REFORMA ACADEMICA DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
Secretaría Académica

M5

MATEMATICAS, PRIMERA EDICION 1994

m

Matemáticas

El nivel de complejidad tecnológica crece de manera constante. Para enfrentar ese reto de la sociedad actual, cada vez más técnica, la gente debe tener una base matemática sólida que pueda aplicarse a situaciones diversas. Este material se preparó con el objeto de proporcionar dicha base a los estudiantes de preparatoria de la U.A.N.L.

El texto tiene numerosas características que facilitan el uso del materia, tanto a los estudiantes como para los maestros; asimismo, estas características tienen en cuenta la naturaleza especial de las matemáticas aplicadas. En primer lugar, la presentación de las matemáticas destaca los conceptos y las aplicaciones. En vez de presentar formalmente las matemáticas con teoremas y demostraciones, se introducen los conceptos matemáticos gráficamente, por medio de aplicaciones y mostrando las relaciones entre los conceptos y las operaciones matemáticas correspondientes.

En segundo lugar, debido a que los estudiantes aprenden matemáticas participando activamente en el proceso de resolución de problemas, el texto incluye una gran cantidad de variedad de ejercicios y problemas que deberán trabajarse en clase y fuera de ella.

Finalmente, se espera que las características organizacionales del libro y la variable de las aplicaciones mejoren el aprecio por parte de los estudiantes hacia las matemáticas y ayuden también a prepararlos para las numerosas aplicaciones que encontrarán posteriormente.

COMITE TECNICO DE MATEMATICAS

Lic. Blanca Mª Borghes Alonso
Ing. Roberto Sánchez Ayala
Ing. Fernando Javier Gómez Triana
Lic. Miguel A. Torrecillas González
Ing. Antonio Montemayor Soto
Ing. José Luis Guerra Torres
Lic. Tomás Humberto Martínez Galindo

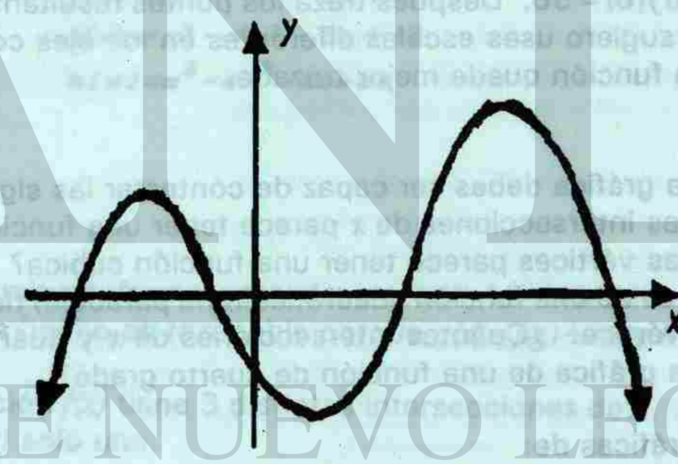
INDICE

APENDICE

CAPITULO 1

FUNCIONES DE GRADO SUPERIOR

En la presente unidad estudiarás funciones en las cuales la variable independiente *x* es elevada a un exponente entero mayor que dos (2), siendo significativo el concepto matemático concerniente a los valores de *x* que hacen $y=f(x)=0$. Para utilizar este concepto tendrás que hacer uso de los números complejos. Además verás funciones de grado superior como modelos matemáticos, por ejemplo LA VISCOCIDAD DEL ACEITE, LA DEFLECCION DE LA MADERA, ETC. ETC.

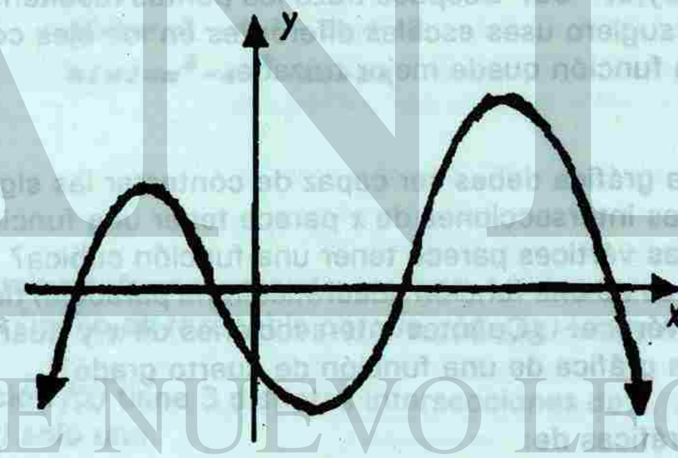


APENDICE

CAPITULO 1

FUNCIONES DE GRADO SUPERIOR

En la presente unidad estudiarás funciones en las cuales la variable independiente *x* es elevada a un exponente entero mayor que dos (2), siendo significativo el concepto matemático concerniente a los valores de *x* que hacen $y=f(x)=0$. Para utilizar este concepto tendrás que hacer uso de los números complejos. Además verás funciones de grado superior como modelos matemáticos, por ejemplo LA VISCOCIDAD DEL ACEITE, LA DEFLECCION DE LA MADERA, ETC. ETC.



1.1 Introducción a las funciones de grado superior

Recuerda que una función polinomial es una función con una ecuación general de forma $y =$ polinomio en x

Estudiaste funciones lineales (primer grado) y cuadráticas (segundo grado) en curs anteriores. En esta sección vas a graficar una función cúbica.

Objetivo

Interpretar la trayectoria de una serie de puntos y su comportamiento gráfico de una una función cúbica.

El ejercicio siguiente está diseñado para permitirte lograr este objetivo.

Ejercicio 1.1

1. Traza la gráfica de la función cúbica:
   $f(x)=x^3-4x^2-3x+2$. Dominio $-3 \leq x \leq 6$.

   Calcula los valores de la función *de* $f(x)$ para cada valor entero de x de su domini Por ejemplo $f(6) = 56$. Después traza los puntos resultantes y únelos con una líne curva. Te sugiero uses escalas diferentes en los ejes coordenados para que la gráfica de la función quede mejor trazada.

2. Mediante la gráfica debes ser capaz de contestar las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuántas intersecciones de x parece tener una función cúbica.
   b) ¿Cuántas vértices parece tener una función cúbica?
   c) La gráfica de una función cuadrática (una parábola) tiene dos intersecciones d x y un vértice. ¿Cuántas intersecciones de x y cuántas vértices esperas qu tenga la gráfica de una función de cuarto grado?

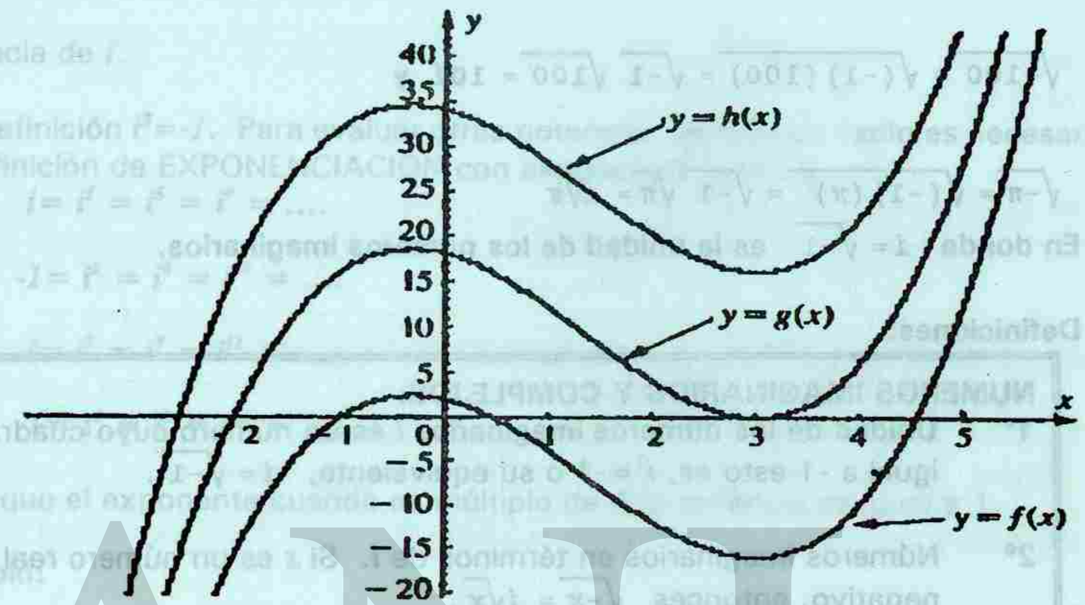
3. Traza las gráficas de:
   $g(x)=x^3-4x^2-3x+18$
   $h(x)=x^3-4x^2-3x+34$

   Esto es fácil si observas que $g(x)=f(x)+16$ y $h(x)=f(x)+32$ donde $f(x)$ se define en problema uno.

   a) ¿Cómo las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ se comparan con la gráfica de $f(x)$?
   b) ¿Cuántas intersecciones de x tienen las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$?
   c) ¿Qué conclusiones puedes obtener acerca del número de intersecciones de que tiene una función cúbica?

1.2 Repaso de números complejos

En la sección anterior obserbaste las gráficas de las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, cada una es una función cúbica y cada ecuación difiere en el término constante. Sus gráficas son mostradas en la figura 1-2a



$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 2$
$g(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$
$h(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 34$

Figura 1-2a.

Cada una tiene la misma forma pero desplazada 16 unidades una de otra en la dirección de y. Este hecho es razonable porque $g(x)=f(x)+16$ y $h(x)=g(x)+16$.

La gráfica de la función $f(x)$ tiene 3 distintas intersecciones de x. La de $g(x)$ tiene dos intersecciones y $h(x)$ solo una.

En esta sección recordarás acerca de números complejos.

Después de explorar soluciones complejas de ecuaciones cuadráticas en la siguiente sección, encontrarás algunas conclusiones generales acerca de las intersecciones de x de funciones cúbicas y de grado superior.

Objetivo

Ser capaz de sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos.

Un número imaginario es definido como la raíz cuadrada de un número real negativ

$\sqrt{-17}$, $\sqrt{-100}$, $-\sqrt{-3}$, $\sqrt{-\pi}$ son números imaginarios.De donde:

$$\sqrt{-17} = \sqrt{(-1)(17)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{17} = i\sqrt{17}$$

$$\sqrt{-100} = \sqrt{(-1)(100)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{100} = 10i \text{ y}$$

$$\sqrt{-\pi} = \sqrt{(-1)(\pi)} = \sqrt{-1}\ \sqrt{\pi} = i\sqrt{\pi}$$

En donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad de los números imaginarios.

Definiciones:

NUMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS:

1º **Unidad de los números imaginarios** i es un número cuyo cuadrado es igual a -1 esto es, $i^2 = -1$ o su equivalente, $i = \sqrt{-1}$.

2º Números imaginarios en términos de i. Si x es un número real no negativo, entonces $\sqrt{-x} = i\sqrt{x}$.

3º Números complejos
Un número complejo es un número de la forma $a+bi$, donde a es la parte real y bi es la parte imaginaria.

4º Números complejos conjugados.
Los números complejos $a+bi$ y $a-bi$ son llamados números complejos conjugados uno del otro.

Los números complejos pueden representarse en un plano complejo. La figura 1.2b muestra el número complejo $4+3i$. La parte real (4) es ubicada como la absisa. La parte imaginaria (3) es ubicada como la ordenada.

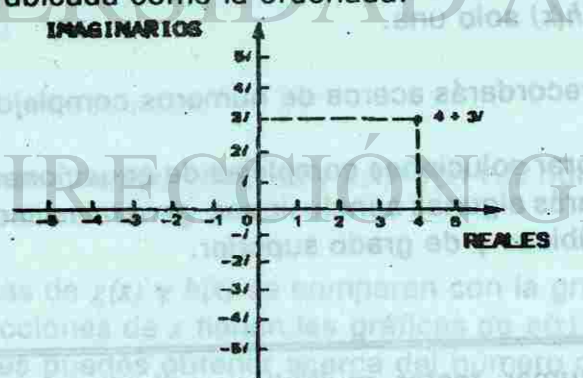


Figura 1.2b

Mediante la posición de ambas líneas una de números reales (eje horizontal) y la otra de números imaginarios (en eje vertical) puedes concluir que el conjunto de números reales y números imaginarios son subconjuntos del conjunto de números complejos. También puedes concluir que el número CERO es tanto un número real como un número imaginario ya que aparece en ambos ejes (la real y la imaginaria) en la misma ubicación.

Potencia de i.

Por definición $i^2=-1$. Para evaluar otras potencias enteras de i sólo es necesario usar la definición de EXPONENCIACION con exponentes enteros:

$$i = i^1 = i^5 = i^9 = ...$$

$$-1 = i^2 = i^6 = i^{10} = ...$$

$$-i = i^3 = i^7 = i^{11} = ...$$

$$1 = i^4 = i^8 = i^{12} = ...$$

Nota que el exponente cuando es múltiplo de 4 la potencia es igual a 1.

Ejemplo:

$$i^{92} = 1$$

Imagina que deseas calcular i^{71}. Ya que $71 = 68 + 3$ y 68 es múltiplo de 4:

$$\begin{aligned} i^{71} &= i^{68+3} \\ &= i^{68} \cdot i^3 \\ &= 1 \cdot i^3 \\ &= i^3 \\ &= -i \end{aligned}$$

Una técnica más rápida es dividir el exponente por 4 y luego deshacerte del cociente y quedarte con el residuo, el cual sería el exponente de la i.

$$i^{71} = i^3 = -i.$$

Ejemplo 1
Calcular i^{2406}

Solución:
Divides 2406 entre 4 y tienes un cociente de 601 el cual deshechas y te quedas con el residuo que es 2, o sea $i^{2406} = i^2 = -1$.

Suma y diferencia de números complejos.

Cuando los números complejos son sumados o restados se comportan como binomios lineales.

Ejemplo 2
Si $Z_1=12+5i$
y $Z_2=4-9i$. Encuentra:
a) Z_1+Z_2
b) Z_1-Z_2

Solución:

a) $Z_1+Z_2 = (12+5i)+(4-9i)$
$= 12+5i+4-9i$
$= 16-4i$

b) $Z_1-Z_2 = (12+5i)-(4-9i)$
$= 12+5i-4+9i$
$= 8+14i$

Multiplicación de números complejos.

Cuando se multiplican números complejos también se comportan como binomios lineales. Lo único que debes de tener en mente es que $i^2=-1$.

Ejemplo 3

Multiplica $(3-2i)(7+5i)$

Solución:

$(3-2i)(7+5i) = 21-14i+15i-10i^2$
$= 21+i+10$
$= 31+i$

Ejemplo 4

Multiplica $(12+8i)(12-8i)$

Solución:

$(12+8i)(12-8i) = 144-64i^2$
$= 144+64$
$= 208$

Nota que los números complejos $12+8i$ y $12-8i$ son complejos conjugados el uno del otro. Su producto es un número real. Este hecho tiene aplicación en la división de números complejos.

Conclusión

> PRODUCTO DE COMPLEJOS CONJUGADOS.
> El producto de dos complejos conjugados es un número real.
> $$(a+bi)(a-bi)= a^2+b^2$$

División de números complejos:

Dividir un número complejo entre otro es un caso especial de transformación a la forma radical simple. Racionaliza el denominador multiplicando y dividiendo la expresión compleja por el conjugado del denominador.

Ejemplo 5
Divide $\frac{2-3i}{4+5i}$

Solución:

$$\frac{(2-3i)}{(4+5i)}\frac{(4-5i)}{(4-5i)}=\frac{8-22i+15i^2}{16-25i^2}=\frac{8-22i-15}{16+25}=\frac{-7-22i}{41}=\frac{-7}{41}-\frac{22}{41}i$$

Los siguientes ejercicios están diseñados para facilitarte las operaciones con números complejos e imaginarios.

Ejercicio 1.2

Para los problemas del 1 al 20 simplifica y escribe en términos de i.

1. i^5	2. i^7	3. i^{55}	4. i^{25}	5. i^{62}
6. i^{74}	7. i^{300}	8. i^{180}	9. i^0	10. i^{-2}
11. i^{-7}	12. i^{-25}	13. i^{-38}	14. i^{-54}	15. $i\sqrt{-16}$
16. $\sqrt{-25}$	17. $\sqrt{-18}$	18. $\sqrt{-48}$	19. $\sqrt{-7}$	20. $\sqrt{-3}$

Para los problemas del 21 al 28 ubica los números dados en un plano complejo.

21. $5+7i$	22. $6+3i$	23. $3-2i$	24. $7-4i$
25. $-4+6i$	26. $-2+i$	27. $-1-8i$	28. $-5-2i$

Para los problemas del 29 al 32 encuentra:
a) Z_1+Z_2 b) Z_1-Z_2 c) $Z_1\cdot Z_2$ d) Z_1/Z_2

29. $Z_1=2+3i$, $Z_2=4-5i$	30. $Z_1=6+2i$, $Z_2=5-7i$	31. $Z_1=-1+2i$, $Z_2=6+7i$	32. $Z_1=-3-i$, $Z_2=4+8i$

33. Encuentra el producto de un número complejo $a+bi$ y su complejo conjugado y explica porqué la respuesta es un número real.

34. Usa los resultados del problema 33 para factorizar la suma de dos cuadrados x^2+y^2

Para los problemas del 35 al 38 imagina que el $|Z|$ es definido como la distancia de[l] origen al punto Z en el plano de los números complejos (de la misma manera que [el] valor absoluto de un número real es la distancia entre el origen y su valor en la rect[a] numérica). Para cada problema traza Z en un plano de números complejos, conect[a] la gráfica de Z al origen, después encuentra el valor absoluto de Z mediante el us[o] apropiado del Teorema de Pitágoras.

35. $Z=4+3i$ 36. $Z=2-3i$ 37. $Z=-5+12i$ 38. $Z=-8-15i$

39. Imagina que $Z_1=3+5i$ y $Z_2=7+2i$.
   a) Traza Z_1 y Z_2 en un plano de números complejos. Después conecta cada punt[o] al origen. ¿Qué representan la longitud de estas líneas?
   b) Conecta Z_1 y Z_1+Z_2. ¿La longitud de ésta línea, a qué es igual?
   c) Explica porqué la desigualdad $|Z_1+Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$ es verdadera par[a] cualquier dos números complejos Z_1 y Z_2 (esto es llamado la desigualdad de[l] triángulo).

40. Imagina que $Z_1=1+i$ y $Z_2=2+5i$.
   a) Encuentra el producto de $Z_1\cdot Z_2$
   b) Encuentra el valor absoluto de $Z_1\cdot Z_2$ y de $|Z_1\cdot Z_2|$, después trata de llegar [a] una conclusión acerca de cómo se relacionan estos tres valores absolutos [e]ntre uno del otro.
   c) Traza los puntos Z_1, Z_2 y $Z_1\cdot Z_2$ y conéctalos con el origen. Como los ángulo[s] entre el eje real positivo y estas tres líneas se relacionan una de otra.

41. Dibuja las gráficas de i, i^2, i^3, i^4 en el mismo plano. Que es lo que parece sucede[r] cuando al exponente de i se aumenta de uno en uno.

42. Imagina que $Z=3+4i$
   a) A qué es igual Z?
   b) Traza los puntos Z e $i\,Z$ en un plano y conecta cada punto con el origen.
   c) Muestra que multiplicando $Z\cdot i$ no cambia su valor absoluto.
   d) Muestra que multiplicando $Z\cdot i$ la gráfica gira un ángulo de 90°.

43. Muestra que $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ es raíz cuadrada de i elevando $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2$ y mostrando que obtienes i como respuesta. Además muestra que $|Z|=1$.

44. Imagina que $z=-1+i\sqrt{3}$
   a) Muestra que $|Z|=2$
   b) Muestra que Z es una raíz cúbica de 8 elevando al cubo $(-1+i\sqrt{3})$ y obtiene[s] 8 como respuesta.

1.3 Ecuaciones cuadráticas derivadas de sus soluciones - Factores de números complejos.

Aprendiste a resolver ecuaciones cuadráticas tales como:

$$x^2-2x+13=0$$

usando la fórmula cuadrática. Obtienes

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(13)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{-48}}{2}=\frac{2\pm4i\sqrt{3}}{2}=1\pm2i\sqrt{3}$$

entonces:

$$x_1=1+2i\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x_2=1-2i\sqrt{3}$$

Observa que las soluciones son complejos conjugados uno del otro. Esto siempre va a suceder si los coeficientes de la ecuación son números reales. Las partes imaginarias de las soluciones proceden de $\sqrt{b^2-4ac}$.

Haz aprendido a resolver ecuaciones cuadráticas tales como: $x^2-5x+6=0$ mediante la factorización.

Tú escribirías:

$$(x-3)(x-2)=0$$
$$x-3=0 \text{ y/o } x-2=0$$
$$x=3 \text{ y/o } x=2$$
$$S=\{3,2\}$$

El proceso inverso, conocidas las soluciones sería encontrar la ecuación original. Así se tiene que las soluciones de una cuadrática son: $S=\{5,7\}$ de donde los factores serían $(x-5)(x-7)=0$, entonces $x^2-12x+35=0$. En general una ecuación cuadrática cuyas soluciones son S_1 y S_2 es $(x-S_1)(x-S_2)=0$.

Este proceso puede ser hecho si las dos soluciones son fracciones, decimales, radicales o números complejos. Pero la transformación a la forma ax^2+bx+c es muy tediosa. Afortunadamente hay relaciones entre S_1, S_2 y los coeficientes a, b y c lo cual hace el trabajo más fácil. Para saber cuáles son estas relaciones procedemos a multiplicar

$(x-S_1)(x-S_2)=0$ obtienes:

$$x^2-S_2x-S_1x+S_1S_2=0$$

$$x^2-(S_1+S_2)x+S_1\cdot S_2=0 \qquad (1)$$

Dividiendo cada miembro de $ax^2+bx+c=0$ por a nos queda:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)$$

Comparando las ecuaciones (1) y (2) debes ser capaz de ver que:

$$\boxed{S_1 \cdot S_2 = \frac{c}{a} \quad \text{y} \quad -(S_1+S_2) = \frac{b}{a}}$$

Los ejemplos 1 y 2 muestran cómo escribir una ecuación cuadrática si sabes su soluciones y los ejemplos 3 y 4 muestran cómo puedes usar los conceptos de est sección para factorizar cualquier trinomio cuadrático.

Objetivos

1º	Dados dos números, escribe una ecuación cuadrática que tenga estos números como sus soluciones.
2.	Dado un trinomio cuadrático factorízalo sobre el conjunto de los números complejos.

Ejemplo 1.

Encuentra la ecuación cuadrática que tenga $\frac{5}{3}$ y -2 por soluciones

$$\frac{b}{a} = -(S_1+S_2) = -\left(\frac{5}{3}-2\right) = -\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{c}{a} = S_1 \cdot S_2 = \left(\frac{5}{3}\right)(-2) = \frac{-10}{3}$$

entonces la ecuación es: $x^2+\frac{1}{3}x-\frac{10}{3}=0$

Si quieres tener coeficientes enteros en la ecuación puedes multiplicar ambo miembros por 3, obteniendo

$$3x^2+x-10=0$$

Las soluciones de una ecuación son llamadas raíces.

Definición

RAICES DE UNA ECUACION.
La raíz de una ecuación es la solución de esa ecuación.

Si una ecuación cuadrática tiene soluciones complejas y los coeficientes en l ecuación son números reales, entonces las soluciones son complejas y conjugadas un de otra. La razón de esto se muestra en la fórmula cuadrática. Por ejemplo, s resuelves $x^2-10x+34=0$ obtienes:

$$x=\frac{-(-10)\pm\sqrt{(-10)^2-4(1)(34)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{100-136}}{2}$$

$$x=\frac{10\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{10\pm 6i}{2}$$

$$x=5+3i \quad \text{y} \quad x=5-3i$$

La parte real es la misma en ambas soluciones. La parte imaginaria difiere en el signo. De manera que las soluciones son conjugadas una de la otra. Esta conclusión es verdadera siempre y cuando los 3 coeficientes de la ecuación sean números reales. En el ejercicio siguiente vas a ver que puede ser no cierta si los coeficientes son números imaginarios.

Conclusión

SOLUCIONES COMPLEJAS Y CONJUGADAS DE CUADRATICAS.
Si una ecuación cuadrática con coeficientes reales tiene un discriminante negativo entonces las dos soluciones son complejas y conjugadas una de otra.

Ejemplo 2

Encuentra una ecuación cuadrática que tenga números reales como coeficientes y una de sus soluciones es $2+3i$.

Solución

Ya que soluciones complejas vienen en pares conjugados donde los coeficientes son números reales, la otra solución será $2-3i$.

$$\frac{b}{a} = -(S_1+S_2) = -(2+3i+2-3i) = -4$$

$$\frac{c}{a} = S_1 \cdot S_2 = (2+3i)(2-3i) = 4+9 = 13$$

entonces la ecuación es $x^2-4x+13=0$

Factorizando cuadráticos

Ya que factorizar puede ser usado para resolver ecuaciones cuadráticas, resolver ecuaciones cuadráticas puede ser usado para ayudarte a factorizar. Usa el hecho de que S_1 y S_2 son soluciones de la ecuación, entonces la ecuación es $(x-S_1)(x-S_2)=0$

Ejemplo 3.

Factoriza $x^2-2x+13$

Solución $x^2-2x+13=0$

Usando la fórmula cuadrática las dos soluciones de esta ecuación son:

$S_1 = 1+2i\sqrt{3}$ $\quad$ $S_2 = 1-2i\sqrt{3}$

entonces la ecuación es equivalente a:

$$[x-(1+2i\sqrt{3})][x-(1-2i\sqrt{3})]=0$$

$$(x-1-2i\sqrt{3})(x-1+2i\sqrt{3})=0$$

$$\therefore\ x^2-2x+13=(x-1-2i\sqrt{3})(x-1+2i\sqrt{3})$$

Ejemplo 4
Factoriza $5x^2+3x-7$

Solución
En este caso el coeficiente de x^2 no es 1. Por lo tanto el coeficiente del térmi cuadrático se saca como factor común;

$$5\left(x^2+\frac{3}{5}x-\frac{7}{5}\right)$$

El polinomio que esta dentro del paréntesis se factoriza en la forma $(x-S_1)$ $(x-S_2$
Resolviendo la ecuación $5x^2+3x-7=0$ vas a encontrar que:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(5)(-7)}}{2(5)}=\frac{-3\pm\sqrt{9+140}}{10}=\frac{-3\pm\sqrt{149}}{10}$$

$$\therefore 5x^2+3x-7=5\left[x-\left(\frac{-3+\sqrt{149}}{10}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-3-\sqrt{149}}{10}\right)\right]$$

La solución aproximada en forma decimal de:

$$\frac{-3\pm\sqrt{149}}{10}$$

$S_1\approx 0.92$ y $S_2\approx -1.52$

$\therefore 5x^2+3x-7\approx 5(x-0.92)(x+1.52)$

Ejemplo 5
Factoriza $4x^2+9$

Solución
Esta es la suma de dos cuadrados no factorizable con números reales. Puedes factorizarlo mediante la técnica usada en el ejemplo 4. Una manera fácil de hacerlo es transformándolo como una diferencia de dos cuadrados, utilizando número imaginarios.

$$4x^2+9=4x^2-9i^2 \qquad (i^2=-1)$$
$$=(2x+3i)(2x-3i)$$

El siguiente ejercicio esta diseñado para darte práctica en encontrar ecuaciones co las soluciones dadas y factorizar cuadráticas en factores lineales.

Ejercicio 1.3

Para los problemas del 1 al 12 encuentra el conjunto de soluciones de la ecuación dada sobre el conjunto de números complejos (asume que el Dominio de x es e conjunto de números complejos).

1. $x^2-2x+2=0$
2. $x^2-4x+5=0$
3. $x^2+2x+10=0$
4. $x^2-4x+29=0$
5. $x^2+4x+7=0$
6. $x^2-10x+27=0$
7. $3x^2-4x-10=0$
8. $25x^2+10x+101=0$
9. $x^2+8x+7=0$
10. $x^2-6x+4=0$
11. $x^2+9=0$
12. $4x^2+49=0$

Para los problemas del 13 al 20 encuentra la ecuación cuadrática con las dos soluciones dadas.

13. 2 y -5
14. -3 y -6
15. $2+i$ y $2-i$
16. $-3+4i$ y $-3-4i$
17. $1+i\sqrt{5}$ y $1-i\sqrt{5}$
18. $-5+2i\sqrt{3}$ y $-5-2i\sqrt{3}$
19. $4+\sqrt{7}$ y $4-\sqrt{7}$
20. $5+\sqrt{3}$ y $5-\sqrt{3}$

De los problemas 21 al 30 factoriza el polinomio dado en factores lineales.

21. x^2-2x+5
22. $x^2+10x+29$
23. $x^2-6x+11$
24. $x^2-10x+22$
25. $9x^2+121$
26. x^2+16
27. $49x^2+1$
28. $3x^2-4x+10$
29. $25x^2+10x+101$
30. $9x^2-12x+229$

31. Sustituye cada solución de la ecuación del problema 1 en la ecuación y muestra que estos números satisfacen la ecuación.

32. Repite el problema 31 para la ecuación del problema 3.

33. Resuelve la ecuación que obtuviste como respuesta del problema 15 y muestra que las soluciones son $2+i$ y $2-i$.

34. Repite el problema 33 para la ecuación obtenida del problema 16.

35. Multiplica los factores de x^2-2x+5 (problema 21) y muestra que el producto es x^2-2x+5.

36. Repite el problema 35 para $x^2+10x+29$ (problema 22).

1.4 **Gráficas de funciones de grado superior**
Sustitución sintética.

Ahora estás listo para volver al problema de graficar funciones de grado superior. Lo primero que necesitas es una vía rápida para evaluar polinomios, así puedes obtener datos para graficar rápidamente. Una combinación práctica y organizada de los factores nos muestra cómo esto puede ser hecho. Por ejemplo:
$P(x)=3x^4-19x^3-21x^2+51x-14$ Polinomio dado

$=(3x-19)x^3-21x^2+51x-14$ Sacando x^3 de factor
$=((3x-19)x-21)x^2+51x-14$ Sacando x^2 de factor
$=((3x-19)x-21)x+51)x-14$ Sacando x de factor

Se dice que el polinomio esta en "forma agrupada" desde que conjuntos de parénte están agrupados adentro de otros paréntesis.

Supón, ahora, que quieres encontrar el valor de P(2). Empezando por los parénte más internos.

Usa la siguiente secuencia de pasos.

Empieza con 3	Empieza con el coeficiente de más alto grado
3X2=6	Multiplica por x
6-19=-13	Suma el siguiente coeficiente, -19
-13X2=-26	Multiplica por x la respuesta
-26-21=-47	Suma el siguiente coeficiente, -21
-47X2=-94	Multiplica por x la respuesta
-94+51=-43	Suma el siguiente coeficiente, 51
-43X2=-86	Multiplica por x la respuesta
-86-14=-100	Suma el siguiente coeficiente, -14

La respuesta es P(2)=-100. La virtud de este método es el que el mismo par pasos, multiplique por x luego suma el siguiente coeficiente es hecho repetidamen

Hay una forma conveniente para calcular P(2) y consiste primero en colocar l coeficientes de P(x) y el valor de x a ser sustituido de la manera siguiente:

Valor sustituido por x

2 | 3 - 19 - 21 51 - 14 ← **coeficientes de P(x)**

← **espacio para los cálculos**

Baja el primer coeficiente 3, multiplícalo por 2 y escribe el resultado (6), debajo -19 y suma. Ahora multiplica el -19 por 2 , pon el resultado debajo de -21 y suma. L otros pasos son hechos de la misma forma.

2 | 3 - 19 - 21 51 - 14
6 - 26 - 94 - 86
3 - 13 - 47 - 43 - 100 **P(2)**

Este proceso es llamado sustitución sintética

El proceso de sustitución sintética es esencialmente el mismo del proceso de división larga.

Dividiendo P(x) por (x-2) dá un cociente
cociente: $3x^3-13x^2-47x-43$ y un residuo
residuo : -100

El residuo y los coeficientes de el cociente son mostrados en el proceso de sustitución sintética

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & -19 & -21 & 51 & -14 \\ & & 6 & -26 & -94 & -86 \\ \hline & \underbrace{3 \quad -13 \quad -47 \quad -43}_{\text{coeficientes del cociente}} & & & & \underbrace{-100}_{\text{residuo}} \end{array}$$

Por esta razón la sustitución sintética es algunas veces llamada "DIVISION SINTETICA". La relación entre los dos procesos nos lleva al siguiente teorema importante.

Teorema.

> TEOREMA DEL RESIDUO.
> Si P(x) es un polinomio, entonces P(b) es igual al residuo cuando P(x) es dividido por x-b.

Para ver por que esto es verdad, supón que P(x) es dividido por (x-b) dando un cociente Q(x) y un residuo R. Luego
P(x)=(x-b)· Q(x)+R

sustituyendo b por x da

P(b)=(b-b)· Q(b)+R
P(b)=O· Q(b)+R
P(b)=R

El teorema del residuo puede ser usado para mostrar el teorema del factor.

Aplicando la técnica de sustitución sintética estaras listo para graficar y analizar funciones de grado superior.

Objetivos

> 1. Representar la gráfica de una función de grado superior, usando la sustitución sintética para calcular los datos.
> 2. Encontrar todos los valores de x que hacen al polinomio P(x) igual a CERO.

Ejemplo 1.

Haz la gráfica de $P(x)=x^3-4x^2-5x+14$ y encuentra todos los valores de x que hace
$P(x)=0$

Solución:
Para dibujar la gráfica, calcula varios puntos. La tabla de abajo muestra una form compacta de hacer varias sustituciones en el mismo polinomio !Ve si puedes descifra como trabajar. La gráfica se muestra en la figura 1-4a

x	1	-4	-5	F(x) 14
-3	1	-7	16	-34
-2	1	-6	7	0
-1	1	-5	0	14
0	1	-4	-5	14
1	1	-3	-8	6
2	1	-2	-9	-4
3	1	-1	-8	-10
4	1	0	-5	-6
5	1	1	0	14
6	1	2	7	56

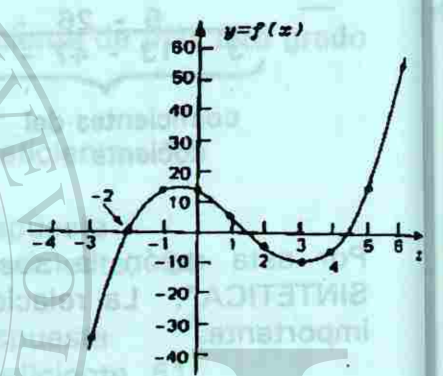


Fig. 1.4a $f(x)=x^3-4x-5x+14$
Tresintersecciones

Para encontrar los valores de x que hacen $P(x)=0$.
Haz encontrado $P(-2)=0$. Por el teorema del factor sabes que $(x+2)$ es un factor d $P(x)$. Los coeficientes del cociente aparecen en el proceso de sustitución sintétic
Por lo tanto,
$P(x)=(x+2)(x^2-6x+7)$
haciendo $P(x)=0$ nos dá
$(x+2)(x^2-6x+7)=0$ de donde
$x+2=0$ y/o $x^2-6x+7=0$ propiedad multiplicativa del CERO

$x=-2$ y/o $x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4(1)(7)}}{2}$

$x=3\pm\sqrt{2}$

$x=4.414$

$x=1.586$

Puedes ver en la figura 1.4a que la curva corta al eje x en estos tres puntos.

Ejemplo 2
Traza la gráfica de $P(x)=x^3-4x^2-5x+48$, y encuentra todos los valores de x que hacen a $P(x)=0$

x	1	-4	-5	F(x) 48
-3	1	-7	16	0
-2	1	-6	7	34
-1	1	-5	0	48
0	1	-4	-5	48
1	1	-3	-8	40
2	1	-2	-9	30
3	1	-1	-8	24
4	1	0	-5	28
5	1	1	0	48
6	1	2	7	90
7	1	3	16	160
8	1	4	27	264

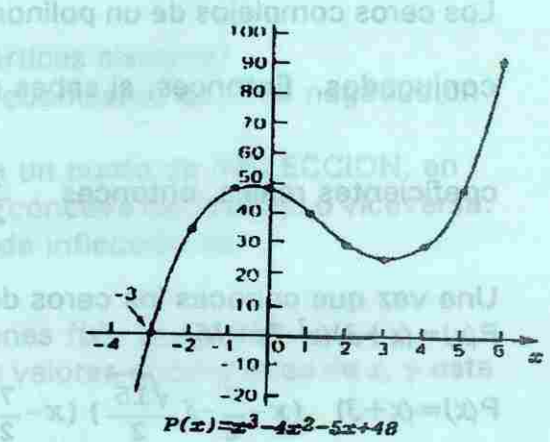


Fig. 1.4b Una intersección.

Una intersección de x para -3.

$P(x)=(x+3)(x^2-7x+16)$ por el teorema del factor
$P(x)=0$ nos queda $(x+3)(x^2-7x+16)=0$ de donde
$x+3=0$ y/o $x^2-7x+16=0$

$x=-3$ y/o $x=\dfrac{7\pm\sqrt{49-64}}{2}$

$x=\dfrac{7\pm\sqrt{-15}}{2}$

$x=\dfrac{7\pm i\sqrt{15}}{2}$

$x=\dfrac{7}{2}+i\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

$x=\dfrac{7}{2}-i\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

Estos dos últimos valores de x son números complejos, por lo tanto no hay intersepciones con el eje x.

Sin embargo, estos números hacen $P(x)=0$.

Definición

CERO DE UNA FUNCION.
Un cero de un polinomio $P(x)$ es un valor de x, real o complejo, el cual hace a $P(x)=0$

Los ceros complejos de un polinomio con coeficientes reales siempre vienen en pares conjugados. Entonces, si sabes que $\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2}$ es un cero de un polinomio con coeficientes reales, entonces $\frac{7}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2}$ es también un cero del polinomio.

Una vez que conoces los ceros de un polinomio factorízalo en factores lineales.
$P(x)=(x+3)(x^2-7x+16)$

$P(x)=(x+3)\quad(x-\frac{7}{2}-i\frac{\sqrt{15}}{2})\,(x-\frac{7}{2}+i\frac{\sqrt{15}}{2})$

Nota que $P(x)$ es un polinomio cúbico, y que tiene exactamente tres factores lineales Este es un ejemplo de un importante TEOREMA ALGEBRAICO

Teorema

Si $P(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $P(x)$ tiene exactamente n factores lineales.

Esto significa que $P(x)$ tiene exactamente n ceros así como el polinomio:

$p(x)=\ (x-7)^3(x-4)^2$ (observa que es de quinto grado)

Por lo tanto este polinomio tiene cinco ceros;

$$(x-7)(x-7)(x-7)(x-4)(x-4)=0$$

tiene dos ceros diferentes el 7 y el 4, el 7 se repite tres veces y el 4 dos. Este teorema es un corolario del teorema fundamental del álgebra.

Teorema

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA.
Un polinomio $P(x)$ tiene al menos un cero, si son permitidos ceros en los números complejos.

Ejemplo 3.
Para las siguientes tres funciones

$f(x)=x^3-4x^2+2x+7$
$g(x)=x^3-6x^2+13x-8$
$h(x)=-x^3+2x^2+3x+5$

a. Traza las gráficas
b. ¿Las gráficas de funciones cúbicas tienen dos vértices siempre?
c. Di la mayor diferencia en las gráficas cuando el coeficiente de x^3 es negativo en lugar de positivo.
d. Las gráficas de funciones cúbicas siempre tienen un punto de INFLECCION, en donde la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa. Si $y=\ ax^3+bx^2+cx+d$; la coordenada x del punto de inflección es:

$$x=-\frac{b}{3a}$$

Calcula el punto de inflección para las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
Traza una línea vertical en cada gráfica en los valores encontrados de x, y esta cortará a la gráfica en el punto de inflección

Soluciones:
a.

f(x)

x	I	-4	2	7
-3	I	-7	23	-62
-2	I	-6	14	-21
-1	I	-5	7	0
0	I	-4	2	7
1	I	-3	-1	6
2	I	-2	-2	+3
3	I	-1	-1	4
4	I	0	2	15
5	I	1	7	42

g(x)

x	I	-6	13	-8
-3	I	-9	40	-128
-2	I	-8	29	- 66
-1	I	-7	20	- 28
0	I	-6	13	- 8
1	I	-5	8	0
2	I	-4	5	2
3	I	-3	4	4
4	I	-2	5	12
5	I	-1	8	+32

h(x)

x	-I	2	3	5
-3	-I	5	-12	41
-2	-I	4	- 5	15
-1	-I	3	0	5
0	-I	2	3	5
1	-I	1	4	9
2	-I	0	3	11
3	-I	-1	0	5
4	-I	-2	-5	-15
5	-I	-3	-12	-55

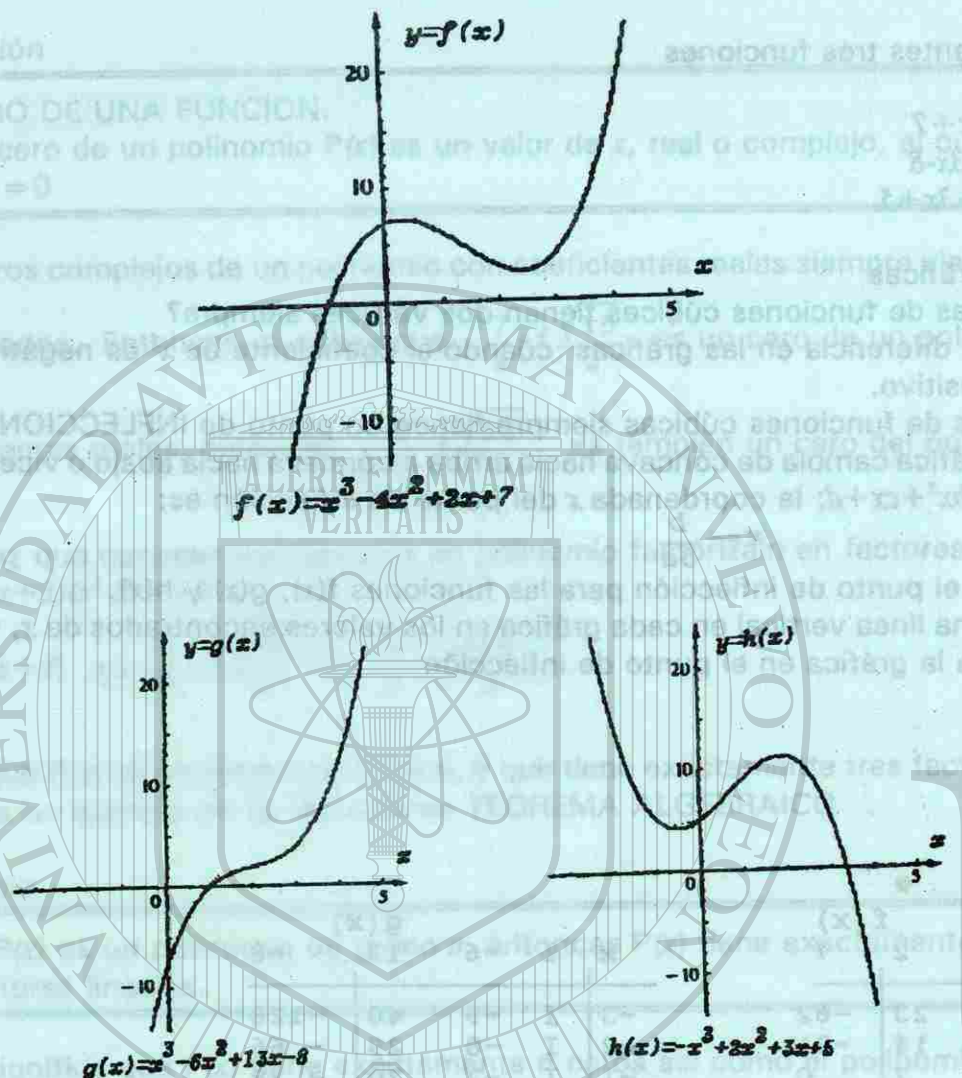


Fig. 1.4c

b. **No. Las funciones f(x) y h(x) tienen dos vértices. En la función g(x) la gráfica empieza a cambiar de sentido (LA CURVA) pareciendo formar el vértice pero vuelve a cambiar repentinamente en el otro sentido antes de que el vértice sea formado.**

c. **Si el coeficiente de x^3 es negativo, la gráfica viene hacia abajo desde la parte izquierda superior del plano de coordenadas y va hacia la parte inferior derecha del mismo plano coordenado para valores grandes de x. El término x^3 es mucho más grande que los otros términos. Así si $y=ax^3$ verás que si x es un número grande negativo y a es negativo, entonces y será positivo, y la gráfica estará en el segundo cuadrante. Similarmente si x es un gran número positivo y a es negativo, luego y será negativo y la gráfica estará en el cuarto cuadrante.**

d. f(x): $x=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{(-4)}{(3)(1)}=\dfrac{4}{3}$

g(x): $x=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{(-6)}{(3)(1)}=2$

h(x): $x=-\dfrac{b}{3a}=-\dfrac{(2)}{(3)(-1)}=\dfrac{2}{3}$

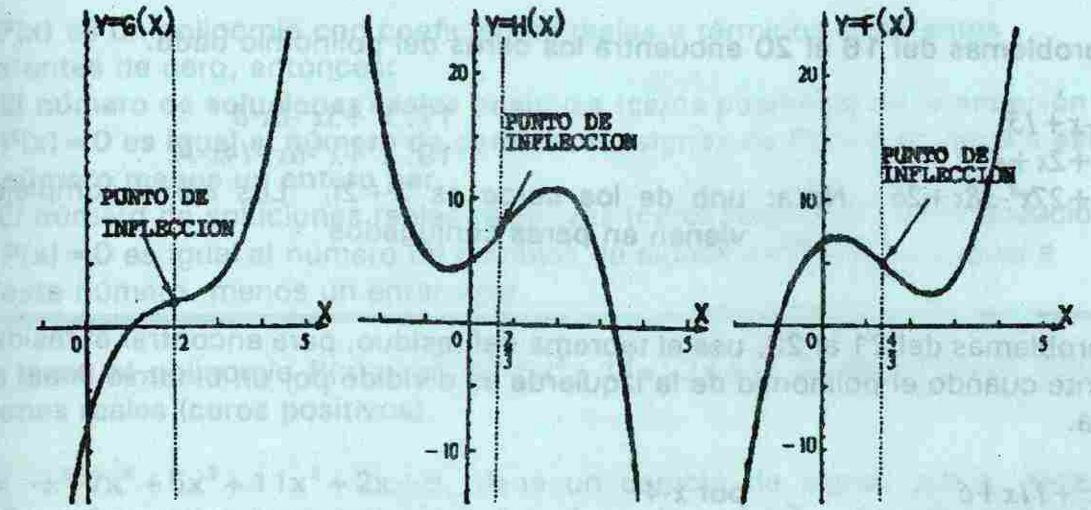


Fig. 1.4d

El ejercicio que sigue es dirigido para darte práctica en analizar polinomios de grado superior encontrando los ceros y los puntos de inflección y trazar las gráficas.

Ejercicio 1.4

Para los problemas del 1 al 5 encuentra el valor de la función indicado por sustitución sintética

1. $f(x)=x^3+7x^2-11x+4.$ Encuentra f(2)
2. $h(x)=5x^3-3x^2-8x+20.$ Encuentra h(4)
3. $p(x)=-2x^3+4x^2-9x+40.$ Encuentra p(3)
4. $r(x)=x^3+6x^2-4x+11.$ Encuentra r(-5)
5. $m(x)=x^5+x^4-x^3-3x^2+4x+21.$ Encuentra m(2)

Para los problemas del 6 al 15.

a. Haz la gráfica en el dominio dado, calculando los puntos a trazar por sustitución sintética.

b. Encuentra todos los ceros reales y complejos.

6. $p(x)=x^3-4x^2+x+6$ $\quad -3\le x\le 5$
7. $p(x)=x^3-7x^2+11x+3$ $\quad -2\le x\le 6$
8. $p(x)=x^3+x^2-4x+6$ $\quad -4\le x\le 3$
9. $p(x)=x^3+2x^2-4x-8$ $\quad -4\le x\le 3$

10. $p(x)=x^3-6x^2+12x+19$ $\quad -2 \le x \le 5$
11. $p(x)=-2x^3-3x^2+8x+12$ $\quad -4 \le x \le 3$
12. $p(x)=2x^3+4x^2-17x-39$ $\quad -4 \le x \le 4$
13. $p(x)=x^4-x^3-11x^2+9x+18$ $\quad -4 \le x \le 4$
14. $p(x)=x^4-5x^3+2x^2+22x-20$ $\quad -3 \le x \le 5$
15. $p(x)=-x^4-4x^3+12x^2+44x-51$ $\quad -5 \le x \le 4$

Para los problemas del 16 al 20 encuentra los ceros del polinomio dado.

16. x^3+x^2-x+15
17. x^3+3x^2-6x-8
18. x^3-4x^2+2x+4
19. $x^4+x^3-6x^2-14x-12$
20. $x^4-8x^3+27x^2-38x+26$ Nota: uno de los ceros es $3+2i$. Los ceros complejos vienen en pares conjugados

Para los problemas del 21 al 23, usa el teorema del residuo, para encontrar el residuo rápidamente cuando el polinomio de la izquierda es dividido por un binomio lineal de la derecha.

21. $2x^3-5x^2+11x+6$ por $x-4$
22. x^5-3x^2+14 por $x+2$
23. $x^{51}+51$ por $x+1$

Para los problemas del 24 al 29 usa lo que haz observado acerca de las funciones de más alto grado y lo que sabes acerca del teorema fundamental del álgebra y su corolario, para graficar las funciones descritas.

24. Función a la quinta con tres ceros reales exactamente.
25. Función de grado sexto con cuatro ceros reales exactamente.
26. Función cúbica con dos distintos ceros reales exactamente.
27. Función a la cuarta sin ceros reales.
28. Función cúbica sin ceros reales.
29. Función a la cuarta con 5 ceros reales exactamente.

1.5 Regla de los signos de Descartes

Conoces el teorema del factor que dice que $(x-c)$ es un factor del polinomio $P(x)$ sí y solo sí $P(c)=0$. El número c es llamado un cero de $P(x)$, o una solución de la ecuación $P(x)=0$. Aquí aprenderás las propiedades que hacen más corta la búsqueda de los factores o ceros de un polinomio por medio de la prueba y error.

Dando a x un valor positivo en un polinomio como $P(x)=3x^4+5x^3+x^2+8x+6$ que solo tiene coeficientes positivos siempre produce una respuesta positiva. Si el polinomio tiene tanto coeficientes positivos como negativos, puede haber ceros positivos. A René Descartes se le acredita el descubrimiento de que el número de cambio de signos

de término a término limita el número de los ceros positivos. Por ejemplo: $P(x)=x^5-7x^4-5x^3+11x^2-2x+5$ tiene cuatro cambios de signo. la regla de los signos de Descartes es como sigue:

REGLA DE LOS SIGNOS DE DESCARTES:

Si P(x) es un polinomio con coeficientes reales y términos constantes diferentes de cero, entonces:

***i)* El número de soluciones reales positivas (ceros positivos) de la ecuación $P(x)=0$ es igual al número de cambios de signos de $P(x)$, o es igual a este número menos un entero par.**

***ii)* El número de soluciones reales negativas (ceros negativos) de la ecuación $P(x)=0$ es igual al número de cambios de signos de $P(-x)$, o es igual a este número menos un entero par.**

Por lo tanto el polinomio $P(x)= x^5-7x^4-5x^3+11x^2-2x+5$, puede tener 4, 2 o cero soluciones reales (ceros positivos).

$P(-x)= -x^5-7x^4+5x^3+11x^2+2x+5$, tiene un cambio de signo, por lo tanto una solución real negativa (cero negativo). Por el corolario del Teoréma Fundamental del Algebra P(x) tiene exactamente cinco soluciones (cinco ceros). En la siguiente tabla se resumen las distintas posibilidades para las soluciones de la ecuación $P(x)=0$.

Número de soluciones reales positivas	4	2	0
Número de soluciones reales negativas	1	1	1
Número de soluciones complejas	0	2	4
Número total de soluciones	5	5	5

Un teorema relacionado habla acerca del máximo y el mínimo del valor posible de los ceros reales.

Teorema

TEOREMA DE COTAS PARA LAS RAICES REALES DE UN POLINOMIO P(x)

Supongamos que P(x) es un polinomio con coeficientes reales cuyo coeficiente principal es positivo y supongamos efectuada la división sintética de P(x) entre (x-C).

1) Si $C>0$, y si todos los números del tercer renglón de la división sintética son positivos o cero, entonces C es una cota superior de las soluciones reales de $P(x)=0$.

2) Si $C<0$, y si los números del tercer renglón de la división sintética son alternadamente pósitivos y negativos (donde se considera que un cero del tercer renglón es positivo o negativo), entonces C es una cota inferior de las soluciones reales de $P(x)=0$.

Ejemplo
Hallar las cotas superior e inferior del polinomio $P(x)=x^3-4x^2-5x+14$ cuya gráfica se muestra en la figura 1-5a.

