. $x = 5$, $y = 6$ 2. $x = -4$, $y = 3$ 3. $x = 0$, $y = 9$

4. $x = \frac{3}{4}$, $y = -\frac{1}{4}$ 5. $x = -3$, $y = -3$ 6. **Inconsistente**

7. $x = 7$, $y = -5$ 8. $x = 0$, $y = 0$ 9. $x = \frac{1}{10}$, $y = \frac{3}{10}$

10. $x = \frac{2}{9}$, $y = \frac{1}{9}$

EJERCICIO 4.5

1. $x = 1, \; y = 1 \quad z = 1$

3. $x = 3, \; y = 2, \; z = 1$

5. $x = 2, \; y = 2, \; z = 2$

BIBLIOGRAFIA

Bruce E. Meserve Max A. Sobel	Introducción a las Matemáticas 1a. ed., Editorial Reberté Mexicana, S. A. 1971
Dolciani, Berman, Freilich	Algebra Moderna 1 1a. ed., Publicaciones Cultural, S. A. México 1967
Dolciani, Berman Wooton	Algebra Moderna 2 1a. ed., Publicaciones Cultural, S. A. México 1967.
Jrry B. Marion Ronal C. Davidson	Matemáticas para Física General 1a. ed., Interamericana. 1972
Lovaglia, Elmore, Conway	Algebra 1a. ed., HARLA México. 1972.
Jay Orear	Física Fundamental 1a. ed., Editorial Limusa.- Wiley 1965