En la gráfica tienes dos ceros positivos y un cero negativo, lo cual confirma la regla de los signos de Descartes.

$P(x)=x^3-4x^2-5x+14$ 2 cambio de signo
$P(-x)=-x^3-4x^2+5x+14$ 1 cambio de signo

	P(x)			
x	1	-4	-5	14
-4	1	-8	27	-94
-3	1	-7	16	-34
-2	1	-6	7	0
-1	1	-5	0	14
0	1	-4	-5	14
1	1	-3	-8	6
2	1	-2	-9	-4
3	1	-1	-8	-10
4	1	0	-5	-6
5	1	1	0	14
6	1	2	7	56

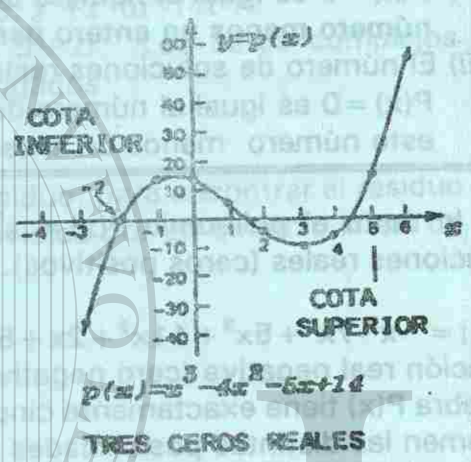


Fig. 1-5a

De la tabla puedes ver que si $x \geq 5$ los signos del cociente y el residuo son todos positivos, entonces 5 es una cota superior de las soluciones reales. Y si $x \leq -3$ los signos del cociente y el residuo se alternan, entonces -3 es una cota inferior de las soluciones reales. Todas las soluciones reales de la función dada están en el intervalo [-3;5].

En el siguiente ejercicio aprenderás lo que la regla de los signos de Descartes y el teorema de la cota superior e inferior dicen.

Ejercicio 1-5

Para los problemas del 1 al 5 encuentra el número de las posibles soluciones, positivas, negativas y complejas

1. $P(x)=x^3-5x^2+3x+7$
2. $P(x)=x^3-5x^2+3x-1$
3. $P(x)=x^4-2x^3-x+1$
4. $P(x)=x^4+x^3-5x^2+x-6$
5. $P(x)=x^8+3x^6+4x^2+5$

Para los problemas del 6 al 9 encuentra los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior, respectivamente. Traza la gráfica para los valores de x entre estos

dos enteros inclusive.

6. $P(x)=x^3-2x^2-5x+3$
7. $P(x)=x^3+2x^2+4x-5$
8. $P(x)=3x^3-5x^2+7x+4$
9. $P(x)=2x^3+2x^2-8x-3$

10. El trinomio x^2+2x+8 no tiene ceros positivos porque no hay cambio de signo. Si este trinomio es multiplicado por $(x-c)$ el polinomio que resulta, $P(x)=(x-c)(x^2+2x+8)$ tiene exactamente un cero positivo, llámalo C (C es un número positivo)
    a. Encuentra un valor de C para el cual $P(x)$, cuando es multiplicado, tiene un solo cambio de signo.
    b. Encuentra un valor de C para el cual $P(x)$ tiene exactamente 3 cambios de signo.
    c. Explique porque $P(x)$ no puede tener dos cambios de signo exactamente.

11. El trinomio $x^2-3x+15$ tiene 2 cambios de signo
    a. De acuerdo a la regla de Descartes ¿cuántos ceros puede tener?
    b. ¿Cuántos ceros positivos tiene? Justifica la respuesta.
    c. Usa la regla de Descartes para mostrar que el trinomio no tiene ceros negativos.
    d. Si C es un número positivo, luego el polinomio $P(x)=(x+c)(x^2-3x+15)$ tiene exactamente un cero negativo llamado -C. Encuentra un valor de C para el cual $P(-x)$ cuando se multiplica, tiene exactamente 3 cambios de signo.
    e. Explica porque $P(-x)$ en la parte d no puede tener 2 cambios de signo exactamente.

12. De acuerdo a la regla de Descartes, que puede ser dicho a cerca del número de ceros de polinomios que empiezan y terminan como los siguientes.
    a. $x^{14}\ldots.+8$
    b. $x^{15}\ldots.+8$
    c. $x^9\ldots..-4$
    d. $x^8\ldots..-4$

13. Basado en la respuesta del problema 12, escribe una conclusión concerniente a la paridad (par o impar) del número de cambios de signo en un polinomio en el que el primer término es positivo.

14. Encuentra los ceros reales, luego usa la regla de Descartes para probar que no hay otros ceros reales.
    a. $P(x)=x^5-32$
    b. $P(x)=x^5+32$
    c. $P(x)=x^6-64$
    d. $P(x)=x^{10}+1$

15. El polinomio $P(x)=2x^3-8x^2+2x+13$ tiene dos cambios de signo, por lo tanto puede tener 0 ó 2 ceros positivos.
    a. Muestra que aunque P(2) y P(3) son positivos, hay un cero entre $x=2$ y $x=3$. Dibuja la gráfica.
    b. Usa el teorema de los límites para mostrar que 4 es un límite superior para los ceros de $P(x)$.
    c. Explica porque 3 es también un límite superior para los ceros aunque el cociente $\frac{P(x)}{x-3}$ no tiene cambios de signo. Como es este factor consistente con el teorema de los límites superiores.

1.6 Funciones de grado superior como "Modelos Matemáticos"

Las funciones de grado superior son usados como modelos matemáticos en dos formas básicamente. Una función puede volverse un polinomio basado en consideraciones teóricas. Por ejemplo, la figura en la cual una viga de madera cargada es la gráfica de una función polinomial. El grado de la función es determinado por la forma en que el peso es distribuido a lo largo de la viga y de la manera en que la viga soporta el peso.

La segunda forma de funciones polinomiales que son aplicados es empezar por asumir que la función polinomial es un modelo razonable, y luego se acondiciona a la gráfica de polinomio para medir puntos experimentales. Un modelo creado en esta forma es llamado un modelo "empírico". Por ejemplo si asumes una función cúbica, entonces es una ecuación de la forma $y=ax^3+bx^2+cx+d$ donde a,b,c,d son constantes. Acondicionando el modelo de los datos requiere encontrar valores de estas constantes sustituyendo los valores de (x,y) y resolviendo el sistema.

Objetivo

> Dada una situación real en la cual una variable depende de otra ya sea función cúbica o de más alto grado. Encuentra la ecuación particular y usa esto como modelo matemático.

Dado que la técnica de encontrar una ecuación particular es familiar, aquí no presentamos ejemplos específicos.

El ejercicio que sigue contiene problemas de los dos tipos. También hay problemas en los cuales funciones polinómicas son usados como modelos matemáticos del mundo matemático.

Ejercicio 1.6

1. Problema de la deflección de una viga.
Una viga horizontal de 10 mts. de largo termina en su parte izquierda dentro de una pared y su extremo derecho termina y descansa en un soporte, como se muestra en la figura 1.6a. la viga es cargada con peso uniformemente distribuido a lo largo. Como resultado la viga cuelga de arriba hacia abajo de acuerdo a la ecuación $y=-x^4+25x^3-150x^2$, donde x es el número de metros de la pared a un punto de la viga, y y es el número de centésimas de un milímetro de eje x a la viga.

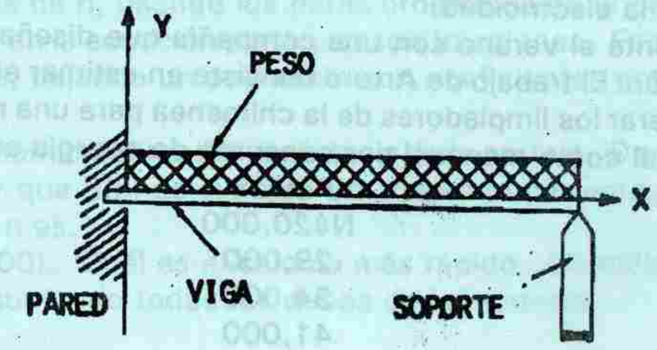


Fig. 1.6a

a. ¿Cuál es el dominio apropiado para x ?
b. Encuentra los ceros de esta función y di lo que representan en el mundo real.
c. Usando todos los valores enteros de x en el dominio traza la gráfica de esta función.

2. Problema de la tabla de clavados. (Trampolín)
Cuando te paras en un trampolín (Fig. 1.6b) la cantidad que la tabla se dobla, abajo de su punto de descanso es una función cúbica de x. Supón que mides las siguientes deflecciones del punto de descanso al punto del trampolín.

x (pies)	y (milésimas de pulgada)
0	0
1	116
2	448
3	972

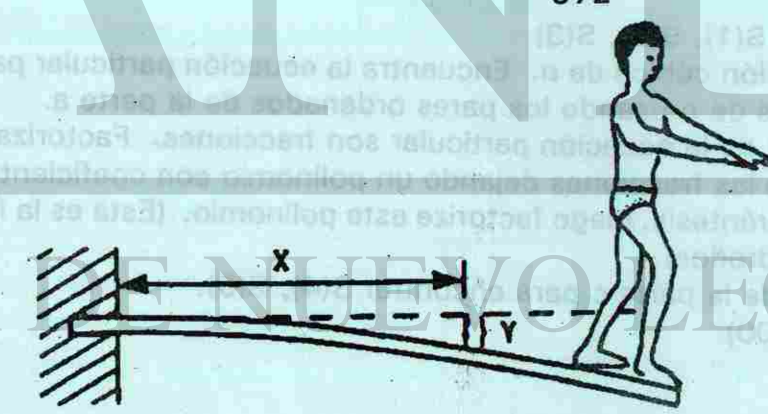


Fig. 1.6b

a. Deriva la ecuación particular expresando y en términos de x.
b. La tabla tiene 10 pies de largo. ¿Qué tanto se inclina hacia abajo de la longitud?

3. Problema del costo de la electricidad.

El Sr. Arturo trabaja durante el verano con una compañía que diseña equipo para el control de la contaminación. El trabajo de Arturo consiste en estimar el costo mensual de la electricidad para operar los limpiadores de la chimenea para una nueva planta de cemento. Encuentra que el costo mensual por consumo de energía es la siguiente:

Kilowatt/h (kwh)	PESOS
1,000,000	N$20,000
2,000,000	29,000
3,000,000	34,000
4,000,000	41,000

Como necesita el costo de cualquier cantidad de energía de 1,000,000 a 4,000,000 kwh, debe tener una ecuación expresando el costo en términos de kwh. Decide si una función cúbica es razonable.

a. Deja que D = número de miles de dólares por mes, y deja a K = número de millones de kwh por mes. Escribe la ecuación particular expresando D en términos de K.
b. ¿Cuál será el costo de 1.5 millones de kwh?
c. De acuerdo con tu modelo, cuanto pagarías si no usas electricidad en un mes dado? ¿Es razonable? Explica.
d. Sin exceder de $35000 por mes cuánta electricidad puede ser usada. Dibuja una gráfica de D contra K, y usa la gráfica para estimar este número.

4. Problema de la suma de los cuadrados.

Deja a S(n) ser la suma de los cuadrados de los enteros de 0 a n. Que es $S(n) = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 .... + n^2$

a. Encuentra S(0), S(1), S(2), S(3)
b. S(n) es una función cúbica de n. Encuentra la ecuación particular para expresar S(n) en términos de n usando los pares ordenados de la parte a.
c. Los coeficientes de la ecuación particular son fracciones. Factoriza apropiadamente las fracciones dejando un polinomio con coeficientes enteros dentro de los paréntesis, luego factorize este polinomio. (Esta es la fórmula para la suma de cuadrados).
d. Usa la fórmula de la parte c para encontrar S(4), S(5).
e. Encuentra S(1000)

5. Problema de la suma de los cubos

Deja que S(n) sea la suma de los cubos de los enteros de 0 a n. Esto es $S(n) = 0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

a. Encuentra S(0), S(1), S(2), S(3) y S(4). Verás que todos los números son cuadrados perfectos.
b. S(n) es una función cuártica de n. Encuentra la ecuación particular expresando

S(n) en términos de n, usando los pares ordenados de la parte a.
c. Los coeficientes en la ecuación particular son fracciones. Factoriza las fracciones apropiadamente, dejando un polinomio con coeficientes enteros dentro del paréntesis.
d. Factoriza el polinomio dentro del paréntesis de la parte c. Da una respuesta como puedes concluir que S(n) es siempre un cuadrado perfecto, no importando que entero positivo n es.
e. Encuentra F(1000). Cuál es el cálculo más rápido. Usando la fórmula que encontraste o sumando todos los cubos de los enteros.

CAPITULO 2

SUCESIONES Y SERIES

Se cuenta que el inventor del ajedrez pidió como recompensa un grano de trigo por la primera casilla del tablero; dos granos por la segunda; cuatro por la tercera, y así sucesivamente hasta completar las sesenta y cuatro casillas. Afortunadamente (no para él, claro) este deseo de aspecto modesto fué analizado antes de ser concedido y se encontró que al llegar a la vigésima casilla la recomensa habría ascendido a más de un millón de granos de trigo; para la sexagésima casilla el número resultante representaría una cantidad astronómica, la que hubiera excedido con mucho el total de granos de trigo existentes en aquel reino oriental.

La base de esta leyenda, que es una sucesión de números relacionados de una manera especial, tiene aplicaciones importantes que van desde el dinero en una cuenta de ahorros hasta las notas musiclaes en un piano.

En estas sucesiones la variable independiente toma valores enteros por lo que sus gráficas no serán continuas.

Problema de los granos de trigo.

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}
2^{16}	2^{17}	2^{18}	2^{19}	2^{20}	2^{21}	2^{22}	2^{23}
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
2^{56}	2^{57}	2^{58}	2^{59}	2^{60}	2^{61}	2^{62}	2^{63}

2.1 Introducción a las sucesiones

Los números 3,5,7..., parecen seguir un patrón. Un conjunto de números es comúnmente llamado una "sucesión" y cada uno de los números en el conjunto es llamado "término de la sucesión". Si sabes cual es el patrón puedes reemplazar los puntos marcados con otros términos de la sucesión. Por ejemplo podrías escribir 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ...., asumiendo que esta es una sucesión de enteros impares empezando con 3. También podría ser 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 .... lo cual es una sucesión de números primos por lo cual puedes obtener el patrón.

Las sucesiones pueden incluirse dentro de un marco de trabajo que ya haz aprendido hasta el momento, considerando las funciones. Cada término en una sucesión tiene una posición o número de término (1^{ro}, 5^{to}, 976^{avo}, etc.) y un valor (3, 11, 1953, etc.). La secuencia de enteros impares anteriores puede ser escrita.

Valor del término:	3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...........
Número del término:	1 2 3 4 5 6 7...........

Para cada número del término hay un solo valor correspondiente. Entonces una sucesión puede ser pensada como una función.

Definición

> Una <u>sucesión</u> es una función cuyo dominio es un conjunto de números naturales (los números de los términos) y cuyo rango es un conjunto de valores de los términos.

Notas:

1. Esta definición implica que la sucesión tiene un número infinito de términos.
2. La letra n será usada normalmente para indicar el número del término, y la notación a_n para el valor del término. La notación de una función normal como $a_{(n)}$ hace a las fórmulas incómodas para leer y escribir. El símbolo a_n es pronunciado "a sub-n" o simplemente "número del término n".

Objetivo

> Dados los primeros términos de una sucesión
> a. Descubre el patrón
> b. Escribe más términos de la sucesión
> c. Obtén una fórmula para a_n
> d. Usa la fórmula para calcular el valor de otros términos.
> e. Dibuja la gráfica de la sucesión

Ejemplo

Haz las anteriores 5 cuestiones para la sucesión 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,...

a. Un patrón obvio es que los términos aumentan en 2 para términos consecutivos.

b. Usando este patrón los siguientes términos son 17, 19, 21, 23,...

c. Descubrir la fórmula es engañoso y pondrá a prueba tu ingenio. Lo que debes hacer es encontrar una relación entre el número del término y el valor del mismo. Esto te ayudará a escribir los dos conjuntos de números cerca uno del otro.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,.......... Valores de los términos
1 2 3 4 5 6 7........ número de términos

En este caso parece que los valores de los términos aumentan dos veces más rápido que los números de los términos. Si escribes los valores $2n$ por los valores de a_n, como lo muestra el patrón.

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,.................... a_n
1 2 3 4 5 6 7.................... n
2 4 6 8 10 12 14...................$2n$

El valor de a_n es siempre uno más que el valor de $2n$, por lo tanto la fórmula podría ser :

$$a_n=2n+1$$

d. Puedes calcular a_n para valores grandes de n. Deberás usar la fórmula en lugar de continuar el paarón. Por ejemplo, si n fuera 256, entonces:

$$a_{256} = 2(256)+1$$
$$a_{256} = 513$$

e. La gráfica puede ser punteada como lo muestra la figura 2.1a. Los puntos no deben ser conectados con una línea continua dado que el dominio contiene solamente enteros.

Gráfica 2.1a

No todas las gráficas de sucesiones son lineales. Por ejemplo, la gráfica de 24, 12, 6, 3, 1½, ..., es mostrada en la figura 2.1b

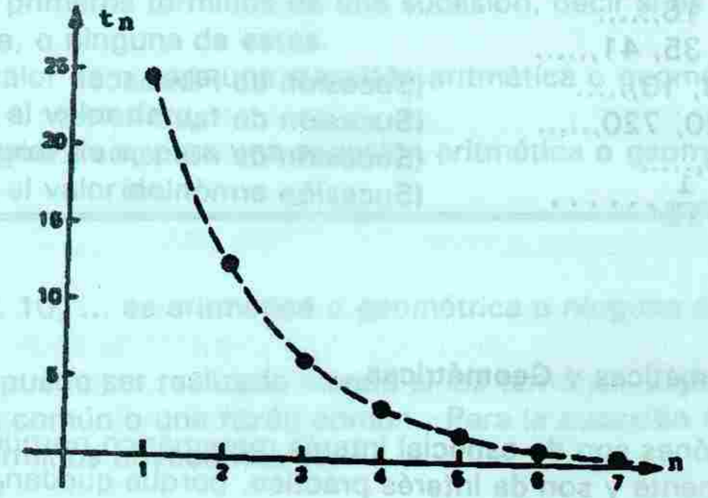


Figura 2.1b

Ejercicio 2.1

El ejercicio que sigue es diseñado para darte práctica y ayudarte a cumplir con los objetivos de esta sección.

En los problemas del 1 al 6, a_1 hasta a_6 de una sucesión están en lista. Para cada sucesión, haz lo siguiente:

a. Dibuja la gráfica
b. Encuentra a_7 y a_8
c. Encuentra la fórmula para a_n
d. Calcula a_{100}

1. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...$
2. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, ...$
3. 3, 4, 5, 6, 7, 8,.....
4. 3, 6, 12, 24, 48, 96,.....
5. 32, -16, 8, -4, 2, -1,.....
6. $1, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, ...$

Para los problemas del 7 al 12 escribe los siguientes dos términos de la sucesión, y di qué patrón fue usado.

7. 1, 2, 4, 7, 11, 16,.....
8. 1, 11, 20, 28, 35, 41,.....
9. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,..... (Sucesión de Fibonacci)
10. 1, 2, 6, 24, 120, 720,..... (Sucesión de factoriales)
11. 1, 3, 6, 10, 15,..... (Sucesión de números triangulares)
12. $\frac{1}{12}, \frac{1}{19}, \frac{1}{26}, \frac{1}{33}, \ldots\ldots$ (Sucesión armónica)

2.2 Sucesiones Aritméticas y Geométricas

Dos tipos de sucesiónes son de especial interés matemático porque las fórmulas son derivadas fácilmente y son de interés práctico, porque quedan como modelos matemáticos en muchas situaciones del mundo real, son ejemplos:

3, 10, 17, 24, 31, 38,..... y

3, 6, 12, 24, 48, 96,.....

En la primera sucesión el siguiente término es formado agregando 7 al término anterior. En la otra el siguiente término es encontrado multiplicando el término anterior por la constante 2.

Definición

> Una sucesión aritmética es una sucesión en la cual se agrega una constante al término anterior para obtener el siguiente y así sucesivamente.

La constante para una sucesión aritmética es llamada "diferencia común" (d) porque la diferencia entre cualquiera de dos términos adyacentes es igual a esta constante. En la primera sucesión 10-3 = 7, 17-10 = 7, 24-17 = 7,

Definición

> Una sucesión geométrica es una sucesión en la cual se multiplica el término anterior por una constante para obtener el siguiente.

La constante para una sucesión geométrica es llamada "razón común" *(r)*. Por que la razón de un término con el término anterior es igual a esta constante.

En la segunda sucesión $\frac{6}{3}=2, \frac{12}{6}=2, \frac{24}{12}=2$

Las sucesiónes aritméticas y geométricas son llamadas "progresiones" porque los términos "progresan" de uno a otro (adyacentes) de manera regular. La palabra "progresión" es usada frecuentemente cuando hay un número finito de términos. Las sucesiónes tienen un número infinito de términos.

Objetivos

> 1. Dados los primeros términos de una sucesión, decir si es aritmética o geométrica, o ninguna de estas.
> 2. Dado un valor de n para una sucesión aritmética o geométrica encuentra el valor de a_n.
> 3. Dado un valor de a_n para una sucesión aritmética o geométrica encuentra el valor de *n*.

Ejemplo 1.

¿La sucesión 4, 7, 10, ... es aritmética o geométrica o ninguna de éstas?

El primer objetivo puede ser realizado viendo si los términos adyacentes tienen ya sea una diferencia común o una razón común. Para la sucesión 4, 7, 10, ... la diferencia entre términos adyacentes es:

$a_2-a_1=7-4=3$

$a_3-a_2=10-7=3$

Ya que estos términos tienen una diferencia común, la sucesión es aritmética.

Los términos no tienen una razón común, ya que $\frac{10}{7} \neq \frac{7}{4}$, entonces la sucesión no es geométrica.

Ejemplo 2.

¿La sucesión 3, 6, 12,... es aritmética o geométrica o ninguna de éstas?

Solución

Para esta sucesión las diferencias son:

$a_2-a_1=6-3=3$ y

$a_3-a_2=12-6=6$

Por lo tanto la sucesión no es aritmética. Pero las razones son

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{3}=2$ y $\frac{a_3}{a_2}=\frac{12}{6}=2$

Entonces la sucesión es geométrica, porque los términos adyacentes tienen una razón común. Cada término es formado multiplicando por 2 el término anterior.

Ejemplo 3.

La sucesión 2, 6, 24, ... ¿es progresión aritmética, geométrica o ninguna de estas?

Solución

Para esta sucesión la diferencia es:

$a_2-a_1=6-2=4$ y

$a_3-a_2=24-6=18$

Las razones son:

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{6}{2}=3 \quad y \quad \frac{a_3}{a_2}=\frac{24}{6}=4$$

Por lo tanto no es aritmética ni geométrica.

(Esto resultó ser una sucesión "factorial") donde el siguiente término es formado multiplicando el anterior por un número mayor cada vez.

Las fórmulas para calcular a_n para sucesiones aritméticas y geométricas pueden se encontradas mediante el enlace del término numérico con el valor del término como lo hiciste en la sección anterior. La sucesión aritmética 3, 10, 17, 24, 31,..... tiene como primer término $a_1=3$ y la diferencia común $d=7$. Los primeros términos pueden ser construidos sumando 7 al término que precede.

$a_1=3$
$a_2=3+7$
$a_3=3+7+7=3+2(7)$
$a_4=3+7+7+7=3+3(7)$
$a_5=3+7+7+7+7=3+4(7)$

Por lo tanto el patrón consiste en sumar *(n-1)* diferencias comunes al primer término a_1, entonces la fórmula es como sigue:

Conclusión

> El valor del enésimo término (a_n) de una sucesión aritmética es igual al primer término más *(n-1)* diferencias comunes. Esto es:
>
> $$a_n=a_1+(n-1)d.$$

Esta fórmula te revela que una sucesión aritmética no es más que una función lineal, inteligentemente disfrazada, porque la variable independiente n aparece en el primer grado. La pendiente de la función es la diferencia común d y la intersección de y va a ser a_0, la cual es igual a_1-d si cero esta en el dominio de la función. El mismo procedimiento nos da la fórmula para a_n de una sucesión geométrica.

La sucesión 3, 6, 12, 24, ... tiene $a_1=3$ y razón común $r=2$, los primeros términos pueden ser construidos multiplicando por 2 el término anterior.

$a_1=3$
$a_2=3\cdot 2$
$a_3=3\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^2$
$a_4=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^3$
$a_5=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=3\cdot 2^4$

Entonces el patrón consiste en multiplicar el primer término a_1 por la razón común, r, *(n-1)* veces.

Conclusión

> El enésimo término de una sucesión geométrica (a_n) es igual al primer término multiplicado por *(n-1)* veces la razón. Esto es:
>
> $$a_n=a_1\cdot r^{n-1}$$

Notas:
Ya que la variable independiente n aparece como exponente, la sucesión geométrica es un ejemplo de una función exponencial. la única diferencia es que el dominio de una sucesión geométrica es de enteros positivos en lugar de que sean todos números reales.

Las fórmulas para las sucesiones aritméticas y geométricas son parecidas, la única diferencia es la operación que se realiza. Para la sucesión aritmética la diferencia común d multiplicada por n-1 se suma al primer término a_1. Para la sucesión geométrica la razón común elevada a la n-1 se multiplica por el primer término a_1.

Con la ayuda de estas conclusiones el segundo y tercer objetivo de esta sección pueden ser realizados.

Ejemplo 4.
Calcula a_{100} para la sucesión aritmética 17, 22, 27, 32, ...

Solución
Por medio de la resta de términos adyacentes encuentra que la diferencia común es $d=5$. Sumando (100-1) 5 veces al primer término nos da:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ a_{100} &= 17+(100-1)(5) \\ a_{100} &= 17+495 \\ a_{100} &= 512 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.
Calcula a_{100} para la sucesión geométrica que tiene primer término $a_1=35$ y razón común $r=1.05$

Solución
Ya que conoces a_1, r y n, puedes encontrar a_{100}.

$$\begin{aligned} a_n &= a_1r^{(n-1)} \\ a_{100} &= 35(1.05)^{100-1} \\ a_{100} &= 35(1.05)^{99} \\ a_{100} &\approx 4383.375262 \end{aligned}$$

Ejemplo 6
El número 68 es un término en la sucesión aritmética que tiene $a_1=5$, $d=3$ ¿Qué término es?

Solución
En este caso tu sabes que $a_n=68$ y debes encontrar el número del término n, usando la fórmula

$$\begin{aligned} a_n &= a_1+(n-1)d \\ 68 &= 5+(n-1)3 \\ 63 &= (n-1)(3) \\ 21 &= n-1 \\ \therefore n &= 22 \end{aligned}$$

Ejemplo 7
Una sucesión geométrica tiene $a_1=17$ y $r=2$. Si $a_n=34816$, encuentra n.

Solución
Sustituyendo en la fórmula nos da

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 \cdot r^{n-1} \\ 34816 &= 17(2)^{n-1} \\ 2048 &= 2^{n-1} \end{aligned}$$

tomando el logaritmo de cada miembro

$$\begin{aligned} \log 2048 &= \log 2^{n-1} \\ \log 2048 &= (n-1) \log 2 \end{aligned}$$

$$\frac{\log 2048}{\log 2} = n-1$$

$$\begin{aligned} 11 &= n-1 \\ \therefore n &= 12 \end{aligned}$$

El siguiente ejercicio esta diseñado para darte práctica identificando las sucesiones ya sean geométricas o aritméticas y para encontrar el valor del término o el número del término de tales sucesiones.

Ejercicio 2.2

En los problemas del 1 al 8 di si la sucesión es aritmética o geométrica o ninguna de éstas. Si es aritmética encuentra la diferencia común, si es geométrica encuentra la razón común.

1. 7,12,17, ...
2. 5, 10, 12, ...
3. 1, 1, -1, ...
4. 25, 50, 100, ...
5. 2, -4, 6, ...
6. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, ...
7. $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}$....
8. 25, 75, 100, ...

En los problemas del 9 al 13 encuentra el término indicado de la sucesión aritmética.

9. Término 45 de 2, 5, 8, ...
10. Término 51 de 18, 14, 10, ...
11. Término 13 de $\frac{1}{3}, 1, 1\frac{2}{3}$, ...
12. Término 17 de $3\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, 11\sqrt{2}$, ...
13. Términos 64, 65, 66 de 8, 11, 14, ...

Para los problemas del 14 al 20 encuentra el término indicado de la sucesión geométrica usa *logaritmos* si no tienes acceso a una calculadora.

14. Término 7 de 2, 6, 18, ...
15. Término 9 de 1, 2, 4, 8, ...
16. Término 10 de 1, -2, 4, ...
17. Término 51 de la sucesión en la cual $a_1=7$ y $r=1.02$
18. Término 37 de la sucesión en la cual $a_1=29$ y $r=0.92$
19. Término 28 de la sucesión en la cual $a_1=0.01$ y $r=-3$
20. Término 64 de la sucesión en la cual $a_1=1$ y $r=-2$

Para los problemas del 21 al 25 encuentra cual es el término *(n)* del número dado en la sucesión indicada.

21. 101 en la sucesión aritmética con $a_1=5$ $d=3$
22. 13 en la sucesión aritmética con $a_1=88$ y $d=-5$
23. 1536 en la sucesión geométrica $a_1=3$ y $r=2$
24. 1 en la sucesión geométrica $a_1=729$ y $r=\frac{1}{3}$
25. -1215 en la sucesión geométrica $a_1=5$ y $r=-3$
26. ¿Cuál es la diferencia entre una sucesión geométrica y una progresión geométrica?

2.3 Medias aritméticas y geométricas

Imagina que te preguntan encontrar el promedio de dos números, supón que son 4 y 16 sumando los números y dividiéndolos entre 2 nos da 10. Los números 4, 10, 16 forman una sucesión aritmética ya que cada par de términos adyacentes tienen una diferencia común de 6. El número 10 es llamado la media aritmética de 4 y 6, la palabra "media" significa promedio o en medio de.

Hay otras maneras de insertar números entre el 4 y el 16 para formar sucesiones ya sean aritméticas o geométricas. Por ejemplo poniendo 8 y 12 en medio de 4 y 16 forman 4, 8, 12, 16,...

La cual es una sucesión aritmética con una diferencia de 4. Los números 8 y 12 son llamados dos medias aritméticas entre 4 y 16, insertando únicamente el número 8 entre 4 y 16 forma 4, 8, 16,...

La cual es una sucesión geométrica con una razón de 2. Entonces 8 es llamado la media geométrica de 4 y 16. El artículo indefinido es usado aquí porque hay otra media geométrica de 4 y 16 que es -8. Esto es porque la sucesión 4, -8, 16, ... es geométrica con razón común del -2. En esta sección aprenderás como encontrar números específicos de medias entre dos números dados.

Definición

Medias geométricas o aritméticas entre dos números, son números los cuales forman sucesións aritméticas o geométricas con los dos numeros dados.

Objetivo

Dados dos números, ser capaz de encontrar un número específico de la media aritmética o geométrica que esta entre ellos.

La clave para lograr este objetivo es encontrar la diferencia común o la razón común. Conociendo este número tu puedes usar la definición de sucesión aritmética o geométrica para escribir la media deseada.

Ejemplo.
Encuentra 5 medias aritméticas entre 36 y 54.

Solución
La manera más segura para encontrar estas medias es escribir 36 y 54 con cinco espacios entre ellos, en los cuales tu puedes escribir las medias.
36, ______, ______, ______, ______, ______, 54

Estos son los primeros 7 términos de la sucesión. *Por lo tanto* $n=7$, $a_7=54$ y $a_1=36$.
Encuentra *la diferencia* común (d).

$a_7 = a_1 + (n-1)d$
$54 = 36 + (7-1)d$
$54 = 36 + 6d$
$18 = 6d$
$d = 3$

Conociendo d las medias pueden ser escritas agregando d a los términos siguientes

36, 39, 42, 45, 48, 51, 54

Ejemplo 2
Encuentra tres medias geométricas entre 3 y 48

Solución
El proceso anterior trabaja también para las medias geométricas. Escribiendo
3, ______, ______, ______, 48
Te das cuenta que hay 5 términos. Donde $a_5 = 48$, $a_1 = 3$ y $n = 5$.

Recordando que:
$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$a_5 = a_1 \cdot r^{5-1}$$
$$48 = 3r^4$$
$$16 = r^4$$
$$\sqrt{r^4} = \sqrt{16}$$
$$r^2 = \pm 4$$
$$r^2 = 4 \quad y \quad r^2 = -4$$
$$r = \pm 2 \quad y \quad r = \pm 2i$$

Donde obtenemos cuatro soluciones, dos reales y dos imaginarios.
Las soluciones reales para $r = \pm 2$ tenemos:

$3, 6, 12, 24, 48 \quad ; r=2$
$3, -6, 12, -24, 48 \quad ; r=-2$

Las sucesiones imaginarias para $r = \pm 2i$ tenemos:

$3, 6i, -12, -24i, 48 \quad ; r=2i$
$3, -6i, -12, 24i, 48 \quad ; r=-2i$

El ejercicio siguiente esta diseñado para darte práctica encontrando medias geométricas y aritméticas. También vas a descubrir algunas propiedades sobre las medias geométricas y aritméticas.

Ejercicio 2.3

Para los problemas del 1 al 6 encuentra la media aritmética indicada entre dos números dados.

1. Tres medias entre 42 y 70
2. Seis medias entre -107 y -86
3. Cinco medias entre 23 y 31
4. Dos medias entre -143 y -215
5. Tres medias entre 53 y 75
6. Cuatro medias entre 123 y 55

Para los problemas del 7 al 12, encuentra la media geométrica indicada entre los números dados. (Ahí tal vez habrá más de un grupo de medias reales)

7. Dos medias entre 5 y 135
8. Tres medias entre 81 y 16
9. Cuatro medias entre 1/32 y 32
10. Dos medias entre 13y-4459
11. Cinco medias entre x^5 y x^{17}
12. Dos medias entre 13 y 26

Para los problemas del 13 al 16, encuentra la media geométrica indicada. (Encontraras medias imaginarias)

13. Tres medias entre 2 y 162
14. Tres medias entre 1 y 16
15. Tres medias entre 5 y 80
16. Tres medias entre 2 y 32

Para los problemas del 17 al 20 encuentra la media aritmética y la media geométrica de los números dados.

17. 2 y 18
18. 3 y 108
19. $\frac{2}{3}$ y 24
20. $\frac{3}{5}$ y 15

2.4 Introducción a las series

Si tu sumas los términos de una sucesión, el resultado es llamado una serie. Por ejemplo, la serie de la cual proviene 3,5,7,9,.... es 3+5+7+9+11+....

Definición

> **SERIES**
> Una serie es una suma indicada de los términos de una sucesión.

Ya que una sucesión tiene un número infinito de términos. Una serie es la suma de número infinito de términos. La suma de todos los términos de una serie va a ser usualmente infinita. Por esta razón es conveniente estudiar solo sumas de números finitos de términos de una serie. Por ejemplo la suma de los primeros 4 términos de la serie anterior es

3+5+7+9,

Lo cuál es igual a 24. La suma de una parte de la serie es llamada suma parcial. 3+5+7+9 es llamada suma parcial de cuatro términos de la serie anterior porque esta es la suma de los 4 primeros términos.

Definición

> **SUMA PARCIAL DE N TERMINOS**
> La suma parcial de n términos de, una serie es la suma de los primeros n términos de una serie.

El símbolo S_n va a ser usado para representar la suma parcial de una serie. El valor de la suma parcial es claramente la variable dependiente en la función en la cual la variable independiente es n. Para la serie anterior

$S_1 = 3$
$S_2 = 3+5=8$
$S_3 = 3+5+7=15$
$S_4 = 3+5+7+9=24$

Nota que la suma parcial por si solas forman un sucesión,
3, 8, 15, 24

Considerándolas como sucesiones de sumas parciales.

Desafortunadamente no hay muchas series para las cuales hay un fórmula conveniente para calcular S_n. Entonces matemáticos inventaron simplemente un símbolo que te diga como construir la suma parcial. El símbolo usado es letra griega Σ (Sigma) y se escribe:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

El símbolo se lee "La suma de k=l hasta k=n del *k-ésimo termino*" y significa $a_1+a_2+a_3+.......+a_k$. La variable k es llamada índice. Por ejemplo si $a_k=2\cdot 3^k$, entonces:

$$S_4=\sum_{k=1}^{4} 2\cdot 3^k=2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+2\cdot 3^4$$
$$=6+18+54+162$$
$$=240$$

Objetivos

> 1. Dada la suma parcial en la notación $\sum$, evaluarla escribiendo todos los términos, y sumarlos después.
> 2. Dados los primeros términos de una serie, escribe S_n usando la notación $\sum$.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que logres este objetivo.

Ejercicio 2.4

De los problemas del 1 al 10 evalúa la expresión escribiendo los términos y después sumalos.

1. $\sum_{k=1}^{5} 2k+7$
2. $\sum_{k=1}^{10} k$
3. $\sum_{k=1}^{4} 1/k$
4. $\sum_{k=1}^{6} k^2+1$

5. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^k \ (2k+3)$ 6. $\sum_{k=1}^{5} 2^k$ 7. $\sum_{k=1}^{3} (1.02)^k$ 8. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1}(2)(3^{k-1})$

9. $\sum_{k=1}^{4} 5\ (3)^k$ 10. $5\sum_{k=1}^{4} 3^k$

11. Las respuestas de los problemas 9 y 10 son iguales. Explica la razón de esto.

12. La notación puede ser usada con otros números y otras variables aparte de K. Escribe a que es igual lo siguiente

a. $\sum_{k=3}^{5} 4k-7$ b. $\sum_{j=1}^{10} (-1)^j x^j$

De los problemas del 13 al 18 escribe S_n usando la notación Σ

13. S_{10} para $1+4+9+16+25+\ldots$
14. S_{100} para $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\ldots$
15. S_{40} para $2+6+18+54+162+\ \ldots$
16. S_{90} para $2+6+10+14+18+\ldots$
17. S_{20} para $0-10+20-30+40-\ldots$
18. S_{55} para $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\ldots$

19. Imagina que $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

Encuentra S_n para cada valor de n $\in\{1,2,3,\ldots7\}$ ¿Qué piensas que podría ser la fórmula para S_n?

20. Supón que $S_n = \sum_{k=1}^{n} {}^{k}/_{2}\ (k+1)$

a. Escribe los primeros 5 términos de la serie
b. Estos términos son llamados números triangulares. Muestra que cada valor de t_k es el número de pelotas que pueden ser puestas en un triángulo. Con k pelotas en la orilla
c. Encuentra las primeras 5 sumas parciales de la serie
d. Estas sumas parciales son llamados números piramidales. Muestran que cada valor de S_n es el número de pelotas que pueden ser colocadas en una pirámide triangular. Con n pelotas en cada lado de la base.

2.5 Series Aritméticas y Geométricas.

Haz aprendido que una serie es lo que resulta de la suma de los términos de una sucesión.

En esta sección vas e estudiar series las cuales provienen de la suma de los términos de sucesións aritméticas y geométricas.

Definición

Una serie aritmética o geométrica es el resultado de la suma de los términos de una sucesión aritmética o geométrica respectivamente.

En el ejercicio 2.4 tú calculaste sumas parciales de series escribiendo cada término y sumándolos. Para encontrar una suma parcial más rápidamente es deseable tener una fórmula para S_n.

Objetivo

Dada una serie aritmética o geométrica ser capaz de calcular S_n la enésima suma parcial rápidamente y viceversa

Supón que debes encontrar la suma de los primeros 100 términos de una serie aritmética.

$7+13+19+25+31+\ldots.$

El término 100 de la serie puede ser calculado mediante el patrón que ya conoces

$a_{100}=a_1+(100-1)d$

Ya que $d=6$ para esta serie, la fórmula nos da

$a_{100}=\ 7+(99)(6)$

$a_{100}=\ 601$ entonces los últimos términos de la suma parcial son ... 583, 589, 595, 601

La suma parcial es $S_{100}\ =7+13+19+25+31+\ldots..+583+589+595+601$

Un patrón interesante muestra que si tú sumas el primero y el último término, el segundo y el penúltimo y así sucesivamente.

$S_{100}=$ 7 + 13 + 19 + 25 + ... + 583 + 589 + 595 + 601

608
608
608
608

Cada par de términos sumados da 608. Por lo tanto tendrás 100/2= 50 pares como estos. Entonces la suma parcial es.

$S_{100}\ =\ 608+608+\ldots.+608$ (50 términos)
$S_{100}\ =$ (50) (608)
$S_{100}\ =$ 30, 400

De este ejemplo tú puedes encontrar la fórmula para S_n. El 50 es igual a 1/2 del números de términos o $n/2$ y el 608 es igual a t_1+a_n. Por lo tanto la fórmula es.

Conclusión

SUMA PARCIAL DE SERIES ARITMETICAS.
La enésima suma parcial de una serie aritmética es :
a. La suma del primer y último término, multiplicados por la mitad del número de términos, o
b. n veces el promedio del primer y último término.

Esto es: $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n) = n[\frac{a_1 + a_n}{2}]$

Una forma alternativa de esta fórmula puede ser encontrada mediante la sustitución de la cantidad $a_1 + (n-1)\,d$ por a_n

$Sn =$	$\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	Fórmula previa
$Sn =$	$\frac{n}{2}[a_1 + a_1 + (n-1)d]$	Sustitución
$Sn =$	$\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	Para series aritméticas

Esta fórmula es más conveniente si tu conoces d, pero no a_n, o si tu quieres calcular n cuando conoces Sn, a_1 y d.

Otro truco interesante algebraico nos da la fórmula de Sn para las series geométricas. Supón que tienes que encontrar S_{100} para la serie geométrica $7 + 21 + 63 + \ldots$

En este caso $a_1 = 7$ y $r = 3$ esto nos ayuda a escribir los términos en forma factorizada.

$$S_{100} = 7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \ldots + 7 \cdot 3^{98} + 7 \cdot 3^{99}$$

Si multiplicas ambos miembros de esta ecuación por -3, que es el opuesto de la razón común después sumas las dos ecuaciones (como lo hiciste con sistemas lineales), obtienes

$$\begin{array}{rl} S_{100} & = 7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3^3 + \ldots + 7 \cdot 3^{98} + 7 \cdot 3^{99} \\ -3\,S_{100} & = \quad -7 \cdot 3 - 7 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3^3 - \ldots - 7 \cdot 3^{98} - 7 \cdot 3^{99} - 7 \cdot 3^{100} \\ \hline S_{100} - 3S_{100} & = 7 + 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 - 7 \cdot 3^{100} \end{array}$$

Todos los términos excepto uno en la ecuación de arriba tiene su opuesto en la ecuación de abajo.
Quedando solo 7 y $-7 \cdot 3^{100}$. El resultado es $S_{100} - 3 \cdot S_{100} = 7 - 7 \cdot 3^{100}$

$$S_{100}\,(1-3) = 7(1-3^{100})$$

$$= 7\left(\frac{1-3^{100}}{1-3}\right)$$

De estos datos se puede obtener la fórmula para S_n. El 7 es igual a a_1, el 3 es la razón común (r), y el 100 es el número de términos (n). Entonces la fórmula es como sigue:

Conclusión

SUMA PARCIAL DE UNA SERIE GEOMETRICA.
La enésima suma parcial de una serie geométrica es igual al primer término a_1 multiplicado por la fracción. La fracción es $\frac{(1-r^n)}{1-r}$

Esto es: $S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$

Ejemplo 1.
Encuentra la suma parcial de 127 términos de la serie aritmética con $a_1 = 17$ y $d = 4$

Solución
De la segunda forma de la fórmula de series aritméticas obtienes

$$S_n = \frac{n}{2}[2t_1 + (n-1)d]$$

$$S_{127} = \frac{127}{2}[2(17) + (127-1)4]$$

$$S_{127} = \frac{127}{2}(34 + 504)$$

$$S_{127} = \frac{127}{2}(538)$$

$$S_{127} = 34,163$$

Esto es mucho más rápido que calcular los 127 términos y sumarlos.

Ejemplo 2
Encuentra S_{34} para la serie geométrica con $a_1 = 7$ y $r = 1.03$

Solución
De la fórmula de series geométricas obtienes:

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{34} = 7\left[\frac{1-(1.03)^{34}}{1-1.03}\right]$$

$$S_{34} = 7\left(\frac{1-2.731905296}{-0.03}\right)$$

$$S_{34} = 7\left(\frac{-1.731905296}{-0.03}\right)$$

$$S_{34} \approx 404.1112356$$

Ejemplo 3
30705 es la suma parcial de la serie aritmética con $a_1 = 17$ y d = 3. ¿Cuál suma parcial es esta?

Solución
Encontrar el número de términos requiere retroceder con el patrón que haz aprendido. Ya que a_1 y d son conocidos,

$$S_n = \frac{n}{2}\,[2a_1 + (n-1)d]$$

$$30705 = \frac{n}{2}\,[2(17) + (n-1)3]$$

$$30705 = \frac{n}{2}\,(34 + 3n - 3)$$

$$61410 = n(31 + 3n)$$

$$61410 = 31n + 3n^2$$

$$3n^2 + 31n - 61410 = 0$$

usando la fórmula cuadrática tenemos:

$$n = \frac{-31 \pm \sqrt{961 + 736920}}{6}$$

$$n = \frac{-31 \pm \sqrt{737881}}{6}$$

$$n = \frac{-31 \pm 859}{6}$$

$n = 138$ y/o $n = -148.33$

La única respuesta posible es $n = 138$

Ejemplo 4
50238.14 es el valor aproximado de la suma parcial de la serie geométrica con $a_1 = 150$ y $r = 1.04$ ¿Cuántos términos tiene?

Solución
Sustituyéndolo en la fórmula para Sn_1 nos da

$$S_n = a_1 \left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$50238.14 = 150 \left[\frac{1-(1.04)^n}{1-1.04}\right]$$

$$\frac{50238.14}{150} = \frac{1-1.04^n}{-0.04}$$

$$-0.04(3334.92) = 1 - 1.04^n$$

$$-13.3968 = 1 - 104^n$$

$$1.04^n = 14.3968$$

$$\log 1.04^n = \log 14.3968$$

$$n \log 1.04 = \log 14.3968$$

$$n = \frac{\log 14.3968}{\log 1.04}$$

$$n = 68.000001$$

entonces $n = 68$

Ejercicio 2.5

Para los problemas del 1 al 5 encuentra Sn para la serie aritmética indicada, ya sea calculando los términos y sumándolos o usando la fórmula.

1. S_{10} para $4 + 7 + 10 + \ldots$
2. S_{20} para la serie con $a_1 = 15$ y $d = 10$
3. S_{15} para la serie con $a_1 = 14$ y $d = -2$
4. S_{40} para la serie con $a_1 = 8$ y $a_6 = 38$
5. $\sum_{k=1}^{60} 3 + 2(k-1)$

Para los problemas del 6 al 12, encuentra Sn para la serie geométrica indicada, ya sea calculando los términos y sumándolos o usando la fórmula.

6. S_5 para $1 + 2 + 4 + \ldots$
7. S_6 para $1 - 3 + 9 - \ldots$
8. S_{10} para la serie con $a_1 = 5$ y $r = 3$
9. S_9 para la serie con $a_1 = 6$ y $r = -2$
10. S_{20} para la serie con $a_1 = 11$ y $r = 1.3$
11. S_{11} para la serie con $a_1 = 10$ y $a_2 = 9$
12. $\sum_{k=1}^{6} 2(3)^{k-1}$

Para los problemas del 13 al 16 la suma parcial de las series es dada, junto con otra información. Encuentra el número del término de la suma parcial.

13. Serie aritmética $S_n = 3219$, $a_1 = 15$, $d = 4$. Encuentra n
14. Serie aritmética $S_n = 25477.9$, $a_1 = 1.7$, $a_2 = 5.3$. Encuentra n
15. Serie geométrica $S_n \approx 23180.58$, $a_1 = 85$, $r = 105$. Encuentra n
16. Serie geométrica $S_n \approx 109135.19$, $a_1 = 1000$, $a_2 = 998$. Encuentra n

17. Para la serie geométrica $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \ldots$, encuentra S_5, S_{10} y S_{20}. ¿Qué notas que le sucede a S_n cuando n comienza a hacerse mayor?

2.6 Series geométricas convergentes

La serie $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots.$ tiene sumas parciales que se van haciendo grandes y más grandes cuando n aumenta. Considera que pasa con la siguiente serie geométrica

$$5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+\frac{5}{32}+\ldots$$

Las primeras sumas parciales son

$S_1 = 5$

$S_2 = 5+\frac{5}{2} = 7\,1/2$

$S_3 = 5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4} = 8\frac{3}{4}$

$S_4 = 5+\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8} = 9\frac{3}{8}$

$S_5 = 5+\frac{5}{2}=\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16} = 9\frac{11}{16}$

Las sumas parciales se van haciendo mayores, pero parece ser menos de 10. Par[a] ver que pasa cuando n es mayor, tu puedes usar la fórmula. Por ejemplo, la suma parcial de 20 términos es

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_{20} = 5\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}{1-\frac{1}{2}}\right]$$

$$S_{20} = 5\left(\frac{1-0.0000009537}{\frac{1}{2}}\right)$$

Dividiendo 5 entre $\frac{1}{2}$ (obtienes 10) y haciendo la resta

$$S_{20} \approx 10(0.9999990463)$$
$$\approx 9.999990463$$

Este número es muy cercano al 10. La gráfica de la suma parcial es mostrada en la figura 2-6a.

Figura 2-6a

La línea horizontal en 10 es una asíntota de la gráfica. Tu puedes ver que S_n nunca será más grande que 10, porque este será siempre multiplicado por una cantidad menor que 1 desde que los puntos se acercan mas y más a 10, se dice que la serie "CONVERGE A DIEZ".

Definición

> Una serie converge a un número S si la suma parcial S_n, esta cada vez más cerca de S cuando n crece demasiado.

Dos preguntas surgen ahora:

1. ¿Bajo qué condiciones una serie geométrica será convergente?

2. ¿Cómo encontrarás el número al cual converge la serie geométrica?

La serie de arriba es convergente porque el término $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ en la fórmula para S_n es muy cercana al cero cuando n crece. Esto pasará siempre y cuando la razón común sea una fracción propia. Esto es $-1<r<1$. Entonces la serie va a converger si $|r|<1$.

Para encontrar el número al cual la serie converge simplemente reemplaza el término r^n por cero en la fórmula para S_n, obteniendo

$$a_1\cdot\frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow a_1\cdot\frac{1-0}{1-r} = a_1\cdot\frac{1}{1-r}$$

Este número es llamado el límite de la serie cuando n se aproxima al infinito. Esto es abreviando de esta manera:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Conclusión

> SERIES GEOMETRICAS CONVERGENTES.
> La serie geométrica converge si $|r|<1$.
> El límite S, al cual converge es dado por
>
> $$S=\lim_{n\to\infty} S_n = a_1\cdot\frac{1}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

Nota:

Aunque hay un número infinito de términos en las series ahora tienes una definición razonable para la suma de todos los términos. En el ejemplo anterior si tu sumas cualquier número finito de términos, la respuesta es menor a 10. Pero podrías definir la suma de todos los términos como si fuera igual a 10. Esta definición te permite encontrar valores exactos de decimales repetidas, como las vas a ver enseguida.

Objetivos

1.	Dada una serie geométrica decir si converge o no. Si converge, encuentra el límite en el cual converge.
2.	Dado un decimal repetido escríbelo como una serie geométrica convergente, y encuentra el número racional igual al decimal.

Ejemplo 1.
Di si la serie geométrica 15 - 4.5 + 1.35 - ... , converge?. Si es así en que número converge.

Solución
La razón común es $r=-\frac{4.5}{15}=-0.3$

Ya que $|r| < 1$ la serie converge. mediante la formula, $S=\frac{15}{1-(-.3)}=\frac{15}{1.3}=11.$

Ejemplo 2.
Di si la serie geométrica 2 - 3 + 4.5 - ... , es convergente; si es así a que número converge.

Solución.
La razón común es $r=-\frac{3}{2}=-1.5$, ya que $|r|$ no es menor que 1, la serie no converge. La figura 2.6b muestra que pasa con las sumas parciales de esta serie. Si la serie no converge, puedes decir que diverge.

Figura 2.6b

Ejemplo 3.
Expresa 0.324324324..., cómo la razón de dos enteros, y simplifica.

Solución

Deja que x represente 0.324324324..., ya que el decimal se repite cada 3 dígitos, puedes escribir.

$x = 0.324 + 0.000324 + 0.000000324 + \ldots$

Esto es una serie geométrica, con $a_1 = 0.324$ y razón común $r=0.001$. Entonces x es la suma de todos los términos de la serie. Es razonable pensar que esta suma va a ser el número en la cual la serie converge. Tu puedes escribir.

$$x = \frac{0.324}{1-0.001}$$

$$= \frac{0.324}{0.999}$$

$$= \frac{324}{999}$$

$$= \frac{12}{37}$$

Ejemplo 4.
Expresa 0.26717171..., como la razón de dos enteros primos relativos.

Solución
En este caso el decimal no se repite hasta después de los dos lugares. Entonces tu divides la parte no repetitiva y expresas el residuo como una serie geométrica convergente. Dejando que x sea igual a:

$$x = 0.26 + 0.0071 + 0.000071 + 0.00000071 + \ldots$$

$$= 0.26+\frac{0.0071}{1-0.01}$$

$$= 0.26+\frac{0.0071}{0.99}$$

$$= \frac{26}{100}+\frac{71}{9900}$$

$$= \frac{2645}{9900}$$

$$= \frac{529}{1980}$$

Los cálculos mostrados te demuestran que una decimal repetida puede ser escrita como la razón de dos enteros.

Conclusión

> Si x es un número con la parte decimal repetida, entonces x es un número racional.

Ejercicio 1.6.

Para los problemas del 1 al 5, determina si la serie geométrica indicada converge o no. Si es convergente encontrar el valor al cual converge.

1. $a_1 = 3$ y $r = \frac{1}{5}$
2. $a_1 = 42$ y $r = -\frac{3}{4}$
3. $a_1 = 18$ y $r = -\frac{7}{5}$
4. $a_1 = 10$ y $r = 0.1$
5. $a_1 = 100$ y $a_3 = 1$ (Dos respuestas).

Para problemas del 6 al 11, escribe la decimal repetida como la razón de dos enteros y simplifica.

6. 0.636363...
7. 0.567567567...
8. 1.0606060...
9. 1.4272727...
10. 0.4999999...
11. 0.012345679012345679012345679...
(pista: La simplificación de la fracción es difícil, pero obvia)

12. La sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ es llamada una sucesión armónica. Claramente a_n se acerca y se acerca a cero cuando n es muy grande.

La serie armónica $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ no converge; solamente se va haciendo más grande cuando n se incrementa. Asociando términos muestra que

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots > \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Y usa este resultado para mostrar que la serie "diverge"

13. Usando la técnica para series geométricas convergentes, es posible mostrar que la serie

$$1+2\left(\frac{1}{3}\right)+3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\left(\frac{1}{3}\right)^3+5\left(\frac{1}{3}\right)^4+\ldots$$

Converge a un número finito. Encuentra a que es igual este número.

2.7 Sucesiones y series como modelos matemáticos.

Ya que la sucesión es una función en la cual su dominio es un conjunto de enteros la gráfica de la sucesión cambia dando saltos sin ser una curva continua. Por lo tanto, las sucesións son apropiadas como modelos matemáticos para los fenómenos del mundo real en los cuales la variable dependiente cambia de una manera repentina en lugar de la continuidad que hasta ahora habías manejado. Por ejemplo, cuando tu introduces un clavo en la tabla, la profundidad del clavo en la tabla depende del número de veces que lo golpeaste con el martillo.

Objetivo

> Dada una situación del mundo real en la cual la variable dependiente cambia ampliamente, usa sucesiones y/o series, aritméticas o geométricas como modelo matemático.

Ejemplo 1.

Supón que empiezas a golpear un clavo en una tabla. Con el primer impacto el clavo se introduce 20 mm.

Con el segundo impacto se introduce 18 mm. más. Predice la distancia que se introduce y la distancia total que se introdujo en la tabla, asumiendo que las distancias que se introduce forman:

a. Una sucesión aritmética.
b. Una sucesión geométrica

Solución.
n= número de impactos
a_n= número de milímetros que el clavo se introduce en el enésimo impacto. (Ver la figura 2.7a)
S_n= al número total de milímetros que el clavo se ha introducido después de n impactos.

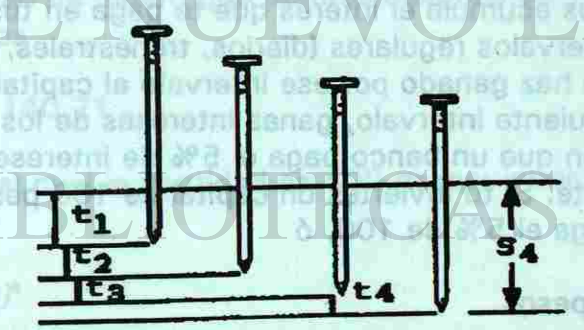


Figura 2.7a

a. Asumiendo que es una sucesión aritmética, $d = 18 - 20 = -2$, por lo tanto,
$a_n = 20 + (n-1)(-2)$
En el cuarto impacto el clavo se introduce
$a_4 = 20 + (4-1)(-2)$
$a_4 = 20 - 6 = 14$ mm.

La distancia total que el clavo se ha introducido después de cuatro impactos, será la suma parcial de los cuatro impactos de la serie aritmética correspondiente. Ya que $a_4 = 14$mm.

$$S_4 = \frac{4}{2}(20+14) = 68mm$$

b. Si es una sucesión geométrica la razón común será $r = 18/20 = 0.9$. En el cuarto impacto el clavo irá hasta
$a_4 = 20(0.9)^{4-1} = 14.58$ mm.

Después de 4 impactos, el clavo se habrá introducido un total de

$$S_4 = \frac{20(1-0.9^4)}{1-0.9} = 68.78mm$$

Ya que la razón común tiene un valor absoluto menor a 1, la suma parcial converge a un número cuando n es muy grande. Después de muchos impactos, la distancia total que el clavo se a introducido en la tabla se acerca a.

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{20}{1-0.9} = \frac{20}{.1} = 200mm$$

Basado en este modelo, si el clavo fuera de más de 200 mm. de largo, no penetraría en la tabla totalmente. Si fuera menos de 200 mm. de largo el clavo se introducirá totalmente en la tabla.

Ejemplo 2.

La mayoría de los bancos acumula el interés que te paga en tus cuentas de ahorro. Esto significa que en intervalos regulares (diarios, trimestrales, anuales, etc.) suman los intereses que haz ganado por ese intervalo al capital el cual haz invertido. Durante el siguiente intervalo, ganas intereses de los intereses así como de capital original. Supón que un banco paga el 5% de intereses al año, acumulándolo anualmente. Si tu inviertes un capital de 100 pesos entonces al final de 1 año el banco te paga el 5% de 100, ó

$(0.05)(100) = 5$ pesos.

entonces el capital nuevo para el próximo período acumulado es $100+5$, o 105. Al final del segundo año el banco te paga el 5% de 105, ó

$(0.05)(105) = 5.25$ pesos.
haciendo el nuevo capital de $105 + 5.25 = 110.25$, y así sucesivamente. La cantidad de dinero que tienes en el banco en cualquier tiempo es un término en una sucesión

100, 105, 110.25, ...

la sucesión es geométrica, con una razón común de 1.05, como lo podrías descubrir si divides los términos adyacentes. Algunas factorizaciones mas inteligentes muestran lo mismo más detalladamente.
n = número de años que el dinero ha estado en el banco.
a_n = número de pesos que tienes en el banco.

Cuando hiciste el primer depósito, tiempo = 0. Por lo tanto, es conveniente empezar con n como CERO en lugar de 1 como lo haz estado haciendo hasta ahora; por lo tanto, $a_0 = 100$.

Al final de un año, cuando $n = 1$, el interés es sumado para tener el siguiente término. Por lo tanto,
$a_1 = 100 + (0.05)(100)$ sumando 5% de interés
$= 100(1 + 0.05)$
$= 100(1.05)$

Para encontrar a_2, sumas al interés del segundo año a a_1 (El capital del primer año) obteniendo
$a_2 = 100(1.05) + 0.05(100)(1.05)$
$= 100(1.05)(1 + 0.05)$
$= 100(1.05)(1.05)$
$= 100(1.05)^2$

Similarmente, $a_3 = 100(1.05)^3$, $a_4 = 100(1.05)^4$, y así sucesivamente. Ya que el exponente siempre es igual al número de término, $a_n = 100(1.05)^n$. Esta es la fórmula para el enésimo término de una sucesión geométrica con $r = 1.05$ y que el primer término igual a 100. El exponente es n en lugar de n-1 porque la sucesión empezó en el término CERO en lugar del término UNO.

Para encontrar la cantidad de dinero que tendrás después de 7 años vas a sustituir 7 por n y haz los cálculos

$a_7 = 100(1.5)^7 = 140.71$

Encontrar el tiempo en el cual la cantidad es 400 pesos; involucra encontrar el exponente n.

$400 = 100(1.05)^n$
$4 = 1.05^n$
$\log 4 = \log 1.05^n$
$\log 4 = n \log 1.05$

$$\frac{\log 4}{\log 1.05} = n$$

$$n = 28.413$$

Después de 29 años es la respuesta.

Ejemplo 3.

Supón que invertiste 100 pesos en una cuenta de ahorros que paga 5% anual, pero el interés es acumulado trimestralmente. Cuánto tendrás al final de 7 años?

Solución

n = número de trimestres que el dinero ha estado en el banco
a_n = número de pesos que tienes en el banco

El banco te pagará un cuarto de 5% de interés después de cada período acumulado, ó 1.25% (0.0125).

$$a_0 = 100$$
$$a_1 = 100(1.0125)$$
$$a_2 = 100(1.0125)^2$$
$$a_3 = 100(1.0125)^3$$
$$a_n = 100(1.0125)^n$$

La cantidad de dinero que vas a tener después de 7 años sería a_{28} porque hay 28 trimestres en 7 años. Por lo tanto,

$$a_{28} = 100(1.0125)^{28} \approx 141.60$$

Comparando esta respuesta con la del ejemplo 2, obtienes 89 centavos más en 7 años si el interés es acumulado trimestralmente.

Ejercicio 2.7

Los siguientes problemas pretende que recuerdes tus conocimientos y habilidades con sucesiones y series antes de que trabajes con problemas de modelos matemáticos.

S1. Una serie geométrica tiene $a_1 = 34$ y $r = 1.7$. Encuentra el término número 20 y la veinteava suma parcial.

S2. Una serie aritmética tiene $a_1 = 78$ y $d = 3.2$. Encuentra a_{30} y S_{30}.

S3. Una serie aritmética tiene $a_1 = 44$ y $a_3 = 66$. Encuentra a_2 y S_{100}.

S4. Una serie geométrica tiene $a_1 = 100$ y $a_2 = 80$. Encuentra el límite en el cual la suma parcial converge.

S5. Una sucesión tiene la propiedad de que cada término es 95% del término anterior $a_1 = 800$. Cuál es a_{10}? Qué tipo de sucesión es?

S6. Una sucesión tiene la propiedad de que cada término es menor por 7 al término anterior. $a_1 = 900$. *Encuentra* a_{10}. Cuál es el número del término del primer término negativo?

S7. Una serie geométrica tiene $a_1 = 12$ y $a_{10} = 120$; cuál es la razón común? 1200 es un término en esta serie? ó cuál es el número del término?

S8. Una serie aritmética tiene $a_1 = 17$ y $a_{10} = 27$. Cuál es a_{20}?

S9. Cuáles son los siguientes dos términos de la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, Es la sucesión aritmética o geométrica?

S10. Un factorial es un producto parcial de los términos de una sucesión. Encuentra el décimo producto parcial de la sucesión de números.

1. Problema de formación de músculos.

Supón que empezaste un programa de ejercicios para formar (construir) tus bíceps. En el primer día tus bíceps aumentan 3 mm. La cantidad que aumentan en cada uno de los días siguientes es 0.95 veces la cantidad que aumentó el día anterior.

a. Cuánto aumentaron tus bíceps el décimo día.
b. Cuántos milímetros en total han aumentado tus bíceps después de 10 días.
c. Si tú continuaras con el programa de ejercicio por mucho tiempo, qué número da el total de aumento de bíceps.

2. Problema de George Washington.

Recientemente, Ana Ward descubrió que es un pariente lejano de George Washington. Cuando él murió en 1799 él dejó 1000 dólares en su testamento, los cuales son de ella ahora. El dinero ha estado en una cuenta de ahorros en banco, donde ha estado ganando interés del 5% por año, acumulándolo anualmente. Cuánto dinero tiene Ana este año? Porqué supones que hay leyes que limitan la responsabilidad para pagar intereses de una cuenta de ahorros sin movimiento?

3. Problema de la Isla.

En 1626, el Presidente de una compañía, compró una isla a los nativos por 24 pesos en mercancía (collares, pieles, etc.). Supón que los 24 pesos obtenidos por los nativos se invirtieron en una cuenta de ahorros que paga el 6% por año, acumulandolo anualmente. Cuánto tuvieran depositado en este año.

4. Problema de depreciación en línea recta.

Suponiendo que el valor catastral del precio original de una casa decrese por un número constante de pesos cada año. Por ejemplo:
una casa se deprecia por $\frac{1}{40}$ de su valor original cada año.

a. Si tu casa originalmente valía 84,000 pesos. Cuántos pesos se depreciaría cada año.

b. Qué precio tiene tu casa después de 0, 1, 2, 3 años.

c. Estos valores forman una sucesión aritmética ó geométrica? Cuál es la diferencia común ó la razón común.

d. Calcula el valor de tu casa después de 27 años.

e. De acuerdo con este modelo en que momento tu casa no tiene valor. Explícalo.

f. Dibuja la gráfica de esta sucesión usando los resultados de los incisos b, d, y e. Porqué supones que el valor catastral nombra este modelo DEPRECIACION EN LINEA RECTA.

5. Problema de las ramas de un árbol.

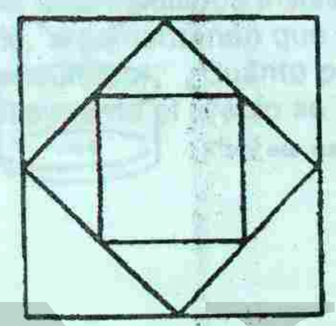
Las ramas de un pino crecen en capas (ver el dibujo). Cuando la luz solar pega en la capa de arriba, una cierta fracción de esta luz es absorbida por estas ramas y el resto pasa a la siguiente capa. El 100% de la luz solar llega a la capa superior. Supón que tu encuentras que el 45% de la luz solar llega a la tierra después de pasar las 5 capas de ramas de un árbol en particular.

Dibujo

a. ¿Qué fracción de la luz que llega a una capa pasa a la siguiente?
b. Encuentra el porcentaje de la luz original que llega a la segunda, tercera, cuarta y quinta capa.
c. Si una capa de ramas obtiene menos del 20% de la luz solar original las ramas de esa capa morirán y se caerán. ¿Cuál es el número máximo de capas de ramas que esperas encontrar en ese árbol?

6. Problema de cuadrados inscritos

Un conjunto de cuadrados inscritos es dibujado adentro de un cuadrado tocando los puntos medios de las longitudes unitarias del cuadrado que precede.



Dibujo

a. Muestra que las longitudes de los lados de los cuadrados forman una sucesión geométrica.
b. Muestra que los perímetros de los cuadrados forman una sucesión geométrica.
c. Muestra que las áreas de los cuadrados forman una sucesión geométrica.
d. Encuentra el área del décimo cuadrado.
e. Encuentra el perímetro del décimo cuadrado.
f. Encuentra la suma de las áreas de los primeros 10 cuadrados
g. Encuentra la suma de los perímetros de los primeros 10 cuadrados.
h. Muestra que la suma de las áreas de los cuadrados se aproxima a un número finito, y di cuál es este número.
i. La suma de los perímetros se aproxima a un número finito. Explícalo.

7. Problema de la brocha de pintar

Cuando tu limpias una brocha de pintar la cantidad de pintura que queda en la brocha depende del número de veces que la enjuagas con tinher y en el volumen de tinher que uses para cada enjuagada. Asume que la brocha retiene 2 cm^3 del fluido después de sacudirla.

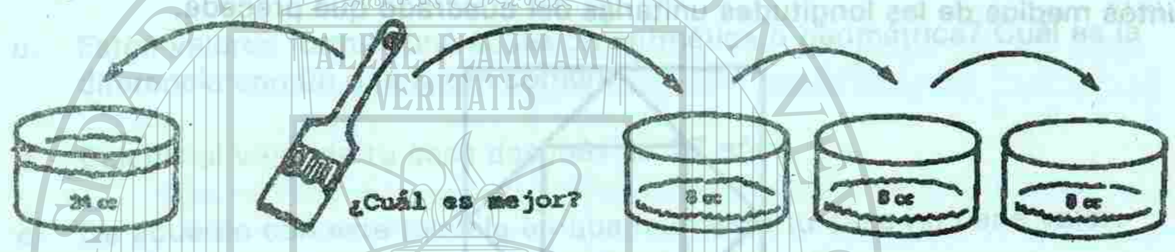
a. Antes de la primera enjuagada, los 2cm^3 que retiene la brocha es pintura pura. Si $8cm^3$ de tinher es usado en la enjuagada, el volumen total de pintura y tinher que mezclas es $2+8=10cm^3$. ¿Cuál es el porcentaje de la pintura en esta mezcla?

b. Cuando tu sacudes la brocha, solo 2 cm^3 de la mezcla quedan en ella. ¿Qué porcentaje de la pintura original queda en ella?

c. Si tu enjuagas de nuevo con 8 cm^3 de tinher, ¿Qué porcentaje de pintura queda en la brocha después de la segunda enjuagada? ¿Después de la tercera enjuagada?

d. ¿Qué porcentaje de la pintura quedaría si usas 24 cm^3 para enjuagarla en lugar de enjuagarla 3 veces usando 8 cm^3 de tinher?

e. ¿Cuál es la forma más económica de usar los 24 cm^3 de tinher?



Dibujo

8. Problema del tío rico

Claudia I. tiene un tío rico quien desea darle 1000 pesos en su cumpleaños números 21. Claudia debe calcular cuánto dinero tiene que invertir su tío ahora en una cuenta de ahorros para tener los 1000 pesos en su cumpleaños, Claudia tiene 16 años y 7 meses. La cuenta de ahorros paga el 6.2% de interés por año, acumulándolo trimestralmente. Ya que Claudia ha estudiado sucesiones geométricas se da cuenta que el valor de 1000 pesos si es dejado en la cuenta de ahorros después de su cumpleaños número 21 va a ser un término en una sucesión geométrica, con una variable independiente P que es el número de trimestres que el dinero ha estado en la cuenta. El valor de 1000 pesos antes de su cumpleaños va a ser dado en la misma sucesión, pero con el apropiado valor negativo sustituido por p. ¿Cuánto dinero tiene que decirle Claudia a su tío que invierta?

9. Problema de la fórmula general para sucesións aritméticas

Prueba que el enésimo término de una sucesión aritmética es igual al *k*ésimo término más $(n\text{-}k)$ diferencia común. Esto $a_n = a_k + (n\text{-}k)d$

10. Problema del intermediario.

Cuando tu compras comida, ropa, etc. en una tienda, el objeto pasa por muchas manos antes de llegar a ti. Por ejemplo el granjero se lo vende a un trailero y este

a un mayorista el cual lo vende a una empacadora y de esta pasa a una distribuidora y de ahí va a las tiendas y por último a ti. Cada persona entre tu y el granjero es llamada intermediario. Supón que el granjero gasta 50 centavos en la producción de una libra de carne.

a. Si el granjero y cada uno de los cinco intermediarios sacan un 30% de ganancia de lo que invirtieron por la libra de carne ¿Cuánto tienes que pagar tu "consumidor" por la carne?

b. ¿Cuántos centavos de ganancia hace el granjero? ¿Cuántos centavos de ganancia hacen los cinco intermediarios?

c. El granjero y cada uno de los intermediarios insisten en que su ganancia deber ser aumentada al 40%, argumentando que el 10% extra en el precio no va a afectar mucho al consumidor. ¿Cuánto pagarías por la libra de carne bajo estas condiciones? ¿Realmente el precio se incrementa solo en un 10%?

2.8 Factoriales

En esta seccíon y en el capítulo siguiente seguirás estudiando series y otras expresiones que contienen productos de enteros consecutivos.

Definición

La expresión n! (se lee n factorial) significa el producto de los primeros n enteros consecutivos positivos.

Por ejemplo, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$ y $6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 720$. Hay una propiedad importante de los factoriales que se deduce directamente de la definición. Por ejemplo

$5! = 5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$
$5! = 5\cdot(4\cdot3\cdot2\cdot1)$
$5! = 5\cdot4!$

En general:

$$n! = n(n-1)!$$

Esta propiedad dice que puedes obtener el siguiente factorial multiplicando el factorial previo por n. El inverso de este patrón se puede obtener dividiendo el factorial previo.

$4! = 24$	$\div\ 4$
$3! = 6$	$\div\ 3$
$2! = 2$	$\div\ 2$
$1! = 1$	$\div\ 1$
$0! = ?$	

Si el patrón continua hacia atrás 0! debe ser igual a $1 \div 1$, lo cual iguala a 1. Este hecho nos conduce a una definición de 0!.

Definición

Cero factorial	$0! = 1$

Objetivo

Ser capaces de usar la definición de factoriales para simplificar expresiones que contengan factoriales, o para expresar en forma factorial expresiones que contengan productos de enteros consecutivos.

Fracciones las cuales tienen factoriales en el numerador y denominador se pueden simplificar cancelando factores iguales. Por ejemplo:

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= 10\cdot 9\cdot 8$$

$$= 720$$

Recíprocamente, el producto de enteros consecutivos puede ser expresado en forma compacta usando notación factorial. Por ejemplo,

$$9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \qquad \text{Propiedad multuplicativa del uno}$$

$$= \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} \qquad \text{Propiedad multiplicativa de fracciones}$$

$$= \frac{9!}{5!} \qquad \text{Definición de factorial}$$

Una vez entendido este proceso, se puede hacer mentalmente en un solo paso.

Ejercicio 2.8

Para los problemas del 1 al 8 simplifica la expresión dada.

1. $3!\cdot 4!$ 2. $\frac{8!}{4!}$ 3. $\frac{7!}{0!}$ 4. $\frac{10!}{5!3!}$

5. $\frac{5!}{2!3!}$ 6. $(3!)!$ 7. $\frac{(n-1)!}{n!}$ 8. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

Para los problemas del 9 al 13 escribe la expresión como una razón de factoriales.

9. $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4$

10. $20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15$

11. $20\cdot 19\cdot 18\cdot 12\cdot 11\cdot 10$

12. $\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25}{6!}$

13. $\frac{43\cdot 42\cdot 41\cdot 40}{4!}$

14. Para que valores de n, n! será divisible por 9

15. 100! termina con una hilera de ceros. Cuántos ceros hay al final de 100!

Para los problemas del 16 al 20 evalúa la suma dada.

16. $\sum_{k=0}^{4} k!$ 17. $\sum_{k=0}^{4} \frac{(k+1)!}{k!}$ 18. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(k-1)!}{k!}$

19. $\sum_{k=1}^{5} \frac{(k+1)!}{(k-1)!}$ 20. $\sum_{k=3}^{6} 3k!$

21. tu haz estudiado funciones cuadráticas, exponenciales y ahora factoriales, cada una de los cuales se hace mucho muy grande cuando la variable independiente se incrementa. Haz una tabla de n^2, 2^n y n! para los enteros $n=0$ hasta $n=10$. Di cual de estas funciones crece más rápido.

22. La serie especificada por $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ tiene sumas parciales las cuales se acercan a un número interesante cuando n se hace muy grande.

a. Muestra que el noveno término de la serie (i.e., $k=8$) es tan pequeño que no contribuye en nada a los primeros cuantro lugares decimales.

b. Encuentra la aproximación del cuarto lugar decimal para S_7. (Este número es llamado "e", y es usado como base de los logaritmos naturales).

2.9 Introducción a las series binominales.

Tu recuerdas como encontrar el cuadrado de un binomio. Por ejemplo,
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ahora el desarrollo de un binomio al cubo lo puedes hacer usando los resultados anteriores. Tu obtienes:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2\\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

La respuesta es una serie de términos. **Es llamada serie binomial porque procede de la expanción de un binomio elevado a una potencia. Hay varios patrones los cuales se muestran en estas series. Si tu sabes los patrones, vas a ser capaz de elevar un binomio a una potencia mentalmente en un solo paso.** En esta sección vas a tratar de descubrir algunos de estos patrones.

Objetivo

Descubrir patrones que siguen los signos, exponentes y coeficientes en una serie binominal.

El siguiente ejercicio esta diseñado para conducirte a estos descubrimientos.

Ejercicio 2.9

1. Desarrolla el binomio $(a+b)^4$ en una serie binomial. Esto es más fácil de hacerse si observas que $(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$, y usando las series de $(a+b)^3$ que ya viste.

2. Desarrolla $(a+b)^5$ como una serie binomial usando los resultados del problema 1.

3. Si tu desarrollas $(a+b)^6$ obtendrías
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

Observando los patrones en esta serie binomial y tus respuestas en los problemas 1 y 2, di:
a. El patrón seguido para la potencia de a.
b. El patrón seguido para la potencia de b.
c. El grado de cada término.
d. El número de términos que hay en la serie.
e. Cualquier patrón que tu veas en los coeficientes cuando veas la serie al principio y al final.

4. El patrón seguido por las potencias de a y b es fácil de ver. El patrón de los coeficientes es más difícil. Acomodando los coeficientes para varias potencias de (a+b) en un triángulo un patrón muestra que

$(a+b)^0$ 1
$(a+b)^1$ 1 1
$(a+b)^2$ 1 2 1
$(a+b)^3$ 1 3 3 1
$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1
$(a+b)^5$ . . . 1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6$ . . 1 6 15 20 15 6 1

Este triángulo es llamado el triángulo de Pascal.

Di que patrón relaciona a los números de una fila del triángulo de Pascal con los números de la fila anterior. Después demuestra que entendiste el patrón encontrando los coeficientes de $(a+b)^7$.

5. Supón que alguien te dice que los coeficientes de $(a+b)^9$ son 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1. Usa lo que haz descubierto para desarrollar $(a+b)^{10}$ como una serie binomial en un paso.

6. Supón que deseas desarrollar un binomio con un signo (-) entre los términos, como $(x-y)^6$. Observa que $(x-y)^6$ es igual a $[x+(-y)]^6$. Después usa el patrón para las series binomiales de $(a+b)^6$ del problema 3, para desarrollar $(x-y)^6$ como una serie binomial. Cual es la única diferencia en la serie cuando el signo del binomio es negativo en lugar de positivo.

2.10 La fórmula binomial

En el ejercicio 2.9 desarrollaste binomios con diferentes exponentes. Por ejemplo:
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^2+6ab^5+b^6$.

Examinando estas series binomiales, puedes encontrar difernetes patrones. Para las series como $(a+b)^n$ en su desarrollo observamos lo siguiente:
1. El desarrollo consta de $n+1$ términos
2. El grado de cada término es n
3. La potencia de a empieza con a^n y el exponente disminuye en uno en cada término, la potencia de b empieza con b^0 y se incrementa el exponente de uno en uno en cada término.
4. Los coeficientes son simétricos o sea primero igual al último, segundo con penúltimo, tercero con antepenúltimo y asi sucesivamente.
5. Los coeficientes pueden ser calculados mediante la fila anterior del triángulo de Pascal sumando los pares de coeficientes adyacentes de la fila anterior.

En esta sección aprenderás como calcular cualquier coeficiente en cualquier serie binomial sin necesidad de conocer la fila anterior de triángulo de Pascal.

Objetivos:

1. Dado un binomio elevado a la "n" desarrollarlo como una serie binomial en un paso.
2. Dado un binomio de la forma $(a+b)^n$ encuentra el término k o encuentra el término que contiene b^r, donde k y r son enteros de 0 hasta n.

Hay un patrón para los coeficientes el cual es difícil de descubrir pero es fácil de recordar y usar una vez que lo hayas aprendido.

Considera la serie binomial

$$(a+b)^8 = \underbrace{a^8}_{1} + \underbrace{8a^7b^1}_{2} + \underbrace{28a^6b^2}_{3} + \underbrace{56a^5b^3}_{4} + \underbrace{70a^4b^4}_{5} + \underbrace{56a^3b^5}_{6} + \underbrace{28a^2b^6}_{7} + \underbrace{8a^1b^7}_{8} + \underbrace{b^8}_{9}$$

El número de los círculos es el número de los términos. Si multiplicas el coeficiente de un término por el exponente de "a" sobre el número de términos, obtienes el coeficiente del siguiente término. Por ejemplo:

$$\frac{8\ (7)}{2} = 28$$

$$\frac{28\,(6)}{3} = 56$$

$$\frac{\underbrace{56}_{\text{Coeficiente}}(\overbrace{5}^{\text{Exponente de a}})}{\underbrace{4}_{\text{Número de términos}}} = \overbrace{70}^{\text{Siguiente coeficiente}}$$

En general:

$$\frac{(coeficiente)\,(exponente\ de\ a)}{número\ de\ términos} = siguiente\ coeficiente$$

Un patrón más interesante muestra que si no simplificas los coeficientes cuando los calculas, por ejemplo, el primer término de $(a+b)^8$ es:

① a^8

Usando el patrón, el segundo término es:

② $\frac{8}{1}a^7b^1$

Multiplicando el coeficiente $\frac{8}{1}$, por el exponente de "a" sobre el número de términos, $\frac{7}{2}$, te permite escribir el término 3

③ $\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}a^6b^2$

El cuarto y quinto término pueden ser calculados de la misma manera

④ $\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{3}a^5b^3$

⑤ $\frac{8}{1}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{5}{4}a^4b^4$

Los coeficientes pueden ser escritos como factoriales. Por ejemplo, el coeficiente del cuarto término es

$$\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{8!}{3!5!}$$

Los tres números 8,3,5 muestran como los exponentes estan en varios lugares. Como se muestra a continuación

$$(a+b)^8 = \ldots\ldots + \frac{8!}{3!5!}a^5b^3$$

El 8 en el numerador es el exponente *n*, al cual (a+b) es desarrollado. El 3 y el 5 en el denominador son los exponentes de a y b en el término que estas buscando.

Con este conocimiento tu puedes lograr el objetivo de esta sección.

Ejemplo 1.
Encuentra el término de $(a-b)^{17}$ que contenga b^{11}

Solución
1. La potencia de a debe ser a^6, ya que los exponentes de a y b suman 17.

2. Por lo tanto, el término es

$\frac{17!}{11!6!}a^{6}(-b)^{11}$, lo cual es igual a

$-\frac{17!}{11!6!}a^{6}b^{11}$ ya que -b es elevada a un exponente impar

3. Efectuando operaciones

$-\frac{17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^{6}b^{11}=-12376a^{6}b^{11}$

Ejemplo 2
Encuentra el octavo término de $(a+b)^{12}$

Solución
1. El octavo término es el que tiene b^7, ya que el primer término tiene b^0
2. Por lo tanto, el octavo término tiene $a^5\cdot b^7$ ya que la suma de los exponentes debe sumar 12.
3. El término es entonces

$\frac{12!}{7!5!}a^{5}b^{7}$, lo cual es igual a:

$792a^5b^7$

Ejemplo 3
Encuentra el quinto término de $(r^3-2p)^{10}$

Solución
1. El primero y segundo término del binomio corresponden a: r^3 y $-2p$
2. El quinto término va a tener $(-2p)^4$
3. La potencia de r^3 será $(r^3)^6$, ya que los exponentes r^3 y $(-2p)$ suman 10.
4. El término es por lo tanto:

$\frac{10!}{4!6!}(r^{3})^{6}(-2p)^{4}=$

5. Simplificando la fracción, tenemos:

$=210r^{18}(16p^{4})$

$=3360r^{18}p^{4}$

Nota que los exponentes no suman 10 después de que la simplificación es hecha.

Ejemplo 4
Encuentra el término que contenga b^r en $(a+b)^n$

Solución

$$\boxed{\text{Término} = \frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}\cdot b^{r}}$$

Esta fórmula es llamada fórmula binomial ya que es usada para calcular términos de las series binomiales.

Ejemplo 5
Desarrolla $(r^2-3p)^7$ como una serie binomial. Esto es más fácil de lograr usando el patrón para encontrar los coeficientes.

$$(r^2-3p)^7 = \underset{1}{(r^2)^7} + \underset{2}{7(r^2)^6(-3p)} + \underset{3}{21(r^2)^5(-3p)^2} + \underset{4}{35(r^2)^4(-3p)^3} + \underset{5}{35(r^2)^3(-3p)^4} + \underset{6}{21(r^2)^2(-3p)^5}$$
$$+\underset{7}{7(r^2)(-3p)^6} + \underset{8}{(-3p)^7}$$

Efectuando las operaciones y simplificando obtenemos:
$(r^2-3p)^7 = r^{14}-21r^{12}p+189r^{10}p^2-945r^8p^3+2835r^6p^4-5103r^4p^5+5103r^2p^6-2187p^7$

Nota que después de la simplificación los patrones de los coeficientes y exponentes se pierden.

Ejercicio 2.10

De los problemas del 1 al 10
a. Desarrolla el binomio dado como serie binomial.
b. Simplifica las series resultantes lo más que puedas.

1. $(X+Y)^5$	2. $(P-m)^7$	3. $(a+2)^4$
4. $(2x-3)^5$	5. $(x^2+y^3)^6$	6. $(2a-b)^3$
7. $(x+x^{-1})^8$	8. $(x^{½}-x^{-½})^4$	9. $(1+i)^6$
10. $(1-i)^5$		

De los problemas de 11 al 20, encuentra el término con la potencia especificada en el desarrollo del binomio dado. Puedes dejar el coeficiente en forma factorial a menos que haya otra instrucción.

11. $(x+y)^8$, y^5	12. $(r+s)^{13}$, s^7
13. $(p-j)^{15}$, j^{11}	14. $(a-b)^{21}$, b^{16}
15. $(e-f)^{38}$, f^{23}	16. $(x+y)^{73}$, x^{48}

17. $(x^3+y^2)^{55}$, y^{12} 18. $(x^2-9)^{33}$, x^{24}
19. $(3x+2y)^8$, y^5 20. $(x+y)^{100}$, y^{50}

De los problemas del 21 al 27 encuentra el término especificado. Puedes dejar el coeficiente en forma factorial a menos que haya otra instrucción

21. $(j+k)^{34}$	Término 17
22. $(r-q)^{15}$	Término 12
23. $(a-b)^{17}$	Término 8
24. $(x-y)^{19}$	Término 20
25. $(3x^2-2y^3)^7$	Término 4
26. $(2x^2-1)^8$	Término 6
27. $(x^3-5)^6$	Término 3

28. Supón que $(r+s)$ es elevado a una potencia de un entero positivo, y un término de la serie binomial es $27132r^{13}\cdot s^6$
   a. ¿Qué término es?
   b. ¿A qué potencia fué elevado $(r+s)$?
   c. ¿Cuál es el siguiente término? Simplifica el coeficiente.
   d. ¿Cuántos términos tiene la serie?

29. Encuentra la aproximación decimal de $(1.02)^{10}$ escribiéndolo como $(1+0.02)^{10}$ y calculando los primeros 5 términos de la serie binomial resultante.

CAPITULO 3

PROBABILIDAD Y ESTADISTICA

El estudio del cálculo de probabilidades comenzó hace alrededor de tres siglos, considerándose únicamente su aplicación a los juegos de azar. Posteriormente, fue adquiriendo importancia el estudio de la teoría matemática de la probabilidad, por su aplicación en una amplia gama de problemas del mundo real. Actualmente, la probabilidad es utilizada en estudios actuariales sobre fondos de pensiones y jubilaciones, así como, en todo tipo de coberturas de seguros. Otras aplicaciones del cálculo de probabilidades se dan en el estudio de la física moderna, en el ajuste de curvas, en control de calidad y en la teoría de muestreo; todos estos tópicos de gran relevancia en el mundo real actual. Una utilización del calculo probabilístico que merece, por su importancia, un tratamiento especial, es la que se le da en el estudio de la estadística, la cual tiene aplicación en un sinnúmero de campos, como lo son, la biología, economía, psicología, contaduría, ciencias sociales y humanísticas, en general.

La palabra estadística trae a la mente de la mayoría de las personas la idea de un grupo de datos numéricos. Para las personas que se dedican a la estadística esta palabra significa el análisis de dichos datos y la obtención de conclusiones lógicas a partir de los mismos. En este sentido, la ciencia de la estadística es una de las ramas más importantes de las matemáticas aplicadas.

El análisis estadístico nació en Londres, en donde John Graunt publicó en 1662 un libro extraordinario, Observaciones Naturales y Políticas sobre los Registros de Mortalidad. Después de este sencillo inicio muchos matemáticos, entre éstos algunos muy famosos como Laplace (1749-1827) y Gauss (1777-1855), hicieron importantes contribuciones a las ideas básicas de la estadística.

3.1 Probabilidad

Objetivo:

Definir probabilidad y comprender el significado de términos usados para describirla, considerando el juego con un par de dados.

En el quehacer cotidiano es común escuchar frases como "es probable que mañana vaya al cine", "probablemente pase matemáticas"; estas aseveraciones sólo indican que puede ocurrir la acción mencionada. Matemáticamente, se va más allá de la posible ocurrencia del evento señalado. Para ello, se asocia un número a la palabra "probabilidad", el cual indique la esperanza de que ocurra el evento al que se hace mención. Por ejemplo; "si se lanza una moneda, hay 1/2 de probabilidad de que caiga sello"; esta aseveración se puede hacer, sin tener conocimiento alguno del cálculo probabilístico. ¿Por qué es fácil comprender que la probabilidad de que caiga sello al lanzar la moneda es 1/2?, porque se razona intuitivamente, considerando que hay dos manera posibles de que caiga la moneda y hay una manera posible de que caiga "sello". Otro ejemplo un poco más complicado sería la consideración de la siguiente aseveración; "En el lanzamiento de dos dados, uno blanco y uno negro, hay 3/36 de probabilidad de que la suma de los puntos de las caras que caen hacia arriba de los dos dados, sea 4. Esto puede ser visualizado considerando la siguiente figura, en la que muestran todos los posibles resultados.

Como se puede ver, la lanzar los dos dados, hay 36 posibles resultados, en 3 de los cuales la suma de los puntos es de 4. También en este caso, razonado intuitivamente podríamos pensar en que dicha probabilidad es de 3/36.

Aprovecharemos este segundo ejemplo, para señalar el significado que se le da a algunas palabras utilizadas con frecuencia en el estudio de la probabilidad.

- A la acción de lanzar los dos dados se le llama "experimento aleatorio", lo cual significa que el resultado es al azar.

- Cada uno de los 36 resultados posibles se le denomina "suceso".

- Un conjunto de sucesos, por ejemplo, aquellos en los cuales la suma de los puntos es 4, es llamado "evento". En este ejemplo, dicho evento es el conjunto de sucesos .

- El conjunto de todos los sucesos es llamado "espacio muestral", en este caso, los 36 resultados posibles forman el espacio muestral.

En función de este razonamiento lógico, es como se define la probabilidad de que un evento ocurra.

Definición

La probabilidad de que ocurra un cierto evento está dada por la razón del número de formas posibles de que ocurra el evento entre el número total de formas de que ocurra y no ocurra dicho evento.

Dicho de otra manera, si un evento puede ocurrir en *"a"* formas y no ocurrir en *"b"* formas, la probabilidad *"P"* de que el evento ocurra se define como la razón:

(1) $$p=\frac{a}{a+b}$$

Donde cada una de las *"a+b"* formas posibles, son igualmente probables.

De la misma forma, se puede definir la probabilidad *"q"* de que el evento no ocurra, es decir:

(2) $$q=\frac{b}{a+b}$$

De las ecuaciones (1) y (2), se puede decir que, en general, "la probabilidad de que ocurra un evento es la razón del número de casos favorables al número de casos posibles, siendo todos ellos igualmente probables".

También, de dichas ecuaciones se puede ver que la suma de las probabilidades de ocurrencia y no ocurrencia de un mismo evento, es la unidad, o sea;

(3) $$p+q=1$$

De esta ecuación (3), se puede concluir que:

(4) $p=1-q$, y también que

(5) $q=1-p$

Estas últimas ecuaciones, lo que indican es que "si la probabilidad de que un evento no ocurra es *"q"*, entonces la probabilidad de que ocurra es *"1-q"* y "si la probabilidad de que un evento ocurra es *"P"*, entonces la probabilidad de que no ocurra es *"1-P"*.

Otras conclusiones que se pueden hacer de las ecuaciones (3), (4) ó (5) son los casos especiales cuando $q=0$ y cuando $P=0$; en ellas si $q=0$, entonces $P=1$ y si $P=0$, entonces $q=1$.

Ejercicio 3.1

1. Un par de dados, uno blanco y uno negro, es lanzado. Encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
   a) El total sea 10
   b) El total sea al menos 10
   c) El total sea menor que 10
   d) El total sea mayor que 10
   e) El total sea 7
   f) El total es 2
   g) El total esté entre 3 y 7, inclusive
   h) El total esté entre 3 y 7
   i) El total esté entre 2 y 12, inclusive
   j) El total sea 13
   k) Los números sean 2 y 5
   l) El negro caiga en 2 y el blanco caiga en 5
   m) El negro caiga en 2 o el blanco caiga en 5

2. Se saca una carta de un mazo normal de 52 cartas.
   a) ¿Qué nombre se le da al hecho de sacar la carta?
   b) ¿Cuántos sucesos hay en el espacio muestra?
   c) ¿Cuántos sucesos hay en el evento: "la carta sea J, Q o R"
   d) Calcular la probabilidad de que la carta sea "J","Q" o "R"
   e) Calcular la probabilidad de que la carta sea negra
   f) Calcular la probabilidad de que la carta sea AS.
   g) Calcular la probabilidad de que la carta esté entre 3 y 7, inclusive.
   h) Calcular la probabilidad de que la carta sea el ocho de corazones
   i) Calcular la probabilidad de que la carta pertenezca al mazo
   j) Calcular la probabilidad de que la carta sea una "J".

3. Tres monedas de 1, 5 y 10 centavos son lanzadas al mismo tiempo. Cada moneda puede caer en "cara" o "sello".
   a) ¿Que nombre se le da al hecho de lanzar las monedas?
   b) Enlistar los ocho sucesos posibles del espacio muestra.
   c) ¿Cuántos sucesos hay en el evento:"Exactamente dos de las monedas caen cara"?
   d) Calcular $p(ccs)$
   e) Calcular p (exactamente dos caras)
   f) Calcular p (al menos dos caras)
   g) Calcular p (las de 5 y 1 sean sello)
   h) Calcular p (la de 1 ó la de 5 sean sello)
   i) Calcular p (ninguna sea sello)
   j) Calcular p (o, 1, 2, ó 3 caras)
   k) Calcular p (4 sean caras)

3.2 Dos principios de conteo

Objetivo:

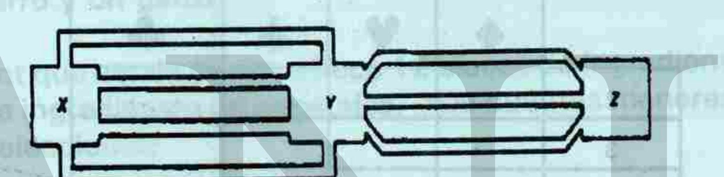
Utilizar los principios de conteo para determinar el número de sucesos diferentes de un evento.

En los ejemplos vistos hasta ahora, se ha podido enlistar todos los sucesos posibles en un evento, pero hay otros casos en los cuales no se pueden contar todas las maneras posibles para que suceda un evento; para estos últimos, se considerarán dos principios fundamentales de conteo en probabilidad, los cuales pueden ser enunciados de la siguiente manea: si $n(A)$ y $n(B)$ son los números de formas en que pueden ocurrir los eventos A y B, respectivamente, entonces:

i) n (A y luego B) $=$ $n(A) \times n(B)$

ii) n (A o B) $=$ $n(A) + n(B)$

Un ejemplo típico en el cual se pueden aplicar estos dos principios es el de un ratón en un laberinto, como se muestra en la siguiente figura



i) Si el ratón está en el cuarto "x", para llegar al cuarto "z", tiene 12 caminos posibles, ya que tiene 4 formas de llegar al cuarto "y", y por cada una de estas tiene 3 formas de llegar al cuarto "z", es decir:
n(y y luego z) $= n(y) \times n(z)$

ii) Si el ratón está en el cuarto "y", tiene cuatro caminos posibles para llegar al cuarto "x" y 3 caminos posibles para llegar al cuarto "z", entonces, para llegar del cuarto "y", al cuarto "z", tiene siete maneras posibles, esto es:
n(y o z) $= n(y) + n(z)$

Eventos mutuamente no excluyentes

Para determinar el número de formas que un evento "E_1", o un evento "E_2" pueden ocurrir, cuando dichos eventos son no excluyentes, se debe considerar la suma de las formas de que suceda el evento "E_1" y de que suceda el evento "E_2" y a esta suma se le deberá restar el número de formas de que sucedan simultáneamente los dos eventos, es decir:

$n(E_1 \text{ o } E_2)=n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \text{ y } E_2)$

Lo anterior se ejemplificará con el siguiente problema:

¿De cuántas formas se podrá seleccionar una carta que sea trébol o una carta que sea del jocker al rey, de una baraja inglesa normal?

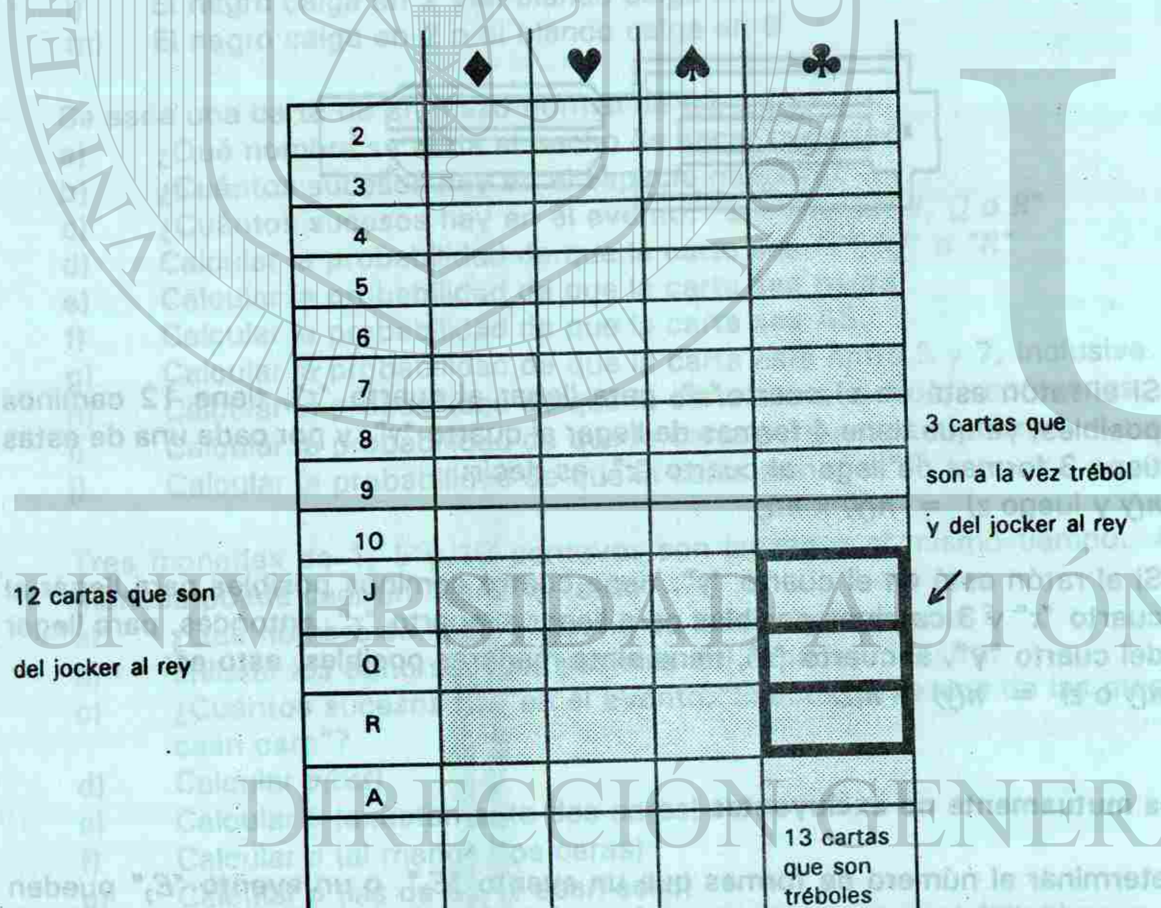
Sean, $n(E_1)$ el número de formas como se puede escoger una carta que sea trébol, $n(E_2)$ el número de formas como se puede escoger una carta del jocker al rey y $n(E_1 \text{ y } E_2)$ el número de formas de escoger una carta que a la vez sea trébol y sea del jocker al rey, entonces:

$n(E_1 \text{ o } E_2)=n(E_1) + n(E_2) - n(E_1 \text{ y } E_2)$

En este caso.

$n(E_1 \text{ o} E_2) = 13+12-3=22$

Lo cual puede ser visualizado en la siguiente figura:



Ejercicio 3.2

1. Adrián tiene 15 pantalones y 23 camisas. ¿De cuántas maneras diferentes podrá Adrián seleccionar una combinación de pantalón y camisa?

2. Patricia tiene 20 vestidos y 17 juegos de ropa deportiva de pantalón y camiseta. ¿De cuántas maneras diferentes podrá Patricia seleccionar un vestido o un juego de ropa deportiva?

3. Un agente de ventas tiene 7 clientes en Guadalajara y 13 clientes en Mazatlán. ¿De cuántas maneras diferentes podrá el agente telefonear?

   a) A un cliente de Guadalajara y luego a un cliente de Mazatlán?
   b) A un cliente de Guadalajara o a un cliente de Mazatlán?

4. Tomy va a una tienda que vende animales. Su hay 37 perros y 15 gatos, ¿De cuántas maneras diferentes podrá seleccionar:

   a) Un perro o un gato?
   b) Un perro y un gato?

5. Un restaurant que vende pizzas ofrece 12 clases de ingredientes de carnes frías y 5 clases de ingredientes de vegetales. ¿De cuántas maneras diferentes podrá un cliente seleccionar:

   a) Una pizza de carnes frías o una de vegetales
   b) Una pizza de carnes frías y una de vegetales

6. En un grupo de matemáticas de una Preparatoria de la UANL hay 13 alumnas y 11 alumnos. ¿De cuántas maneras diferentes podrá el profesor seleccionar:

   a) Una alumna y un alumno para encargar una tarea?
   b) Una alumna o un alumno para encargar una tarea

7. En un videoclub hay 105 películas de acción y 86 de misterio, ¿De cuántas maneras diferentes podrá un cliente seleccionar:

   a) Una película de acción o una de misterio?
   b) Una película de acción y una de misterio?
   c) Una película de misterio y luego otra de misterio?

8. El menú de un restaurant tiene 7 clases de ensaladas, 11 tipos de guisados y 9 clases de postres. ¿De cuántas maneras diferentes podrá un cliente seleccionar un platillo que incluya una ensalada, un guisado y un postre?

9. Utilizando las letras de la palabra "AURELIO". ¿De cuántas maneras se podrá seleccionar:

   a) Una vocal o una consonante?
   b) Una vocal y una consonante?
   c) ¿Cuántas palabras diferentes de tres letras se pueden formar, usando cada letra a lo mas una vez en cada palabra?

10. Las placas que usan los automóviles tienen 7 caracteres, de ellos, los primeros 3 son letras y los últimos 4 son números. Si pudieran formarse las placas con letras en los primeros 2 lugares y números en los últimos 5 lugares, ¿De cual de las dos formas podrían formarse mas placas?

11. Hay 20 muchachas en el equipo de basquetbol diecisiete tienen más de 16 años, doce miden más de 1.70m de altura y nueve están sobre los 16 años, y sobre el 1.70m de estatura.
    a) ¿Cuántas de las muchachas están sobre los 16 años o sobre los 1.70m de altura?

12. Investigadores descubrieron 37 técnicas usadas para trabajar en problemas de matemáticas y 29 técnicas usadas para trabajar problemas de física, 21 de las técnicas son usadas en ambos campos, si una alumna estudia matemáticas y física , ¿cuántas diferentes técnicas deberán aprender?

3.3 Permutaciones

Objetivos:

Resolver problemas de probabilidad que involucren permutaciones.

En el análisis de problemas en los cuales interesa hacer una selección, de un aparte o de todos los objetos, de una colección dada, se presentan dos casos posibles: 1) que la selección se haga mediante un orden definido y 2) que la selección sea hecha sin interesar el orden como se realice.

Para el estudio del primero de estos casos, definiremos lo que se entiende por una permutación.

Definición

Una permutación es un arreglo en un orden definido de una parte o de todos los elementos de un conjunto dado.

Ejemplo 1
¿Cuántas palabras diferentes de 4 letras se pueden formar con las letras *a*, *b*, *c*, *d*?

Se consideraran los cuatro lugares que deberán ocupar las letras.

____ ____ ____ ____

La primera posición podrá ocuparla cualquiera de las cuatro letras, la segunda posición solamente podrá ocuparla alguna de las tres letras restantes, la tercera posición solo podrá ser ocupada pro cualquiera de las dos letras que restan y la cuarta posición la podrá ocupar solamente la última letra que queda.

Lo anterior, se puede visualizar de la siguiente manera:

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acdb	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

Como se puede ver, son en total 24 palabras diferentes que se pueden formar con las letras *a,b,c,d*.

Ejemplo 2
¿Cuántas palabras diferentes de 2 letras se pueden formar con las letras *a,b,c,d*?

En este caso, como son solamente 2 lugares los que serán ocupados, el número de letras diferentes que se pueden formar es 12, ya que la primera posición la podrá ocupar cualquiera de las cuatro letras y la segunda posición podrá ser ocupada por cualquiera de las tres letras restantes.

Dichas palabras son:

ab	*ba*	*ca*	*da*
ac	*bc*	*cb*	*db*
ad	*bd*	*cd*	*dc*

Este ejemplo 2, puede servir para definir el número de permutaciones de "*n*" elementos siendo este

$$P(n,r) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

Es decir:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

La justificación de la expresión anterior, se puede hacer considerando que si se tienen "n" elementos, el primero de ellos se puede seleccionar de (n) diferentes formas, el segundo elemento se puede escoger entre (n-1) de ellos, el tercer elemento se puede tomar entre (n-2) elementos, así sucesivamente, hasta llegar al último elemento seleccionado, el elemtno r-ésimo, el que se podrá seleccionar de "n-(r-1)" formas diferentes, por lo cual, el número total de formas en las cuales se pueden seleccionar "r" elementos de un conjunto de "n" elementos, es decir, el número de permutaciones de "n" elementos tomados de "r" en "r", es igual a A.

$$P(n,r)=(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots[n\_(r-1)]$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por (n-r)!, se tiene

$$P(n,r)=\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots[n-r(r-1)](n-r)!}{(n-r)!}$$

O sea, $P(n,r)=\dfrac{n!}{(n-r)!}$

El primer ejemplo viene a ser un caso particular, cuando se considera el número de permutaciones de *"n"* elementos tomados todos a la vez, es decir:

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}$$

$$=\frac{n!}{0!}$$

Y como 0! = 1, entonces:
$P(n,n)=n!$

Ejemplo 3

¿Cuántas señales diferentes de 6 banderas se pueden formar con 4 banderas amarillas y 2 banderas rojas?

Si *"A"* representa una bandera amarilla y *"R"* representa una bandera roja, se podrán formar las siguientes señales diferentes:

AAAARR	*AAARA*	*AAARRA*
AARRAA	*AARARA*	*AARAAR*
ARRAAA	*ARARAA*	*ARAARA*
ARAAAR	*RRAAAA*	*RARAAA*
RAAARA	*RSSSSR*	*RAARAA*

Este número de permutaciones se puede indicar como:

$$P(6;4,2)=\frac{6!}{(4!)(2!)}=\frac{6(5)(4)(3)(2)(1)}{4(3)(2)(1)(2)(1)}$$

$$P(6;4,2)=15$$

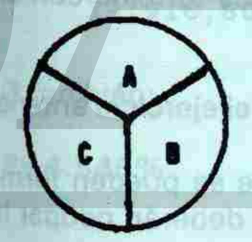
Lo cual representa el número de permutaciones de 6 banderas, de las cuales 4 de ellas son iguales entre si y las otras 2 son iguales entre si.
En general, el número de permutaciones de *"n"* objetos, de los cuales *"n_1"* son iguales entre si, *"n_2"* son iguales entre si, ..., *"n_r"* son iguales entre si; esta dado por

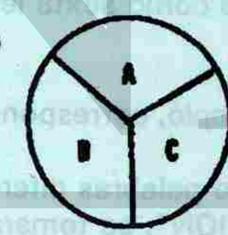
$$P(n;n_1,n_2,n_3,\ldots,n_r)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_r!}$$

Ejemplo 4

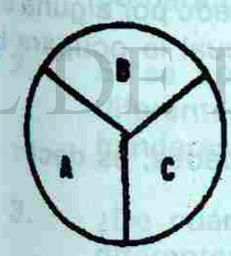
¿De cuántas maneras diferentes se pueden acomodar 3 personas en una mesa circular?

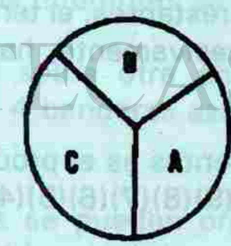
Si se representan las 3 personas como A,B y C, al fijar a la persona *"A"* se tendrían las siguientes configuraciones:

1) 

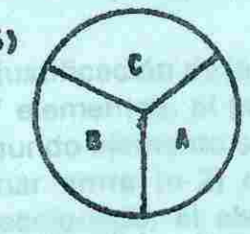
2) 

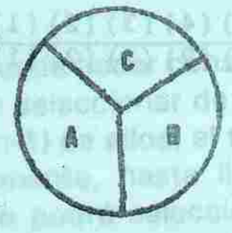
Al fijar a la persona *"B"*, se tendrían las configuraciones

3) 

4) 

Y al fijar a la persona *"C"*, se tendrían las configuraciones:

5) 

6) 

Analizando las seis configuraciones, puede verse que la 5) y la 3) son iguales a la 1), y que la 6) y la 4) son iguales a la 2); es decir que, solamente hay dos maneras diferentes como se pueden acomodar 3 personas en una mesa circular.

En general, se puede establecer que un grupo de *"n"* objetos se pueden acomodar circularmente de $(n-1)!$ formas diferentes.

En el siguiente ejercicio se ejemplificará la aplicación de los dos conceptos que se han visto; el de probabilidad y el de permutación. Esto se hará, considerando la probabilidad de que suceda alguna cierta permutación deseada.

Ejemplo 5

¿Cuántas palabras diferentes de 11 letras se pueden formar con las letras de la palabra "PERMUTACION"? ¿Cual es la probabilidad de que al seleccionar al azar una de esas palabras, esta palabra tenga como sexta letra la *"T"* y que además termine con una vocal?.

La primera parte de este ejemplo, corresponde al problema No. 1 del ejercicio anterior.

Para encontrar el número de palabras diferentes de 11 letras que se pueden formar con la palabra "PERMUTACION", se tomaran los 11 lugares que deberán ocupar las letras,

<u>11</u> <u>10</u> <u>9</u> <u>8</u> <u>7</u> <u>6</u> <u>5</u> <u>4</u> <u>3</u> <u>2</u> <u>1</u>

El primer lugar lo podrá ocupar cualquiera de las 11 letras, el segundo lo podrá ocupar solamente alguna de las 10 restantes, el tercer lugar podrá ser ocupado por alguna de las 9 que restan, y así sucesivamente, hasta el último lugar, el cual lo ocupara la última letra que queda.

El número de palabras diferentes es el producto de estas 11 cantidades, es decir:

$P(11,11) = (11)! = (11)(10)(9)(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)$
$P(11,11) = 39;916,800$

O sea que, hay 39;916,800 palabras diferentes que se pueden formar con la palabra "PERMUTACION".

Para responder a la segunda pregunta, se deberá primero determinar cuántas palabras tendrán en la secta posición a la letra *"T"* y a la vez que terminen con una vocal. Para ello, primero se considera la sexta posición que podrá ser ocupada solamente por una letra (la *"T"*), luego se analiza la última posición, la cual puede ser ocupada por cualquiera de las 5 vocales que aparecen en la palabra "PERMUTACION", posteriormente se puede ocupar con cualquiera de las 9 palabras que quedan y así sucesivamente, hasta llenar los once espacios, es decir:

_	_	_	_	_	1	_	_	_	_	_
_	_	_	_	_	1	_	_	_	_	5
9	_	_	_	_	1	_	_	_	_	5
9	8	7	6	5	1	4	3	2	1	5

Si $n(E)$ es el número de palabras formadas de esta manera, entonces:

$n(E) = (9)(8)(7)(6)(5)(1)(4)(3)(2)(1)(5) =$
$= 1;814,400$

La probabilidad de que al seleccionar al azar una palabra, tenga en su sexta posición una *"T"* y además, termine con una vocal; viene a ser la razón de estas dos cantidades, ya que la primera cantidad representa el número de casos posibles y la segunda, el número de casos favorables, por lo cual:

$$P = \frac{1;814,400}{39;916,800} = \frac{1}{22} = 0.04545$$

O también:

$P = 4.545\%$

Ejercicio 3.4

1. Si hay 5 becas disponibles para los mejores 5 alumnos que egresan de una preparatoria, ¿De cuántas formas diferentes se pueden otorgar las becas?

2. Si se colocan 9 banderas una sobre otra en un asta, ¿Cuántas señales diferentes se pueden formar con 4 banderas azules, 3 banderas amarillas y 2 banderas rojas?

3. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en un librero, 3 libros diferentes de Biología y 4 libros diferentes de matemáticas?

4. Calcular el número de novenas de béisbol diferentes que se pueden formar co 17 jugadores, si 4 de ellos sólo juegan como lanzadores, 2 sólo com receptores, 6 solamente en el cuadro y 5 solamente como jardineros.

5. Se van a repartir N\$100.00 entre 9 niños, mediante 4 billetes de N\$5.00, billetes de N\$10.00 y 3 billetes de N\$20.00 ¿De cuántas maneras diferente se puede hacer la repartición, si cada niño debe recibir un billete?

6. ¿Cuántas palabras diferentes de 11 letras se pueden formar con 11 letras d la palabra "PERMUTACION"?

7. ¿Cuántas palabras diferentes de 13 letras se pueden formar con las 13 letra de la palabra "permutaciones?"

8. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden formar en una fila 15 soldados, 2 son ingleses, 3 son italianos, 4 son franceses, 4 son alemanes y 2 so mexicanos, y deben formarse juntos lo de la misma nacionalidad?

9. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar 7 personas alrededor de un mesa circular?

10. ¿De cuántas formas diferentes se pueden acomodar 9 cuentas para formar u collar?

Considerando todas las palabras diferentes de 11 letras que se pueden formar con l palabra "PERMUTACION"

11. ¿Cuál es la probabilidad de que la seleccionar al azar una palabra de ellas empiece con la letra "P"?

12. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una palabra de ellas, termin con la letra "n"?

13. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar una palabra de ellas, termin con las tres letras "ion" (en ese orden)?

14. ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una palabra de ellas empiece con la letra "p" y termine con la letra "n"?

15. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una palabra de ellas, empiece con la letra "p", en la sexta posición lleve la letra "t" y termine con la letra "n"

3.4 Combinaciones

Objetivo:

Resolver problemas de probabilidad que involucren permutaciones y combinaciones.

Si consideramos las letras a,b,c, sabemos que se pueden formar 3 palabras diferentes de una letra, 6 palabras diferentes de dos letras y 6 palabras diferentes de tres letras, como se puede ver en los siguientes listados:

i) a, b, c, {palabras de una letra}

ii) ab, ac, ba, bc, ca, cb {palabras de dos letras}

iii) abc, acb, bac, bca, cab, cba, {palabras de tres letras}

Lo que representa cada uno de los listados es:

i) El número de permutaciones de tres letras, tomadas de una en una.

ii) El número de permutaciones de tres letras, tomadas de dos en dos.

iii) El número de permutaciones de tres letras, tomadas de tres en tres.

Si nos interesara ahora conocer el número de palabras de una letra, de dos letras y de tres letras, que se pueden formar con las mismas tres letras *a, b, c,* pero <u>sin que interese el orden de las letras tomadas en cada caso</u>, tendríamos los siguientes listados:

i') a, b, c {palabras de una letra}

ii') ab, ac, bc {palabras de dos letras}

iii') a b c {palabras de tres letras}

Como se puede observar, los listados

i) e *i')* son iguales, el listado

ii) consta de 6 elementos y el *ii')* consta solamente de 3 elementos, porque al no tomar en cuenta el orden de las letras, las palabras *ba, ca* y *cb* son iguales a las palabras *ab, ac, y bc,* respectivamente. Finalmente, el listado *iii)* consta de 6 elementos, mientras que el listado *iii')* consta de un solo elemento, esto es porque al no interesar el orden de las letras, las palabras *acb, bac, bca, cab y cba* son todas iguales a la palabra *abc.*

Lo anterior nos lleva a considerar la necesidad de definir un nuevo arreglo de una par o todos los elementos de un conjunto.

Definición

> Una "combinación" es un arreglo, sin considerar un orden definido, de una parte o de todos los elementos de un conjunto dado.

Tomando en cuenta esta definición podemos establecer lo que representa cada u de los listados *i'*), *ii'*) e *iii'*) vistos anteriormente.

i') Representa el número de combinaciones de tres letras, tomadas de una en un

ii') Representa el número de combinaciones de tres letras, tomadas de dos en do

iii') Representa el número de combinaciones de tres letras, tomadas de tres en tre

De manera análoga a como se hizo con las permutaciones, representaremos el núme de combinaciones de "n" elementos tomados de *"r"* en *"r"*, mediante el símbo *C(n,r)*.

Tratando de encontrar la manera como están relacionadas las permutaciones con la combinaciones, analizaremos de nuevo los listados, considerados anteriormente. E ellos, podemos ver que el *i*) es igual al *i'*), el *ii*) es igual al *ii'*) multiplicado pro 2 y *iii*) es igual al *iii'*) multiplicado por 6. Con este análisis, se puede establecer que e general, $P(n,r)=r!c(n,r)$.

Despejando las combinaciones de esta expresión, se tiene que

$$C(n,r)= \frac{p(n,r)}{r!}$$

Y como $P(n,r)= \dfrac{n!}{(n-r)!}$

entonces $C(n,r) = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

Para ilustrar lo anterior, consideraremos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1

¿De cuántas maneras diferentes se puede seleccionar un comité de 3 personas de u grupo de 7 personas?

Como el orden no interesa al seleccionar, se podrá formar un número de comités igu a las C(7,3),

y como $C(7,3) = \dfrac{7!}{3!(7-3)!}$

$$= \frac{7!}{3!\ 4!}$$

$$= \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)\cdot(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 35$$

Por lo tanto, del grupo de 7 personas, se podrán formar 35 comités diferentes, de 3 personas cada uno.

Ejemplo 2

¿Cuántos triángulos diferentes se pueden formar si se tienen 5 puntos coplanares, tales que, ninguna terna de ellos están en línea recta?

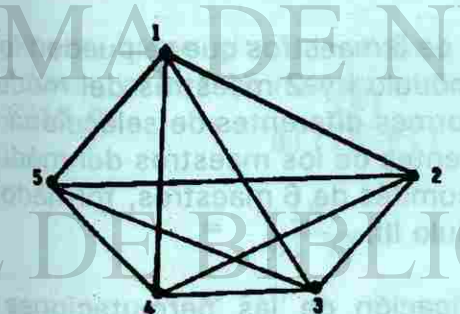
El número de triángulos diferentes que se pueden formar, debe ser igual al número de maneras como se pueden seleccionar 3 puntos entre los 5 puntos que se tienen, es decir, las C(5,3)

$$C(5,3) = \frac{5!}{3!\ 2!}$$

$$= \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{(3)(2)(1)\cdot(2)(1)}$$

$$= 10$$

Estos 10 triángulos, pueden ser visualizados en la siguiente figura.



Considerando el vértice 1, se pueden formar los triángulos con vértices 1,2,3;1,2,4;1,2,5;1,3,4;1,3,5 y 1,4,5, es decir 6 triángulos. Tomando ahora el vértice 2, se pueden formar los triángulos con vértices 2,3,4;2,3,5 y 2,4,5, o sea, 3 triángulos más. Al tomar el vértice 3, solamente se puede formar el triángulo 3,4... Siguiendo ese orden, al tomar el vértice 4 o el vértice 5, ya no es posible for... ningún triángulo que no se haya considerado. Por lo cual, el número de triángu... diferentes es la suma de 6, 3, 1, 0, y 0, es decir 10.

Ejemplo 3

En la preparatoria No. 25 de la U.A.N.L. se va a integrar un comité de 6 maestros... matemáticas para evaluar los módulos I y III. Si la selección se hace entre 8 maes... que impartieron el módulo I y 7 maestros que impartieron el módulo III, ¿Cuán... comités diferentes se podrán integrar, con la condición de que haya exactamen... maestros que impartieron el módulo?

Cada comité deberá tener 4 maestros del módulo I y 2 maestros del módulo III. ... 4 maestros del módulo I se podrán seleccionar de c(8,4) formas diferentes, es de...

$$C(8,4) = \frac{8!}{4!\ 4!}$$

$$= \frac{(8)(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(4)(3)(2)(1)\cdot(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 70$$

Los 2 maestros del módulo III podrán ser seleccionados de c(7,2) formas diferen... esto es:

$$C(7,2) = \frac{7!}{2!\ 5!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)\cdot(5)(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 21$$

Para determinar el número de comités diferentes de 6 maestros que se pueden form... cada uno de los cuales tenga 4 maestros del módulo I y 2 maestros del módulo... basta considerar que para cada una de las 70 formas diferentes de seleccionar a... maestros del módulo I hay 21 selecciones diferentes de los maestros del módulo... por lo tanto, habrá 70x21 = 1,470 diferentes comités de 6 maestros, formados ... 4 maestros del módulo I y 2 maestros del módulo III.

Así como se consideró anteriormente la aplicación de las permutaciones a... probabilidad, vamos ahora a tratar el caso de hallar la probabilidad de que suc... alguna cierta combinación deseada. Esto se ilustrará mediante los siguien... ejemplos.

Ejemplo 1

En la preparatoria No. 26 de la U.A.N.L. hay 15 maestros de matemáticas, 9 hombres y 6 mujeres, si se selecciona al azar un grupo de 8 maestros para elaborar un examen, encontrar la probabilidad de que el grupo esté formado por
a) 5 hombres y 3 mujeres

Los 5 maestros se podrán seleccionar de C(9,5) formas diferentes, y como:

$$C(9,5) = \frac{5!}{5!(9-5)!}$$

$$= \frac{9!}{5!\ 4!}$$

$$=$$

$$= 126$$

Hay 126 formas diferentes de seleccionarlos.

Por otro lado, las 3 maestras podrán ser seleccionadas de c(6,3) maneras diferentes, o sea

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!(6-3)!}$$

$$= \frac{6!}{3!\ 3!}$$

$$=$$

$$= 20$$

Hay 20 maneras diferentes de seleccionarlas.

Por lo tanto, habrá (126)(20) = 2,520 grupos diferentes formados por 5 maestros y 3 maestras.

Ahora, como el número total de grupos de 8 maestros diferentes que se pueden formar, si hay 15 maestros disponibles, es igual a c(15,8), es decir:

$$C(15,8) = \frac{15!}{8!(15-8)!}$$

$$= \frac{15!}{8!\ 7!}$$

$$=$$

$$= (13)(11)(5)(9)$$

$$= 6,435$$

Hay en total 6,435 grupos diferentes de 8 maestros, que se pueden formar.

Por lo cual, la probabilidad de que al seleccionar al azar un grupo de 8 maestros, es formado por 5 maestros y 3 maestras, será el número de casos favorables entre número total de casos posibles, es decir

$$P(5H,3M) = \frac{2,520}{6,435}$$

$$= \frac{56}{143}$$

$$= 0.3916$$

O lo que es lo mismo, la probabilidad es de 39.16%

Ejercicio 3.4

1. ¿Cuántos comités diferentes formados por 2 estudiantes de primer semestre y 3 estudiantes de segundo semestre se pueden seleccionar entre 15 estudiantes de primer semestre y 12 estudiantes de segundo semestre?

2. Una urna contiene 3 boletas rojas y 6 boletas azules. ¿De cuántas formas pueden sacar 3 boletas, si dos de ellas deben ser rojas?

3. ¿Cuántas palabras diferentes de dos vocales y dos consonantes se pueden formar con 7 consonantes diferentes y 5 vocales diferentes?

4. El mismo problema 3, si las consonantes y las vocales deben ir alternadas.

5. ¿Cuántas rectas se pueden trazar por 14 puntos coplanares, si tres cualesquiera de ellos, no son colineales?

6. Si se dispone de 10 personas para hacer una guardia nocturna de 3 personas ¿durante cuántas noches se podrá tener una guardia diferente?

7. Una bolsa contiene 6 bolas rojas, 3 bolas amarillas y 4 bolas azules. ¿De cuántas maneras se podrán extraer 8 bolas, de tal forma que sean 3 rojas, amarillas y 3 azules?

8. Con los datos del problema # 7, pero considerar que en las 8 bolas extraídas por lo menos 4 sean rojas.

9. Comprobar que $C(6,2) = C(7,3)-C(6,3)$

10. Si $C(n,r) = 20$ y $P(n,r) = 120$, encontrar los valores que deben tener "n" y "r"

11. En un grupo de la preparatoria # 27 de la U.A.N.L. hay 18 hombres y 12 mujeres, en un segundo grupo hay 14 hombres y 16 mujeres. Si se selecciona un grupo al azar y de él se escoge al azar una persona, ¿cuál es la probabilidad de que la persona sea mujer?

12. Un niño tiene 15 pares de calcetines, 9 de los cuales son blancos y 6 son negros ¿cuál es la probabilidad de que al escoger 8 pares de calcetines, 6 de ellos sean blancos y 2 sean negros?

13. Al tirar una moneda 6 veces, ¿cuál es la probabilidad de que caigan al menos 4 caras?

14. Al tirar una moneda 6 veces, ¿cuál es la probabilidad de que caigan exactamente 4 sellos?

15. Si se tiran 6 monedas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente 4 sellos?

3.5 Estadística descriptiva y análisis de datos

Objetivo:

Dado un conjunto de datos, determinar la distribución: de frecuencias agrupadas, de frecuencias acumuladas y de porcentajes acumulados; graficar:el histograma y el polígono de frecuencias de la distribución; calcular: la media, la mediana, la moda y la desviación estándar de la distribución. Y dada una calificación individual, la media y la desviación estándar de una distribución normal, calcular: su calificación estándar equivalente y su percentil correspondiente.

Si preguntáramos al "hombre de la calle" qué significa para él la Estadística, en el mejor de los casos obtendríamos como respuesta: "La Estadística es una palabra mágica, es el 'abracadabra', que nos permite manejar los números a nuestro antojo. Manipulando los números de acuerdo con ciertas reglas secretas y muy bien guardadas, podremos probar lo que deseamos". O simplemente: "Estadística es solamente una colección de hechos". Incluso podríamos encontrar alguna persona más conocedora que opinase que es una "colección de hechos y circunstancias pasadas, de interés vital, tales como el número de bañeras existentes en un país en 1929.

Es verdad que éstas y otras actividades se atribuyen frecuentemente al campo de las estadísticas. No es verdad, sin embargo, que los Estadísticos se ocupen de ellas. ¿Qué es entonces la Estadística? Aunque es virtualmente imposible obtener un consenso general de la definición de Estadística, es factible diferenciar dos definiciones de Estadística.

1. La Estadística es comúnmente considerada como una colección de hech numéricos expresados en términos de una relación resumida, y que han s recopilados a través de varias observaciones, o a partir de otros datos numéricos. considerada la Estadística está constituida por una colección de enunciados ta como, "El cociente intelectual promedio de los niños de 5° de primaria es...," o "si de cada diez personas prefieren el licor X cuando se compara con el licor Y", o b "los campeones mundiales de fútbol anotaron 25 goles en 10 partidos realizad frente a seleccionados de diferentes países..."

2. La Estadística puede igualmente ser considerada como un método para tratar dat numéricos. Esta definición refuerza el concepto de que la Estadística es instrumento que se orienta a la recolección, organización, y análisis de dat numéricos de observaciones.

La primera función constituye el objeto de esta sección.

Deben diferenciarse dos funciones del método estadístico: técnicas de Estadísti descriptiva y técnicas de Inferencia Estadística o inductiva.

El objetivo central de la Estadística descriptiva es presentar información en for conveniente, útil y comprensible. La inferencia estadística, por su parte se ocupa generalizar esta información, o, más específicamente hace inferencias acerca poblaciones a partir de las muestras extraídas de estas poblaciones.

Estadística descriptiva

Cuando un investigador conduce un estudio, de ordinario reúne gran cantidad información numérica o datos acerca del problema en cuestión. Los datos pod tener variedad de formas: datos de frecuencias (recuentos de votantes que prefie uno u otro candidato político), o datos escalares (los pesos netos de los ingredien de un cereal de consumo popular, o los cocientes intelectuales de un grupo estudiantes universitarios). En su forma original, tal cual son recopilados, estos dat son usualmente un enredo de calificaciones, recuentos, frecuencias, etc. Al reali la función descriptiva el Estadístico formula reglas y procedimientos para presentación de los datos en una forma más útil y significativa. Así, el Estadísti establece reglas a través de las cuales los datos pueden representarse gráficamen También formula reglas para calcular varios estadísticos a partir de los dat originales.

Imaginemos que un instructor consejero quiere someter a un grupo de estudiantes secundaria a una serie de pruebas (para medir su inteligencia, aptitud, personalid etc.). ¿Qué tipo de operaciones podrá ejecutar con las calificaciones y medic resultantes para cumplir con la función descriptiva?

1. Podrá reorganizar las calificaciones y agruparlas de varias formas, para obtener así una visión global de todo el conjunto de datos.

2. Podrá construir tablas, gráficas y figuras que permitan visualizar los resultados.

3. Podrá convertir los resultados originales a formas que sean más útiles para propósitos específicos. Así, podrá convertir estas calificaciones originales en rangos percentiles.

4. Podrá también calcular promedios, para aprender algo acerca del comportamiento específico de sus problemas.

5. Empleando el promedio como punto de referencia podrá describir la dispersión de calificaciones con respecto a un punto central. Las estadísticas que cuantifican esta dispersión son conocidas como medidas de variabilidad o medidas de dispersión.

Inferencia estadística

El trabajo de un investigador no ha llegado a su fin cuando ha concluido con la función descriptiva. Por el contrario, está frecuentemente más cerca del principio, que del fin de su tarea. La razón de esta afirmación es obvia cuando consideramos que el propósito de su investigación es a menudo explorar hipótesis de naturaleza general, más que simplemente comparar unas cuantas muestras.

Imaginemos que eres un farmacólogo que está interesado en conocer los efectos de una droga determinada sobre la ejecución de una tarea que implica coordinación psicomotora. En consecuencia, usted diseña un estudio que implique dos condiciones: una experimental y otra de control. Tu suministras la droga a los sujetos en experimentación en períodos de tiempo específicamente determinados antes de empezar la prueba. Para evitar "efectos de placebo" se dará una píldora inocua que contenga ingredientes inertes a los sujetos de control. Después de que todos los sujetos hayan sido sometidos a la prueba, elaborarás la función descriptiva. Así hallarás que "en promedio" los sujetos experimentales no actuaron tan bien como los de control. En otras palabras, la media aritmética de los datos del grupo experimental será más baja que la del grupo de control. En consecuencia, te preguntarás "¿puedo concluir que la droga produjo tal diferencia entre los grupos?" o, una pregunta aún más general, "¿puedo asegurar que la droga tiene un efecto adverso sobre la ejecución de la tarea que se investiga?" Para responder estos interrogantes, no es suficiente basarse solamente en la Estadística Descriptiva.

"Después de todo", razonarás, "aún si la droga no tuviera efecto, es altamente improbable que los promedios de los dos grupos hubiesen sido idénticos. Alguna diferencia habrá de observarse". La intervención de variables incontrolables (algunas veces llamadas en forma imprecisa "factores de azar") ciertamente produce alguna disparidad entre las medidas de los grupos. La pregunta crítica, desde el punto de vista de la inferencia estadística, será: ¿es la diferencia suficientemente grande com para descartar las variaciones incontroladas en el experimento como una explicació suficiente? Enunciándolo de otra manera, si fuésemos a repetir el experimen ¿seríamos capaces de predecir con confianza, que las mismas diferencias (ejempl una medida es más grande que la otra) se repetiría sistemáticamente?

En el momento en que surgen estas preguntas, nos movemos hacia el área fascinan del análisis estadístico conocida como inferencia estadística o Estadística Inductiv

Distribuciones de frecuencias

Imaginemos que acabas de aceptar el cargo de director de una importante escuela d bachillerato. Tu responsabilidad es preparar una reforma curricular acorde con la necesidades y motivaciones de los estudiantes y que, al mismo tiempo, estimule su capacidades intelectuales. Desde luego, está fuera del alcance del texto solucion este problema tan interesante y complejo. Sin embargo, no se puede avanzar hac una solución sin evaluar antes las capacidades intelectuales del cuerpo estudiantil. E consecuencia, acudes a los archivos y "extraes información" al azar (es decir, de forma que cada miembro de la población tenga la misma oportunidad de s seleccionado) tomando 110 expedientes de estudiantes, que brinden informació personal y académica. Puesto que su interés presente es valorar la capacida intelectual, tu enfocarás su atención hacia la información sobre el "C.I. estimado Al anotar estos datos obtendrás las cifras señaladas en la tabla 1

154	131	122	100	113	119	121	128	112	93
133	119	115	117	110	104	125	85	120	135
116	103	103	121	109	147	103	113	107	98
128	93	90	105	118	134	89	143	108	142
85	108	108	136	115	117	110	80	111	127
100	100	114	123	126	119	122	102	100	106
105	111	127	108	106	91	123	132	97	110
150	130	87	89	108	137	124	96	111	101
118	104	127	94	115	101	125	129	131	110
97	135	108	139	133	107	115	83	109	116
110	113	112	82	114	112	113	142	145	123

Tabla 1
Resultados del C.I. de 110 estudiantes de bachillerato seleccionados al azar.

Como es obvio, en principio estas cantidades no tienen para ti "pies ni cabeza" menos que las organices de un modo sistemático. Quizás puedas idear ordenamiento de todos los resultados en forma descendente y luego colocar una raya vertical a su lado cada vez que ocurran. (tabla 2).

X	f	X	f	X	f	X	f
154	|	135	||	116	||	97	||
153	|	134	|	115	||||	96	|
152		133	||	114	||	95	
151		132	|	113	||||	94	|
150	|	131	||	112	|||	93	||
149		130	|	111	|||	92	
148		129	|	110	|||||	91	|
147	|	128	||	109	||	90	|
146		127	|||	108	||||||	89	||
145	|	126	|	107	||	88	
144		125	||	106	||	87	|
143	|	124	|	105	||	86	
142	||	123	|||	104	||	85	||
141		122	||	103	|||	84	
140		121	||	102	|	83	|
139	|	120	|	101	||	82	|
138		119	|||	100	||||	81	
137	|	118	||	99		80	|
136	|	117	||	98	|		

Tabla 2
Distribución de frecuencias de los resultados del C.I. de 110 estudiantes de bachillerato seleccionados al azar.

El número de rayitas representa pues la frecuencia con que aparece cada resultado.

Al terminar se habrá construido un conjunto no agrupado de distribución
frecuencias de resultados. Advierta que, en el presente ejemplo, algunos punta
tienen una extensión muy vasta, mientras que otros presentan una frecuencia de c
y no hay "visualización" clara que indique una tendencia central. En estas condicion
la mayoría de los investigadores acostumbran "agrupar" los puntajes en lo que
llama intervalos de clase, para obtener una distribución de frecuencias de "punta
agrupados".

El agrupamiento en intervalos de clase implica una especie de "ruptura de la esca
en la cual asignamos los puntajes mutuamente excluyentes[1] en donde éstas
definen en términos de los intervalos de grupo empleados. Las razones para ha
este tipo de agrupación son dobles:

(1) es antieconómico y poco práctico tratar con un gran número de ca distribuidos en muchos puntajes a menos que dispongamos de calculado automáticas.

(2) Algunos de los puntajes tienen asociada una frecuencia tan baja que no justifica mantenerlos como entidades distintas y separadas.

Como factor negativo podemos mencionar que al agrupar los puntajes se pie
inevitablemente parte de la información. Por ejemplo, las calificaciones individu
no se identifican cuando haya un agrupamiento en intervalos de clase y son inevitab
pequeños errores estadísticos basados en su agrupación.

La próxima pregunta es "¿Qué base emplearemos para agrupar los datos en
intervalos de clase que vamos a utilizar?" Obviamente, el intervalo seleccionado
deberá ser tan amplio que perdamos la discriminación proporcionada por nues
medida original. Por ejemplo, si tuviéramos que dividir en dos clases los puntajes
C.I. ya seleccionado, y lo hiciéramos entre los inferiores a 100, y los iguale
superiores a 100; en la práctica toda la información inherente a los puntajes origina
se habría perdido. Por otra parte, los intervalos de clase no deben ser tan peque
que se desvirtúe el objetivo que se busca con la agrupación. Para responder a nues
pregunta, no hay desgraciadamente ninguna norma general que pueda ser aplicada
todos los casos. La mayoría de las veces el escoger el número de intervalos de cl
debe representar un juicio basado en la influencia que tienen los efectos de
agrupación sobre la discriminación de los datos y sobre la economía de
presentación. No obstante, se acepta generalmente que buena parte de los da
obtenidos en las ciencias que estudian el compartimiento puede ser agrupada en
a 20 intervalos de clase. (Consideraremos 15 intervalos de clase para los datos
se analizan en este ejemplo).

Habiendo decidido el número apropiado de intervalos de clase para una serie de da
son relativamente sencillos los procedimientos para asignar resultados a los interva
de clase. Como también es posible utilizar diferentes técnicas, nosotros emplearem

---

[1] Llamamos a las clases mutuamente excluyentes porque es imposible para un puntaje de una ma pertenecer a más de una clase.

sólo una para ser siempre consecuentes. El procedimiento que debe emplearse es el siguiente:

1er Paso. Encuentra la diferencia entre el resultado más alto y el más bajo en los datos originales. Añade 1 para obtener el número total de resultados o de resultados potenciales. En el presente ejemplo, el resultado es (154-80) + 1 = 75.

2do Paso. Divide esta cifra por 15 para obtener el número de resultados o de resultados potenciales en cada intervalo. Si el valor resultante no es un número entero, y generalmente no lo es, los autores prefieren redondear al número entero más cercano, esta práctica está lejos de ser universal, y no se comete ningún error si se redondea al número más cercano. En este ejemplo, el número de calificaciones para cada intervalo de clase es 75/15, o sea 5. Identificaremos este número con el símbolo *i*. En el ejemplo, *i* = 5.

3er Paso. Toma el resultado más bajo de los datos originales como el límite inferior del primer intervalo de clases. Agrega *i*-1 para obtener el puntaje máximo del primer intervalo de clase. En esta forma, el intervalo de clase mínimo en los datos que tenemos a mano es 80-84.

4t Paso. El límite inferior de intervalo de clase siguiente, será el número entero consecutivo al máximo puntaje del intervalo de clase inferior. En el presente ejemplo, el próximo número entero es 85. Sigue las mismas etapas del 3er paso para obtener el puntaje más alto del segundo intervalo de clase. Prosigue con este procedimiento para cada intervalo de clase superior sucesivo, hasta que todos los puntajes se hayan incluido en sus intervalos de clase apropiados.

5t Paso. Asigna cada puntaje obtenido al intervalo de clase dentro del cual está incluido. La distribución de frecuencias agrupada que aparece en la tabla 3 se obtuvo empleando el procedimiento ya citado.

INTERVALO DE CLASE	f	INTERVALO DE CLASE	f
150-154	2	110-114	17
145-149	2	105-109	14
140-144	3	100-104	12
135-139	5	95-99	4
130-134	7	90-94	5
125-129	9	85-89	5
120-124	9	80-84	3
115-119	13		
N = 110			

Tabla 3
Distribución de frecuencias agrupada de los resultados del C.I. basadas en los datos que aparecen en la tabla 2.

Notarás que mediante esta agrupación podemos obtener una "imagen" inmediata la distribución de los puntajes del C.I. entre nuestros estudiantes de bachillerato. P ejemplo, se observa que hay concentración de frecuencias en los intervalos de cla entre los puntajes de 100 y 119. Se observa también que el número de puntajes los extremos tiende a disminuir. Así, se cumple uno de nuestros objetivos agrupación, que es lograr una colección de puntajes económica y manejable.

Haciendo un análisis sobre los "límites verdaderos" de un número cardin consideremos que el valor "verdadero" de un número es igual a su valor aparente m o menos una mitad de la unidad de medida. Por supuesto, ese razonamiento tamb es válido para estos valores aún después de haberse agrupado en intervalos de clase Así, aunque escribamos los límites de intervalo de clase menor como 80-84, límites verdaderos del intervalo serán 79.5-84.5 (el límite inferior de 80 y el lím superior de 84 respectivamente.

Debe tenerse en cuenta que los límites verdaderos de un intervalo de clase no son mismo que los límites aparentes. Cuando se calcula la mediana y los percentiles pa una agrupación de datos, haremos uso de los límites verdaderos del intervalos clase.

Frecuencias acumuladas y distribuciones porcentuales acumulativas.

A menudo conviene convertir los datos de una distribución de frecuencias en u distribución de frecuencias acumulada. Además de ayudar a la interpretación de distribución de frecuencias, una distribución de frecuencias acumuladas es bue ayuda para obtener la mediana y varios percentiles de puntajes, como veremos m delante.

La distribución de frecuencias acumuladas se obtiene de una manera muy sencil Observemos los datos en la tabla 4.

En cada entrada de la distribución de frecuencia se indica el número de estudiant de bachillerato que cae dentro de los intervalos de clase. En cada entrada de distribución de frecuencia acumulada se indica el número de todos los casos frecuencias por debajo del límite superior verdadero de ese intervalo. Así, en el terc intervalo de clase partiendo de abajo hacia arriba en la tabla 4, la entrada "13" en distribución de frecuencias acumuladas indica que un total de 13 estudiantes obtuv un puntaje más bajo que el límite superior verdadero de este intervalo, es decir 94, La construcción de la distribución de frecuencias acumuladas se obtiene por un simp proceso de adición sucesiva de las frecuencias anteriores al intervalo de clas correspondiente. De este modo, la frecuencia acumulada del intervalo 104,5-109, se logra por una adición sucesiva de $3+5+5+4+12+14=43$. Adviértase que frecuencia acumulada correspondiente a la entrada superior es siempre igual a N. no se obtiene este resultado quiere decir que ha habido un error en la suma frecuencias y se deberá revisar el trabajo.

La distribución porcentual acumulativa que se muestra igualmente en la tabla 3.4 se obtiene dividiendo cada valor en la columna de frecuencia acumulada por N y multiplicada por 100. Adviértase que el ingreso superior debe ser 100%, puesto que todos los casos caen bajo el límite superior real del intervalo más alto.

$$\%\ acum = \frac{f\ acum.}{N} x100$$

INTERVALO DE CLASE	f	f ACUMULADA	% ACUMULADO
150-154	2	110	100
145-149	2	108	98
140-144	3	106	96
135-139	5	103	94
130-134	7	98	89
125-129	9	91	83
120-124	9	82	75
115-119	13	73	66
110-114	17	60	55
105-104	14	43	39
100-104	12	29	26
95-99	4	17	15
90-94	5	13	12
85-89	5	8	7
80-84	3	3	3

Tabla 4

Distribución de frecuencias agrupadas y distribución de frecuencias acumuladas basadas en los datos que aparecen en la tabla 3 N=110

Técnicas de representación gráfica

Hemos examinado algunos de los procedimientos empleados para hacer que adquiera sentido un conjunto de datos no organizados. Como se puntualizó generalmente el trabajo está apenas comenzando cuando tu hayas obtenido la distribución de frecuencias de los datos. El siguiente paso, por lo común, es presentar los datos en forma de dibujo de tal modo que el lector pueda percibir fácilmente los hechos esenciales de una distribución de frecuencias y compararlos con otra si lo desea. Estos dibujos reciben el nombre de gráficas, y no deben considerarse como sustitutos de un tratamiento estadístico de los datos, sino más bien como ayuda para pensar e interpretar problemas estadísticos.

Se utilizan muchos tipos de gráficas para representar datos. Hay gráficas circulares, pictóricas, de barras y de otros tipos. Al utilizar gráficas, suponemos que es posible hacer una idea rápida sobre varias características importantes de una distribuc observando con rapidez la gráfica. Para ilustrar esto, vamos a ver lo que se con como gráfica de barras, demostrando que se puede desarrollar para convertirse en u gráfica más general, denominada histograma.

Primeramente, vamos a presentar datos reunidos sobre los pesos de los jugadores fútbol americano de una escuela. En el cuadro 2 la columna de la izquierda prese los pesos en kilogramos y la columna de la derecha da los números de alumnos tenían ese peso.

PESO EN KILOGRAMOS	FRECUENCIA
50	2
55	4
60	7
65	9
70	12
75	15
80	10
85	5
90	1

Cuadro 2

Observa que los pesos se dan a intervalos de 5 kilogramos y que el número total alumnos es de 65. A continuación, vamos a representar esos datos utilizando u gráfica de barras.

La observación rápida de la figura 1 revela los hechos siguientes:

1. El peso que se presenta con mayor frecuencia es el de 75 kilogramos
2. El peso que ocurre con menor frecuencia es el de 90 kg.
3. Todos los pesos dados se representan mediante números, diferentes estudiantes.
4. El peso menor es de 50 kilogramos y el peso mayor es de 90 kilogramos.

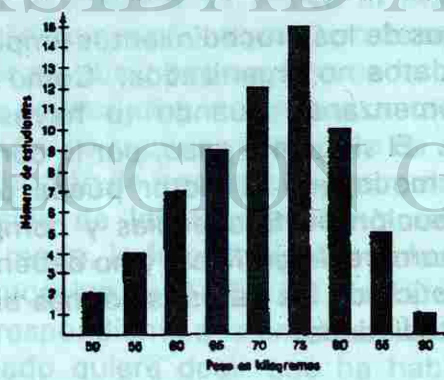


Fig. 1

A continuación, vamos a manipular la gráfica de la figura 1. Dividimos a la mitad todos los intervalos entre pesos de 5 kilogramos y conectamos los límites de esos intervalos recién creados por medio de líneas de puntos. Observa que los múltiplos de 5 kilogramos se transforman en los puntos medios de intervalos recién creados. Esto se muestra en la figura 2.

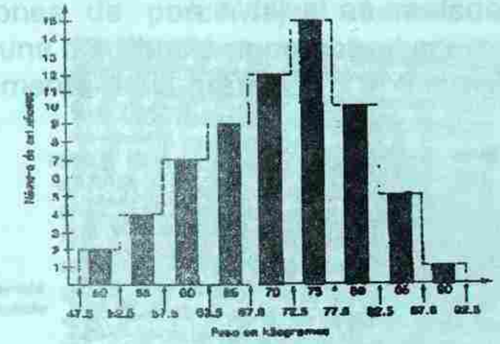


Fig. 2

La etapa siguiente es una gráfica en la que las únicas líneas son las que se muestran por medio de líneas de puntos en la figura 2. Esa gráfica se presenta en la figura 3.

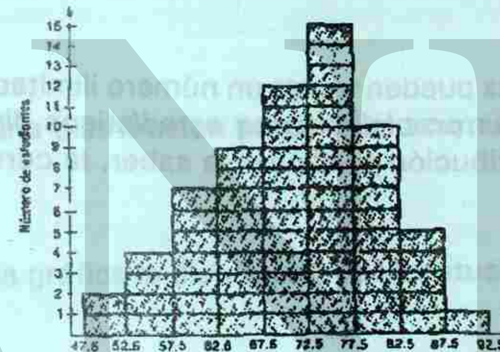


Fig. 3

En la figura 3 aparece otro cambio de la figura 2. Trazamos líneas de puntos para mostrar frecuencias. Podemos utilizar esas líneas de puntos para representarnos los números de estudiantes como áreas. La superficie de cada pequeño rectángulo representa un estudiante. Además, debemos observar que el peso es una cantidad continua. Nuestro histograma refleja correctamente este hecho. Por ejemplo, los estudiantes que caen en el intervalo entre 72.5 y 77.5 kilogramos se representan en el área de ese intervalo. Hay 15 de esos alumnos. Así pues, un histograma es un tipo muy funcional de gráfica, que se puede utilizar para representar datos continuos, tales como peso, tiempo y altura.

Podemos transformar rápidamente el histograma en otra forma empleada comúnmente para las representaciones gráficas, llamada polígono de frecuencias mediante la unión de los puntos medios de las barras a base de segmentos de rectas. Sin embargo, no es necesario elaborar un histograma antes de construir un polígono de frecuencias. Todo lo que debe hacerse es marcar un punto en el sitio correspondiente a las cimas de las barras y luego unir estos puntos. Cuando dos o más distribuciones de frecuencia se comparan entre sí, el polígono de frecuencias proporciona una visión más clara. La figura 4 muestra un polígono de frecuencias basado en la distribución de frecuencias agrupada que aparece en la tabla 3.

Fig. 4
En los polígonos de frecuencias, la frecuencia no puede ser representada por la altura de la ordenada, sino solamente por el área entre las ordenadas.

Los polígonos de frecuencias pueden tomar un número ilimitado de formas diferentes. No obstante, muchos de los procedimientos estadísticos discutidos en este texto, suponen una forma de distribución particular, a saber, la curva normal en "forma de campana".

Percentiles

Supongamos que un hermano o hermana menor regresa de la escuela y exclama:"Obtuve una calificación de 127 puntos en mi prueba de aptitud". ¿Cuál es tu reacción? ¿Elogiarlo por haber obtenido tan magnífica calificación? ¿Regañarlo por no haber conseguido una nota más alta? ¿O no decir nada hasta conocer mejor la distribución de las calificaciones dentro de su clase o grupo? Si usted ha comprendido el curso hasta este punto, no cabe duda que elegirá la última de estas tres alternativas.

Debe quedar claro que una calificación por sí misma carece de significado. Únicamente lo adquiere cuando se compara con alguna base o escala patrón. De esta manera, si su hermanito voluntariamente agrega:"El 79% de los estudiantes obtuvo una calificación menor que la mía", estará proporcionando un marco de referencia para interpretar su calificación. Realmente habrá citado el rango percentil de su calificación. El rango percentil de una calificación representa, por tanto, el porcentaje de los casos de un grupo que alcanzó valores menores que el citado. Así, si decimos que una calificación de 127 tiene un rango percentil de 79 significa que 79% del grupo obtuvo una calificación menor que 127. Incidentalmente, cada calificación se

considera como un punto hipotético sin dimensión, de manera que es igualmente significativo decir que el 21% del grupo en comparación obtuvo una calificación superior a 127.

En discusiones anteriores aprendimos a construir distribuciones de frecuencia acumuladas y distribuciones de porcentajes acumulados. Si tuviéramos que representar gráficamente una distribución porcentual acumulativa podríamos leer los rangos percentiles directamente de la gráfica[2]

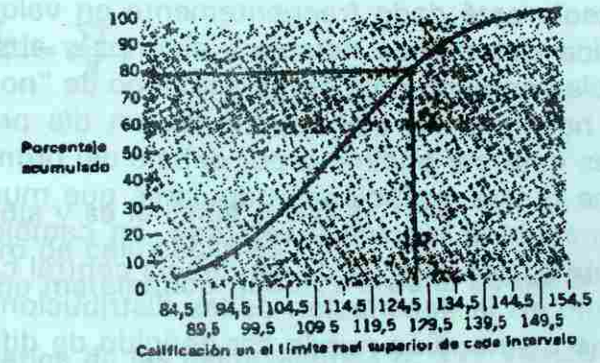


Fig. 5
Representación gráfica de una distribución porcentual acumulativa.

La figura 5 muestra en forma gráfica la distribución porcentual acumulada presentada en la tabla 4.

Como ilustración, imaginemos que queremos determinar el rango percentil de una calificación de 127. Localizamos el 127 sobre la abscisa y levantamos una perpendicular hasta el punto en el cual intercepta a la curva. Leyendo directamente en la escala de la izquierda, vemos que el rango percentil es aproximadamente 79. Por otra parte, si queremos conocer la calificación de un percentil dado, podremos invertir el procedimiento. Por ejemplo, ¿cuál es la calificación con un percentil de 90? Situamos el percentil 90 en la ordenada, leemos directamente a la derecha hasta que intercepte la curva, construimos una línea perpendicular a las abscisas, y leemos el valor en la escala de calificaciones. En el presente ejemplo puede verse que la calificación correspondiente al percentil de 90 es aproximadamente 135.

[2] Observa que lo contrario también es verdad, o sea, que dado un rango percentil, podemos leer las correspondientes calificaciones.

Medidas de tendencia central

Una de las mayores fuentes de confusión entre la gente neófita, y quizás, la causa de su suspicacia al juzgar la estadística más como un arte que como una ciencia, es la ambigüedad en el uso del término "promedio". Los sindicatos y las gerencias hablan de los salarios promedio, y citan frecuentemente valores numéricos que muestran entre sí un grave desacuerdo. Los programas de televisión y los comerciales, según se dice, están preparados teniendo en mente el promedio de televidentes. Los políticos se interesan vivamente en los puntos de vista de los votantes promedio; el tamaño de la familia promedio está dado frecuentemente en valores fraccionarios, como abstracción estadística que parece ridícula a algunos y absurda a otros. El término "promedio" se emplea comúnmente como sinónimo de "normal". El servicio meteorológico de la T.V. nos informa que tendremos un día promedio o que la precipitación pluvial del mes está por encima o por debajo del promedio. En efecto, el término "promedio" tiene tantas acepciones populares que muchos Estadísticos prefieren suprimirlo del vocabulario técnico y referirse, en cambio, a medidas de tendencia central. Definiremos una medida de tendencia central como un índice de localización central empleado en la descripción de las distribuciones de frecuencia. Puesto que el centro de una distribución puede ser definido de diferentes maneras, habrá también diferentes medidas de tendencia central. Trataremos tres de las medidas de tendencia central más frecuentemente empleadas: la media, la mediana y la moda.

A lo largo de la primera parte de la sección, nos ocupamos primeramente en organizar los datos en una forma útil y significativa. Sin embargo, para ir más lejos deseamos disponer nuestros datos en forma tal que puedan presentarse proposiciones cuantitativas. Una distribución de frecuencia representa una organización de los datos, pero no nos permite por sí misma establecer proposiciones cuantitativas, ya sea describiendo la distribución o comparando dos o más distribuciones.

Hay dos características que se presentan en múltiples distribuciones de frecuencia que los Estadísticos han notado y para las cuales han desarrollado métodos cuantitativos, de descripción: (1) Con frecuencia los datos se acumulan alrededor de un valor central situado entre los dos extremos de la variable que se estudia. (2) Los datos pueden tender a dispersarse y distribuirse alrededor de un valor central, en forma tal que esta tendencia puede ser especificada cuantitativamente.

La capacidad de localizar un punto de tendencia central, particularmente cuando al mismo tiempo existe una descripción de la dispersión de calificaciones con respecto a ese punto, puede ser muy útil para los Estadísticos. Por ejemplo, podrán reducir una masa de datos a un simple valor cuantitativo que llegará a ser comprendido y comunicado a otros especialistas.

Anteriormente expresamos que con frecuencia se pide al Estadístico comparar las medidas obtenidas a partir de dos o más grupos de materias con el propósito de establecer inferencias acerca de los efectos de una variable independiente. las medidas de tendencia central simplifican mucho la tarea de establecer conclusiones.

La media aritmética

Usted probablemente estará íntimamente familiarizado con la media aritmética, porque siempre que obtiene un "promedio" de calificaciones sumando las cifras, y dividiéndolas por su número total está calculando la media aritmética. En pocas palabras, la media es la suma de las calificaciones o de los valores de una variable dividida por su número.

Expresado en forma algebraica:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{N} = \frac{\sum X}{N},$$

Donde:

$\bar{X}$ = La media y se le llama X barra,
N = Número de calificaciones
Σ = El verbo matemático que nos ordena sumar todas las observaciones.

Así, la media aritmética de las calificaciones 8, 12, 15,19, 24 es $\bar{X} = \frac{78}{5} = 15,60$

X	f	fx
12	1	12
11	2	22
10	5	50
9	4	36
8	6	48
7	4	28
6	3	18
5	2	10
4	2	8
N =	29	ΣfX = 232

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

$$\bar{X} = \frac{232}{29}$$

$$\bar{X} = 8,00$$

Tabla 5
Procedimientos de cómputo para calcular la media con distribuciones de frecuencia no agrupadas.

Obtención de la media de distribuciones de frecuencia no agrupadas:

Recordemos que hemos construido con anterioridad una distribución de frecuencias, como un medio para eliminar la repetición constante de calificaciones que ocurre con frecuencia variable, con el objeto de tener una sola entrada en la columna de frecuencias para representar el número de veces que se da una calificación dada. Así, en la tabla 5 sabemos, por la columna encabezada por f, que la calificación 8 se presentó 6 veces. Al calcular la media, no es necesario sumar seis veces 8, pues podemos multiplicar la calificación por su frecuencia y obtener el mismo valor de 48. Puesto que cada calificación se multiplica por su correspondiente frecuencia antes de la adición, podemos representar la media de la distribución de frecuencias como sigue:

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$$

Obtención de la media a partir de la distribución de frecuencia agrupada por el método de calificación original:

El cálculo de la media a partir de una distribución de frecuencia implica esencialmente los mismos procedimientos que han sido empleados para las distribuciones de frecuencia no agrupadas. Para empezar, se utiliza el punto medio de cada intervalo para representar todas las calificaciones dentro de ese intervalo. El punto medio de cada intervalo se multiplica por su frecuencia correspondiente, se suma este producto y el resultado se divide entre N. Los procedimientos empleados en el cálculo de la media a partir de una distribución de frecuencias agrupada se indican en la tabla 6.

1 Intervalo clase	2 Frecuencia f	3 Punto medio X	4 Frecuencia X punto medio fX	
125-129	2	127	254	$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N}$
120-124	5	122	610	
115-119	8	117	936	$= \frac{10195}{100}$
110-114	10	112	1120	
105-109	15	107	1605	
100-104	20	102	2040	
95-99	15	97	1455	$=101,95$
90-94	10	92	920	
85-89	8	87	696	
80-84	4	82	328	
75-79	3	77	231	
	N = 100		$\sum fX = 10195$	

Tabla 6
Procedimientos de cómputo para calcular la media a partir de una distribución de frecuencia agrupada

La mediana

En distribuciones de frecuencia agrupadas, la mediana se define como la calificación o calificación potencial de una distribución abajo y arriba de la cual cae la mitad de las frecuencias. Si esta definición les parece ligeramente familiar, no es por casualidad. La mediana es sencillamente un caso especial de un rango percentil; la mediana es la calificación del percentil 50. Debe quedar claro que los procedimientos generalizados expuestos anteriormente para determinar la calificación en varios rangos percentiles, pueden ser aplicados para calcular la mediana.

Ocasionalmente, será necesario la mediana cuando N no sea suficiente para justificar la fusión de los datos en la forma de una distribución de frecuencia o de una distribución de frecuencia agrupadas. Consideremos el siguiente arreglo de calificaciones: 5, 19, 37, 39, 45. Observe que las calificaciones están ordenadas de acuerdo a su magnitud y que N es un número impar. La calificación 37 es la mediana puesto que dos calificaciones caen encima y dos calificaciones caen debajo de ella. Si N es un número par, la mediana es la suma de los dos valores centrales divido por dos. Los dos valores centrales en el arreglo de calificaciones 8, 26, 35, 43, 47, 73, son 35 y 43. La media aritmética de estos dos valores es (35 + 43)/2, o sea 39.

La moda

De todas las medidas de tendencia central, la moda es la más fácilmente se determina, puesto que se obtiene por inspección, y no por cómputo. La moda es simplemente la calificación que ocurre con mayor frecuencia. Para las datos agrupados, la moda se designa como el punto medio del intervalo que contiene la mayor frecuencia. En la tabla 6 la moda es la calificación de 102 puesto que es el punto medio del intervalo 100 - 104 al cual corresponde la mayor frecuencia.

En algunas distribuciones, que no consideramos aquí, podrá haber dos puntos máximos que produzcan la apariencia de dos jorobas, similares a las de la espalda de un camello. Tales distribuciones se denominan bimodales. Una distribución que contenga más de dos jorobas se llama multimodal.

En general, la media aritmética es la media preferida para representar la tendencia central a causa de las diversas propiedades deseables que posee. Para empezar, la media es uno de los miembros del sistema matemático, que permite su empleo en análisis estadísticos más avanzados.

Otra característica importante de la media implica que es la más estable o la más confiable de las medidas de tendencia central. si tomáramos muestras repetidas de una población dada, la media generalmente mostraría una menor fluctuación que la correspondiente a la mediana o a la moda. En otras palabras, la media generalmente proporciona una mejor estimación del parámetro correspondiente a la población.

Por otra parte, hay algunas situaciones en que se prefiere la mediana como medida de tendencia central. Cuando la distribución es simétrica, la media y la mediana son idénticas. En estas circunstancias deberá emplearse la media. Sin embargo, como hemos visto, cuando la distribución es visiblemente asimétrica la media proporciona una estimación falsa de la tendencia central. El ingreso anual por familia es una variable comúnmente estudiada en donde se prefiere usar la mediana en vez de la media, porque la distribución de esta variable está sesgada en dirección de las salarios altos, con el resultado de que la media sobreestima el ingreso obtenido por la mayoría de las familias.

La mediana es también la medida que se elige en las distribuciones en las cuales hay valores indeterminados. Para ilustrar, cuando hacemos caminar ratas en un laberinto, habrá ocasiones en que una o varias simplemente no caminen. Sus tiempos son por lo tanto, indeterminados. Sus "calificaciones" no pueden despreciarse simplemente ya que la característica de su no-caminata será de una significación considerable al evaluar los efectos de la variable independiente. En estas circunstancias, la mediana deberá ser empleada como medida de tendencia central.

La moda es la medida apropiada siempre que se desee una estimación aproximada rápida de la tendencia central, o cuando estamos interesados únicamente en el caso típico. La moda se usa rara vez en las ciencias de la conducta.

Medidas de dispersión

En discusiones anteriores, decíamos que una calificación por sí misma carece de significado, y sólo lo adquiere cuando se compara con otras calificaciones y otros estadísticos. Así, si conocemos la media de la distribución de una variable dada, podemos determinar cuándo una calificación particular es mayor o menor que dicha media. Pero ¿cuándo mayor o menor? Resulta evidente, a esta altura, que una medida de la tendencia central, como la media, sólo proporciona una cantidad limitada de información. Para describir una distribución en forma más completa o para interpretar con más detalle una calificación, necesitaremos información adicional acerca de la dispersión de las calificaciones con respecto a nuestra medida de tendencia central.

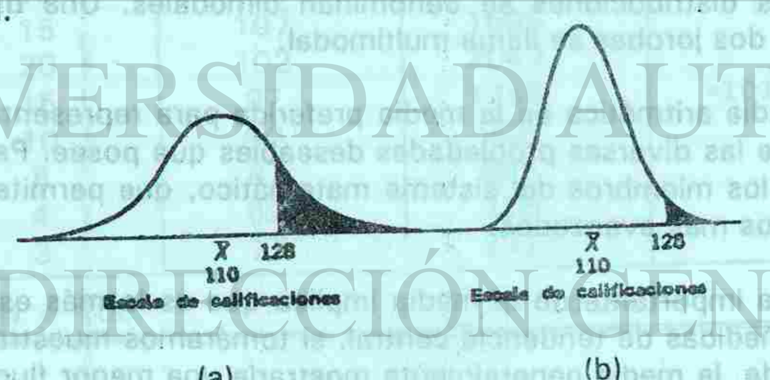


Fig. 6
Dos polígonos de frecuencia con medias idénticas pero diferente dispersión o variabilidad.

Consideremos en la gráfica de la figura 6 las partes (a) y (b). En ambos ejemplos de polígono de frecuencia, la media es exactamente la misma. Sin embargo, hay que

anotar la diferencia en la interpretación de la calificación 128. En (a), debido a que las calificaciones están bastante dispersas con respecto a la media, una calificación de 128 puede considerarse sólo moderadamente alta. Un buen número de individuos en la distribución obtuvo una calificación por encima de 128, como lo indica el área a la derecha de 128. En (b), por el contrario, las calificaciones están estrechamente distribuidas alrededor de la misma media. En una distribución más homogénea. En consecuencia, la calificación 128 está localizada casi en el máximo de la distribución y puede, por lo tanto, considerarse como una calificación muy alta.

Así pues, puede verse que para la interpretación de calificaciones individuales, debemos hallar una información auxiliar que acompañe a la media o a la mediana. Esta información adicional debe, en cierta forma, indicar el grado de dispersión de las calificaciones alrededor de la medida de tendencia central. Hay 5 medidas de dispersión o variabilidad: el rango, el rango intercuartil,, la desviación media, la varianza y la desviación estándar. De las cinco, discutiremos aquí la desviación estándar pues es la medida de dispersión más adecuada tanto para la estadística descriptiva como para la inferencial. En inferencia estadística avanzada, como en análisis de varianza, la varianza llegará a ser la medida de dispersión más adecuada.

Afortunadamente la desviación estándar, basada en la elevación al cuadrado de las calificaciones de desviación (diferencia entre un valor particular y la media aritmética), es de un extraordinario valor desde tres puntos de vista diferentes. (1) La desviación estándar representa dispersión de calificaciones por lo que la variabilidad de diferentes distribuciones puede compararse en términos de la desviación estándar (s). (2) La desviación estándar permite la interpretación precisa de las calificaciones dentro de una distribución. (3) La desviación estándar, como la media, es miembro de un sistema matemático que permite su utilización en consideraciones estadísticas más avanzadas. Tendremos más que decir acerca de los aspectos interpretativos de /s/ una vez que hayamos mostrado cómo se calcula.

La varianza se define verbalmente como la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones con respecto a la media dividida por N. Simbólicamente se representa así:

$$s^2 = \frac{\sum (X-\bar{X})^2}{N}$$

La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza y se define así:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (X-\bar{X})^2}{N}}$$

Para datos presentados en forma de distribución de frecuencia, la fórmula de la desviación estándar es:

$$s = \sqrt{\frac{\sum f\,(X-\bar{X})^2}{N}}$$

Observa que la f aparece en la fórmula para recordarle que cada $(X\text{-}\bar{X})^2$ se debe multiplicar por su correspondiente frecuencia antes de ser sumada. Aún cuando estemos utilizando una serie de calificaciones simples, esta fórmula es la más general porque la frecuencia de cada calificación es uno, es decir, $f = 1$. Por ésta razón, debemos considerar la f implícita aún cuando no se de.

O bien, la fórmula para calcular s con datos originales agrupados es

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2}$$

La tabla 7 resume el procedimiento para calcular s, que utiliza datos originales agrupados. Obsérvese que los valores fX^2 de la última columna, se pueden obtener elevando X al cuadrado y multiplicando por f, o simplemente multiplicando fX por X, como este último método requiere un paso menos y propicia en menor grado el error, los autores lo prefieren para obtener los valores de fX^2.

1 Intervalo de clase	2 f	3 Punto medio del intervalo	4 $f\chi$	5 $f\chi^2$
26-28	1	27	27	729
23-25	4	24	96	2304
20-22	7	21	147	3087
17-19	12	18	216	3888
14-16	18	15	270	4050
11-13	11	12	132	1584
8-10	9	9	81	729
5-7	3	6	18	108
2-4	1	3	3	9
	N = 66		$\Sigma f\chi = 990$	16488

$$\bar{X} = \frac{990}{66} = 15.00$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum fX^2}{N} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{16488}{66} - 15^2} = \sqrt{249.82 - 225{,}00} = \sqrt{24.82}$$

$$s = 4.98$$

Tabla 7
Procedimientos para calcular la desviación estándar a partir de distribuciones de frecuencia, usando, el método de datos originales.

Resumamos el cálculo de la desviación estándar a partir de una distribución de frecuencia:

Paso 1 Seguir todos los pasos necesarios para calcular la media a partir de datos agrupados.

Paso 2 Agregar una columna adicional, encabezada $f\chi^2$.

Paso 3 Multiplicar los valores de la columna $f\chi$ por los correspondientes valores de la columna χ y poner los resultados en la columna $f\chi^2$.

Paso 4 Sumar los valores de la columna $f\chi^2$ para obtener $\Sigma f\chi^2$

Paso 5 Substituir los valores $\Sigma f\chi^2$, N, $\bar{\chi}$, en la fórmula y efectuar las operaciones indicadas para encontrar la desviación estándar.

Una regla práctica para calcular la desviación estándar es que el cociente de dividir el rango por al desviación estándar, raramente es menor que 2 o mayor que 6. En nuestro ejemplo anterior, el cociente es 27/4,98, es decir 5,42. Si obtenemos una desviación estándar que nos proporciona un cociente mayor que 6 o menor que 2, casi seguramente hemos cometido un error. Si es mayor que 6, revisemos la columna $f\chi^2$ y la posición del punto decimal. Si es menor que 2, revisemos la posición del punto decimal.

Una buena comprensión del significado de la desviación estándar depende del conocimiento de la relación existente entre la desviación estándar y la distribución normal. Así, para poder interpretar las desviaciones estándar calculadas en este capítulo, es indispensable explorar la relación existente entre las calificaciones originales, la desviación estándar y la distribución normal. Presentamos este material a continuación.

La desviación estándar y la distribución normal estándar

Anteriormente notamos que las calificaciones obtenidas a partir de las escalas empleadas por los científicos que estudian el comportamiento, en general, carecen por sí mismas de significado a menos que se comparen con la distribución de las calificaciones de algún grupo de referencia. Claro está que las calificaciones obtenidas a partir de cualquier escala, incluyendo las empleadas por los físicos, llegan a tener un mayor significado cuando se comparan con un grupo de referencia, sea de personas o de objetos. Así, si nos dijeran que un pescador canadiense obtuvo una trucha de 22 kilos de peso, nos sorprenderíamos o no, según nuestros conocimientos acerca del peso usual de esta clase de pez. Sin embargo, una vez establecido un grupo de referencia, dicha medición adquiere sentido. Puesto que la mayoría de las truchas pesan alrededor de 4,5 kilos y en raras ecuaciones alcanzan los 10 kilos, el logro de nuestro pescador apócrifo se debe considerar exagerado.

Al interpretar una calificación única, queremos colocarla en algún lugar con respecto a la serie de calificaciones de un grupo de referencia. Anteriormente se aprendió a ubicar una calificación en su posición respectiva, determinando su rango percentil. Se recordará que el rango percentil de una calificación nos dice el porcentaje de calificaciones que son menores. Otro camino para la interpretación de una calificación única, podría ser observarla en relación con un punto central, como la media. Por tanto una calificación de 20 en una distribución con una media de 23 se puede expresar como -3. Finalmente, podremos expresar la desviación de la calificación en términos de unidades de desviación estándar. Así, si nuestra desviación estándar es 1,5 la calificación de 20 estaría dos desviaciones estándar por debajo de la media (es decir, -3/1,5 = -2). Este proceso de dividir la desviación de una calificación con respecto a la media por la desviación estándar, se conoce como la transformación hacia calificaciones estándar z, y se define como:

$$z = \frac{X - \bar{X}}{s}$$

Se notará que cada calificación en la distribución se puede transformar en una calificación $\dot{z}$, en donde cada $\dot{z}$ representará la desviación de una calificación específica, con respecto a la media expresada en unidades de desviaciones estándar.

¿Cuál es la importancia de la transformación a una calificación $\dot{z}$? Simplemente ésta: si la población de las calificaciones de una variable dada es normal, podemos expresar cualquier calificación como un rango percentil refiriendo nuestra $\dot{z}$ a la distribución normal estándar. Además, puesto que las calificaciones $\dot{z}$ representan números abstractos (adimensionales) en oposición a los valores concretos de las calificaciones originales (centímetros, kilos, coeficientes, I.Q., etc.), podemos comparar la posición de un individuo en una variable, con su posición en una segunda variable. Para entender esta importante característica de las calificaciones $\dot{z}$, tenemos que referirnos a la distribución normal estándar.

La distribución normal estándar tiene un área total igual a 1.00. Hay una proporción fija de casos entre una línea vertical, u ordenada, erigida en cualquier punto y una ordenada erigida en cualquier otro punto.

(La proporción de casos entre dos valores dados de la variable es una constante). Tomando unos cuantos puntos de referencia a lo largo de una curva normal, podemos enunciar lo siguiente:

1. Entre la media (z = 0) y una calificación estándar (z = 1) por encima de la media se encuentra el 34.13% de todos los casos. Análogamente, el 34.13% de todos los casos se encuentra entre la media y una calificación estándar por debajo de la media. Dicho de otra manera, 34.13% del área bajo la curva se encuentra entre la media y una calificación estándar por encima de la media, y 34.13% del área está comprendida entre la media y menos una calificación estándar.

2. Entre la media y 2 calificaciones estándar por encima de la media, se encuentra el 47.72% de los casos. Puesto que la curva normal es simétrica, 47.72% del área también está comprendida entre la media y -2 calificaciones estándar.

3. Finalmente entre la media y 3 calificaciones estándar por encima de la media se encuentra el 49.87% de los casos. Análogamente, el 49.87% de los casos está ubicado entre -3 calificaciones estándar. Estas relaciones se ilustran en la fig. 7.

Ahora, al transformar las calificaciones de una variable normalmente distribuida en calificaciones $\dot{z}$ expresamos en realidad estas calificaciones en unidades de la curva normal estándar. Para cualquier valor dado de x con una cierta proporción de área más allá de este, existe un valor correspondiente de $\dot{z}$ con la misma proporción de área más allá de él. Por ejemplo, si tenemos una población en la cual $\bar{X} = 30$ y $s = 10$, la z de la calificación en la media ($X = 30$) será igual a cero, y las calificaciones z que están 1 desviación estándar por encima y por debajo de la media ($X = 40$ y $X = 20$) serán + 1.00 y -1.00, respectivamente.

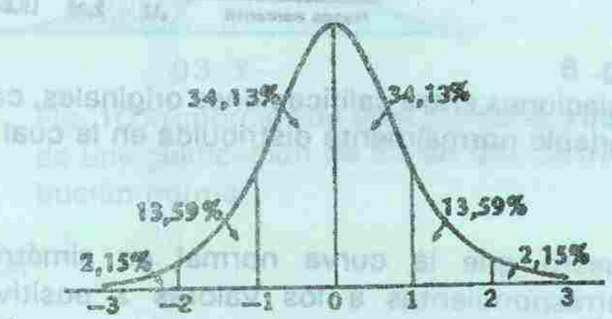


Fig. 7
Areas entre puntos seleccionados bajo la curva normal.

Para obtener claridad en la exposición, restringimos la anterior discusión del área bajo la curva normal a algunos puntos escogidos. Para efectos prácticos, sin embargo, es posible determinar el porcentaje de las áreas entre dos puntos cualesquiera, haciendo uso de los valores tabulados del área bajo la curva normal. (tabla A). La columna de la izquierda encabezada por $\dot{z}$ representa la desviación respecto a la media expresada en unidades de desviación estándar. Refiriéndonos al cuerpo de la tabla, podemos determinar la proporción del área total que se encuentra entre una calificación dada y la media (columna B), y el área más allá de una calificación dada (columna C). Así, si un individuo obtuvo una calificación de 24.65 en una variable normalmente distribuida con $\bar{X} = 16$ y $s = 5$, su calificación $\dot{z}$ sería:

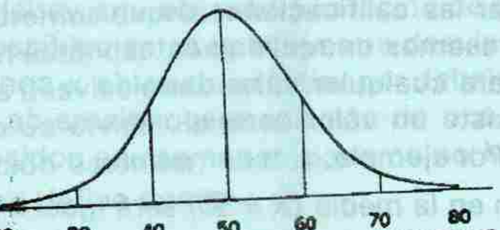
$$z = \frac{24,65 - 16}{5} = 1.73$$

Remitiéndonos a la comuna B en la tabla A, encontramos 0.4582 o sea que 45.82%[3] del área está situada entre dicha calificación y la media. Puesto que en una distribución simétrica 50% del área también está situada por debajo de la media, podemos concluir que el 95.82% del área total está ubicada por debajo de una calificación de 24.65. Nótese que ahora podemos interpretar esta calificación como un rango percentil de 95.82.

Supongamos que otro individuo obtuvo una calificación de 7,35 en la misma variable normalmente distribuida. Su calificación $\dot{z}$ sería:

$$z = \frac{7,35 - 16}{5} = -1,73$$

[3] Las áreas bajo la curva se expresan como proporciones del área. Para convertirlas en porcentajes del área, multiplica por 100 o simplemente, mueve la coma del decimal dos lugares hacia la derecha.



Calificaciones	20	30	40	50	60	70	80
Calificación z	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3
Rango percentil	.13	2,28	15,87	50,00	84,13	97,72	99,87

Fig. 8
Relaciones entre calificaciones originales, calificaciones z y rangos percentiles de una variable normalmente distribuida en la cual $\bar{X}=50$ y $s=10$

Puesto que la curva normal es simétrica, en la tabla A se dan las áreas correspondientes a los valores z positivos. Los valores z negativos tendrán exactamente las mismas proporciones que sus contrapartes positivas. Así, el área entre la media y la z de -1.73 es también 45.82%. El rango percentil de una calificación por debajo de la media se puede obtener ya sea substrayendo 45.82% de 50% ya sea directamente de la columna C. En cualquier caso, el rango percentil de una calificación de 7.35 es 4.18.

Debe notarse cuidadosamente que estas relaciones se aplican exclusivamente a las calificaciones originales en calificaciones estándar no altera, de ninguna manera, la forma de la distribución original. Así, si la distribución original de calificaciones no es normal, la distribución de calificaciones z sera no normal. En otras palabras, la transformación a z no convertirá una distribución no normal en una distribución normal.

La figura 8 aclara aún más las relaciones entre las calificaciones originales, las calificaciones z y los rangos percentiles de una variable normalmente distribuida. En ella se toman $\bar{X}=50$ y $s=10$.

Tomemos como ejemplo varios problemas en los que suponemos que la media de la población $\bar{X}$ es igual a 100 en una prueba estándar de coeficientes I.Q., y la desviación estándar $s=16$. Se supone que la variable está normalmente distribuida.

Ejemplo 1
Juan Domínguez obtiene una calificación de 125 en una prueba I.Q. ¿Qué porcentaje de casos se encuentran entre su calificación y la media? ¿Cuál es su rango percentil en la población?

Solución:
Al comienzo es conveniente hacer un diagrama simple que represente las relaciones en cuestión. Así, en el presente ejemplo, el diagrama aparecería como en la figura 9. Para encontrar el valor de z correspondiente a $X=125$, restamos la media de la

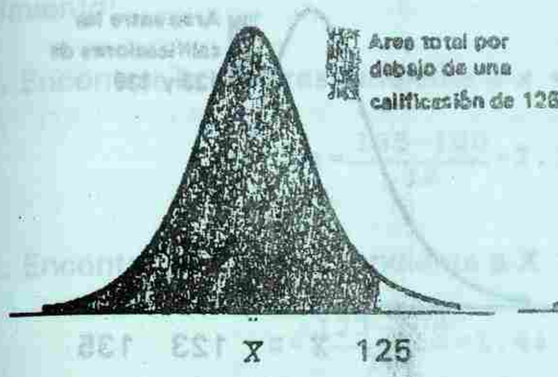


Fig. 9 Proporción de área por debajo de una calificación de 125 en una distribución normal.

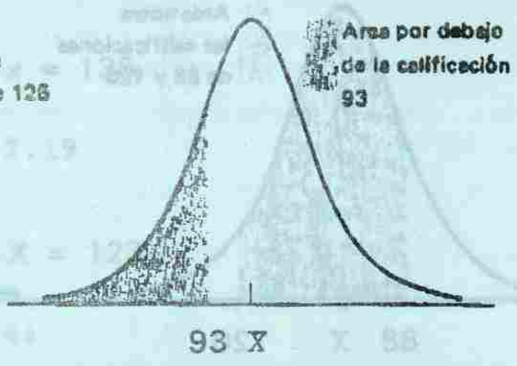


Fig. 10 Proporción de área por debajo de de una calificación de 93 en una distribución normal.

población de 125 y la dividimos por 16. Así

$$z=\frac{125-100}{16}=1,56$$

Buscamos 1.56 en la columna A (tabla A), cuyo correspondiente valor de la columna B es 0.4406, es decir el 44.06% del área está ubicada entre la media y 1.56 de desviación estándar por encima de la media. El rango percentil de Juan Domínguez es, por lo tanto, 50 + 44.06 o sea 94.06.

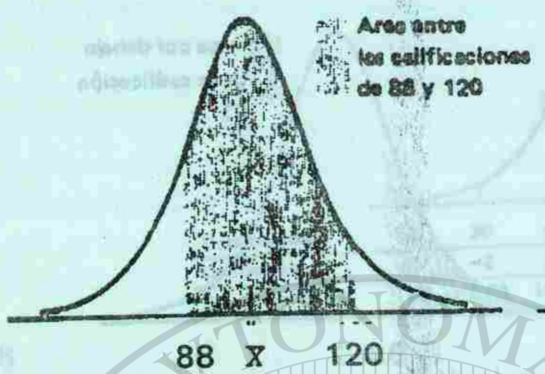
Ejemplo 2
María Rodríguez obtiene una calificación de 93 en una prueba de C.I. ¿Cuál es su rango percentil en la población (figura 10)?

Solución:

$$z=\frac{93-100}{16}=-0.44$$

El signo menos indica que la calificación está por debajo de la media. Buscamos 0.44 en la columna A (tabla A), cuyo valor correspondiente en la columna C es de 0.33, es decir que 33.0% de los casos caen debajo de su calificación. Así, tenemos que su rango percentil es de 33.00.

Ejemplo 3
¿Qué porcentaje de los casos se encuentra entre la calificación de 120 y una calificación de 88 (figura 11)?
Solución:
Nótese que para responder esta pregunta no restamos 88 de 120 y dividimos por x. Las áreas de una curva normal de probabilidad se designan con relación a la media como punto fijo de referencia. Debemos, por tanto, calcular separadamente el área entre la media y una calificación de 120 y el área entre la media y una calificación de 88. Sumamos después las dos áreas para resolver el problema.



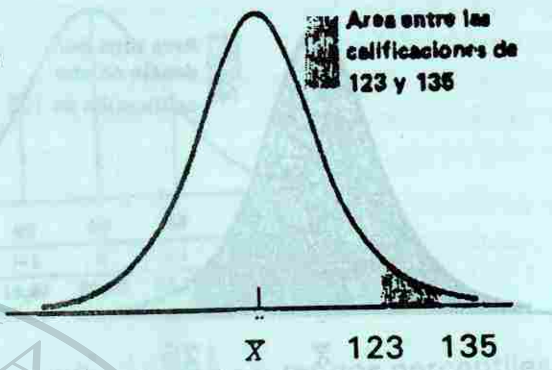


Fig. 11 Proporción del área entre las calificaciones de 88 y 120 en una distribución normal.

Fig. 12 Proporción del área entre las calificaciones de 123 y 135 en una distribución normal.

Procedimiento:

Paso 1. Encontrar la z correspondiente a X = 120:

$$z=\frac{120-100}{16}=1.25$$

Paso 2. Encontrar la z correspondiente a X = 88:

$$z=\frac{88-100}{16}=-0.75$$

Paso 3. Encontrar las áreas requeridas por referencia a la columna B (tabla A):

Area entre la media y z = 1.25 es 39.44%
Area entre la media y z = -0.75 es 27.34%

Paso 4. Sumar las dos áreas obtenidas

Así, el área entre 88 y 120 = 66.78%

Ejemplo 4
¿Qué porcentaje del área está ubicado entre una calificación de 123 y otra de 135 (figura 12)?
Solución:
Una vez más, no podemos obtener la respuesta directamente. Debemos encontrar el área entre la media y la calificación de 123 y restarla del área entre la media y la calificación de 135.

Procedimiento:

Paso 1. Encontrar la z correspondiente a x = 135.

$$z=\frac{135-100}{16}=2.19$$

Paso 2. Encontrar la z correspondiente a X = 123.

$$z=\frac{123-100}{16}=1.44$$

Paso 3. Encontrar las áreas requeridas en la columna B (tabla A)

El área entre la media y z = 2.19 es 48.57%

El área entre la media y z = 1.44 es 42.51%

Paso 4. Restar para obtener el área entre 123 y 135. La diferencia es

48.57 - 42.51 = 6.06%

Ejemplo 5.
Dijimos anteriormente que la transformación a calificaciones z nos permite comparar una posición individual en una variable con su posición en otra. Ilustremos este importante empleo de las calificaciones z.
Solución:
En una prueba estándar de aptitud, Juan Garza obtuvo una calificación de 245 en la prueba de relaciones verbales y de 175 en la prueba de relaciones matemáticas. Las medias y las desviaciones estándar en cada una de estas pruebas normalmente distribuidas son las siguientes: verbal, $\bar{X}=220$, s = 50; matemáticas, $\bar{X}=150$, s = 25.
¿En cuál de los dos pruebas obtuvo Juan mejor calificación? Lo único que tenemos que hacer es comparar las calificaciones estándar obtenidas por Juan en cada variable.
Así:

$$z\,verbal=\frac{245-220}{50} \qquad z\,matemática=\frac{175-150}{25}$$

$$= 0.50 \qquad = 1.00$$

Podemos concluir, por tanto, que Juan obtuvo una mejor calificación en la parte matemática de la prueba de aptitud. Por supuesto, si lo deseamos, podemos expresar las calificaciones como rangos percentiles. Así, el rango percentil de Juan es 84.13 en la prueba matemática y sólo de 69.15 en la prueba verbal.

Ejercicio 3.5

Supóngase que la Secretaría de Comercio (SECOM), investiga el precio de cierto artículo básico, en los ciento cuarenta supermercados de la zona metropolitana y encuentra lo sig:

$	71	48	78	33	62	68	78	63	43	39	57	93	56	61
	40	43	45	84	63	61	48	73	70	60	74	53	72	39
	65	68	63	82	72	77	55	52	48	42	86	73	49	71
	58	52	68	67	63	72	63	73	68	59	68	65	34	63
	80	63	67	55	58	88	50	56	59	56	85	54	63	88
	62	87	66	83	70	88	79	52	33	61	60	26	100	54
	65	69	67	70	60	55	64	80	47	83	81	57	48	76
	58	46	94	40	38	43	59	59	50	95	67	82	75	62
	87	64	36	57	63	77	76	62	45	69	70	64	42	78
	58	60	64	47	52	62	51	73	73	84	66	43	69	53

1) Determina la distribución de frecuencias agrupadas, usando 15 intervalos de clase.

2) Anota los límites y puntos medios verdaderos de cada intervalo.

3) Obtén la distribución de frecuencias acumuladas y la distribución de porcentajes acumulados.

4) Dibuja el polígono de frecuencia de la distribución.

5) Dibuja el histógrama correspondiente, utilizando los límites reales.

6) Dibuja el polígono de porcentajes acumulados (ojiva) de la distribución, acumulando las frecuencias hacia arriba.

7) Utilizando la curva de porcentajes acumulados, encuentra:
   a) La mediana   b) El precio correspondiente al 25% percentil   c) El precio correspondiente al 75% percentil

8) Encuentra el rango percentílico correspondiente a los siguientes precios:
   a) $40   b) $50   c) $80

9) Supón que la SECOM decide fijar el precio de este producto a $59, ¿cuál será el porcentaje de supermercados que tendrán que subir el precio de este artículo?

10) Supón que la SECOM decide clausurar todos los supermercados que ofrezcan este producto con un rango percentil superior a 80, independientemente de los precios de otros artículos. Por lo tanto, el percentil 80 puede llamarse punto de "eliminación". ¿Qué precio constituye el punto de eliminación para esta distribución?

11) Dada una distribución normal con una media de 60 y una desviación estándar de 10.4, encuentra las calificaciones estándar equivalentes para las siguientes calificaciones.
   a) 70   b) 56   c) 60   d) 46.5   e) 83.4   f) 34

12) Encuentra la proporción de área bajo la curva normal entre la media y las siguientes calificaciones estándar.
   a) -1.35   b) +0.48   c) +2.27   d) -1.74   e) +1.06
   f) +2.83   g) -0.52   h) +1.74   i) +2.07

13) Dada una distribución normal basada en 1000 casos con una media de 60 y una desviación estándar de 9, encuentra:
   a) La proporción del área y el número de casos entre la media y las siguientes calificaciones: 70, 80, 55, 35.
   b) La proporción del área y el número de casos entre las siguientes calificaciones: 70 - 80, 55 - 60, 55 - 80.

14) A continuación se dan las calificaciones del estudiante Garza, la media y la desviación estándar en cada una de las cinco materias efectuadas a los 3000 estudiantes de una preparatoria.

Materias	$\bar{X}$	s	Calif. de Garza
Español	50	5	60
Matemáticas	65	8.1	74
Biología	79	11.3	75
Química	70	6.5	80
Sociales	82	7.4	70

   a) Convertir cada calificación de las pruebas de Garza en calificaiones estándar.
   b) ¿En cuál de las pruebas obtuvo una posición mejor? ¿En cuál peor?
   c) ¿Cuántos estudiantes sobrepasaron la calificación que Garza obtuvo en matemáticas? ¿En biología? ¿En química?
   d) ¿Qué suposición se debe hacer para contestar la pregunta anterior?

15.- En una prueba normalmente distribuida de aptitud de matemáticas:
   Para mujeres: $\bar{X} = 58$, $s = 10$
   Para hombres: $\bar{X} = 70$, $s = 8$

   a) Roberto obtuvo una calificación de 74, ¿Cuál es su rango percentil en relación con ambas normas, la masculina y la femenina?
   b) El rango percentil de Leticia es 73 en la norma femenina. ¿Cuál es su rango percentil en la norma masculina?

CAPITULO 4

TRIGONOMETRIA

PRIMERA PARTE

La trigonometría se considera como la rama de la geometría métrica que, como lo indica su nombre, estudia las relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados y los ángulos de los triángulos; aunque sus aplicaciones se extienden a funciones y ángulos en general. También se le ha definido como la ciencia de las medidas "indirectas", ya que es útil para calcular longitudes, distancias y ángulos, los cuales de otra forma no podrían ser medidos directamente; como la profundidad de un precipicio, la altura de una montaña, la distancia de la tierra a la luna, etc.

En la tecnología moderna, la trigonometría desempeña un papel importante en la ingeniería, navegación, mecánica, en las aplicaciones de los vectores, movimientos ondulatorios, funciones periódicas, sonido, luz, electricidad, etc.

En este capítulo sólo verás la trigonometría aplicada a la geometría plana, ya que es un medio muy importante para el estudio de los fenómenos físicos, así como también para estudios más avanzados de las matemáticas.

4.1 Angulos

Objetivo:

Clasificar los ángulos de acuerdo a su medida

En esta sección se presentan algunos conceptos preliminares sobre ángulos que frecuentemente estarás utilizando.

ANGULO ∠
Se denomina "ángulo" a la abertura comprendida entre dos rectas que se cortan en un punto. Las rectas son los "lados del ángulo" y el punto donde se cortan es su "vértice".

En la figura 4.1 las rectas $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se cortan en el punto A. Por lo tanto, el vértice del ángulo es A; los lados del ángulo son $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$.

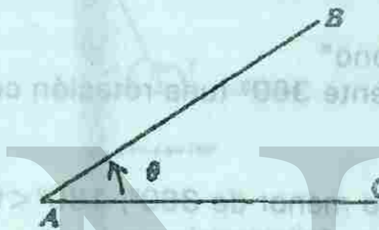


Fig. 4.1

Un ángulo se designa por cualquiera de las siguientes maneras: con la sola letra del vértice, si hay sólo un ángulo que tenga tal vértice, por ejemplo, ∠ A de la figura 4.1; mediante tres letras mayúsculas de las cuales la del vértice se encuentra y se nombra entre las otras dos, que se colocan sobre los lados del ángulo, en la figura 4.1 el ∠A se puede designar por ∠BAC o ∠CAB; o simplemente se le puede llamar por una letra griega como el ∠Θ (teta) de la figura anterior, las más usadas son: α (alfa), β (beta), δ (delta), ϕ (fi), ρ (ro), ω (omega), etc.

El tamaño de un ángulo depende de la extensión del plano que se barre entre los lados del ángulo. Por ejemplo, el transportador de la figura 4.2 muestra que ∠A mide 60°. Al utilizar un transportador es necesario que te cerciores de que el vértice del ángulo caiga exactamente en el centro de él, y que uno de sus lados coincida con el diámetro señalado por 0°-180° del transportador.

Fig. 4.2

El tamaño de un ángulo no depende de la longitud de sus lados. Así, por ejemplo, el tamaño del ∠A de la figura 4.2, no cambiará si se alargan o se acortan sus lados $\overline{AB}$ y

CLASES DE ANGULOS

"Angulo agudo"
Es el menor de 90°; $\angle A < 90°$

"Angulo recto"
Es el que mide exactamente 90°; $\angle R = 90°$

"Angulo obtuso"
Es el mayor de 90° pero menor de 180°; $90° < \angle O < 180°$

"Angulo llano"
Es el que mide exactamente 180°; $\angle LL = 180°$

"Angulo de una vuelta o perígono"
Es el que mide exactamente 360° (una rotación completa; $\angle P = 360°$

"Angulo cóncavo"
Es el mayor de 180° pero menor de 360°; $180° < C < 360°$

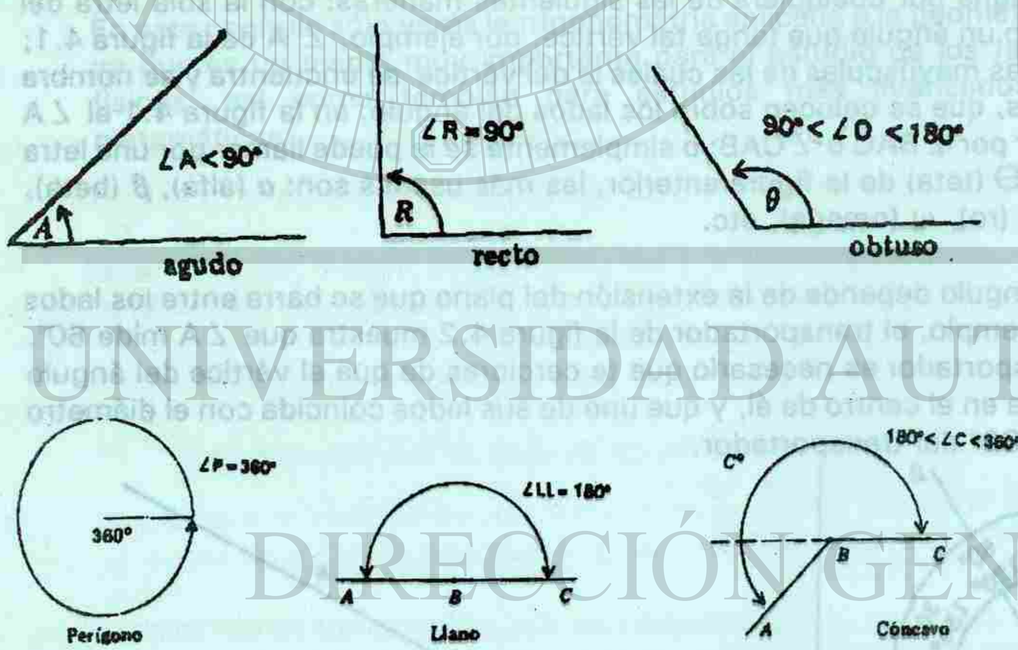


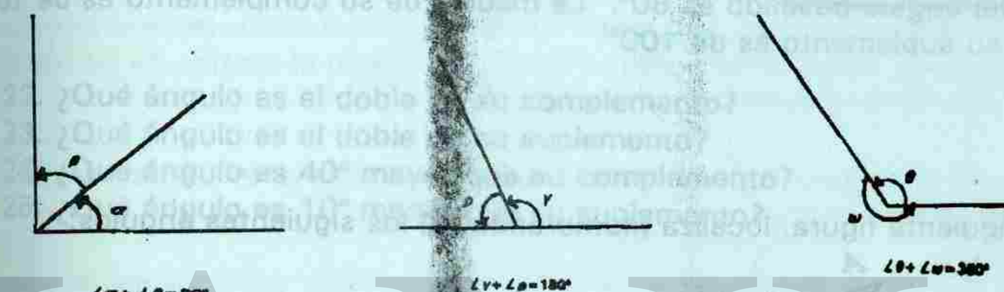
Fig. 4.3

ANGULOS COMPLEMENTARIOS, SUPLEMENTARIOS Y CONJUGADOS

"Angulos complementarios"
Son dos ángulos cuya suma es un ángulo recto (90°)

"Angulos suplementarios"
Son dos ángulos cuya suma es un angulo llano (180°)

"Angulos conjugados"
Son dos ángulos cuya suma es igual a un perígono (360°)



Angulos complementarios — Angulos suplementarios — Angulos conjugados

Fig. 4.4

Ejemplo 1

Si los ángulos M y N son suplementarios:
a) Encuentra la medida del ∠N si el $\angle M = 56°$
b) Clasifica cada ángulo como agudo u obtuso

Solución
a) $\angle M + \angle N = 180°$ La suma de ángulos suplementarios es 180°
$56° + \angle N = 180°$
$\angle N = 124°$

b) ∠M es agudo y el ∠N es obtuso

Ejemplo 2
Si la medida de un ángulo es 20° menor que la medida de su suplemento:
a) Encuentra la medida del ángulo
b) Encuentra la medida del suplemento del ángulo
c) Encuentra la medida del complemento del ángulo

Solución

a) Sea x = la medida del ángulo

Entonces 180°-x es la medida del suplemento

x = (180°-x)-20°

2x = 160°

x = 80°

b) La medida del suplemento del ángulo es: 180°-x

180°-x = 180°-80° = 100°

c) La medida del complemento del ángulo es: 90°-x

90°-x = 90°-80° = 10°

Así la medida del ángulo buscado es 80°. La medida de su complemento es de 10° y la medida de su suplemento es de 100°

Ejercicio 4.1

A partir de la siguiente figura, localiza (nombrándolos) los siguientes ángulos:

1. Cuatro ángulos agudos
2. Un ángulo recto
3. Dos ángulos obtusos
4. Un ángulo llano

Determina si cada ángulo es agudo, recto, obtuso, llano, perígono o cóncavo:

5. 180° ____________ 6. 90° ____________

7. 360° ____________ 8. 75° ____________

9. 100° ____________ 10. 200° ____________

Encuentra el complemento de cada uno de los siguientes ángulos:

11. 20° 12. 43° 13. 63°

Encuentra el suplemento de cada uno de los siguientes ángulos

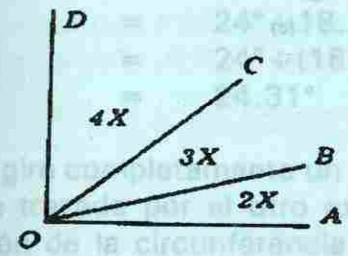
14. 140° 15. 25° 16. 45°

Encuentra el conjugado de cada uno de los siguientes ángulos

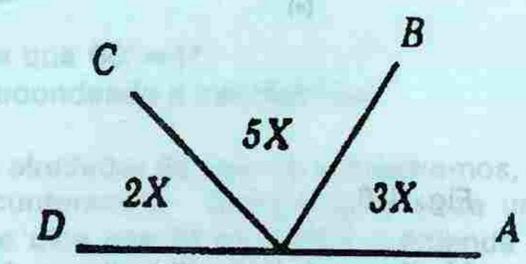
17. 60° 18. 200° 19. 150°

Encuentra el valor de "x" y cuánto mide cada ángulo

20.



21.



22. ¿Qué ángulo es el doble de su complemento?
23. ¿Qué ángulo es el doble de su suplemento?
24. ¿Qué ángulo es 40° mayor que su complemento?
25. ¿Qué ángulo es 10° menor que su suplemento?

4.2 Medida de un ángulo

Objetivo:

Convertir medidas de ángulos dados en grados y minutos a grados decimales o a radianes, y viceversa; aplicar las fórmulas para encontrar la longitud de arco y el área de un sector circular.

Un ángulo también se puede formar rotando un segmento de recta alrededor de uno de sus extremos: el vértice (punto O de la figura 4.5); desde su posición inicial, el "lado inicial" $(\overline{OX})$, hasta la posición final, el "lado terminal" $(\overline{OP})$

Fig. 4.5

El ángulo así generado se llama "positivo" si la dirección de rotación (indicada por una flecha curvada) va en contra del movimiento de las manecillas del reloj y "negativo si la dirección de rotación es en el sentido de las manecillas del reloj. En la figura 4.6, los incisos a) y c) muestran ángulos positivos y el inciso b) de la misma figura muestra un ángulo negativo.

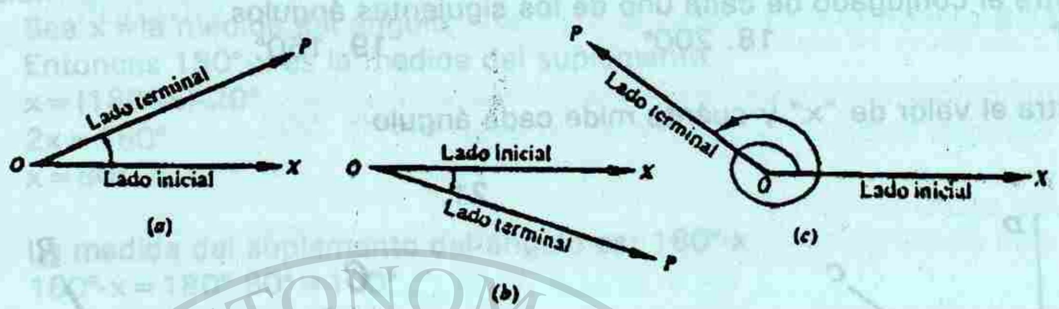


Fig. 4.6

Medido así, la medida de un ángulo no tiene límite numérico, puesto que un lado terminal puede ser rotado tanto como se desee, ya sea en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido contrario.

La medida de un ángulo especifica cuánto gira un segmento de recta, desde su posición inicial hasta la final.

Existen dos sistemas fundamentales y de mucho uso para medir ángulos: "sexagesimal" y el "circular".

La medida de un ángulo puede expresarse en grados o en radianes; la primera corresponde al sistema sexagesimal y la segunda al circular.

En el primer sistema, un grado se define como:

> **GRADO (°)**
> Es la medida del ángulo central subtendido por un arco de longitud igual a 1/360 de la circunferencia de un círculo.

Es decir, se considera a la circunferencia dividida en 360 partes iguales y cada parte es el ángulo de un grado (1°). Cada grado se considera dividido en 60 partes iguales llamadas minutos, un minuto (1′) es 1/60 de un grado. Y a su vez, cada minuto en 60 partes iguales llamadas segundos, un segundo (1") es 1/60 de un minuto, o sea 1/3600 de un grado.

Ejemplo 1
Convierte el ángulo de 59.23° a grados, minutos y segundos.

Solución

59.23°	=	59° + 0.23°	
	=	59° + 0.23(60)′	Ya que 1° = 60′
	=	59°13.8′	
	=	59°13′ + 0.8(60)"	Ya que 1′ = 60"
	=	59°13′48"	

Ejemplo 2
Convierte el ángulo de 24°18′42" a grados en forma decimal

Solución

24°18′42"	=	24° + 18′ + 42"	
	=	24° + 18′ + (42/60)′	Ya que 60" = 1′
	=	24° + 18.7′	
	=	24° + (18.7/60)°	Ya que 60′ = 1°
	=	24.31°	(redondeado a centésimas)

Si se gira completamente un segmento de recta alrededor de uno de sus extremos, la curva trazada por el otro extremo es una circunferencia. Cada ángulo traza una porción de la circunferencia llamada "arco"; se dice que el arco (PQ) subtiende el ángulo central que lo formó ($\angle$ POQ), mientras que el ángulo "interseca" el arco (fig. 4.7)

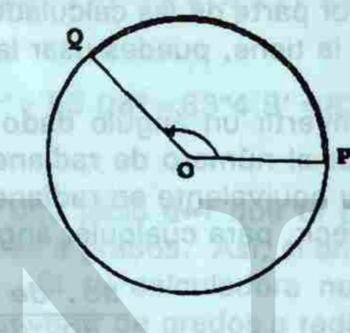


Fig. 4.7

El segundo sistema de medición de ángulos se basa en la idea de que un ángulo central interseca a un arco cuya longitud se puede comparar con el radio de la circunferencia.

Considera ahora que el ángulo central subtendido por un arco AB cuya longitud sea igual al radio de la circunferencia. El $\angle$ AOB de la figura 4.8 nos permite definir una nueva unidad de medida angular que recibe el nombre de "radián".

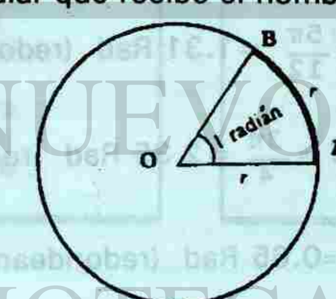


Fig. 4.8

> **RADIAN (Rad)**
> Es el ángulo central subtendido por un arco de longitud igual al radio de la circunferencia del círculo.

El tamaño del $\angle AOB$ (1 rad) siempre será el mismo ya que en cualquier circunferenci la razón de la longitud de la circunferencia a su radio es constante.

En la figura 4.7, si el arco PQ es tres veces el radio de la circunferencia, entonces, e $\angle POQ$ será de 3 Radianes. Generalizando, en cualquier circunferencia la longitud d radio está contenida en la circunferencia "2π" veces, ya que la circunferencia de u círculo es igual a $2\pi R$. Por lo tanto, toda la circunferencia (360°) subtiende un ángu de 2π Radianes; entonces 2π Rad = 360°, es decir πRad = 180°. Por consiguiente:

$$1 \text{ Rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 57.296^{\circ} = 57^{\circ}17'45''$$

$$1^{\circ} = \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ Rad} = 0.017453 \text{ Rad}$$

donde $\pi = 3.14159$ (la mayor parte de las calculadoras tienen una tecla especial pa el número π. Si la tuya no la tiene, puedes usar la aproximación anterior).

Esto significa que para convertir un ángulo dado en radianes a su equivalente e grados, debes de multiplicar el número de radianes por $180/\pi$; y para convertir u ángulo dado en grados a su equivalente en radianes, debes de multiplicar el núme de grados por $\pi/180$. Es decir, para cualquier ángulo se cumple que:

$$\frac{\text{No. de radianes}}{\text{No. de grados}} = \frac{\pi}{180}$$

Ejemplo 3

Convierte los siguientes ángulos expresados en grados a radianes:

a) 75° b) 37.24°

c) 135° d) 58°25'

Solución

a) $75^{\circ} = 75 \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ Rad} = \frac{5\pi}{12} = 1.31$ Rad (redondeando a centésimas)

b) $135^{\circ} = 135 \left(\frac{\pi}{180}\right) \text{ Rad} = \frac{3\pi}{4} = 2.35$ Rad (redondeando a centésimas)

c) $37.24^{\circ} = 37.24 \left(\frac{\pi}{180}\right) = 0.65$ Rad (redondeando a centésimas)

d) $58^{\circ}25' = 58.42 \left(\frac{\pi}{180}\right) = 1.02$ Rad (redondeando a centésimas)

NOTA: La palabra "radián" se debe de sobrentender sin que esté escrita. No e éste el caso con la medida en grados; sus unidades deben siempre s incluidas.

Ejemplo 4

Convierte los siguientes ángulos expresados en radianes a grados:

a) $\frac{\pi}{3}$ Rad b) 3 Rad

c) $\frac{4\pi}{5}$ Rad d) 1.45 Rad

Solución

a) $\frac{\pi}{3} Rad = \frac{\pi}{3}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 60^{\circ}$

b) $\frac{4\pi}{5} Rad = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 144^{\circ}$

c) 3 Rad = $3\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 171.89^{\circ}$-$171^{\circ}53.4' = 171^{\circ}53'24''$

d) 1.45 Rad = $1.45\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 83.08^{\circ} = 83^{\circ}4.8' = 83^{\circ}4'48''$

Algunas calculadoras tienen una tecla d↔r que te permite la conversión directa de grados a radianes y de radianes a grados. Así, si entras con 180 seguido por d↔r te dará 3.14592654 radianes. Si tu calculadora no tiene esta tecla, tendrás que multiplicar por $\pi/180$ para convertir de grados a radianes y por $180/\pi$ para convertir de radianes a grados.

La tabla 1, es una tabla de conversión que muestra algunos ángulos (que ocurren frecuentemente) con su medida tanto en grados como en radianes.

ANGULO EN GRADOS	ANGULO EN RADIANES	ANGULO EN GRADOS	ANGULO EN RADIANES
30	$\pi/6$	210	$7\pi/6$
45	$\pi/4$	225	$5\pi/4$
60	$\pi/3$	240	$4\pi/3$
90	$\pi/2$	270	$3\pi/2$
120	$2\pi/3$	300	$5\pi/3$
135	$3\pi/4$	315	$7\pi/4$
150	$5\pi/6$	330	$11\pi/6$
180	π	360	2π

Tabla 1

Aunque muchos estudiantes están más familiarizados con la medida de un ángulo en grados y, por ello, prefieren manejar los grados en sus cálculos, este tipo de medida tiene sus limitaciones. De hecho, varias aplicaciones de los ángulos incluyendo las geométricas, requieren que éstos se midan en radianes. Esto se debe, a que los radianes son números reales (sistema decimal), independientemente de la elección de las unidades (puesto que la definición de un radián depende de una razón). En esta sección te presentaremos dos aplicaciones de las medidas en radianes referentes a longitudes de arco y áreas asociados con círculos.

Por ejemplo, en un círculo de radio "r", la longitud "s" del arco interceptado por el ángulo central "Θ", en la figura 4.9 puede encontrarse mediante la fórmula

$$S = r\Theta$$

esto es, la longitud del arco = al radio x el ángulo central en radianes.

NOTA: S y r pueden medirse en cualquier unidad de longitud que convenga pero deben expresarse en la misma unidad).

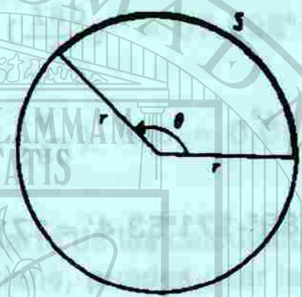


Fig. 4.9

Esta fórmula se sigue inmediatamente de la definición de radián, como la razón de la longitud del arco al radio, esto es, $\theta = \frac{s}{r}$ La fórmula anterior no es válida si Θ está indicada en grados.

Ejemplo 5

Encuentra la longitud del arco sobre un círculo de 5 m. de radio que subtiende un ángulo central de 40°.

Solución

Para usar la fórmula anterior, la medida del ángulo en grados debe primero convertirse en radianes. Así:

$$\theta = 40^\circ = 40\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{2\pi}{9}\,Rad$$

Por lo tanto

$$S = (5)\left(\frac{2\pi}{9}\right)m = 3.49m$$

El área "A", la parte sombreada de la figura 4.10, de un sector circular de radio "r" y ángulo central "Θ" expresado en radianes es:

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2$$

esto es, el área del sector = $\frac{1}{2}$ x el angulo central en radianes x el radio al cuadrado.

NOTA: A se medirá en unidades cuadradas de área que corresponden a la unidad de longitud utilizada para medir r

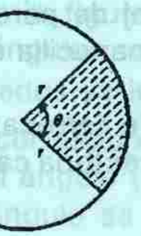


Fig. 4.10

Ejemplo 6

Encuentra el área de un sector formado por un angulo de 96° en un círculo de 15 plg. de diámetro.

Solución

Se convierten 96° a radianes: $\theta = 96^\circ = 96\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{8\pi}{15}\,Rad$

y el radio es la mitad del diámetro, $r = \frac{15}{2}\,plg$

Por lo tanto:

$$A = \frac{1}{2}\theta r^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi}{15}\right)\left(\frac{15}{2}\right)^2 plg^2 = 15\pi \text{ plg.}^2 = 47 \text{ plg}^2$$

Ejercicio 4.2

Expresa en radianes cada uno de los siguientes ángulos.

1. 50°
2. 112°45′
3. 140°
4. 76°35′25"
5. 68.72°

Expresa en grados cada uno de los siguientes ángulos:

6. $\pi/9$Rad
7. 3/4Rad
8. $5\pi/8$ Rad
9. 1.2 Rad
10. 7/5 Rad

11. En un círculo de 24 cm. de radio, encuentra la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 80°
12. En un círculo de 15 plg. de radio, encuentra el ángulo central subtendido por un arco de 30 plg. de longitud, en radianes y en grados.
13. Encuentra el radio del círculo para el cual un arco de 20 cm de longitud subtiende un ángulo de 60°.
14. El final de un péndulo de 80 cm describe un arco de 15 cm. ¿Qué ángulo recorre al péndulo al balancearse?

15. El minutero de un reloj de pared es de 20 cm de longitud. ¿Qué recorrido realiza la punta de la manecilla en 20 minutos?

16. La curva de una vía de ferrocarril se va a tender en un círculo. ¿Qué radio deberá usarse si la trayectoria cambia de dirección 25° en una distancia de 120 m?

17. Encuentra el área del sector determinado por un ángulo central de $\pi/3$ Rad. en un círculo de 30 cm de diámetro.

18. Encuentra el área del sector determinado por un ángulo central de 100° en un círculo de 12 cm de radio.

19. Determina el ángulo central necesario en radianes, y en grados, para formar un sector de 14.6 cm^2 de área en un círculo de 4.85 cm de radio.

20. Un sector circular de 105 cm^2 de área tiene un ángulo central de 50°. Encuentra el radio del círculo.

4.3 Triángulos

Objetivo:

> Encontrar la media de un ángulo de un triángulo si se conocen las medidas de los otros dos. Dadas las medidas de dos lados de un triángulo rectángulo, usar el teorema de Pitágoras para encontrar el tercer lado.

En esta sección se presentan algunos conceptos y dos teoremas preliminares sobre triángulos que frecuentemente utilizarás

> **TRIANGULO** $\triangle$
> Es una superficie plana "trilateral"; es decir, tiene tres lados y por lo tanto tres vértices y tres ángulos.

El triángulo es el polígono con menos lados. Los vértices de un triángulo son los puntos en donde se cortan sus lados y para nombrarlo se pueden usar las tres letras de sus vértices en cualquier orden.

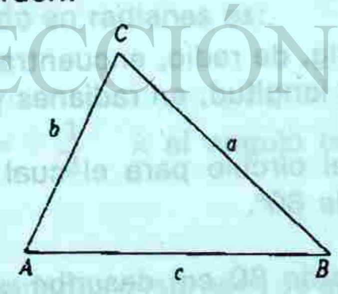


Fig. 4.11

En esta forma, el triángulo que está en la figura 4.11 se designa por $\triangle ABC$; sus vértices son A, B y C, por lo tanto, sus ángulos son A, B y C, también; sus lados son $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, pero generalmente los lados se indican con las mismas letras pero minúsculas, de sus ángulos "opuestos" correspondientes, es decir, el lado que no es lado del ángulo recibe la misma letra del ángulo (pero minúscula). Cada uno de los lados de un triángulo que forman un ángulo se les llama lados "adyacentes" del ángulo. Por ejemplo, de la figura 4.11:

El lado "a" es opuesto al $\angle A$ y adyacente al $\angle B$ y $\angle C$
El lado "b" es opuesto al $\angle B$ y adyacente al $\angle A$ y $\angle C$
El lado "c" es opuesto al $\angle C$ y adyacente al $\angle A$ y $\angle B$

Los triángulos se clasifican de acuerdo a sus lados, o a sus ángulos. Con respecto a sus lados, los triángulos pueden ser:

i) **Triángulos equiláteros**
Son los que tienen sus tres lados iguales ($a = b = c$). También tienen sus tres ángulos iguales ($\angle A = \angle B = \angle C = 60°$)

ii) **Triángulos isosceles**
Son los que tienen dos de sus lados iguales y uno desigual ($a = b \neq c$). También dos de sus ángulos son iguales ($\angle A = \angle B$).

iii) **Triángulos escalenos**
Son aquellos que tienen sus tres lados diferentes ($a \neq b \neq c$). Por lo tanto, sus tres ángulos también son diferentes ($\angle A \neq \angle B \neq \angle C$).

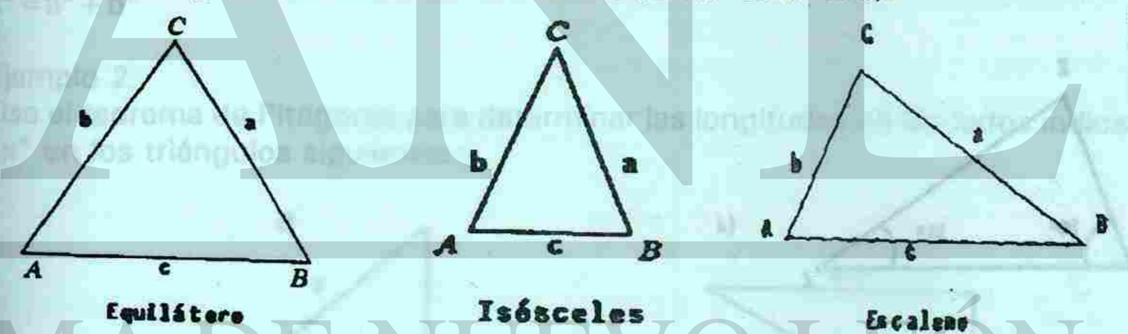


Fig. 4.12

De acuerdo a sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

i) **Triángulos rectángulos**
Son los que tienen un ángulo recto. En el triángulos rectángulo de la fig. 4.13, el $\angle C = 90°$. Al lado c, opuesto al ángulo recto se le denomina "hipotenusa" y a los otros dos lados perpendiculares, "a" y "b", se llaman "catetos" del triángulo rectángulo.

ii) **Triángulos oblicuángulos**
Son aquellos en que ninguno de sus ángulos es recto, y a su vez éstos pueden ser: acutángulos (los que tienen sus tres ángulos agudos) u obtusángulos (los que tienen un ángulo obtuso).

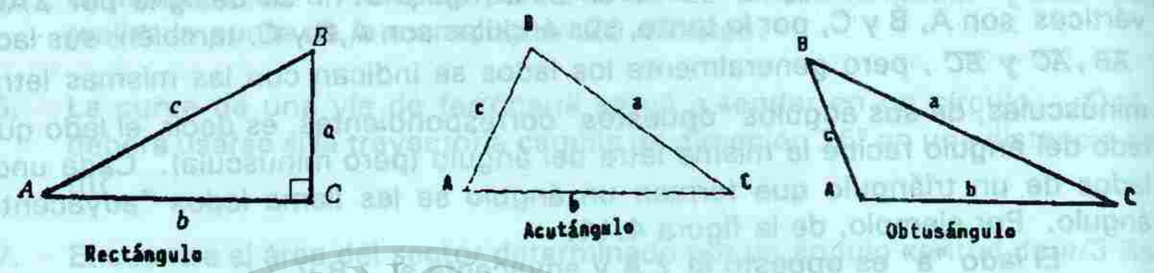


Fig. 4.13

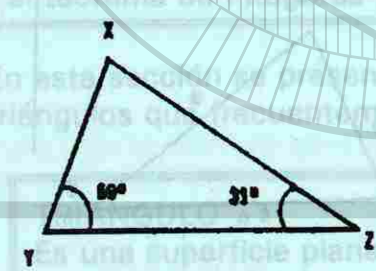
A continuación se enuncian dos teoremas importantes sobre triángulos:

> TEOREMA FUNDAMENTAL DE LOS TRIANGULOS
> En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°.

Mediante este teorema te permitirá conocer la medida del tercer ángulo, una vez que conozcas las de los otros dos.

Ejemplo 1

Encuentra la medida del $\angle X$ del triángulo siguiente:



Solución

$\angle X + \angle Y + \angle Z = 180°$
$\angle X + 69° + 31° = 180°$
$\angle X + 100° = 180°$
$\angle X = 180° - 100°$
$\angle X = 80°$

Para el estudio de la trigonometría, el triángulo más importante es el "rectángulo". (fig. 4.14)

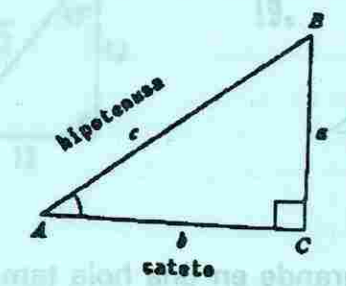


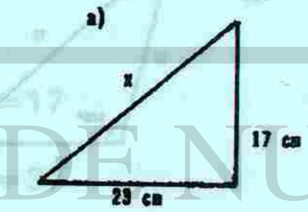
Fig. 4.14

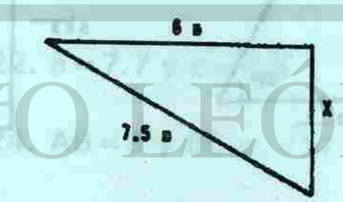
La relación entre los lados de un triángulo rectángulo se llama "teorema de Pitágoras". Y lo usarás para encontrar la longitud de uno de los lados de un triángulo rectángulo, si conoces las longitudes de los otros dos.

> TEOREMA DE PITAGORAS
> En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si los catetos son "a" y "b" y la hipotenusa es "c", como en la fig. 4.14, entonces el teorema de Pitágoras se expresará así:
$c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo 2
Usa el teorema de Pitágoras para determinar las longitudes de los lados indicados con "x" en los triángulos siguientes:

a)


b)


Solución
a) $x^2 = 17^2 + 23^2$ (Teorema de Pitágoras)
$x^2 = 289 + 529$
$x^2 = 818$
$x = \sqrt{818} = 28.6\,cm$

b) $7.5^2 = x^2 + 6^2$ (Teorema de Pitágoras)

$56.25 = x^2 + 36$

$x^2 = 56.25 - 36$

$x^2 = 20.25$

$x = \sqrt{20.25} = 4.5\,m$

Ejercicio 4.3

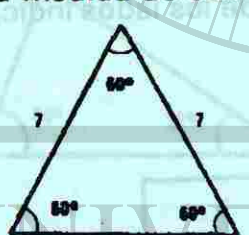
1. Dibuja un triángulo grande en una hoja tamaño carta. Con un transportador mide cada uno de sus ángulos internos. Luego encuentra la suma de las medidas.

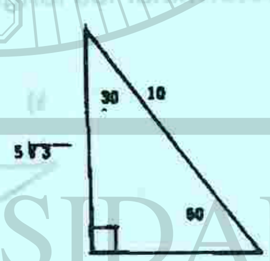
A partir del $\triangle MNO$, encuentra el $\angle O$; si

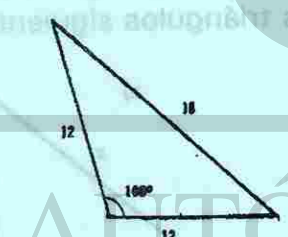
2. $\angle M = 45°$ y $\angle N = 30°$
3. $\angle M = 33°$ y $\angle N = 80°$
4. $\angle M = 90°$ y $\angle N = 13°$
5. $\angle M = 42°$ y $\angle N = 64°$
6. $\angle M = 70°$ y $\angle N = 40°$
7. $\angle M = 82°$ y $\angle N = 73°$

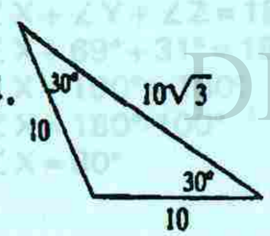
8. En un triángulo isósceles, uno de sus ángulos iguales mide 33°. Encuentra la medida de cada uno de los otros dos ángulos del triángulo.
9. La medida de los ángulos de un triángulo son enteros consecutivos. Encuentra los tres ángulos del triángulo.
10. Si $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo isósceles donde $\angle A = 90°$. Encuentra la medida del $\angle B$.

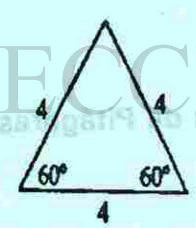
Clasifica cada uno de los siguientes triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados y a la medida de sus ángulos.

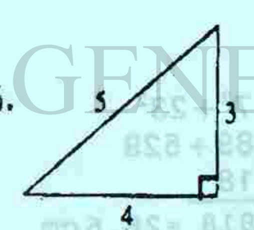
11.


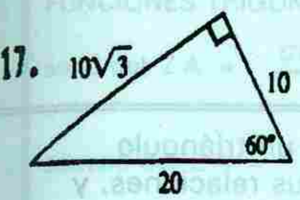
12.


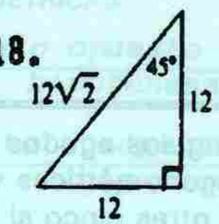
13.


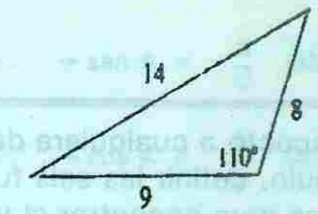
14.


15.


16.


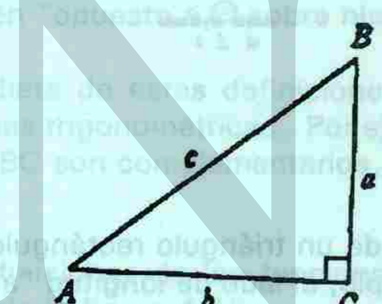
17.


18.


19.


20.


Determina la longitud del tercer lado del triángulo rectángulo siguiente, si los lados dados son:



21. $a = 15$ y $c = 17$
22. $a = 7.7$ y $c = 8.5$
23. $b = 12$ y $c = 37$
24. $AB = 9$ y $BC = \sqrt{17}$
25. $AC = 16$ y $CB = 63$
26. $AC = \sqrt{21}$ y $AB = 11$
27. $BC = 20$ y $CA = 21$
28. $b = 4\sqrt{5}$ y $c = 12$
29. $a = 3.9$ y $b = 8$
30. $a = 7.2$ y $c = 9.7$

4.4 Funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo:

Con respecto a cualquiera de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo, definir las seis funciones trigonométricas y sus relaciones, y utilizarlas para encontrar el valor de las otras cinco si se conoce el valor de una de ellas

Actualmente la trigonometría tiene muchas aplicaciones que nada tienen que ver con triángulos, pero los conceptos básicos se entienden mejor todavía en relación con el triángulo rectángulo.

Iniciamos nuestro estudio de la trigonometría con un breve análisis del ∠A del triángulo rectángulo de la figura 4.15

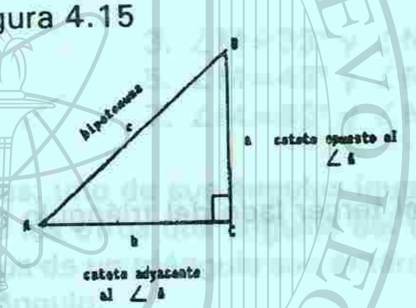


Fig. 4.15

Frecuentemente los lados de un triángulo rectángulo son referidos a uno de los dos ángulos agudos. Por ejemplo, el lado de longitud "a" se denomina "cateto opuesto" al ∠A, el lado de longitud "b" se denomina "cateto adyacente" al ∠A, y el lado de longitud "c" se denomina "hipotenusa".

Por inspección puedes ver que pueden formarse seis relaciones diferentes con los lados del triángulo rectángulo:

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

Las seis razones son independientes del tamaño del triángulo, pero son dependientes de la magnitud del ángulo agudo. (Esta propiedad ya la conocías, cuando calculaste pendientes de rectas). estas relaciones son funciones del ∠A y por lo tanto se les llaman "funciones trigonométricas". Para facilitar su análisis, cada una recibe un nombre en especial, como se indica en la siguiente definición.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

seno del ∠A =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	→ sen A = $\frac{a}{c}$	(abreviado)
coseno del ∠A =	$\frac{\text{cateto adyacente al } \angle A}{\text{hipotenusa}}$	→ cos A = $\frac{b}{c}$	(abreviado)
tangente del ∠A =	$\frac{\text{cateto opuesto al } \angle A}{\text{cateto adyacente al } \angle A}$	→ tan A = $\frac{a}{b}$	(abreviado)
cotangente del ∠A =	$\frac{\text{cateto adyacente al } \angle A}{\text{cateto opuesto al } \angle A}$	→ cot A = $\frac{b}{a}$	(abreviado)
secante del ∠A =	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente al } \angle A}$	→ sec A = $\frac{c}{b}$	(abreviado)
cosecante del ∠A =	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto al } \angle A}$	→ csc A = $\frac{c}{a}$	(abreviado)

Deberás tomarte el tiempo necesario para memorizarte la definición de cada una de las funciones trigonométricas, puesto que son las piedras angulares de la trigonometría. Deberás conocerlas tan bien, que cuando alguien mencione "sen Θ", automáticamente pienses en "opuesto a Θ sobre hipotenusa".

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se pueden observar algunas relaciones entre las funciones trigonométricas. Por ejemplo, observa que los ángulos agudos (∠A y ∠B) del △ABC son complementarios, es decir,
∠A + ∠B = 90°

La tabla 2 muestra las definiciones de las funciones trigonométricas para los dos ángulos agudos del △ABC de la figura 4.15

sen A = $\frac{\text{op al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{a}{c}$	sen B = $\frac{\text{op. al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{b}{c}$
cos A = $\frac{\text{ady. al } \angle A}{\text{hip}} = \frac{b}{c}$	cos B = $\frac{\text{ady. al } \angle B}{\text{hip}} = \frac{a}{c}$
tan A = $\frac{\text{op. al } \angle A}{\text{ady. al } \angle A} = \frac{a}{b}$	Tan B = $\frac{\text{op. al } \angle B}{\text{ady. al } \angle B} = \frac{b}{a}$
cot A = $\frac{\text{ady. al } \angle A}{\text{op. al } \angle A} = \frac{b}{a}$	cot B = $\frac{\text{ady. al } \angle B}{\text{op. al } \angle B} = \frac{a}{b}$
sec A = $\frac{\text{hip}}{\text{ady. al } \angle A} = \frac{c}{b}$	sec B = $\frac{\text{hip}}{\text{ady. al } \angle B} = \frac{c}{a}$
csc A = $\frac{\text{hip}}{\text{op. al } \angle A} = \frac{c}{a}$	csc B = $\frac{\text{hip}}{\text{op. al } \angle B} = \frac{c}{b}$

Por inspección puedes observar que
sen A = cos B
cos A = sen B
tan A = cot B
cot A = tan B
sec A = csc B
csc A = sec B

Pero como B = 90°-A se define que

COFUNCIONES
sen A = cos (90°-A)
tan A = cot (90°-A)
sec A = csc (90°-A)

El prefijo "co" indica que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complemento y viceversa; que la cotangente es igual a la tangente de su complemento; y que la cosecante a la secante de su complemento y viceversa. Así toda función de un ángulo agudo es igual a la cofunción correspondiente de su ángulo complementario.

Ejemplo 1

Si tanΘ = cot 51°; encuentra el valor de Θ

Solución
Como la cofunción de la tangente es la cotangente, los dos ángulos deben de ser complementarios:
$\Theta + 51° = 90°$
$\Theta = 90° - 51°$
$\Theta = 39°$

Observa también que por cada función hay una "función recíproca" (recuerda que el producto de dos recíprocos es igual a 1). Considera las funciones seno y cosecante del $\angle A$ de la figura 4.15.

sen A = $\frac{a}{c}$ y csc A = $\frac{c}{a}$

Si multiplicas: (sen A) (csc A); obtienes

(sen A) (csc A) = $(\frac{a}{c})(\frac{c}{a}) = \frac{ac}{ac} = 1$

Así el seno y cosecante son funciones recíprocas, es decir:

sen A = $\frac{1}{csc A}$ ó csc A = $\frac{1}{sen A}$

Análogamente, el coseno y la secante y la tangente y la cotangente son recíprocas.

RELACIONES RECIPROCAS	
sen A = $\frac{1}{csc A}$	csc A = $\frac{1}{sen A}$
cos A = $\frac{1}{sec A}$	sec A = $\frac{1}{cos A}$
tan A = $\frac{1}{cot A}$	cot A = $\frac{1}{tan A}$

Debido a estas relaciones recíprocas, se utiliza más frecuentemente una función de cada par de funciones trigonométricas recíprocas. Las funciones trigonométricas que se utilizan con más frecuencia son el seno, el coseno y la tangente.

Ejemplo 2

Si cos Θ = $\frac{2}{3}$, encuentra el valor de sec Θ

Solución

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ relaciones recíprocas

$\sec\theta = \frac{1}{2/3}$

$\sec\theta = \frac{3}{2}$

Otras relaciones que son de considerable importancia son las resultantes de dividir funciones trigonométricas. Por ejemplo, considera las funciones seno y coseno del $\angle A$ de la figura 4.15

$sen A = \frac{a}{c}$ y $cos A = \frac{b}{c}$

Si divides: $\frac{sen\ A}{cos\ A}$; obtienes:

$$\frac{sen\,A}{\cos A}=\frac{a/c}{b/c}=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}\quad \text{(que es la definición de tan A)}$$

es decir, en términos de funciones trigonométricas

$$\frac{sen\,A}{\cos A}=\tan A$$

y como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas, se sigue también que

$$\cot A=\frac{\cos A}{sen\,A}$$

RELACIONES EN FORMA DE COCIENTE
$\tan A=\frac{sen\,A}{\cos A}$ y $\cot A=\frac{\cos A}{sen\,A}$

Ejemplo 3

Si senΘ = 3/5 y cosΘ = 4/5; encuentra tanΘ y cotΘ

Solución

$\tan\theta=\frac{sen\theta}{\cos\theta}$ por relaciones en forma de cociente

$$\tan\theta=\frac{3/5}{4/5}=\frac{(3)(5)}{(4)(5)}$$

$\tan\theta=\frac{3}{4}$ y por lo tanto

$\cot\theta=\frac{4}{3}$ relaciones recíprocas

Finalmente con la ayuda del teorema de Pitágoras derivaremos las siguientes relaciones muy importantes también. Para el $\angle A$ del triángulo rectángulo de la figura 4.15, se cumple que

$(\text{cateto op.})^2 + (\text{cateto ady.})^2 = (\text{hip})^2$

o sea

$$a^2+b^2=c^2$$

Si divides ambos miembros de esta ecuación entre c^2, obtienes

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\left(\frac{c}{c}\right)^2$$

es decir, en términos de las funciones trigonométricas

$(\text{sen } A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

Se acostumbra escribir $(\text{sen } A)^2$ y $(\cos A)^2$ en la forma $\text{sen}^2 A$ y $\cos^2 A$, respectivamente. Entonces la ecuación se expresa como:

$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

Similarmente se pueden derivar otras dos fórmulas dividiendo la ecuación original entre b^2 y a^2, respectivamente tenemos

$\tan^2 A + 1 = \sec^2 A$ y $\cot^2 A + 1 = \csc^2 A$

RELACIONES PITAGORICAS
$\text{sen}^2 A+\cos^2 A=1$
$\tan^2 A+1=\sec^2 A$
$\cot^2 A+1=\csc^2 A$

Ejemplo 4

Si $sen\theta=\frac{15}{17}$; encuentra el valor de las otras cinco funciones del $\angle\Theta$.

Solución

Resolviendo la primera relación pitagórica para cosΘ, tenemos:

$$\cos\theta=\sqrt{1-sen^2\theta}$$

Sustituyendo

$$\cos\Theta=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\sqrt{\frac{64}{289}}$$

$\cos\theta=\frac{8}{17}$ (tomando solamente la raíz positiva, pues el $\angle\Theta$ es agudo)

Ahora, utilizando las relaciones en forma de cociente

$$\tan\theta=\frac{sen\theta}{\cos\theta}$$

Nos queda

$$\tan\theta=\frac{15/17}{8/17}$$

$$\tan\theta=15/8$$

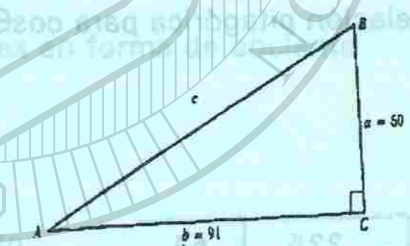
Por lo tanto,
$\cot\Theta = 8/15$ (relaciones recíprocas)
$\sec\Theta = 17/8$
$\csc\Theta = 17/15$

Las relaciones recíprocas, las en forma de cociente y las pitagóricas que hemo encontrado en esta sección se refieren a funciones de un sólo ángulo, no pudiéndos utilizar estas fórmulas con dos ángulos diferentes a la vez. Así por ejemplo, no s puede decir que sen A/cos B sea igual a tan A o a tan B, ni que $\text{sen}^2X + \cos^2Y$ se igual a 1, sino tan sólo que para un ángulo cualquiera X, sen X/cos X = tan $\text{sen}^2X + \cos^2X = 1$, etc.

En general, puedes determinar el valor de las funciones trigonométricas de los ángul agudos de un triángulo si sólo conoces el valor de una de ellas (como el ejemplo 4) bien, si conoces al menos la longitud de dos de los lados del triángulo rectángu utilizando el teorema de Pitágoras y las definiciones de las funciones trigonométrica

Ejemplo 5

Determina el valor de cada una de las funciones trigonométricas de los ángulos agud del triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, si los catetos a y b miden 60 c y 91 cm, respectivamente.



Solución
Por medio del teorema de Pitágoras se puede encontrar el tercer lado de un triángu rectángulo conocidos los otros dos: si se conocen los catetos, la fórmula que da hipotenusa es
$c^2 = a^2 + b^2$
si se conocen la hipotenusa y uno de los catetos y se desconoce el otro cateto, es se puede encontrar a partir de la fórmula anterior trasponiendo términos. Entonce resulta que
$a^2 = c^2 - b^2$ o bien $b^2 = c^2 - a^2$

Por consiguiente, conocidos los catetos y valiéndonos de la primera de estas fórmul encontraremos primero c de la siguiente manera:
$c^2 = a^2 + b^2 = (60)^2 + (91)^2 = 3600 + 8281 = 11881$
por lo tanto, c = 109 cm

Ya tenemos ahora los tres lados a = 60, b = 91 y c = 109; entonces podemos calcular inmediatamente las funciones trigonométricas de los ángulos A y B, puesto que $\angle C = 90°$, mediante las definiciones de las funciones:

$$\text{sen}\,A = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$
$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$
$$\tan A = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$
$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$
$$\sec A = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$
$$\csc A = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

Después de hallar senA = 60/109 y cos A = 91/109, se podría, desde luego, utilizar las relaciones en forma de cociente y las recíprocas y calcular tan A, cot A, sec A y csc A de la manera siguiente:

$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{60/91} = \frac{91}{60}$$

o también

$$\cot A = \frac{\cos A}{\text{sen}\,A} = \frac{91/109}{60/109} = \frac{91}{60}$$

y

$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{1}{91/109} = \frac{109}{91}$$
$$\csc A = \frac{1}{\text{sen}\,A} = \frac{1}{60/109} = \frac{109}{60}$$

En la práctica el seno y el coseno se calculan por determinados métodos especiales y después se aplica este método para el cálculo de las demás funciones. Sin embargo, para familiarizarse con las definiciones de las funciones trigonométricas con los elementos del triángulo, es preferible calcular las funciones directamente a partir del triángulo en vez de hacerlo valiéndose de las relaciones que ligan a las funciones entre sí. Una vez determinadas las funciones por cálculo directo, es útil, sin embargo, utilizar estas relaciones como comprobación.

Para determinar el valor de las funciones trigonométricas correspondientes al $\angle B$ del triángulo rectángulo de la figura anterior, se puede utilizar la relación que liga a las funciones de los ángulos complementarios A y B y escribir las funciones y cofunciones de B deducidas de las correspondientes respectivas cofunciones y funciones del $\angle A$ ya encontradas. Esto será un ejercicio muy instructivo para ti, pero aquí calcularemos todas las funciones de $\angle B$ directamente a partir del triángulo:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} = \frac{91}{109}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \frac{60}{109}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cot B = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

$$\sec B = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\csc B = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

En todas las fracciones que dan las doce funciones de A y de B, tanto el numerador como el denominado están expresados en las mismas unidades. El valor de una función es pues, sencillamente, un "número" que no va expresado en ninguna clase de unidad. Lo mismo da por consiguiente, que los lados 60, 91, 109 de la figura anterior, estén expresados en centímetros, en pulgadas, en metros, en pies, en millas o en otra unidad cualquiera que ésta sea, con tal de que se emplee la misma unidad para medir los tres lados. Así, por ejemplo, si nos dicen que "a" mide 0.6 m, "b" mide 91 cm y "c" mide 1.09 m, hay que empezar por expresar las longitudes en centímetros o las tres en metros, ya que con cualquiera de esas unidades se obtiene el mismo valor de la función "para el mismo ángulo".

Ejercicio **4.4**

Utiliza las relaciones fundamentales para encontrar el valor exacto de la función trigonométrica indicada. Considera que el ángulo indicado es agudo.

1. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{8}$, encuentra $\csc\theta$
2. $\cos \varnothing = \frac{3}{5}$, encuentra $\sec \varnothing$
3. $\tan\beta = 4$, encuentra $\cot\beta$
4. $\sec\delta = \frac{10}{7}$ encuentra $\cos\delta$

6. $\operatorname{sen} w = \frac{1}{2}$, $\cos w = \frac{\sqrt{3}}{2}$, encuentra $\tan w$
7. $\csc\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$, encuentra $\tan\theta$
8. $\cos\varnothing = \frac{3}{5}$, encuentra las otras cinco
9. $\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{13}$, encuentra las otras cinco

5. $\operatorname{sen}\alpha = 1/2$ encuentra $\cos\alpha$

10. $\tan\delta = \frac{21}{20}$, encuentra las otras cinco

Utiliza las relaciones fundamentales y una calculadora para encontrar las funciones trigonométricas indicadas.

11. sen $\Theta = 0.4313$, encuentra csc Θ
12. cos $\Theta = 0.1155$, encuentra sec Θ
13. tan $\beta = 2.397$, encuentra cot β
14. csc $A = 1.902$, encuentra sen A
15. sec $B = 2.03$, encuentra tan B

En los siguientes ejercicios "c" representa la hipotenusa y las otras dos letras los catetos de un triángulo rectángulo. Dibuja una figura para cada uno, indicando los ángulos opuestos a los lados respectivos por las correspondientes letras mayúsculas. Partiendo de los dos lados que se dan como datos, en cada caso, hallar el tercero y calcular después las seis funciones trigonométricas de cada ángulo agudo del triángulo.

16. $a = 28$, $b = 45$, $c =$
17. $p = 36$, $q = 77$, $c =$
18. $c = 37$, $m = 35$, $n =$
19. $c = 73$, $f = 48$, $g =$
20. $c = 41$, $x = 9$, $y =$

4.5 Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo

Objetivo:

> Utilizando las tablas trigonométricas o la calculadora, encontrar los valores aproximados de las funciones trigonométricas de ángulos agudos o encontrar un ángulo agudo a partir del valor de una función trigonométrica. Encontrar los valores exactos de las seis funciones trigonométricas, si la medida del ángulo es 30°, 45° ó 60°.

Hasta esta parte del capítulo se han calculado los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo utilizando las longitudes de los lados del triángulo rectángulo. Sin embargo, como se dijo anteriormente, los valores de las funciones trigonométricas dependen únicamente de la magnitud del ángulo y no del tamaño del triángulo; así, para encontrar el valor de una función trigonométrica sólo se necesita la medida del ángulo.

Los valores de las funciones trigonométricas las necesitarás principalmente para resolver los problemas de aplicación propuestos en las próximas secciones, y los puedes encontrar generalmente enlistados en forma de tablas trigonométricas, o bien, utilizando una calculadora. Se han elaborado tablas trigonométricas adaptadas a diferentes fines, que dan los valores de las funciones con ocho o diez cifras decimales y para ángulos dados a intervalos de un minuto y hasta de un segundo, por ejemplo, como las utilizadas en Astronomía y Topografía. Estas tablas se imprimen en formas muy diversas; algunas muestran las diferentes funciones en sitios separados de la tabla, impresos en páginas distintas.

En la parte final del texto se incluye una tabla de funciones trigonométricas con una aproximación de cuatro cifras decimales para ángulos de 0° a 90° a intervalos de cada 10 minutos, en la que el procedimiento para su uso se resume a continuación:

i) Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 0° y 45°, localiza el ángulo al lado izquierdo de la tabla y el nombre de la función en la parte superior de la columna.

ii) Para encontrar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos entre 45° y 90°, localiza el ángulo en el lado derecho de la tabla y el nombre de la función en la parte inferior de la columna.

iii) En cada renglón la suma de los ángulos de la columna izquierda con los de la derecha es de 90°, pues las tablas están basadas en la igualdad de las cofunciones de ángulos complementarios. Así, sen 57° = cos(90°-57°) = cos33°

iv) Para encontrar el ángulo agudo teniendo como dato el valor de la función trigonométrica, busca en las dos columnas cuyo encabezado sea la función correspondiente hasta encontrar el valor dado. Si el encabezado de la función se encuentra arriba de la columna, la respuesta es el ángulo de la izquierda; si el encabezado de la función se encuentra en la parte de abajo de la columna, la respuesta es el ángulo de la derecha.

En este capítulo y en el próximo, puedes utilizar la tabla anterior para encontrar los valores de las funciones trigonométricas leyendo el valor directamente de las tablas, siempre que utilices una solución manual del problema.

Ejemplo 1

Encuentra el valor de las siguientes funciones:

a) sen 34°40′ c) tan 55°20′
b) cos 72° d) cot 41°50′

Solución

a) Localiza 24°40′ en la columna de la izquierda (ya que, 24°40′ < 45°) y lee el valor contenido en la casilla que coincide con el "sen" de la parte superior de la tabla:

sen 24°40′ = 0.4173

b) Localiza 72° en la columna de la derecha (ya que 72° > 45°) y lee el valor contenido en la casilla que coincide con el "cos" en la parte inferior de la tabla: cos 72° = 0.3090

c) Tan 55°20′ = 1.4460. Dado que 55°20′ > 45°, se lee la función en la parte inferior de la tabla.

d) Cot 41°50′ = 1.1171. Lee en la parte superior de la tabla dado que 41°50′ < 45°

Ejemplo 2

Dado el valor de la función encuentra el ángulo correspondiente

a) sen A = 0.2924 c) sec C = 1.8361
b) tan B = 2.7725 e) cos D = 0.8886

Solución

El procedimiento es el inverso al que se expreso en el ejemplo anterior:

a) Si sen A = 0.2924 ----> A = 17°
b) Si tan B = 2.7725 ----> B = 70°10′
c) Si sec C = 1.8361 ----> C = 57°
d) Si cos D = 0.8886 ----> D = 27°30′

Para determinar el valor aproximado de una función trigonométrica de un ángulo medido en minutos que no es múltiple de 10′ como en sen 24°43′, se obtiene una proporción entre los valores de los dos ángulos mas cercanos (24°40′ y 45°50′) utilizando el método de "interpolación lineal". Este proceso se muestra en los ejemplos siguientes

Ejemplo 3

Encuentra el valor de: sen 24°43′

Solución

El valor de sen 24°43′ debe ser un valor que este entre sen 24°40′ y sen 24°50′

Se escriben los valores de los tres ángulos en orden ascendente; se buscan los valores de sen 24°40′ y sen 24°50′ en la tabla y se plantea una proporción directa:

sen 24°40′ = 0.4173
sen 24°43′ =
sen 24°50′ = 0.4200

$$x = \frac{3(0.0027)}{10}$$

Así, la corrección es x = 0.0008

A medida que el ángulo aumenta, aumenta también el seno del ángulo:
sen 24°43′ = 0.4173 + 0.0008
sen 24°43′ = 0.4181

(NOTA: cuando se interpola de un ángulo menor a otro mayor, como en el ejemplo anterior, la corrección se suma para el valor del ángulo menor para encontrar el seno, la tangente y la secante; pero se resta al mayor para encontrar el coseno, la cotangente y la cosecante, pues el valor de estas funciones decrecen cuando el ángulo agudo aumenta).

Ejemplo 4
Encuentra A, si cot A = 0.6345

Solución
El valor de 0.6345 esta entre los valores de cot 57°30′ y cot 57°40′.

cot 57°30′ = 0.6371
cot A = 0.6345
cot 57°40′ = 0.6330

$$\frac{x}{10} = \frac{0.0015}{0.0041}$$

$$x = \frac{0.0015}{0.0041}\,(10')$$

Así, la corrección es x = 4′ (redondeando al minuto mas cercano). Al restar la corrección (dado que la función es cotangente) se tiene que:

A = 57°40′-4′
A = 57°36′

Hoy día el uso de las calculadoras proporciona el medio mas conveniente para encontrar los valores específicos de las funciones trigonométricas.

Cuando la utilices para encontrar el valor de alguna función trigonométrica, debes asegurarte de seguir el procedimiento indicado por el manual de la calculadora. En general, el procedimiento es el siguiente:

i) Asegúrate de que la calculadora este en el modo de grados (degree mode)
ii) Introduce el valor del ángulo en grados.
iii) Presiona la tecla de la función trigonométrica deseada (para las funciones cotangente, secante y cosecante se utiliza el recíproco de la función correspondiente).
iv) Lee el valor de la función desplegado en la pantalla.

Al utilizar la calculadora para encontrar un ángulo agudo, cuando se conoce el valor de la función trigonométrica, se utiliza la operación inversa, tecla INV o la tecla de las segundas funciones (2nd). Se introduce el valor de la función, después se presiona

la tecla INV o la segunda función (2nd) y se presiona la tecla de la función trigonométrica deseada. Se utiliza el modo de grados para obtener el resultado en grados.

Ejemplo 5

Utilizando la calculadora encuentra el valor de las siguientes funciones trigonométricas:
a) tan 48°23′
b) cot 37°20′

Solución
a)
i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
tan 48°23′ = tan $\left(48+\frac{23}{60}\right)^{o}$

ii) Introduce el 48, presiona la tecla (+), introduce el 23, presiona la tecla (÷), introduce 60, presiona la tecla (=).

iii) Presiona la tecla (tan)

iv) tan 48°23′ = 1.1257 redondeando a 4 cifras decimales

b)
i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
cot 37°20′ = cot $\left(37+\frac{20}{60}\right)^{o}$

ii) Introduce el 37, presiona la tecla (+), introduce el 20, presiona la tecla (÷), introduce el 60, presiona la tecla (=).

iii) Presiona la tecla (tan)

iv) Presiona la tecla (1/x) o divide 1 entre el valor de tan 37°20′

v) cot 37°20′ = 1.3111 redondeando a 4 cifras decimales

Dado el valor de una función trigonométrica, el valor del ángulo se puede encontrar fácilmente en grados y decimales mediante el uso de una calculadora. Si los ángulos se desean en minutos, se toma la parte decimal y se multiplica por 60′, redondeando el resultado según se requiera.

Ejemplo 6
Encuentra A, si
a) sen A = 0.4234
b) sec A = 3.4172

Solución

a)
- i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- ii) Introduce 0.4234, presiona la tecla (INV), y la tecla (Sen)
- iii) A = 25.05° (al centésimo mas cercano)
- iv) Recuerda el numero entero de grados, 25°
- v) Presiona la tecla (-), introduce 25, presiona la tecla (=), presiona la tecla (x), introduce 60 y presiona la tecla (=).
- vi) El valor redondeado al minuto mas cercano es 3′
- vii) A = 25°3′

b)
- i) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode)
- ii) Introduce 3.4172, presiona la tecla (1/x), o bien introduce 1, presiona (÷), introduce 3.4172 y presiona la tecla (=)
- iii) Presiona la tecla (INV) y la tecla (Cos).
- iv) A = 72.98° al centésimo mas cercano, o bien
- v) Recuerda el numero entero de grados, 72°
- vi) Presiona la tecla (-), introduce 72, presiona la tecla (=), presiona la tecla (x), introduce 60 y presiona la tecla (=)
- vii) El valor redondeado al minuto mas cercano es 59′
- viii) A = 72°59′

Los ángulos de 30°, 45° y 60°, por sus propiedades geométricas, aparecen tan frecuentemente que a veces se les llama "ángulos especiales". Es relativamente fácil determinar los valores exactos de las funciones trigonométricas de estos ángulos sin la necesidad de usar una calculadora o las tablas. El procedimiento para determinar estos valores se muestra a continuación:

Si en el cuadrado ABCD de la figura 4.16 se traza la diagonal AB, se obtienen dos triángulos rectángulos iguales, y puesto que los catetos de esos triángulos son iguales por ser lados de un cuadrado, resulta que los dos ángulos agudos de cada triángulo serán iguales a la mitad de 90°, o sea, 45°. Por consiguiente,

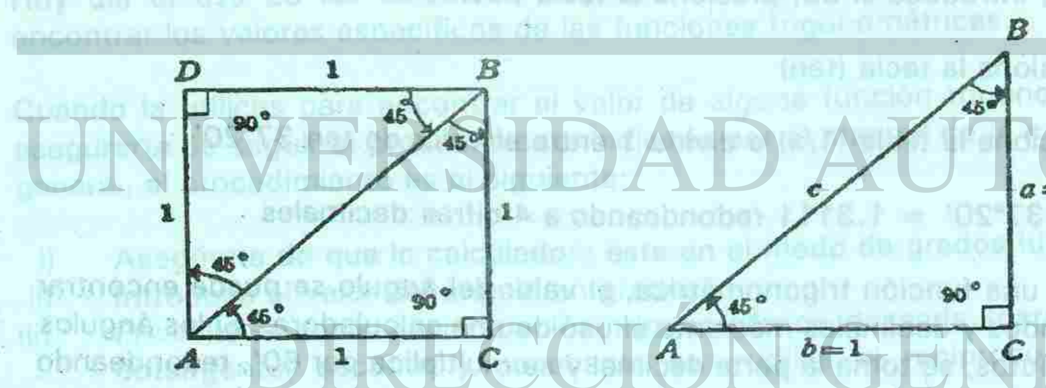


Fig. 4.16

si tomamos los lados del cuadrado iguales a una unidad, cualquiera que esta sea, y dibujamos separadamente el triángulo rectángulo ABC (fig. 4.16), por el teorema de Pitágoras, obtendremos que:

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 1^2 + 1^2$

$c^2 = 2$

Por lo tanto $c = \sqrt{2}$

y las funciones trigonométricas del $\angle A = \angle B = 45°$

sen 45°	=	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	csc 45°	=	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
cos 45°	=	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	sec 45°	=	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
tan 45°	=	$\frac{1}{1} = 1$	cot 45°	=	$\frac{1}{1} = 1$

Ya hemos dicho que el triángulo equilátero es también equiangular midiendo cada ángulo 60° ($\angle A = \angle B = \angle C = 60°$). En el triángulo equilátero ABD de la figura 4.17, se ha trazado por el vértice B la altura BC que es perpendicular a la base AD, y por consiguiente, los dos ángulos en C son rectos. Los dos triángulos ABC y BCD son pues, rectángulos. Entonces, como en el triángulo rectángulo ABC, la suma de los ángulos A y ABC es igual a 90° y $\angle A = 60°$, por lo tanto $\angle ABC$ es igual a 30°. Análogamente, en el triángulo rectángulo BCD el $\angle CBD$ es igual a 30° y por lo tanto, la altura BC es también bisectriz del $\angle ABD$.

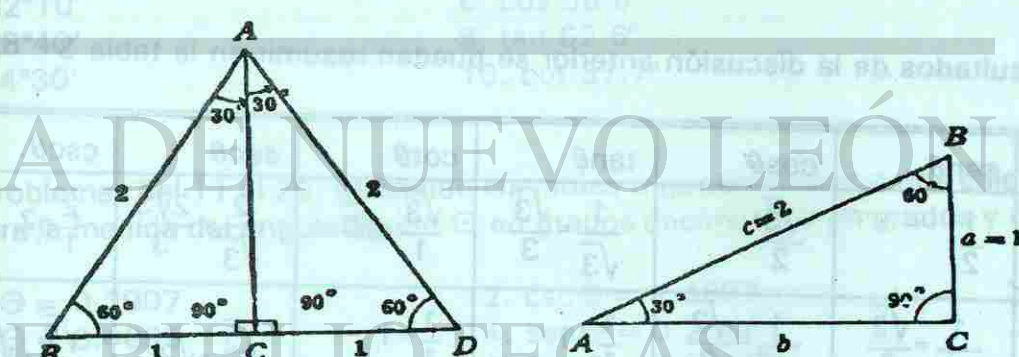


Fig. 4.17

Por tener los triángulos rectángulos ABC y BCD ángulos iguales, hipotenusas iguales, y un cateto BC igual, son iguales, y por lo tanto, lo son los catetos correspondientes AC y CD. La altura BC también bisecta a la base. Si tomamos los lados del $\triangle ABD$ iguales a dos unidades, tendremos que $AC = CD = 1$, y el triángulo rectángulo ABC dibujado separadamente queda tal como se ilustra en la fig. 4.17. En este triángulo, por el teorema de Pitágoras, se tiene:

$$a^2 + b^2 = c^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$
$$a^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1$$
$$a^2 = 3$$
$$a = \sqrt{3}$$

Por lo tanto, de acuerdo al $\triangle ABC$ de la fig. 4.17, las funciones trigonométricas de 30° y 60° son:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec 60^\circ = \frac{2}{1} = 2$$

$$\csc 30^\circ = \frac{2}{1} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Los resultados de la discusión anterior se pueden resumir en la tabla 3

θ	senθ	cosθ	tanθ	cotθ	secθ	cscθ
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Tabla 3

Los triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45°, y de 30° y 60° son muy importantes y conviene aprenderse de memoria los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos. Existe una manera muy sencilla para recordar los valores de las tres principales funciones escribiéndolas en forma radical:

Θ	senΘ	cosΘ	tanΘ
0°	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$
30°	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
45°	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{2}}$
60°	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{1}}$
90°	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{0}}$

Ejercicio 4.5

En los problemas del 1 al 10, encuentra el valor de cada una de las siguientes funciones, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora y redondeando el resultado con cuatro cifras decimales.

1. sen 76°
2. csc 64°14′
3. tan 18°
4. sen 40.4°
5. cos 32°10′
6. cos 55.5°
7. sec 28°40′
8. tan 62.6°
9. cot 54°30′
10. cot 37.7°

En los problemas del 11 al 20, utilizando las tablas trigonométricas o una calculadora, encuentra la medida del ángulo agudo Θ en grados decimales y en grados y minutos.

11. senΘ = 0.3907
12. cscΘ = 1.4897
13. cosΘ = 0.4695
14. senΘ = 0.2686
15. tanΘ = 0.6787
16. cosΘ = 0.9258
17. cotΘ = 0.3185
18. tanΘ = 2.9460
19. secΘ = 1.1890
20. cscΘ = 3.0150

En los problemas del 21 al 30, utilizando los valores exactos de las funciones 30°, 45° y 60°; demuestra que le miembro de la izquierda es igual al miembro de la derecha.

21. $\csc 45° = \dfrac{1}{sen\,45^0}$ 22. $\sec^2 60° - \tan^2 60° = 1$

23. $\sec 30° = \csc 60^0$ 24. $sen\ 30° \cos 60° + sen\ 60° \cos 30° = 1$

25. $\cot 60° = \dfrac{\cos 60°}{sen\,60°}$ 26. $\cos 30° \cos 60° - sen\ 30°\ sen\ 60° = 0$

27. $\tan 45° = \dfrac{sen\,45°}{\cos 45°}$ 28. $sen\ 60° = 2\ sen\ 30° \cos 30°$

29. $sen\ ^2 45° + \cos^2 45^0 = 1$ 30. $sen\ 30° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60°}{2}}$

CAPITULO 5

TRIGONOMETRIA
SEGUNDA PARTE

Uno de los usos principales de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo" .

Un triángulo esta compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto: a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontraras ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.

En los problemas del 21 al 30, utilizando los valores exactos de las funciones 30°, 45° y 60°; demuestra que le miembro de la izquierda es igual al miembro de la derecha.

21. $\csc 45° = \dfrac{1}{sen\,45^0}$

22. $\sec^2 60° - \tan^2 60° = 1$

23. $\sec 30° = \csc 60^0$

24. $sen\,30° \cos 60° + sen\,60° \cos 30° = 1$

25. $\cot 60° = \dfrac{\cos 60°}{sen\,60°}$

26. $\cos 30° \cos 60° - sen\,30°\, sen\,60° = 0$

27. $\tan 45° = \dfrac{sen\,45°}{\cos 45°}$

28. $sen\,60° = 2\, sen\,30° \cos 30°$

29. $sen^2 45° + \cos^2 45^0 = 1$

30. $sen\,30° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 60°}{2}}$

CAPITULO 5

TRIGONOMETRIA
SEGUNDA PARTE

Uno de los usos principales de las funciones trigonométricas es para calcular dimensiones en triángulos rectángulos. Esto puede parecer principalmente de interés académico, pero como verás en las próximas secciones, los tipos de aplicaciones pueden ser bastante modernos.

A menudo en las aplicaciones aparecen datos incompletos sobre los ángulos o longitudes de catetos de un triángulo rectángulo, datos cuyos valores son necesarios. Al proceso de determinar las partes restantes de un triángulo rectángulo, si se conocen algunas, se le llama "resolución de un triángulo rectángulo" .

Un triángulo esta compuesto básicamente de seis partes, los tres lados y los tres ángulos; un triángulo rectángulo queda determinado completamente si conoces, aparte del ángulo recto: a) un lado y un ángulo agudo, o b) dos lados.

Así, al resolver triángulos rectángulos harás uso de las funciones trigonométricas, del teorema de Pitágoras y del hecho de que los dos ángulos agudos son complementarios. Usualmente encontraras ventajoso hacer un bosquejo aproximado del triángulo; esto te ayudará a determinar que funciones trigonométricas puedes usar para encontrar las partes desconocidas.

5.1 Resolución de triángulos rectángulos

Objetivo:

Usar las funciones trigonométricas para encontrar datos faltantes de triángulos rectángulos y resolver problemas de aplicación que los involucren.

Supongamos, por ejemplo, que se desea sujetar un poste de 8 m. de altura por medio de un tirante de alambre sujeto a lo alto del poste y a una estaca situada a una distancia de 5 m. del pie del mismo sobre un suelo horizontal. ¿Cual deberá ser la longitud del alambre que se necesita y cual su inclinación con respecto al suelo y con respecto al poste? Este problema se resuelve con facilidad por medio de las relaciones trigonométricas anteriormente vistas.

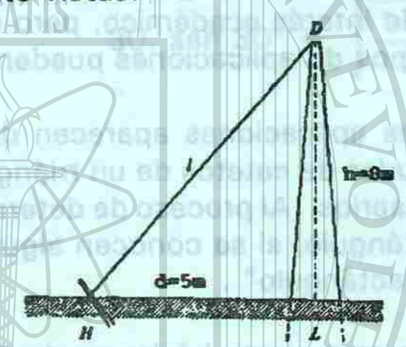


Fig. 5.1

En efecto, si DL es el poste (Fig. 5.1) y "h" su altura conocida de 8 m., "d" la distancia HL de 5 m. Desde la estaca al pie del poste, y DH representa el alambre de longitud "l" sujeto a la estaca en H; el $\triangle$DHL es un triángulo rectángulo en L en el que como sabemos, $l^2 = d^2 + h^2$, de donde , $l = \sqrt{d^2+h^2}$. Puesto que "d" y "h" se conocen, esta fórmula nos permite calcular inmediatamente "l".

$l = \sqrt{d^2+h^2} = \sqrt{5^2+8^2} = \sqrt{25+64} = \sqrt{89} = 9.43m$

La inclinación del alambre con respecto al suelo es el $\angle$H, y de la definición de la función tangente, deducimos que

$\tan H = \dfrac{h}{d}$

Como conocemos "h" y "d", esta fórmula da en seguida la tangente del $\angle$H,

$\tan H = \dfrac{8m}{5m} = 1.6$

y conocida la tangente, buscamos en las tablas trigonométricas o con una calculadora el valor del ángulo de inclinación H,

$\angle H = 58°$

Una vez conocido el $\angle$H, el $\angle D = 90° - \angle H$,

$\angle D = 90° - 58° = 32°$

La longitud de "l" del alambre se pudo haber determinado también sin utilizar el teorema de Pitágoras, si primero calculamos el $\angle$H por la fórmula;

$\tan H = \dfrac{h}{d}$

que como acabamos de ver, $\angle H = 58°$ y después utilizamos la definición de la función seno del $\angle$H,

$\operatorname{sen} H = \dfrac{h}{l}$

Despejando de esta fórmula el valor de "l" se obtiene que,

$l = \dfrac{h}{\operatorname{sen} H}$

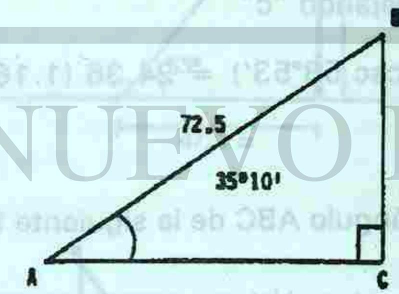
por lo tanto,

$l = \dfrac{8m}{\operatorname{sen} 58°} = \dfrac{8}{0.8480} = 9.43m$

De manera que eligiendo de entre las funciones trigonométricas del triángulo rectángulo aquella que involucra los datos y la incógnita, y transformándola convenientemente mediante los métodos algebraicos, tenemos a nuestra disposición ecuaciones y fórmulas que nos permiten calcular cualquier lado o ángulo de un triángulo rectángulo cuando se dan suficientes datos.

Ejemplo 1

En el $\triangle$ABC de la figura, donde $\angle A = 35°10'$ y $c = 72.5$; resuelve el



triángulo rectángulo, es decir, encuentra la medida de: a) $\angle$B, b) el lado a y c) el lado b

Solución:

a) $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 35°10' = 89°60' - 35°10' = 54°50'$

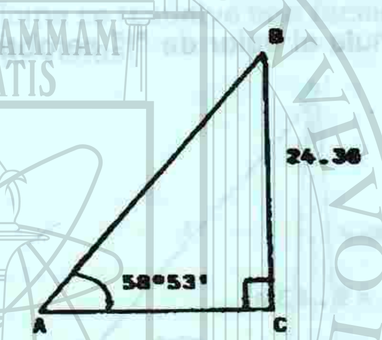
b) sen A = $\frac{a}{c}$; despejando "a" de esta fórmula,

a = c (sen A) = 72.5 (sen 35°10′) = 72.5 (0.5760) = 41.8

c) cos A = $\frac{b}{c}$; despejando "b" de esta fórmula

b = c (cos A) = 72.5 (cos 35°10′) = 72.5 (0.8175) = 59.3

Ejemplo 2
Resuelve el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, donde a = 24.36 y ∠A = 58°53′



Solución
a) El ∠B = 90°- ∠A = 90°-58°53′ = 89°60′-58°53′ = 31°7′

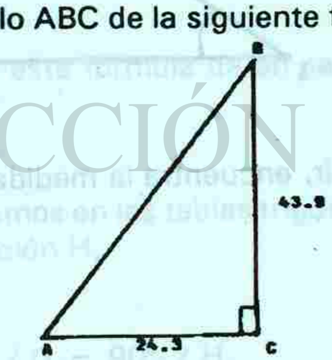
b) Para el lado "b" se utiliza la función
cot A = $\frac{b}{a}$; y despejando "b"

b = a(cot A) = 24.36 (cot 58°53′) = 24.36 (0.6036) = 14.70

c) Para el lado "c" se utiliza la función
csc A = $\frac{c}{a}$; y despejando "c"

c = a(csc A) = 24.36 (csc 58°53′) = 24.36 (1.1681) = 28.45

Ejemplo 3
Resuelve el triángulo rectángulo ABC de la siguiente figura, donde a = 43.9 y b = 24.3



Solución
a) tan A = $\frac{a}{b} = \frac{43.9}{24.3} = 1.8066$

por lo tanto ∠A = 61°

b) ∠B = 90°- ∠A = 90°-61° = 29°

c) Para el lado "c" se utiliza la función
csc A = $\frac{c}{a}$; despejando "c", se tiene que

c = a(csc A) = 43.9 (csc 61°) = 43.9 (1.1434) = 50.2

o bien, se pudo haber utilizado la función

sen A = $\frac{a}{c}$; y despejando "c", se tiene que

$$c = \frac{a}{sen\ A} = \frac{43.9}{sen\ 61^o} = \frac{43.9}{0.8746} = 50.2$$

Ejemplo 4
Supón que te dan el trabajo de medir un poste de luz que esta colocado afuera de un negocio. Como es muy difícil para ti subirte para medirlo, decides medirlo desde el piso. De un punto situado a 47.3 metros del poste, encuentras que con un teodolito el ángulo del piso a la punta del poste es de 53°. (Fig. 5.2) ¿Cuál es la altura del poste?

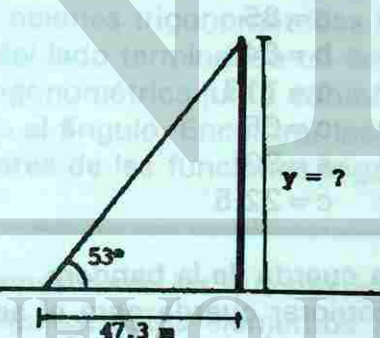


Fig. 5.2

Solución

Con la figura puedes ver que se forma un triángulo rectángulo, donde el cateto adyacente = 47.3 m y la incógnita es el cateto opuesto.

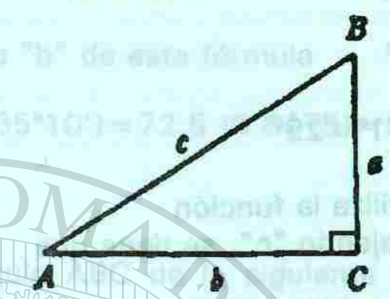
Así que con la definición de la tangente del ángulo dado tenemos:

$$\tan 53^o = \frac{y}{47.3}$$

y = 47.3 x tan 53°
y = 47.3 x 1.327
y = 62.77 metros

Ejercicio 5.1

Resuelve cada uno de los siguientes triángulos rectángulos ABC;



Dados:

1. ∠B = 36°52′ y c = 35
2. ∠A = 67°23′ y c = 39
3. ∠A = 73°44′ y a = 36
4. ∠A = 61°56′ y b = 32
5. ∠B = 12°41′ y b = 36
6. a = 180 y b = 33
7. a = 96 y c = 146
8. b = 12 y c = 37
9. ∠B = 6°44′ y a = 144
10. ∠B = 43°36′ y b = 20
11. ∠B = 11°25′ y c = 101
12. ∠A = 58°7′ y a = 45
13. ∠A = 59°29′ y b = 33
14. ∠A = 64°57′ y c = 85
15. a = 13 y b = 84
16. a = 15 y c = 113
17. b = 16 y c = 65
18. ∠B = 26° y a = 80
19. ∠B = 48°40′ y c = 22.5

20. **Problema de la cuerda de la bandera.**
Si necesitas comprar cuerda para el asta de una bandera y observas que la sombra del asta en el piso es 11.6 m. y el ángulo de elevación del sol es de 35°40′. ¿De qué tamaño debes de comprar la cuerda?

21. **Problema de la torre de observación.**
La torre más alta del mundo mide 553 m. de altura y se encuentra en Toronto, si la sombra que proyecta en el piso mide 1100 metros de longitud ¿Cuál será el ángulo de elevación del sol a esa hora del día?

22. **Problema del faro de luz.**
Un observador ve desde lo alto de un faro de 60 m. de altura un barco en el agua, con un ángulo de depresión de 12°42′ ¿Cuál será la distancia del barco a la torre?

23. **Problema de la radioterapia.**
Un tubo de rayos gamma es usado para tratar un tumor que se encuentra 5.7 cm. debajo de la piel del paciente, para no dañar un órgano que esta arriba del tumor el técnico mueve el tubo 8.3 centímetros hacia un lado. ¿Cuál será el ángulo del tubo para que los rayos peguen en el tumor? ¿Cuánto tendrá que viajar el rayo a través de la piel?

24. **Problema de la inclinación de la calle.**
Cierta persona desea saber cuál es el ángulo de inclinación de una calle. Se da cuenta que los ladrillos de una barda son horizontales con respecto a la calle y mide desde un punto, la distancia horizontal es de 35 cm. y de ahí hacia abajo el ladrillo mide 6 cm. de distancia vertical hacia la calle. ¿Cuál es el ángulo de inclinación?

25. **Problema del misil.**
Un observador se encuentra a 4.8 km. del lanzamiento de un misil y lo ve ascender.
   a. A un determinado tiempo, el ángulo de elevación es 30°25′ ¿Qué tan alto está el misil? ¿Qué tan lejos esta del observador?
   b. ¿Cuál será el ángulo de elevación cuando el misil alcance 30 km. de altura?

5.2 Funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera

Objetivo:

> Encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, dado: a) un punto del lado terminal de un ángulo en posición normal o b) el valor de una función trigonométrica junto coninformación sobre el cuadrante en el que se localiza el ángulo. Encontrar los ángulos de referencia y usárlos para encontrar los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo mayor de 90°

En determinados tipos de problemas como los que hasta ahora hemos estudiado, en los que intervienen rectas y ángulos, estos elementos forman parte de triángulos rectángulos. Pero no siempre es éste el caso y,como veremos en el otro capítulo, es necesario muchas veces resolver triángulos oblicuángulos.

En los triángulos rectángulos los ángulos cuyas funciones trigonométricas hemos utilizado en los cálculos son siempre agudos. Sin embargo, en los triángulos oblicuángulos hay que operar con ángulos obtusos. Se presenta, pues, la necesidad de retomar el concepto de ángulo dado en la sección 4.2 del capítulo anterior.

Un "sistema de coordenadas rectangulares" en un plano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares entre sí (llamadas ejes), una horizontal y la otra vertical, cuyo punto de intersección (origen) es el cero de cada escala. Se acostumbra escoger la dirección positiva, en la escala horizontal (eje *X*), a la derecha del origen y hacia arriba del origen en la escala vertical (eje *Y*).

Gracias a este sistema, la posición de un punto P en el plano puede darse por medi de sus distancias dirigidas con respecto a estos ejes, a las que son llamada "coordenadas" del punto. La coordenada *"x"* o abscisa de un punto P (fig. 5.2),

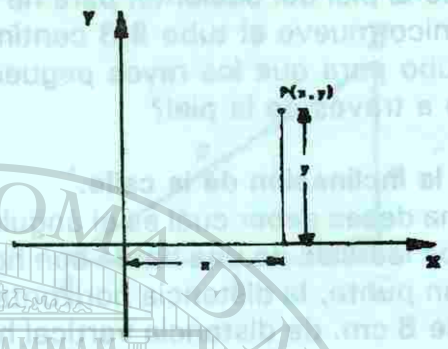


Fig. 5.2

es la distancia dirigida *"x"* desde el eje *Y* hasta el punto P, y la coordenada "y" o ordenada es la distancia dirigida *"y"* desde el eje *X* hasta el punto P. Un punto P con una abscisa *"x"* y una ordenada *"y"* se denotará como P*(x,y)*.

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas "cuadrantes" y se enumeran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. Los cuadrantes numerados, junto con los signos de las coordenadas de un punto en cada uno de ellos se muestran en la figura 5.3.

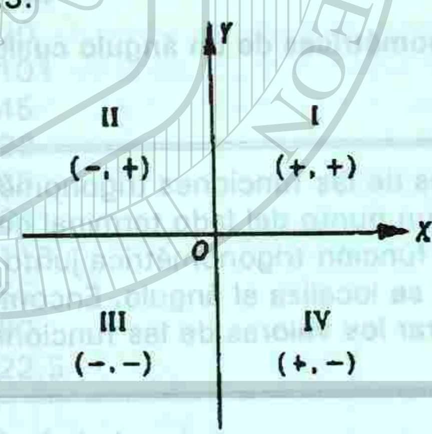


Fig. 5.3

Otra distancia por considerar es la distancia del origen O al punto P. Esta distancia llamada R (figura 5.4), es la "distancia radial" de P. La "distancia radial" de P no es una distancia dirigida, por lo cual siempre es un número no negativo. Utilizando el teorema de Pitágoras se puede determinar R en términos de *"x"* y de *"y"*:

$$R^2 = x^2 + y^2$$
$$R = \sqrt{x^2+y^2}$$

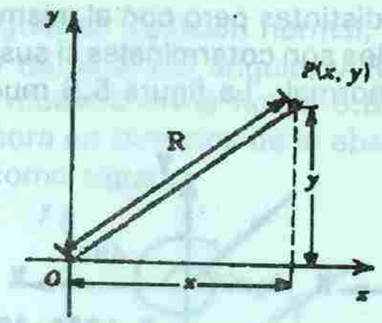


Fig. 5.4

Por lo tanto, a cada punto P localizado en un sistema de coordenadas rectangulares, se le asocian tres valores: *"x"*, *"y"* y R.

A un punto P se le asocia también un cuarto valor, θ , donde θ es la medida de un ángulo dirigido (positivo, si se mide en contra de las manecillas del reloj y negativo, si se mide a favor).

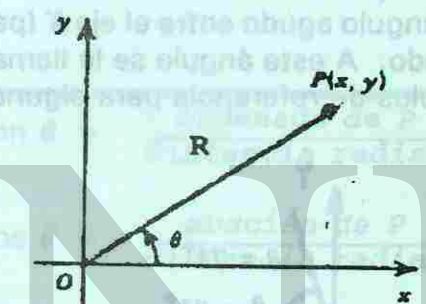


Fig. 5.5

Este ángulo tiene como lado inicial la parte positiva del eje *X* y como lado terminal el rayo que sale del origen O y que pasa por el punto P (fig. 5.5) observa que no hay un único valor de θ para cada punto P; de hecho, hay un número ilimitado de valores de θ que pueden asociarse a cada punto P, que pueden encontrarse agregando múltiplos enteros de 360° al valor del ángulo específico.

Con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares, se dice que un ángulo se encuentra en "posición normal", cuando su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el eje positivo *X*.

Un ángulo en posición normal pertenece al "primer cuadrante" cuando su lado terminal cae dentro del cuadrante I, pertenece al "segundo cuadrante" si su lado terminal cae dentro del cuadrante II, etc. Si el lado terminal de un ángulo coincide con uno de los ejes coordenados, se dice que el ángulo es un "ángulo cuadrantal" (ya que el lado terminal es una frontera entre dos cuadrantes adyacentes). Por ejemplo, los ángulos situados en 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, 450°, 540°, 630°; etc. son cuadrantales.

Observa que R puede rotar, ya sea en la dirección en que giran las manecillas del reloj, o bien en la dirección contraria hacia el punto P. También R puede rotar dando una o más vueltas completas hasta llegar al punto P.

Los ángulos de medidas distintas pero con el mismo lado terminal se llaman "ángulos coterminales". Los ángulos son coterminales si sus lados terminales coinciden al estar los ángulos en posición normal. La figura 5.6 muestra tres ángulos coterminales:

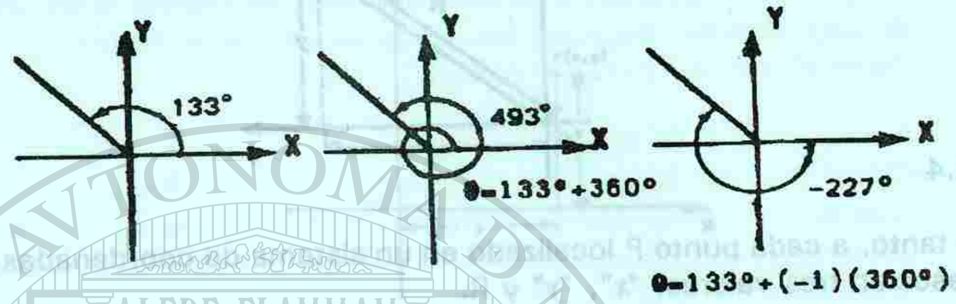


Fig. 5.6

Para dibujar un ángulo en posición normal y localizar R exactamente, nos podemos auxiliar encontrando el ángulo agudo entre el eje X (parte positiva o negativa) y el lado terminal R del ángulo dado. A este ángulo se le llama "ángulo de referencia" (θ_r). La figura 5.7 muestra ángulos de referencia para algunos valores de θ

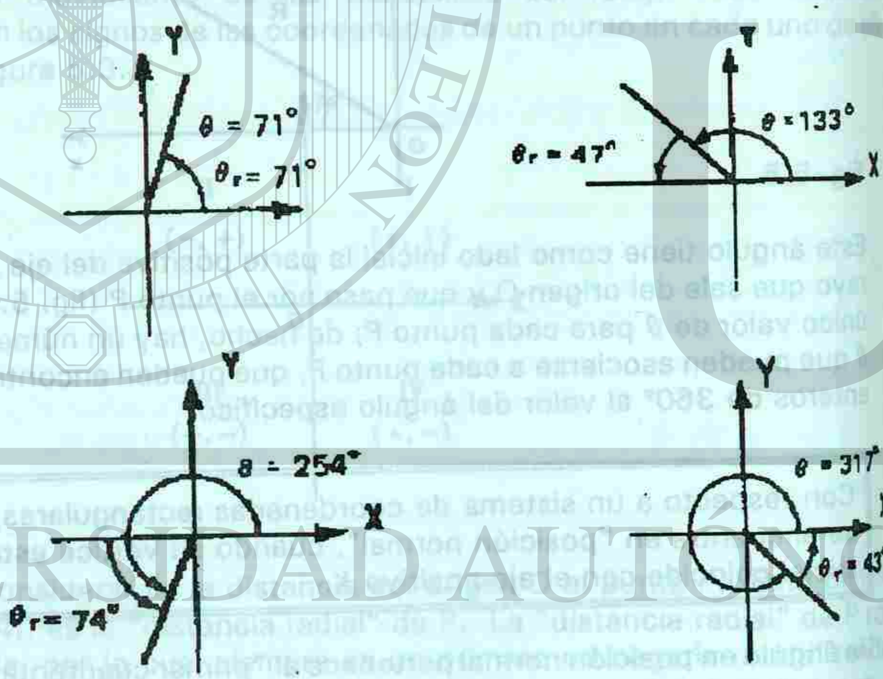


Fig. 5.7

En general, el valor del ángulo de referencia de un ángulo depende del cuadrante en el que se encuentre R. Si θ es un ángulo positivo en posición normal y el lado terminal de θ está en el:

Cuadrante I,	entonces	$\theta_r = \theta$
Cuadrante II,	entonces	$\theta_r = 180° - \theta$
Cuadrante III,	entonces	$\theta_r = \theta - 180°$
Cuadrante IV,	entonces	$\theta_r = 360° - \theta$

Si θ es la medida de un ángulo en posición normal, $P(x,y)$ es un punto distinto del origen localizado en el lado terminal del ángulo, y R es la distancia radial positiva desde O hasta P (como se muestra en la figura 5.8), entonces las seis funciones trigonométricas definidas ahora en términos de la abscisa, la ordenada y la distancia radial del punto P, quedan como sigue:

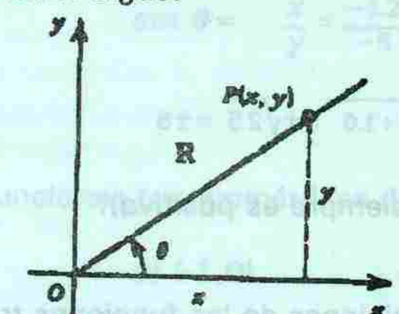


Fig. 5.8

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{distancia radial}} = \frac{y}{R}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{distancia radial}} = \frac{x}{R}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{\text{abscisa de } P}{\text{ordenada de } P} = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{distancia radial}}{\text{abscisa de } P} = \frac{R}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{distancia radial}}{\text{ordenada de } P} = \frac{R}{y}$$

Puesto que el ángulo θ, en posición normal, generado al rotar R, puede tomar cualquier valor, R puede estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes. Así, los valores de "x" y de "y", que representan las distancias dirigidas a un punto en R, varían en signo, dependiendo del cuadrante en el que se encuentra R; por lo tanto, los signos de las funciones trigonométricas variarán de acuerdo con ésto.

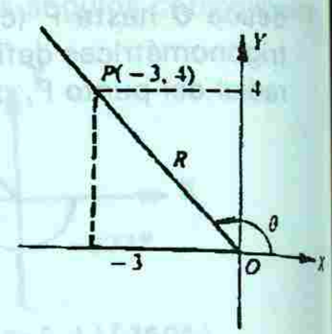
Ejemplo 1

Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal para por (-3,4)

Solución

Primero se determina la distancia, R:

$R^2 = x^2 + y^2$



$R = \sqrt{x^2+y^2}$

$R = \pm\sqrt{(-3)^2+(4)^2} = \pm\sqrt{9+16} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$

entonces, R = 5 (pues R siempre es positiva).

Luego utilizando las definiciones de las funciones trigonométricas:

sen $\theta = \frac{y}{R} = \frac{4}{5} = 0.8$	csc $\theta = \frac{R}{y} = \frac{5}{4} = 1.25$
cos $\theta = \frac{x}{R} = \frac{-3}{5} = -0.6$	sec $\theta = \frac{R}{x} = \frac{5}{-3} = -1.6666$
tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3} = -1.3333$	cot $\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4} = -0.75$

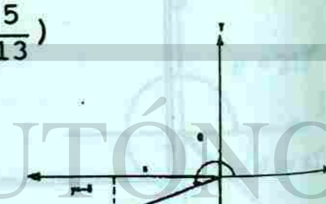
Ejemplo 2

Encuentra los valores de las cinco funciones trigonométricas restantes de θ, si θ está en posición normal en el tercer cuadrante y sen $\theta = -\frac{5}{13}$

Solución

Como sabemos que sen $\theta = \frac{y}{R}$ y sen $\theta = -\frac{5}{13}$, $\left(\frac{y}{R} = -\frac{5}{13}\right)$

entonces, $y = -5$ y R = 13; luego, utilizando el teorema de Pitágoras, para determinar la abscisa, x:



$R^2 = x^2 + y^2$

$x = \sqrt{R^2 - y^2}$

$x = \pm\sqrt{(13)^2-(-5)^2} = \pm\sqrt{169-25} = \pm\sqrt{144} = \pm 12$

donde: $x = -12$ (pues la abscisa de un punto en el tercer cuadrante es negativo).

Entonces, los valores de las demás funciones serán:

	csc $\theta = \frac{R}{y} = \frac{13}{-5} = -2.6$
cos $\theta = \frac{x}{R} = \frac{-12}{13} = -0.9231$	sec $\theta = \frac{R}{x} = \frac{13}{-12} = -1.0833$
tan $\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-12} = 0.4167$	cot $\theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{-5} = 2.4$

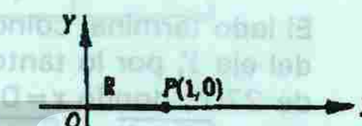
Ejemplo 3

Encuentra los valores de las funciones trigonométricas de θ si su lado terminal pasa por:

a) (1,0) b) (0,1) c) (-1,0) d) (0,-1)

Solución

a) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 0°; donde: $x = 1$ y $y = 0$



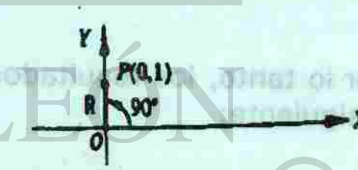
$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(1)^2+(0)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R = 1

Entonces los valores de las funciones de 0° son:

sen 0° = $\frac{y}{R} = \frac{0}{1} = 0$	csc 0° = $\frac{R}{y} = \frac{1}{0} = indefinido$
cos 0° = $\frac{x}{R} = \frac{1}{1} = 1$	sec 0° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{1} = 1$
tan 0° = $\frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$	cot 0° = $\frac{x}{y} = \frac{1}{0} = indefinido$

b) El lado terminal coincide con la parte positiva del eje Y, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 90°; donde: $x = 0$ y $y = 1$



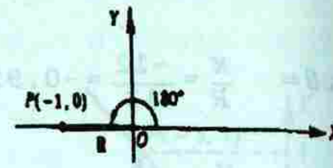
$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(6)^2+(1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

R = 1

Entonces los valores de las funciones de 90° son:

sen 90° = $\frac{y}{R} = \frac{1}{1} = 1$	csc 90° = $\frac{R}{y} = \frac{1}{1} = 1$
cos 90° = $\frac{x}{R} = \frac{0}{1} = 0$	sec 90° = $\frac{R}{x} = \frac{1}{0} = indefinido$
tan 90° = $\frac{y}{x} = \frac{1}{0} = indefinido$	cot 90° = $\frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0$

c) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje X, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 180°; donde: $x=-1$ y $y=0$



$$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(-1)^2+(0)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$R = 1$

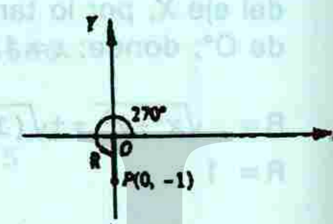
Entonces los valores de las funciones de 180° son:

$\text{sen } 180° = \dfrac{y}{R} = \dfrac{0}{1} = 0$ $\qquad \csc 180° = \dfrac{R}{y} = \dfrac{1}{0} = indefinido$

$\cos 180° = \dfrac{x}{R} = \dfrac{-1}{1} = -1$ $\qquad \sec 180° = \dfrac{R}{x} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\tan 180° = \dfrac{y}{x} = \dfrac{0}{-1} = 0$ $\qquad \cot 180° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1}{0} = indefinido$

d) El lado terminal coincide con la parte negativa del eje Y, por lo tanto, θ es el ángulo cuadrantal de 270°; donde $x=0$ y $y=-1$



$$R = \sqrt{x^2+y^2} = \pm\sqrt{(0)^2+(-1)^2} = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

$R = 1$

Entonces los valores de las funciones de 270° son:

$\text{sen } 270° = \dfrac{y}{R} = \dfrac{-1}{1} = -1$ $\qquad \csc 270° = \dfrac{R}{y} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\cos 270° = \dfrac{x}{R} = \dfrac{0}{1} = 0$ $\qquad \sec 270° = \dfrac{R}{x} = \dfrac{1}{0} = indefinido$

$\tan 270° = \dfrac{y}{x} = \dfrac{-1}{0} = indefinido$ $\qquad \cot 270° = \dfrac{x}{y} = \dfrac{0}{-1} = 0$

Por lo tanto, los resultados obtenidos en el ejemplo 3 se pueden resumir en la tabla 3 siguiente:

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°	0	1	0	--	1	--
90	1	0	--	0	--	1
180°	0	-1	0	--	-1	--
270°	-1	0	--	0	--	-1

Tabla 3

Los signos asociados a los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo dependen del cuadrante en el que encuentre el lado final del ángulo. El valor de R siempre es positivo; así los signos de las funciones dependen de los signos de "x" y de "y". Si θ está en el primer cuadrante, tanto "x" como "y" son positivas; por lo tanto, todas las razones trigonométricas en el primer cuadrante son positivas. Si θ está en el segundo cuadrante, el "x" es negativa y la "y" es positiva; así que las razones en las que aparezca "x" son negativas y las demás positivas. Por lo tanto, en el cuadrante II únicamente son positivas el seno y el cosecante, y el coseno, la tangente, la cotangente y la secante son negativas. Después de analizar los signos de las funciones para cada cuadrante, podemos resumir los resultados en la Tabla 4.

	senθ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
I	+	+	+	+	+	+
II	+	-	-	-	-	+
III	-	-	+	+	-	-
IV	-	+	-	-	+	-

Tabla 4

También se pueden resumir estos resultados, para su mayor retención, como se muestra en figura 5.9 (las funciones que no aparecen son negativas en ese cuadrante).

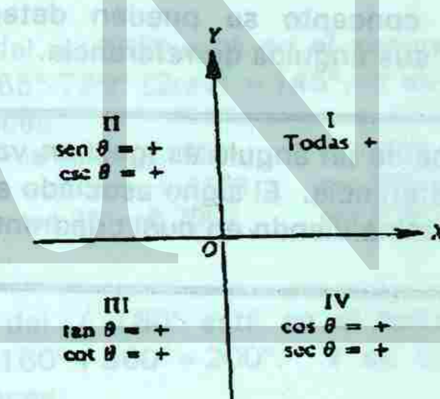


Fig. 5.9

Es evidente que las definiciones de las funciones trigonométricas son válidas independientemente del cuadrante en el que se encuentre R y sus valores para un ángulo dado, también son independientes del punto P en su lado terminal; pero los diagramas de la figura 5.10, demuestran que los valores de las funciones trigonométricas para un ángulo θ cambian de acuerdo con el valor de θ y están relacionados con el valor de las funciones del ángulo de referencia (θ_r) correspondiente.

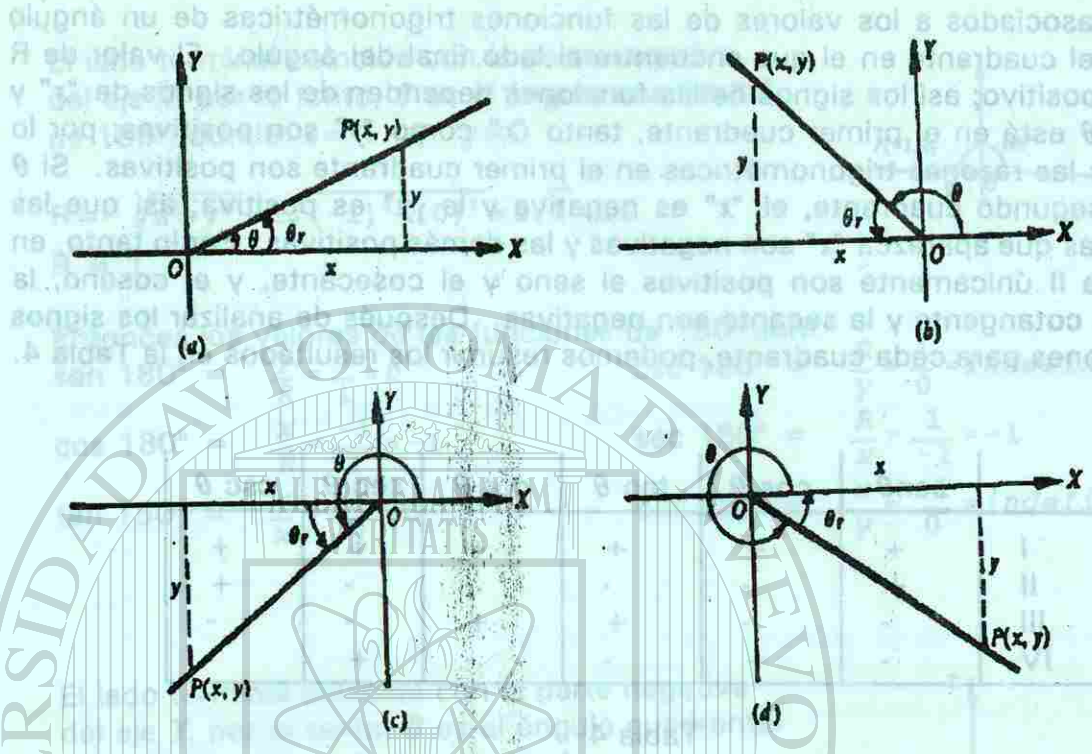


Fig. 5.10

Haciendo uso de este último concepto se pueden determinar las funciones trigonométricas de los ángulos y sus ángulos de referencia.

> Cualquier función trigonométrica de un ángulo es igual en valor absoluto, al mismo valor de su ángulo de referencia. El signo asociado al valor de cada función trigonométrica se determina viendo en cuál cuadrante se encuentra el lado terminal del ángulo dado.

Por ejemplo
$|\text{sen } \theta| = \text{sen } \theta_r$

o bien,
$\text{sen } \theta = \pm \text{ sen } \theta_r$

Este procedimiento se puede aplicar a todas las funciones trigonométricas en todos los cuadrantes, por lo que el concepto anterior se puede aplicar a cualquier ángulo entre 0° y 360°. Por lo demás, si el ángulo es mayor de 360° o menor de 0° (ángulo negativo), dicho ángulo es coterminal con un ángulo que esté entre 0° y 360°. Así, se puede aplicar la regla a cualquier ángulo arbitrario. Conviene recordarte que los valores varían en signo, dependiendo del cuadrante en que se encuentre el lado terminal del ángulo.

Ejemplo 4
Utilizando el concepto de ángulo de referencia y las tablas trigonométricas o una calculadora, encuentra el valor de las funciones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos:

a) 110° b) 320° c) 230° d) 865° e) -160°

Solución

a) El lado terminal del $\angle 110°$ está en el segundo cuadrante. El ángulo de referencia, $\theta_r = 180° - 110° = 70°$, entonces:

sen 110° = sen 70° = 0.9397	csc 110° = csc70° = 1.0642
cos 110° = -cos 70° = -0.3420	sec 110° = -sec 70° = -2.9238
tan 110° = -tan 70° = -2.7475	cot 110° = -cot 70° = -0.3640

b) El lado terminal del $\angle 320°$ está en el cuarto cuadrante. El ángulo de referencia, $\theta_r = 360° - 320° = 40°$, entonces:

sen 320° = -sen 40° = -0.6428	csc 320° = -csc 40° = -1.5557
cos 320° = cos 40° = 0.7660	sec 320° = sec 40° = 1.3054
tan 320° = -tan 40° = -0.8391	cot 320° = - cot 40° = -1.1917

c) El lado terminal del $\angle 230°$ está en el tercer cuadrante. El ángulo de referencia, $\theta_r = 230° - 180° = 50°$; entonces:

sen 230° = -sen 50° = -0.7660	csc 230° = -csc 50° = -1.3054
cos 230° = -cos 50° = -0.6428	sec 230° = -sec 50° = -1.5557
tan 230° = tan 50° = 1.1917	cot 230° = cot 50° = 0.8391

d) El lado terminal del $\angle$ 865° está en el segundo cuadrante, pues su ángulo coterminal, $\theta_c = 865° - 720°$ (2rev) $= 145°$. Y su ángulo de referencia $\theta_r = 180° - 145° = 35°$; entonces:

sen 865° = sen 145° = sen 35° = 0.5736	csc 865° = csc 145° = csc 35° = 1.7434
cos 865° = cos 145° = -cos 35° = -0.8192	sec 865° = sec 145° = -sec 35° = -1.2208
tan 865° = tan 145° = -tan 35° = -0.7002	cot 865° = cot 145° = -cot 35° = -1.4281

e) El lado terminal del $\angle$-160° está en el tercer cuadrante, pues su ángulo coterminal, $\theta_c = -160° + 360° = 200°$. Y su ángulo de referencia, $\theta_r = 200° - 180° = 20°$; entonces:

sen (-160°) = sen 200° = -sen 20° = -0.3420	csc (-160) = csc 200° = -csc 20° = -2.9238
cos(-160°) = cos 200° = -cos 20° = -0.9397	sec (-160°) = sec 200° = -sec 20° = -1.0642
tan (-160°) = tan 200° = tan 20° = 0.3640	cot (-160°) = cot 200° = cot 20° = 2.7475

Cuando se da un ángulo, sus funciones trigonométricas están determinadas en forma única. Sin embargo, cuando se da el valor de una función de un ángulo, el ángulo no se determina en forma única. Por ejemplo, si sen $\theta = 0.5$, entonces $\theta = 30°$, 150°, 390°, 510°,... En general, dos posiciones posibles del lado terminal pueden encontrarse entre 0° y 360°, por ejemplo, los lados terminales de 30° y 150° de la ilustración anterior. La excepción a esta regla ocurre cuando el ángulo es cuadrantal.

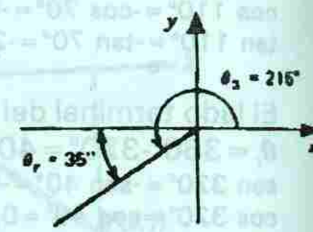
Ejemplo 5

Utilizando el ángulo de referencia, encuentra θ tal que $0° \leq \theta \leq 360°$, si sen $\theta = -0.5736$

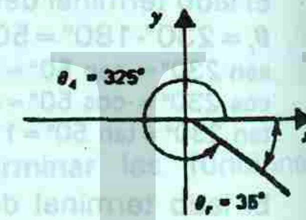
Solución:

Puesto que el seno es negativo, tanto en el tercero como en el cuarto cuadrante, tienes que encontrar dos ángulos θ_3 y θ_4, cuyo seno sea el valor dado. Para encontrar estos ángulos, tienes que hallar primero el ángulo relacionado con sen $\theta_r = 0.5736$. Usando las tablas o una calculadora se determina que sen $35° = 0.5736$; así el ángulo de referencia es $\theta_r = 35°$.

Para la solución del tercer cuadrante:
$\theta_3 = 180° + 35° = 215°$



Para la solución del cuarto cuadrante:
$\theta_4 = 360° - 35° = 325°$



La mayoría de las calculadoras proporcionan los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, simplemente dando entrada al ángulo y oprimiendo el botón de "función" apropiado. Esto es, la calculadora se toma el trabajo de encontrar funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

Ejemplo 6

Utiliza la calculadora para encontrar: sen 192°

Solución:

En la calculadora puede evaluarse sen 192° poniendo simplemente la calculadora en el modo grados, dando entrada a 192 y oprimiendo el botón sin. En la pantalla se leerá -0.20791. Por lo tanto,

$$\text{sen } 192° = -0.2079$$

Notarás que cuando se usa una calculadora para encontrar un ángulo, cuando se conoce el valor de su función trigonométrica, se obtiene sólamente un ángulo. Por ejemplo, si sen θ = -0.5, tu calculadora dará solamente el $\angle\theta = -30°$. Sin embargo, si cos θ = -0.5, tu calculadora dará el $\angle\theta = 120°$. La razón por la que obtenemos un ángulo agudo negativo en el primer caso y un ángulo obtuso positivo en el segundo es porque, por ejemplo, si quisiéramos encontrar el valor de θ para el cual tan θ = 1, desafortunadamente hay una infinidad de valores de θ, que satisfacen esta condición, algunos de los cuales son: 45°, 225°, 405°, 585°, 765°, 945°, etc., también, -135°, -315°, -495°, -675°, etc.; deberás estar conciente de las dificultades inherentes que representa para la calculadora resolver la ecuación tan θ = 1, ¿qué valor desplegaría en la pantalla como solución? Para evitar esta ambigüedad la calcualdora restringe el dominio de tan θ al intervalo entre 0° y 180° o entre, 0° y -180°. Entonces, θ = 45°, que es el único valor de θ para el cual tan θ = 1. La situación descrita para la función tangente es cierta también para las demás funciones trigonométricas y los valores del dominio a los cuales se limita así una función trigonométrica se llaman "valores principales" de la función.

Sobre el dominio de valores principales, ecuaciones tales como sen θ = -0.5, o cos θ = -0.5 tienen sólamente una solución posible.

Para evitar confusiones, te sugerimos que uses la calculadora para encontrar el ángulo de referencia para una función trigonométrica dada. El ángulo de referencia se obtendrá de la calculadora si entra el valor absoluto de la función dada. Por ejemplo, si tan θ = -0.3500, el ángulo de referencia se encuentra presionando 0.3500. Esto es:

$$0.3500 \text{ INV tan} = 19.29°$$

Los ángulos deseados se encuentran ahora mediante el procedimiento descrito previamente; esto es, $\theta_{II} = 180° - 19.29° = 160.29°$ y
$\theta_{IV} = 360° - 19.29° = 340.71°$

Ejemplo 7

Encuentra los valores de θ tales que $0° \leq \theta < 360°$ si: senθ = -0.5664

Solución:

Introduciendo el valor absoluto de la función y presionando las teclas **INV sin**. El ángulo de referencia resultante es:

$$0.5664 \text{ INV sin} = 34.5°$$

Ahora, pueto que el seno es negativo en el tercero y en el cuarto cuadrante, obtenemos:

$$\theta_{III} = 180° + 34.5° = 214.5°$$
$$\theta_{IV} = 360° - 34.5° = 325.5°$$

Ejercicio 5.2

En los problemas 1 y 2 encuentra el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ si su lado final pasa por:

1. (15,8)
2. (-7,-24)

En qué cuadrante quedaría localizado θ si:

3. sen θ es negativo y cos θ es positivo
4. sen θ y cos θ son negativos
5. sen θ es positivo y tan θ es negativo
6. sen θ y tan θ son positivos

Encuentra los valores de las demás funciones trigonométricas de θ, dado:

7. cos $\theta = \frac{12}{35}$ y θ está en el IV cuadrante
8. tan $\theta = -\frac{21}{20}$ y θ está en el II cuadrante

Evalúa cada una de las siguientes expresiones:

9. sen 0° + 2 cos 0° + 3 sen 90° + 4 cos 90° + 5 sec 0° + 6 csc 90°
10. sen 180° + 2 cos 180° + 3 sen 270° + 4 cos 270° - 5 sec 180° - 6 csc 270°
11. tan 180° - 2 cos 180° + 3 csc 270° + sen 90°
12. sen 0° + 3 cot 90° + 5 sec 180° - 4 cos 270°
13. 4 cos(π/2) - 5 sen(3π/2) - 2 sen(π/2) + sen 0
14. 3 sen π + 4 cos 0 - 3 cos π + sen(π/2)

Expresa cada una de las funciones del ángulo dado, como la misma función de su ángulo de referencia y encuentra el valor de la función.

15. cot 147°
16. sec 333°
17. csc 233°
18. cos 100°
19. tan 590°
20. sen 1000°
21. cos (-345°)
22. sen (-965°)

Dado el valor de la función, encuentra la medida del ángulo θ, si $0° \leq \theta < 360°$

23. cos θ = 0.6157
24. tan θ = -1.376
25. sen θ = 0.4014
26. sec θ = -1.035

27. Utiliza los valores de los ángulos especiales cuadrantales y el concepto del ángulo de referencia para encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360° sin usar la calculadora o las tablas.

θ	sen θ	cos θ	tan θ	cot θ	sec θ	csc θ
0°						
30°						
45°						
60°						
90°						
120°						
135°						
150°						
180°						
210°						
225°						
240°						
270°						
300°						
315°						
330°						
360°						

5.3 Relaciones fundamentales e identidades

Objetivo:

Usar las relaciones: recíprocas, de cocientes, pitagóras, de la suma y diferencia de dos ángulos, del ángulo doble y de la mitad del ángulo para simplificar espresiones, o bien, para demostrar que una ecuación trigonométrica dada es o no es una identidad.

En las secciones anteriores hemos tenido la ocasión de aprovechar con frecuencia las relaciones que desarrollamos en la sección 4.4 entre las funciones trigonométricas de un ángulo. Esas fórmulas y otras relaciones análogas tienen mucha aplicación en la parte de la trigonometría que constituye el llamado "Análisis trigonométrico", y en algunas otras ramas de las matemáticas superiores, como por ejemplo, en el "Cálculo infinitesimal". Son además sumamente útiles para la elaboración de las tablas trigonométricas y su deducción presenta un gran interés de tipo teórico.

Por estas razones damos en esta sección una breve introducción al Análisis trigonométrico, desarrollando algunas de las relaciones que ligan a las funciones trigonométricas de un ángulo y de más de un ángulo.

Hay once relaciones "fundamentales" que ya debes de estar familiarizado con ellas, pues las estudiaste en la sección 4.4, pero éstas se enlistan aquí para integridad:

RELACIONES RECIPROCAS

$$sen\ \theta = \frac{1}{csc\ \theta} \qquad csc\ \theta = \frac{1}{sen\ \theta}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

RELACIONES DE COCIENTES

$$\tan\theta = \frac{sen\ \theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{sen\ \theta}$$

RELACIONES PITAGORICAS

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = csc^2\theta$$

Estas once relaciones se llaman "identidades fundamentales" de la trigonometría y son válidas para todos los valores de θ para los cuales tienen significado las funciones en la expresión.

Las fórmulas anteriores nos permiten resolver el siguiente problema: conocida una de las funciones trigonométricas de un ángulo, determinar en función de ella todas las demás. Así, por ejemplo, para expresar todas las funciones trigonométricas en función del seno, se tiene:

$sen\theta \ = \ sen\theta$

según la relación pitagórica: $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$$

por lo tanto, $\cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$

Según la relación de cocientes: $\tan\theta = \dfrac{sen\ \theta}{\cos\theta}$

por lo tanto, $\tan\theta = \dfrac{sen\ \theta}{\sqrt{1 - sen^2\theta}}$

Para ser $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$, resulta:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{1 - sen^2\theta}}{sen\ \theta}$$

Análogamente, de $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ y de $\cos\theta = \sqrt{1 - sen^2\theta}$ se deduce:

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2\theta}}$$

y finalmente, según ya hemos visto:

$$csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta}$$

Las fórmulas anteriores expresan todas las funciones en términos de sen θ. De manera semejante se pueden expresar todas, en función de cos θ, etc. (Te recomendamos que lo hagas como ejercicio).

Pero el objetivo más importante de esta sección es el que aprendas cómo simplificar o alterar la forma de expresiones trigonométricas usando las relaciones trigonométricas fundamentales.

Se pueden obtener varias formas equivalentes de las identidades fundamentales mediante la manipulación algebraica. Dichas formas alternas se dan en la siguiente tabla:

IDENTIDAD FUNDAMENTAL	FORMAS EQUIVALENTES	
Recíprocas		
$\text{sen}\ \theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$	$\csc\theta = \dfrac{1}{\text{sen}\ \theta}$	$\text{sen}\ \theta \csc\theta = 1$
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$	$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	$\cos\theta \sec\theta = 1$
$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$	$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$	$\tan\theta \cot\theta = 1$
Cocientes		
$\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta}$	$\text{sen}\theta = \tan\theta\cos\theta$	$\cos\theta = \dfrac{\text{sen}\theta}{\tan\theta}$
$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\ \theta}$	$\cos\theta = \cot\theta\,\text{sen}\theta$	$\text{sen}\theta = \dfrac{\cos\theta}{\cot\theta}$
Pitagóricas		
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	$\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\theta$
$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$	$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

Tabla 5

Las once identidades fundamentales y sus formas equivalentes se pueden aplicar para simplificar expresiones que contienen funciones trigonométricas. Simplificar quiere decir reducir el número de términos de la expresión o el número de funciones trigonométricas distintas que se usan. O también, se pueden utilizar para demostrar que ciertas ecuaciones relativamente complicadas también son identidades. Una demostración lógica puede requerir:

a) la transformación de uno de los miembros de la ecuación, o bien;
b) la transformación de ambos miembros de la ecuación.

En todo caso, no hay que pasar ningún término de un lado a otro de la ecuación, pues es incorrecto verificar una identidad empezando con la suposición de que "es" una identidad.

Una o más de las siguientes sugerencias te pueden ayudar a simplificar expresiones trigonométricas o a verificar identidades:

1) Conocer las once relaciones fundamentales y reconocer las formas equivalentes de cada una.
2) Conocer los procedimientos de adición, sustracción y reducción de fracciones en fracciones más simples.
3) Conocer las técnicas de factorización y de los productos especiales.

4) Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos, y entonces simplificar.
5) evitar sustituciones que introduzcan expresiones con radicales.

Ejemplo 1

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) $(\sec\theta + \tan\theta(1 - \text{sen}\theta)$

b) $\cos^2\theta - \cos^4\theta + \text{sen}^4\theta$

c) $\dfrac{\cot^3\theta - \tan^3\theta}{\cot\theta - \tan\theta} - \sec^2\theta$

d) $\dfrac{\cos\theta}{1 - \text{sen}\,\theta} - \dfrac{1 + \text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$

Solución

a) Escribimos cada una de las funciones en términos de seno y coseno

$$(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \text{sen}\theta) = \left(\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \text{sen}\theta)$$

Sumamos las fracciones del primer factor

$$= \left(\frac{1 + \text{sen}\theta}{\cos\theta}\right)(1 - \text{sen}\theta)$$

$$= \frac{(1 + \text{sen}\theta)(1 - \text{sen}\theta)}{\cos\theta}$$

Multiplicamos los factores del numerador de la fracción resultante

$$= \frac{1 - \text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

Usamos la relación pitagórica equivalente $1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$= \cos\theta$$

b) Agrupamos los primeros dos términos y factorizamos

$$\cos^2\theta - \cos^4\theta + \text{sen}^4\theta = (\cos^2\theta - \cos^4\theta) + \text{sen}^4\theta$$
$$= \cos^2\theta(1 - \cos^2\theta) + \text{sen}^4\theta$$

Usamos la relación pitagórica equivalente $1 - \cos^2\theta = \text{sen}^2\theta$

$$= \cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta + \text{sen}^4\theta$$

Factorizamos y usamos la relación pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$= \text{sen}^2\theta(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$
$$= \text{sen}^2\theta(1)$$
$$= \text{sen}^2\theta$$

c) Factorizamos el numerador de la fracción (diferencia de dos cubos)

$$\frac{\cot^3\theta - \tan^3\theta}{\cot\theta - \tan\theta} - \sec^2\theta = \frac{(\cot\theta - \tan\theta)(\cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta + \tan^2\theta)}{(\cot\theta - \tan\theta)} - \sec^2\theta$$

Se simplifica la fracción

$$= \cot^2\theta + \cot\theta\tan\theta + \tan^2\theta - \sec^2\theta$$

Usamos la relación recíproca equivalente $\tan\theta\cot\theta = 1$

$$= \cot^2\theta + 1 + \tan^2\theta - \sec^2\theta$$

Luego la relación pitagórica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ y simplificamos

$$= \cot^2\theta + \sec^2\theta - \sec^2\theta$$
$$= \cot^2\theta$$

d) Restamos las fracciones

$$\frac{\cos\theta}{1-\text{sen}\,\theta} - \frac{1+\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta - (1+\text{sen}\,\theta)(1-\text{sen}\,\theta)}{(1-\text{sen}\,\theta)\cos\theta}$$

Efectuamos las operaciones indicadas en el numerador

$$= \frac{\cos^2\theta - (1-\text{sen}^2\theta)}{(1-\text{sen}\,\theta)\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta - \cos^2\theta}{(1-\text{sen}\,\theta)\cos\theta} \quad \text{relación pitagórica } (1-\text{sen}^2\theta = \cos^2\theta)$$

$$= \frac{0}{(1-\text{sen}\,\theta)\cos\theta}$$

$$= 0$$

Como puedes ver por el ejemplo anterior, una gran parte del proceso es algebraico. La serie de pasos usados en los procedimientos de simplificación no es única. La experiencia con el uso de las relaciones fundamentales y sus formas equivalentes al simplificar expresiones trigonométricas te dará alguna facilidad para escoger un procedimiento adecuado.

Ejemplo 2

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

a) $$\frac{\text{sen}^4\theta - \cos^4\theta}{\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta} + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

b) $$\frac{\csc\theta}{\cos\theta} - \text{sen}\,\theta\sec\theta = \frac{\tan\theta\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Solución

a) Aquí, simplificaremos el lado izquierdo de la ecuación, factorizando el numerador de la fracción.

$$\frac{(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta)}{(\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta)} + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta) + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad \text{simplificando la fracción}$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad \text{utilizando relaciones pitagóricas}$$
$$\csc^2\theta = \csc^2\theta$$

b) Aquí, el procedimiento más expedito es desarrollar ambos lados. Primeramente, por relaciones pitagóricas el denominador de la fracción del miembro derecho se puede escribir como $\sec^2\theta$.

$$\frac{\csc\theta}{\cos\theta} - \text{sen}\,\theta\sec\theta = \frac{\tan\theta\csc^2\theta}{\sec^2\theta}$$

expresando ambos lados de la ecuación en términos de seno y coseno

$$\frac{\frac{1}{\text{sen}\,\theta}}{\cos\theta} - \text{sen}\,\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\left(\frac{1}{\text{sen}\,\theta}\right)^2}{\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2}$$

$$\frac{1}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} - \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\text{sen}^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\frac{1-\text{sen}^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\text{sen}\,\theta\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta}{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}$$

$$\frac{\cos\theta}{sen\theta} = \frac{\cos\theta}{sen\theta}$$

$$\cot\theta = \cot\theta$$

Muchas de las ecuaciones trigonométricas no son identidades; no son válidas para todos los valores de la variable. Para mostrar que una ecuación trigonométrica no es una identidad, basta con encontrar un ángulo que no satisfaga la ecuación. Tal ángulo sirve como un "contraejemplo". Al elegir un ángulo como contraejemplo, hay que evitar los ángulos cuadrantales, ya que se puede obtener una función trigonométrica indefinida.

Ejemplo 3
Muestra que $\dfrac{\cos\theta - sen\theta}{\cos\theta} = 1+\tan\theta$ no es una identidad.

Solución
El valor de θ se puede elegir de muchas formas; la elección es arbitraria. Por simplicidad en este caso, el valor que se usará de $\theta = 60°$

$$\frac{\cos 60° - sen\,60°}{\cos 60°} = 1+\tan 60°$$

$$\frac{1/2 - \sqrt{3}/2}{1/2} = 1+\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1+\sqrt{3}$$

$$1-\sqrt{3} \neq 1+\sqrt{3}$$

A veces es necesario trabajar con expresiones referentes a la función trigonométrica de la suma o la diferencia de dos ángulos, tales como $sen(\alpha+\beta)$. Ahora veremos las identidades que se pueden usar para evaluar las funciones trigonométricas de las sumas de ángulos.

En primer lugar, hay que observar que no es correcto obtener el valor de la función de cada ángulo y entonces encontrar la suma de estos valores, pensar que sen $(\alpha+\beta)$ es igual sen α + sen β, porque hay que recordar que el significado de sen $(\alpha+\beta)$ no es el producto de (sen)·$(\alpha+\beta)$; significa que se trata del seno de un ángulo que sea suma de los ángulos α y β (esto se comprueba con facilidad tomando ejemplos numéricos concretos). La verdadera relación entre sen$(\alpha+\beta)$ y cos $(\alpha+\beta)$ se establece construyendo la siguiente figura.

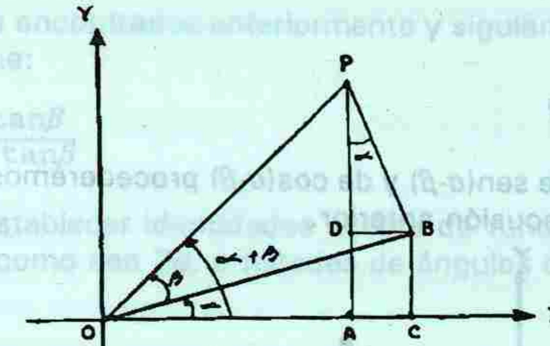


Fig. 5.11

Para construir esta figura, coloca el $\angle\alpha$ en posición normal y sitúa el $\angle\beta$ de tal forma que su vértice se encuentre en el origen O y su lado inicial coincida con el lado final del $\angle\alpha$. Si P es cualquier punto en el lado terminal del $\angle(\alpha+\beta)$ y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora $\angle APB = \alpha$ (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces,

$$sen(\alpha+\beta) = \frac{AP}{OP} = \frac{AD+DP}{OP} = \frac{CB+DP}{OP} = \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{CB}{OB}\cdot\frac{OB}{OP} + \frac{BP}{OP}\cdot\frac{DP}{BP}$$

Por lo tanto,
$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OA}{OP} = \frac{OC-AC}{OP} = \frac{OC-DB}{OP} = \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OP} - \frac{DB}{BP}\cdot\frac{BP}{OP}$$

Por lo tanto,
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta$

Puesto que la relación $\tan\theta = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$ es válida para cualquier ángulo, también lo será para el $\angle(\alpha+\beta)$ y tendremos

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{sen\alpha\cos\beta + sen\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - sen\alpha sen\beta}$$

Si recordamos que al dividir el numerador y el denominador de una fracción por una misma cantidad no se altera el valor de la fracción, podemos dividir el numerador y el denominador de la fracción anterior por el producto cos α cosβ, con lo que resultará:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{sen\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{sen\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{sen\alpha sen\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}{1 - \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{sen\beta}{\cos\beta}}$$

Por lo tanto,

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Para deducir las fórmulas de sen(α-β) y de cos(α-β) procederemos de manera parecida a como lo hicimos en la discusión anterior.

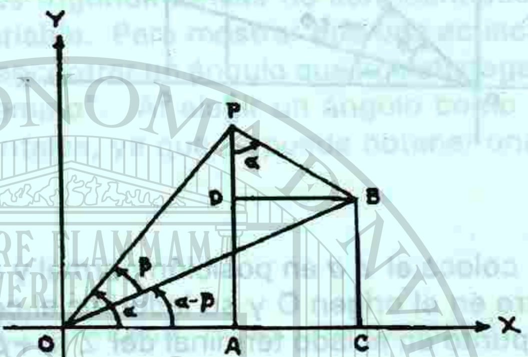


Fig. 5.12

Para construir la figura 5.12, coloca el $\angle\alpha$ en posición normal y sitúa el $\angle\beta$ de tal forma que su vértice se encuentre en el origen y su lado inicial coincida con el lado final del $\angle\alpha$. Si B es cualquier punto en el lado terminal del $\angle(\alpha$-$\beta)$ y trazas las rectas PA perpendicular a OX, PB perpendicular al lado terminal de α, BC perpendicular a OX y BD perpendicular a AP.

Ahora, $\angle$ APB = α (porque sus lados correspondientes son perpendiculares, OA y AP, OB y BP). Entonces

$$sen(\alpha-\beta) = \frac{BC}{OB} = \frac{AP-PD}{OB} = \frac{AP}{OB} - \frac{PD}{OB} = \frac{AP}{OP}\cdot\frac{OP}{OB} - \frac{PB}{OB}\cdot\frac{PD}{PB}$$

Por lo tanto,
sen(α-β) = sen α cosβ-sen β cosα

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{OC}{OB} = \frac{OA+AC}{OB} = \frac{OA+BD}{OB} = \frac{OA}{OB}+\frac{BD}{OB} = \frac{OA}{OP}\cdot\frac{OP}{OB}+\frac{BD}{PB}\cdot\frac{PB}{OB}$$

Por lo tanto,
cos (α-β) = cos α cosβ + senα senβ

Si ahora en la fórmula $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{sen(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$

sustituimos los valores encontrados anteriormente y siguiendo un proceso análogo al anterior, se obtiene que:

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

También se pueden establecer identidades acerca de funciones trigonométricas de ángulos dobles, tales como sen 2α, o mitades de ángulos como $\cos\frac{\alpha}{2}$

Supongamos que en las fórmulas de la suma de dos ángulos, los dos ángulos sean iguales, es decir $\alpha=\beta$. Quedarán entonces,

sen(α + α) = sen α cos α + sen α cos α

Por lo tanto,
sen 2α = 2 sen α cos α
cos(α + α) = cos α cos α - sen α sen α

Por lo tanto,
cos 2α = $\cos^2\alpha$ - $sen^2\alpha$

y

$$\tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

Por lo tanto,

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Por último, las funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo se expresan en función de las del ángulo por medio de las relaciones anteriores.

De la identidad cos 2α = $\cos^2\alpha$ - $sen^2\alpha$, si sustituímos $\cos^2\alpha$ por 1 - $sen^2\alpha$, se deduce que

cos 2α = 1 - $sen^2\alpha$ - $sen^2\alpha$
cos 2α = 1 - $2sen^2\alpha$

y despejamos senα, nos queda

$$sen\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

si ahora hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = {}^{\theta}/_{2}$ y se tiene

$$\text{sen}\ {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \theta}{2}}$$

en rigor, se debería colocar el signo ± delante de la raíz cuadrada, lo cual significaría que el sen ${}^{\theta}/_{2}$ es positivo o negativo según el cuadrante, tal como se ilustró en la sección anterior. Si se sobrentiende ésto, no resulta necesario colocar el doble signo delante de las raíces cuadradas en ninguna de las fórmulas siguientes.

De la relación $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$, si sustituímos $\text{sen}^2\alpha$ por $1 - \cos^2\alpha$, se deduce que

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

y despejamos $\cos\alpha$, resulta

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\ 2\ \alpha}{2}}$$

y si hacemos $2\alpha = \theta$, entonces $\alpha = {}^{\theta}/_{2}$ y se tiene

$$\cos\ {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\ \theta}{2}}$$

La $\tan {}^{\theta}/_{2}$ se puede expresar como

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \frac{\text{sen}\ \frac{\theta}{2}}{\cos\ \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos\ \theta}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\ \theta}{2}}}$$

o sea que

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \theta}{1+\cos\ \theta}}$$

o bién, racionalizando el denominador, obtenemos que

$$\tan {}^{\theta}/_{2} = \frac{\text{sen}\ \theta}{1+\cos\ \theta}$$

Las identidades para la suma, diferencía, el doble y la mitad del ángulo con senos, cosenos y tangentes se resumen en la siguiente tabla;

Identidad para la suma de dos ángulos:

$\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\ \alpha + \tan\ \beta}{1-\tan\ \alpha\ \tan\ \beta}$$

Identidad para la diferencia de dos ángulos:

$\text{sen}(\alpha-\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta - \text{sen}\beta\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\ \alpha - \tan\ \beta}{1+\tan\ \alpha\ \tan\ \beta}$$

Identidad para el doble del ángulo:

$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\alpha\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\ \alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Identidades para la mitad del ángulo:

$\text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\ \alpha}{2}}$ $\qquad$ $\cos\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\ \alpha}{2}}$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\text{sen}\ \alpha}{1+\cos\ \alpha}$$

Ejemplo 4

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

a) $(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha+\beta)$

b) $\dfrac{\text{sen}\ (\alpha+\beta) + \text{sen}\ (\alpha-\beta)}{\text{sen}\ 2\alpha}$

Solución:

a) Desarrollando cada uno de los binomios al cuadrado

$(\text{sen}\alpha + \text{sen}\beta)^2 + (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + 2\cos(\alpha+\beta) =$

$= \text{sen}^2\alpha + 2\ \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta + \text{sen}^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 2(\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta)$

$$=\operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

cambiando términos semejantes.

$$=(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + (\operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta)$$

$$=1 + 1$$

$$=2$$

b) $$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\operatorname{sen}2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

Ejemplo 5

Demuestra cada una de las siguientes identidades:

a) $\dfrac{2\operatorname{sen}^3\theta}{\operatorname{sen}2\theta}+\cos\theta=\sec\theta$

b) $\dfrac{2\tan\theta-\operatorname{sen}2\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta}=\tan\theta$

Solución:

a) Desarrollando el miembro izquierdo de la ecuación y usando las relaciones siguientes: $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, tenemos

$$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta+\cos\theta\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}2\theta}=\sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta+\cos\theta(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^3\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}^2\theta+\cos^2\theta)}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

$$\sec\theta = \sec\theta$$

b) Se utilizan las relaciones

$\tan\theta=\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$ y $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ y desarrollando el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{\frac{2\operatorname{sen}\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{\cos\theta}}{2\operatorname{sen}^2\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta(1-\cos^2\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{2\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}^2\theta)}{2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\tan\theta = \tan\theta$$

Ejercicio 5.3

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

1) $\frac{\csc\theta}{\cot\theta}$

2) $\sec\theta(1-\operatorname{sen}^2\theta)$

3) $\operatorname{sen}\theta\sec\theta$

4) $\operatorname{sen}^2\theta(1+\cot^2\theta)$

5) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cot\theta}+\cos\theta$

6) $\cot^2\theta(1+\tan^2\theta)$

7) $\frac{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\cot\theta$

8) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta}+\frac{\cos\theta}{\sec\theta}$

9) $\frac{(1+\operatorname{sen}\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)}{\cos\theta}$

10) $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

11) $\csc\theta\sec\theta-\cot\theta$

12) $\frac{1}{1+\operatorname{sen}\theta}+\frac{1}{1-\operatorname{sen}\theta}$

13) $\frac{1+\sec\theta}{\operatorname{sen}\theta+\tan\theta}$

14) $\operatorname{sen}(\theta+\delta)\cos\theta-\cos(\theta+\delta)\operatorname{sen}\theta$

15) $\cos(\theta-\delta)\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}(\theta-\delta)\cos\theta$

16) $\cos(\theta+\delta)\cos\delta+\operatorname{sen}(\theta+\delta)\operatorname{sen}\delta$

17) $\frac{\operatorname{sen}(\theta+\delta)+\operatorname{sen}(\theta-\delta)}{\cos(\theta+\delta)+\cos(\theta-\delta)}$

18) $\operatorname{sen}2\theta\sec\theta$

19) $2\cos^2\frac{\theta}{2}$

20) $(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2})^2-1$

Demuestra que cada una de las siguientes ecuaciones son identidades

21) $\sec\theta+\cos\theta-\operatorname{sen}\theta\tan\theta=0$

22) $\cos\theta\tan\theta+\cos\theta\cot\theta=\csc\theta$

23) $\frac{\tan^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta}{\tan^2\theta}=\operatorname{sen}^2\theta$

24) $\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta}+\tan\theta=\sec\theta$

25) $\frac{\sec\theta-\cos\theta}{\tan\theta}=\operatorname{sen}\theta$

26) $\frac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}+\operatorname{sen}\theta=1$

27) $\frac{\cos\theta-\operatorname{sen}\theta}{1-\tan\theta}=\cos\theta$

28) $\frac{\cot\theta-\operatorname{sen}\theta}{\csc\theta-\tan\theta}=\cos\theta$

29) $\frac{\csc^2\theta-\cot^2\theta}{\sec^2\theta}=\cos^2\theta$

30) $\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}=2\csc\theta$

31) $(\sec\theta-\cos\theta)\cos\theta=\operatorname{sen}^2\theta$

32) $1-\operatorname{sen}\theta\cos\theta\tan\theta=\cos^2\theta$

33) $(\sec\theta+\tan\theta)(\sec\theta-\tan\theta)=1$

34) $(\sec\theta+\tan\theta)(1-\operatorname{sen}\theta)=\cos\theta$

35) $\frac{\operatorname{sen}2\theta}{1-\cos2\theta}=\cot\theta$

36) $\frac{\cos2\theta}{\operatorname{sen}\theta}+\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\cos\theta}=\csc\theta$

37) $\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos^2\theta}=\tan^2\theta$

38) $\frac{\operatorname{sen}2\theta}{\operatorname{sen}\theta}-\frac{\cos2\theta}{\cos\theta}=\sec\theta$

39) $\cot\theta-\frac{\cos2\theta}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\tan\theta$

40) $\frac{\tan\theta-\tan\delta}{\sec\theta\sec\delta}=\operatorname{sen}(\theta-\delta)$

CAPITULO 6

PROBLEMAS CON TRIANGULOS

En este capítulo usarás las funciones trigonométricas en la solución de triángulos rectángulos, esto es, podrás calcular la medida de los valores o los ángulos de un triángulo rectángulo.

También usarás la Ley de los senos y cosenos para resolver triángulos oblicuángulos.

Es importante que te des cuenta cómo haz ido desarrollando tus habilidades para poder resolver problemas del mundo real que involucran medidas para la formación de triángulos.

6.1 Triángulos Oblicuángulos - Ley de Cosenos

Ahora aprenderás a resolver triángulos que no son rectángulos; a estos les llamaremos triángulos oblicuángulos.

Objetivos:

1. Dados dos lados y el ángulo incluido, encontrar la longitud del tercer lado.
2. Dados tres lados de un triángulo, encontrar la medida de un ángulo específico.

Supón que la longitud de dos lados b y c del Δ ABC son conocidos, así como también la medida del ángulo incluido $\angle$ A se conoce (Fig. 6.1a). Entonces se puede encontrar la medida del tercer lado.

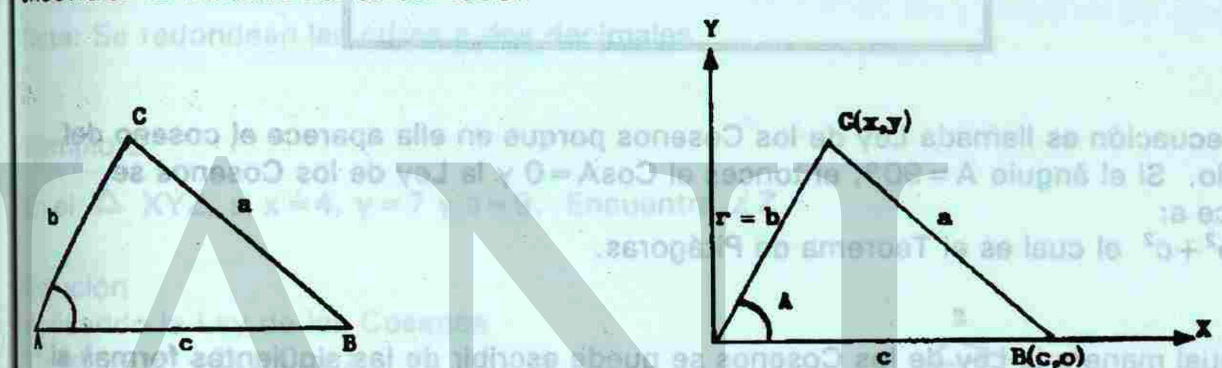


Fig. 6.1a

Si construyes un sistema coordenado *xy* con el ángulo A en posición estándar; entonces a es la distancia entre los puntos B(c,o) y C(x,y). Con la fórmula de la distancia tenemos:

$a^2=(x-c)^2+(y-o)^2$

Para obtener a^2 en términos de b y c y $\angle$A, solo tienes que observar que A es el ángulo y b es el radio del punto C (x,y). Por definición de seno y coseno

$\frac{x}{b}=Cos\ A$ y $\frac{y}{b}=Sen\ A$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por b obtienes,

$x= b\ Cos\ A$ y $y= b\ Sen\ A$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la distancia de arriba tenemos:

$a^2= (b\ Cos\ A-c)^2 + (b\ Sen\ A - o)^2$

Elevando al cuadrado los binomios,
$a^2=b^2Cos^2A\text{-}2b\ c\ Cos\ A+c^2+b^2\ Sen^2A$

Asociando $Sen^2A + Cos^2A$ y teniendo de factor común la b^2,
$a^2 = b^2\ (Cos^2A + Sen^2A) - 2bc\ Cos\ A + c^2$
como $Cos^2A + Sen^2A = 1$

Entonces $a^2=b^2\text{-}2bcCosA+c^2$

El cual usualmente se escribe de la siguiente manera:

LEY DE LOS COSENOS

$$a^2=b^2+c^2\text{-}2bcCosA$$

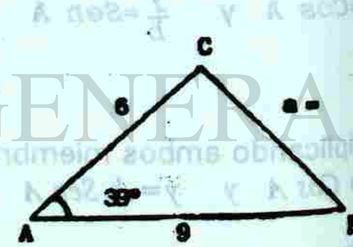
Esta ecuación es llamada Ley de los Cosenos porque en ella aparece el coseno del ángulo. Si el ángulo A=90°, entonces el CosA=0 y la Ley de los Cosenos se reduce a:
$a^2=b^2+c^2$ el cual es el Teorema de Pitágoras.

De igual manera la Ley de los Cosenos se puede escribir de las siguientes formas si son dados otros datos:

$b^2 = a^2+c^2\text{-}2ac\ Cos\ B$
$c^2 = a^2+b^2\text{-}2ab\ Cos\ C$

Ejemplo 1
En $\triangle$ ABC si b=6, c=9 y $\angle$A=39°. Encontrar lado a.

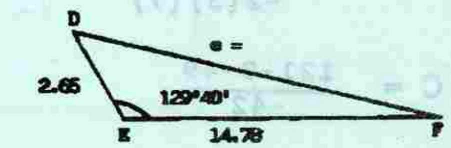
Solución
Utilizando la fórmula tenemos:
$a^2=b^2+c^2\text{-}2bc\ Cos\ A$
$a^2=(6)^2+(9)^2\text{-}2(6)(9)\ Cos\ 39°$ sustituyendo
$a^2=36+81\text{-}83.93$
$a^2=33.07$
$a=\sqrt{33.07}$
$a=5.75$



Ejemplo 2
En el $\triangle$ DEF si $\angle$E=129°40', d=14.78 y f=2.65. Encontrar lado e.

Nota: Debes reconocer que la Ley de los Cosenos es independiente de las letras que se usan para expresarlo.

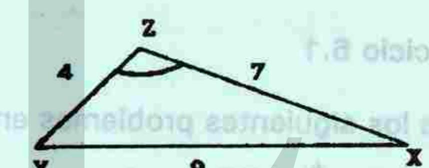
Solución
Aplicando la Ley de los Cosenos tenemos:
$e^2=d^2+f^2\text{-}2df\ Cos\ E$
$e^2=(14.78)^2+(2.65)^2\text{-}2(14.78)(2.65)Cos\ 129°40'$
$e^2=218.45 + 7.02 - 2(14.78)(2.65)(-0.64)$
$e^2=218.45 + 7.02 + 50.13$
$e^2=275.60$
$e^2=\sqrt{275.60}$
$e=16.6$



Nota: Se redondean las cifras a dos decimales

Ejemplo 3
En el $\triangle$ XYZ, si x=4, y=7 y z=9. Encuentra $\angle$Z

Solución
Aplicando la Ley de los Cosenos
$z^2=x^2 + y^2 - 2xy\ Cos\ z$



Despejando tenemos:

$$Cos\ z = \frac{z^2-x^2\ y^2}{-2xy}$$

$$Cos\ z = \frac{(9)^2-(4)^2-(7)^2}{-2(4)(7)}$$

$$Cos\ z = \frac{81-16-49}{-56}$$

$$Cos\ z = \frac{16}{-56}=-0.2857$$

$\angle z = 106°36'$ Redondeando los minutos.

Ejemplo 4.

En $\triangle$ ABC si a = 3, b = 7 y c = 11. Encuentra $\angle$ C

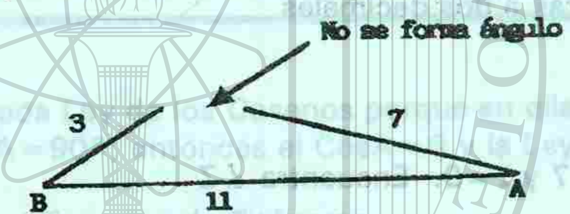
$$\text{Cos C} = \frac{c^2-a^2-b^2}{-2ab}$$

$$\text{Cos C} = \frac{(11)^2-(3)^2-(7)^2}{-2(3)(7)}$$

$$\text{Cos C} = \frac{121-9-49}{-42}$$

$$\text{Cos C} = \frac{63}{-42} = -1.5$$

Nota. Como el coseno tiene valores de 1 a -1 inclusive, esto quiere decir que el triángulo no se cierra y no tiene solución.



Ejercicio 6.1

Para los siguientes problemas encuentra el lado opuesto al ángulo dado.

1. En $\triangle$ ABC, b = 4, c = 5, $\angle$A = 50°
2. En $\triangle$ ABC, a = 7, c = 9, $\angle$B = 35°
3. En $\triangle$ PQR, p = 3, q = 2, $\angle$R = 136°
4. En $\triangle$ HJK, h = 8, j = 6.1, $\angle$K = 172°15′
5. En $\triangle$ DEF, d = 35.3, f = 47.8, $\angle$E = 65°40′
6. En $\triangle$ BAD, a = 2.990, d = 5.92, $\angle$B = 119°22′

Para los siguientes problemas encuentra el ángulo pedido

7. $\angle$A en $\triangle$ ABC, si a = 2, b = 3, c = 4
8. $\angle$F en $\triangle$ DEF, SI d = 5, e = 6, f = 8
9. $\angle$X en $\triangle$ UVX, si u = 6, v = 7, x = 12

10. $\angle$E en $\triangle$ TEN, si t = 12.1, e = 20.2, n = 16.3
11. $\angle$Y en $\triangle$ XYZ, si x = 7.12, y = 5.03, z = 13.34
12. $\angle$N en $\triangle$ PON, si p = 8, o = 3, n = 12

6.2 Area de un triángulo.

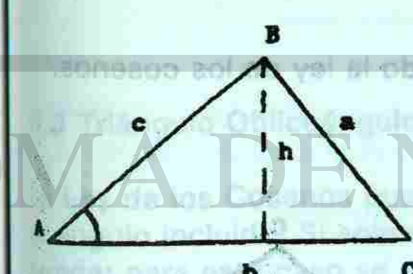
Objetivo:

Dada la medida de dos lados y el ángulo incluido, encuentra el área del triángulo.

De geometría puedes recordar que el área de un triángulo es: (Fig. 6.2)

$$Area = \frac{1}{2}bh$$

Donde b = base
h = altura.



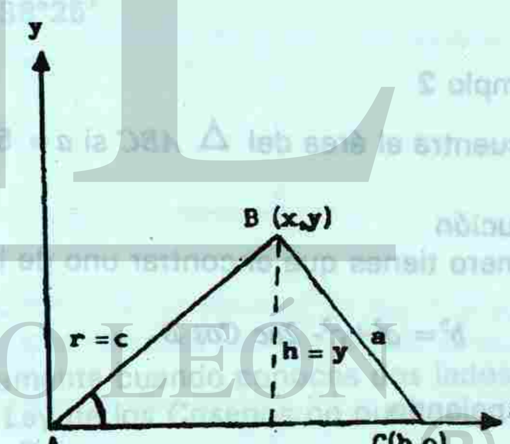


Fig. 6.2

Si conoces los lados b y c y la medida del ángulo A puedes calcular la altura h. Construyendo el punto cartesiano xy. El punto $B(x,y)$ se convierte en un punto en el sistema cartesiano. Por la definición de seno.

$$\frac{y}{r} = SenA$$

$y = r\,Sen A$ Multiplicando ambos miembros por r

Como $h = y$ y $c = r$ entonces sustituyendo tenemos
$h = c\ Sen\ A$
Sustituyendo h en la ecuación del área, entonces:

$$\boxed{Area = \frac{1}{2}\, bc\, Sen A}$$

Ejemplo 1

Encuentra el área del triángulo $\triangle\ ABC$ si $b = 13$, $c = 15$ y $\angle A = 70°$

Solución:
Aplicando la fórmula.

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)\,Sen 70°$$

$$Area = \frac{1}{2}(13)(15)(0.9397)$$

$\underline{Area\ =\ 91.62}$ Redondeando a dos cifras.

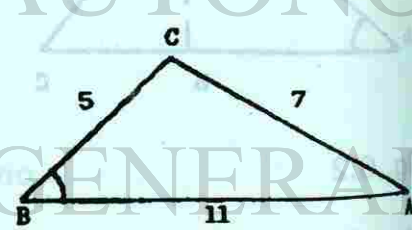
Ejemplo 2

Encuentra el área del $\triangle\ ABC$ si $a = 5$, $b = 7$.

Solución
Primero tienes que encontrar uno de los ángulos, utilizando la ley de los cosenos.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ Cos\ B$

Despejando



$2ac\ Cos\ B = a^2 + c^2 - b^2$

$$Cos\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$Cos\ B = \frac{(5)^2 + (11)^2 - (7)^2}{2(5)(11)}$$

$$Cos\ B = \frac{25 + 121 - 49}{110}$$

$$Cos\ B = \frac{97}{110}$$

$Cos\ B = 0.8818$

$\angle\ B = 28°08'$

Aplicando la ecuación del área.

$$Area = \frac{1}{2}\, ac\, Sen B$$

$$Area = \frac{1}{2}(5)(11)\,Sen 28°08'$$

$\underline{Area = 12.96}$ Redondeando a dos cifras.

Ejercicio 6.2
Para los siguientes problemas encuentre el área de cada triángulo.

1. $\triangle\ ABC$, si $a = 6$, $b = 10$ y $\angle\ C = 15°$
2. $\triangle\ ABC$, si $b = 8$, $c = 4$ y $\angle\ A = 66°$
3. $\triangle\ DEF$, si $d = 4.8$, $f = 3.7$ y $\angle\ E = 43°12'$
4. $\triangle\ XYZ$, si $y = 34.28$, $z = 28.35$ y $\angle\ X = 138°25'$
5. $\triangle\ ABC$, si $a = 6$, $b = 9$, $c = 13$
6. $\triangle\ ABC$, si $a = 5.1$, $b = 12.2$, $c = 13.3$

6.3 Triángulo Oblicuángulo - Ley de los Senos.

La Ley de los Cosenos puede ser usada directamente cuando conoces dos lados y el ángulo incluido. Si solo conoces un lado, la Ley de los Cosenos no puede ser usada; para este caso se utilizará la Ley de los Senos.

Objetivo:

Dada la medida de un ángulo, su lado opuesto y la medida de otro ángulo, calcular la longitud de un lado.

En secciones anteriores aprendiste que el área de un triángulo tal como el ΔABC (Fig 6.3a) es

Area = $\frac{1}{2}bcSenA$

Fig. 6.3a

El área también es igual a $\frac{1}{2}acSenB$ y $\frac{1}{2}abSenC$ como el área es constante, no importa el lado del triángulo que uses para medirla. Igualando estas expresiones obtienes:

$$\frac{1}{2}bcSenA=\frac{1}{2}acSenB=\frac{1}{2}abSenC$$

Multiplicando todos los miembros por 2 y dividiendo por abc nos queda:

$$\frac{2bcSenA}{2abc}=\frac{2acSenB}{2abc}=\frac{2abSenC}{2abc}$$

Eliminando términos semejantes:

$$\boxed{\frac{SenA}{a}=\frac{SenB}{b}=\frac{SenC}{c}}$$

Esta fórmula es llamada la Ley de los Senos y es igual al seno del ángulo dividido entre su lado opuesto. Esta formula también puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\boxed{\frac{a}{SenA}=\frac{b}{SenB}=\frac{c}{SenC}}$$

Solo se invierten los numeradores y denominadores.

Los siguientes ejemplos te muestran cómo usar éstas fórmulas.

Ejemplo 1

Dados dos ángulos y un lado encontrar los otros lados.

En el Δ ABC, $\angle B=64°$, $\angle C=38°$ y lado $b=9$; encontrar lado c, y lado a. (Fig. 6.3b)

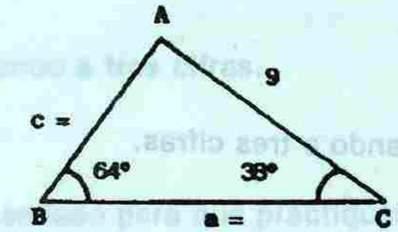


Fig. 6.3b

Solución

Sustituyendo los datos en la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{SenA}=\frac{9}{Sen64°}=\frac{c}{Sen38°}$$

Como se puede observar, nos conviene tomar las dos últimas partes de la fórmula, ya que así, tendremos tres datos y sólo una incógnita.

$$\frac{9}{Sen64°}=\frac{c}{Sen38°}$$

Despejando c tenemos:

$$\frac{(9)\,(Sen38°)}{Sen64°}=c$$

o sea $c=\frac{(9)\,(Sen38°)}{Sen64°}$

$c=\frac{(9)\,(0.6157)}{0.8988}$ Encontrando los valores

$\underline{c=\ 6.165}$ Haciendo operaciones y redondeando a tres cifras.

Para encontrar el lado a, primero tienes que encontrar el $\angle A$, entonces:

$\angle A=180°-38°-64°=78°$

Usando los dos primeros tramos de la fórmula tenemos:

$$\frac{a}{Sen78°}=\frac{9}{Sen64°}$$

Despejando a,

$$a = \frac{(9)(Sen78°)}{Sen64°}$$

Tomando los valores de los senos y haciendo operaciones

$$a = \frac{(9)(0.9781)}{0.8988}$$

$\underline{a = 9.794}$ Redondeando a tres cifras.

Ejemplo 2

Dados dos ángulos y un lado encontrar otro lado.

En el $\triangle$ ABC, $a = 8$, $\angle B = 64°$ y $\angle C = 38°$: encuentre lado b (Fig. 6.3c)

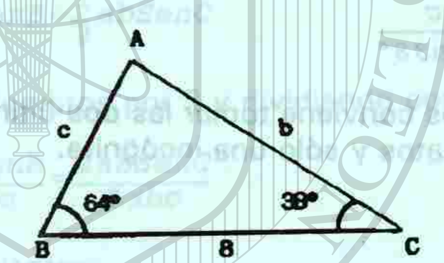


Fig. 6.3c

Solución

Sustituyendo los datos en la fórmula.

$$\frac{8}{SenA} = \frac{b}{Sen64°} = \frac{c}{Sen38^0}$$

Para poder usar la fórmula tenemos que encontrar primero el $\angle A$ (para tener tres datos y una incógnita)

$\angle A = 180° - 64° - 38° = 78°$

Así, usando las dos primeras partes de la fórmula tenemos:

$$\frac{8}{Sen78°} = \frac{b}{Sen64°}$$

Despejando b

$$b = \frac{(8)(Sen64°)}{Sen78^0}$$

$$b = \frac{(8)(0.8988)}{0.9781}$$

$\underline{b = 7.351}$ Redondeando a tres cifras.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que practiques la Ley de los Senos.

Ejercicio 6.3

Resuelve los siguientes problemas.

1. En $\triangle$ ABC, $\angle A = 54°$, $\angle B = 30°$ y lado $a = 9$, encuentra:

   a. Lado b.

   b. Lado c.

2. En $\triangle$ PQR, $\angle$ P = 15°, $\angle$ Q = 130° y lado q = 9, encuentra:

   a. Lado p.

   b. Lado r.

3. En $\triangle$ AHS, $\angle$ A = 29°, $\angle$ H = 107°, lado a = 112, encuentra:

   a. Lado h.

   b. Lado s.

4. En $\triangle$ BIG, $\angle$ B = 2°, $\angle$ I = 79°, lado b = 20, encuentra:

   a. Lado i.

   b. Lado g.

Despejando a,

$$a = \frac{(9)(Sen78^{o})}{Sen64^{o}}$$

Tomando los valores de los senos y haciendo operaciones

$$a = \frac{(9)(0.9781)}{0.8988}$$

$\underline{a = 9.794}$ Redondeando a tres cifras.

Ejemplo 2
Dados dos ángulos y un lado encontrar otro lado.

En el $\triangle$ ABC, $a = 8$, $\angle B = 64°$ y $\angle C = 38°$: encuentre lado b (Fig. 6.3c)

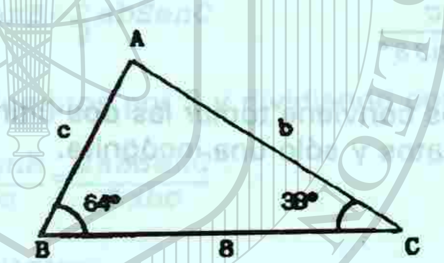


Fig. 6.3c

Solución
Sustituyendo los datos en la fórmula.

$$\frac{8}{SenA} = \frac{b}{Sen64^{o}} = \frac{c}{Sen38^{0}}$$

Para poder usar la fórmula tenemos que encontrar primero el $\angle A$ (para tener tres datos y una incógnita)
$\angle A = 180° - 64° - 38° = 78°$

Así, usando las dos primeras partes de la fórmula tenemos:

$$\frac{8}{Sen78^{o}} = \frac{b}{Sen64^{o}}$$

Despejando b

$$b = \frac{(8)(Sen64^{o})}{Sen78^{0}}$$

$$b = \frac{(8)(0.8988)}{0.9781}$$

$\underline{b = 7.351}$ Redondeando a tres cifras.

El siguiente ejercicio esta diseñado para que practiques la Ley de los Senos.

Ejercicio 6.3

Resuelve los siguientes problemas.

1. En $\triangle$ ABC, $\angle A = 54°$, $\angle B = 30°$ y lado $a = 9$, encuentra:

   a. Lado b.

   b. Lado c.

2. En $\triangle$ PQR, $\angle$ P = 15°, $\angle$ Q = 130° y lado q = 9, encuentra:

   a. Lado p.

   b. Lado r.

3. En $\triangle$ AHS, $\angle$ A = 29°, $\angle$ H = 107°, lado a = 112, encuentra:

   a. Lado h.

   b. Lado s.

4. En $\triangle$ BIG, $\angle$ B = 2°, $\angle$ I = 79°, lado b = 20, encuentra:

   a. Lado i.

   b. Lado g.

5. En $\triangle$ PAF, $\angle$ P = 28°15′, $\angle$ A = 117°30′ y lado f = 8, encuentra:

a. Lado a.

b. Lado p.

6. En $\triangle$ JAW , $\angle$ J = 48°12′, $\angle$ W = 73°27′ y lado a = 5, encuentra:

a. Lado j.

b. Lado w.

7. En $\triangle$ ALP, $\angle$ A = 85°40′, $\angle$ L = 87°50′ y lado p = 30, encuentra:

a. Lado a.

b. Lado l.

8. **Problema de los tres lados.**
La Ley de los Senos puede ser usada para conocer la medida de un ángulo pero para este caso primero tienes que usar la Ley de los Cosenos. Dados tres lados encontrar los ángulos.

En el $\triangle$ ABC si lado a = 7, lado b = 4, lado c = 10 encuentra los ángulos.

a. Usa la Ley de los Cosenos para encontrar el $\angle$ A.

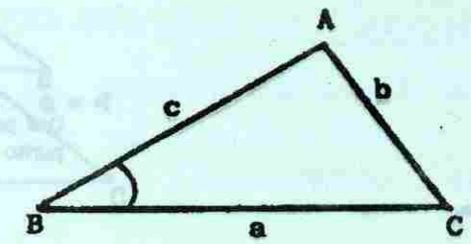
b. Usa la respuesta anterior y con la Ley de los Senos encuentra el $\angle$ C.

c. Encuentra otra vez el $\angle$ C, pero ahora usando la Ley de Cosenos.

d. Probablemente las respuestas de b y c no sean iguales, explica porqué.

6.4 Los casos ambiguos

Ahora resolverás un triángulo cuando tenemos de datos conocidos dos lados y un ángulo no comprendido (Fig. 6.4a)



Datos: lado a, lado b, $\angle$ B

Fig. 6.4a

Hay 4 formas de que un triángulo ABC puede resolverse si conoces los lados a, b y el ángulo B. Para que veas porqué, es útil construir un triángulo. La figura 6.4b muestra el lado a y el ángulo B construido.

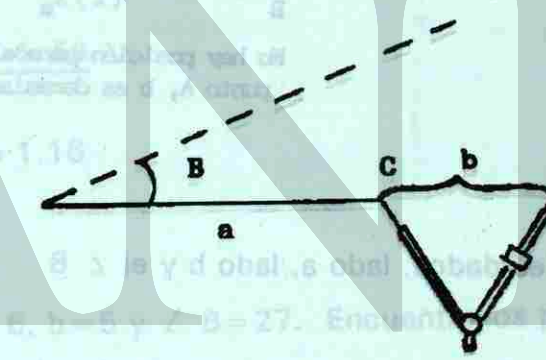


Fig. 6.4b

Como el lado c no esta dado, simplemente dibuja una línea punteada en la dirección correcta, formando en ángulo B con el lado a. Luego para completar el triángulo, pon un compás en el punto c con una abertura igual al del lado b, y después traza su arco, donde el arco del compás toque la línea punteada, ahí será la posición correcta del punto A. La figura 6.4c muestra como hay cuatro formas posibles de trazar el punto A.

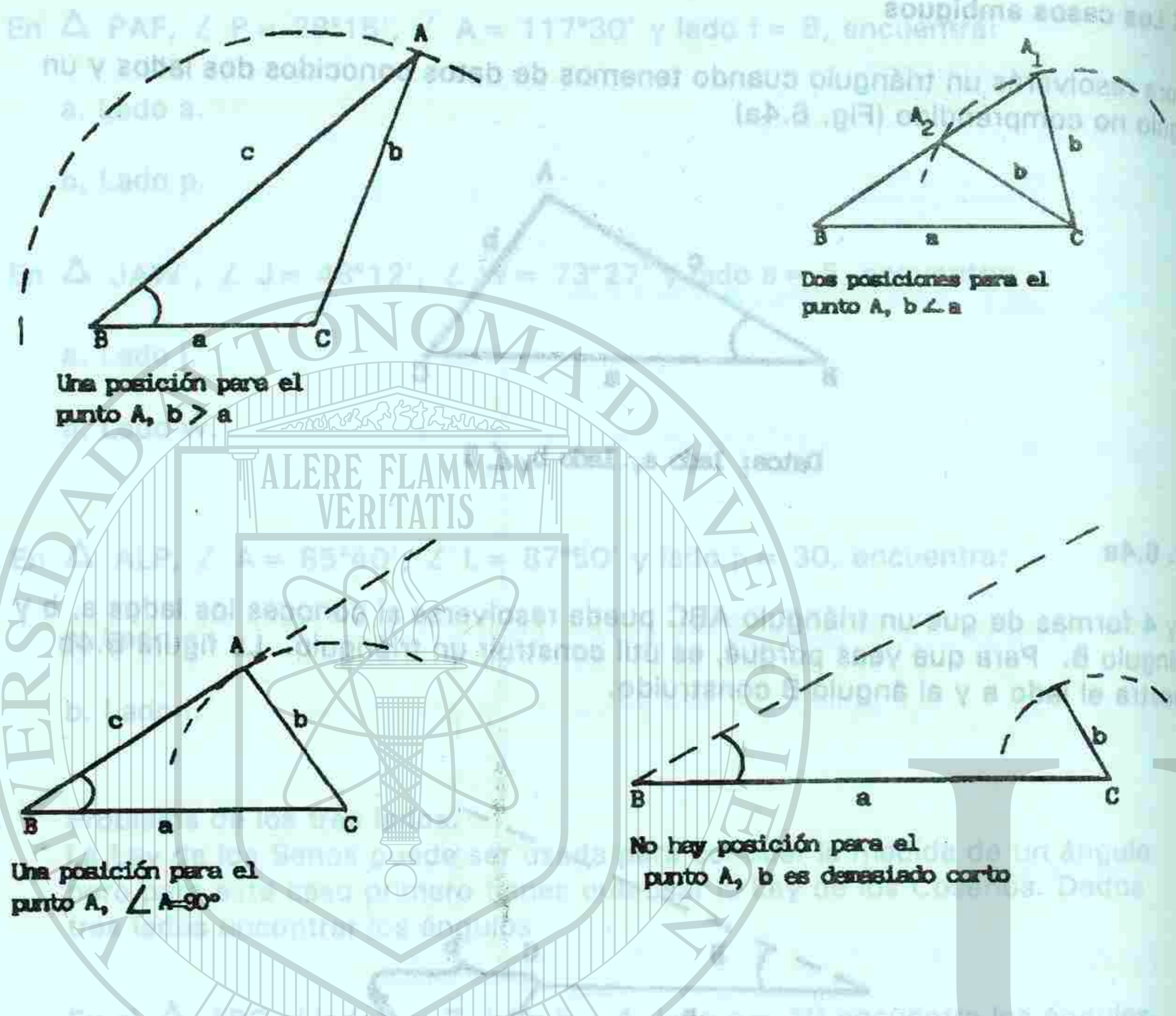


Fig. 6.4c Triángulos posibles dados, lado a, lado b y el ∠ B

Hay uno, dos o ningún posible triángulo cuando son dados dos lados y el ángulo no comprendido, es por esta razón que se llaman casos ambiguos. Ambiguo significa dos o más posibles significados.

Objetivo:

> Dados dos lados y el ángulo no comprendido. Determinar si hay o no triángulo, y si lo hay obtener las medidas del otro lado y el otro ángulo.

Ejemplo 1

En el triángulo △ ABC si $a=4$, $b=5$ y ∠ $A=27°$. Encuentra los posibles valores de lado c.

Solución

Como $a<b$, hay dos posibles triángulos (Fig. 6.4d). La Ley de los Senos no puede ser usada directamente para encontrar el lado c. ya que ∠ C es desconocido. La Ley de los Cosenos si puede ser usada, solo hay que despejar el lado c.

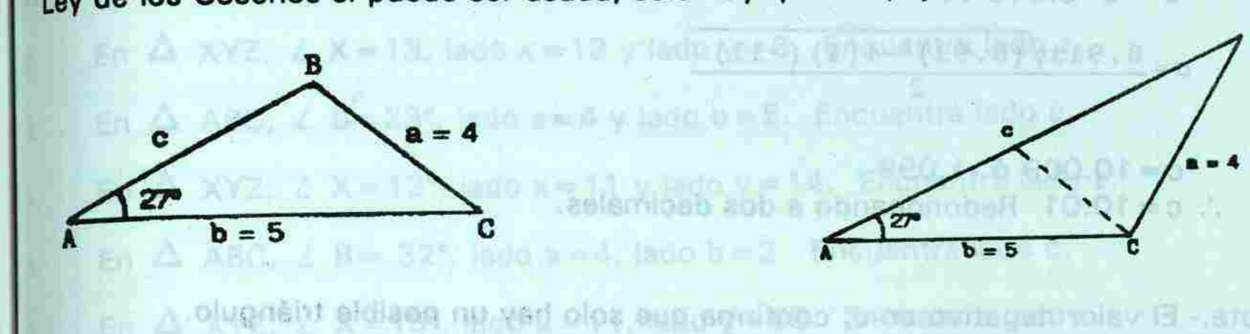


Fig. 6.4d

Escribiendo la Ley de los Cosenos tenemos:

$$4^2 = c^2 + 5^2 - 2(c)(5)\ \text{Cos}\ 27°$$
$$0 = c^2 - (10\ \text{Cos}\ 27°)c + 25 - 16$$
$$0 = c^2 - 8.912c + 9$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2 - 4(5)(9)}}{2(1)}$$

$$c = \frac{8.91 \pm 6.58}{2}$$

$$c \approx 7.75 \text{ ó } 1.16$$

Ejemplo 2

En el △ ABC, $a=6$, $b=5$ y ∠ $B=27$. Encuentra los posibles valores de c.

Solución

como $a>b$, solo hay un posible triángulo (Fig. 6.4e)

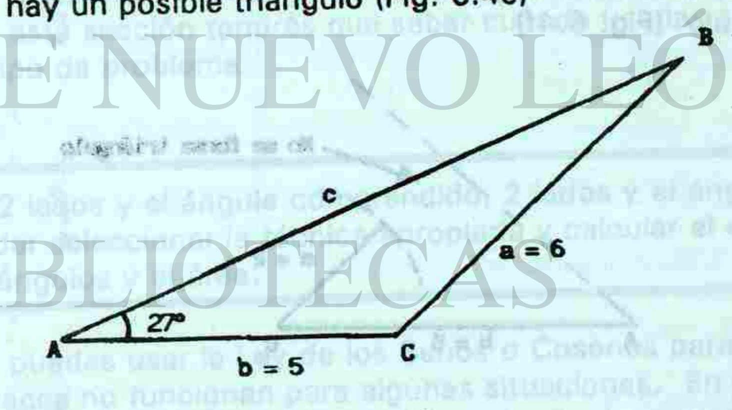


Fig. 6.4e

Por la Ley de los Cosenos

$$6^2 = c^2 + 5^2 - 2(c)(5)\cos 27°$$
$$0 = c^2 - 8.91c - 11$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2 - 4(1)(-11)}}{2}$$

$c = 10.009$ ó -1.099

$\therefore\ c = 10.01$ Redondeando a dos decimales.

Nota.- El valor negativo en c, confirma que solo hay un posible triángulo.

Ejemplo 3

En el $\triangle$ ABC, $a = 2$, $b = 5$ y $\angle A = 27°$. Encuentra los valores posibles de c.

Solución

Utilizando la Ley de los Cosenos

$$(2)^2 = c^2 + 5^2 - 2(c)(5)\cos 27°$$
$$0 = c^2 - 8.91c + 21$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{(8.91)^2 - 4(1)(21)}}{2(1)}$$

$$c = \frac{8.91 \pm \sqrt{-4.61}}{2}$$

No hay solución por el valor negativo del radicando

$\therefore$ No hay triángulo (Fig. 6.4f)

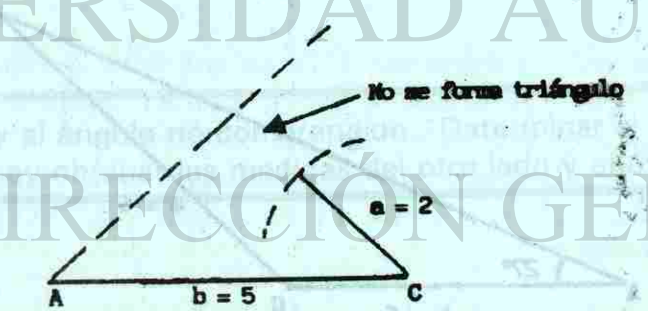


Fig. 6.4f

Ejercicio 6.4

Para los siguientes problemas encuentra la longitud del lado indicado

1. En $\triangle$ ABC, $\angle B = 32°$, lado $a = 5$ y lado $b = 4$. Encuentra lado c.
2. En $\triangle$ XYZ, $\angle X = 13$, lado $x = 13$ y lado $y = 6$. Encuentra lado z.
3. En $\triangle$ ABC, $\angle B = 33°$, lado $a = 4$ y lado $b = 5$. Encuentra lado c.
4. En $\triangle$ XYZ, $\angle X = 13°$, lado $x = 11$ y lado $y = 14$. Encuentra lado z.
5. En $\triangle$ ABC, $\angle B = 32°$, lado $a = 4$, lado $b = 2$. Encuentra lado c.
6. En $\triangle$ XYZ, $\angle X = 13°$, lado $x = 11$, lado $y = 60$. Encuentra lado z.
7. En $\triangle$ ABC, $\angle A = 130°$, lado $a = 20$, lado $c = 16$. Encuentra lado b.
8. En $\triangle$ ABC, $\angle A = 170°$, lado $a = 19$ y lado $c = 11$. Encuentra lado b.

En los siguientes problemas determina si hay uno o dos triángulos y luego encuentra los valores del ángulo que se pide.

9. En $\triangle$ ABC, $\angle A = 19°$, lado $a = 26$ y lado $c = 31$. Encuentra $\angle$ C.
10. En $\triangle$ HDJ, $\angle H = 27°$, lado $h = 50$ y lado $d = 20$. Encuentra $\angle$ D.
11. En $\triangle$ XYZ, $\angle X = 58°$, lado $x = 9.4$, lado $z = 7.3$. Encuentra $\angle$ Z.
12. En $\triangle$ BIG, $\angle B = 110°$, lado $b = 100$ y $g = 90$. Encuentra $\angle$ G.

6.5 Solución general de triángulos.

Ya haz aprendido las técnicas necesarias para resolver triángulos oblicuángulos, estas son la Ley de los Senos y la Ley de los Cosenos, pero se te indicaba cuando usar una u otra; en esta sección tendrás que saber cuándo usarlas sólo mencionándote el tipo de problema.

Objetivo

Dado tres lados, 2 lados y el ángulo comprendido, 2 lados y el ángulo no comprendido, poder seleccionar la técnica apropiada y calcular el otro lado o la medida de los ángulos y el área.

Algunas ocasiones puedes usar la Ley de los Senos o Cosenos para cualquier problema, pero a veces no funcionan para algunas situaciones. En seguida te daremos una guía para que reconozcas situaciones donde determinada técnica si funciona.

Técnicas para la solución de triángulos

1. La Ley de los Cosenos involucra tres lados. Así que, no funciona cuando te dan dos ángulos y un lado.
2. La Ley de los Senos involucra la razón del seno de un ángulo y la longitud de su lado opuesto, así que, no funciona cuando no hay ningún ángulo conocido (tres lados) o cuando solo se conocen dos lados y el ángulo comprendido.
3. La Ley de los Senos no debe ser usada para encontrar medidas de ángulos a menos que ya conozcas si es un ángulo agudo u obtuso.
4. La fórmula del área requiere que conozcas dos lados y el ángulo incluido, así que, si no los tienes debes calcularlos primero.

El siguiente ejercicio requiere que selecciones la técnica apropiada para que resuelvas el problema.

Ejercicio 6.5
En los siguientes problemas encuentra los datos faltantes

1. En △ ABC, lado a = 3, lado b = 4, ∠ C = 71°20′
2. En △ ABC, lado a = 8, lado b = 5, ∠ C = 32°40′
3. En △ ABC, lado a = 28, lado b = 58, ∠ C = 22°50′
4. En △ ABC, lado a = 16, lado b = 38, ∠ C = 81°30′
5. En △ ABC, lado a = 18, lado b = 19, lado c = 17
6. En △ ABC, lado a = 3, lado b = 4, lado c = 2
7. En △ ABC, lado a = 9, lado b = 10, lado c = 18
8. En △ ABC, lado c = 28, ∠ A = 121°50′, ∠ B = 15°10′
9. En △ ABC, lado c = 48, ∠ A = 11°20′, ∠ B = 27°30′
10. En △ ABC, lado c = 17, ∠ A = 83°20′, ∠ B = 88°30′
11. En △ ABC, lado a = 5, lado b = 7, ∠ A = 25°40′
12. En △ ABC, lado a = 10, lado b = 6, ∠ A = 30°10′
13. En △ ABC, lado a = 6, lado b = 10, ∠ A = 30°10′
14. En △ ABC, lado a = 10, lado b = 6, ∠ A = 140°50′
15. En △ ABC, lado a = 5, lado b = 3, ∠ A = 36°50′

6.6 Problemas del mundo real de triángulos oblicuángulos

La siguiente sección se hizo para que practiques tus habilidades en la solución de triángulos oblicuángulos utilizando la Ley de los Cosenos y la Ley de los Senos.

Objetivo

A partir de un enunciado serás capaz de dibujar un triángulo oblicuángulo y calcularás los datos que se te piden.

Ejercicio 6.6

Resuelve los siguientes problemas del mundo real.

1. Dos lados de un paralelogramo son 83 y 140 m., y una de las diagonales mide 189 m. Calcular el área de uno de los triángulos que forma la diagonal con los lados del paralelogramo.
2. Calcular el perímetro y el área de un paralelogramo, si una de sus diagonales mide 17 m. y los ángulos que forma ésta con los lados del paralelogramo son de 35° y 49°.
3. Dos hombres que están en el campo, separados 3000 m. uno del otro, observan un helicóptero. Sus ángulos de elevación respecto al helicóptero son de 60° y 75°. Determina la altura del helicóptero.
4. Los tres lados que limitan un terreno miden 320, 480 y 500 m. respectivamente. Calcula los ángulos que forman dichos lados.
5. Un puente de 24 m. de largo une dos colinas cuyas laderas forman con el horizonte ángulos de 23° y 32° ¿Cuál es la altura del puente con respecto al vértice del ángulo formado por las laderas?
6. Para medir la altura de una montaña, una persona ve hacia la cresta desde un punto A y encuentra su Angulo de elevación de 35°40′, después desde un punto B, alejado 500 m. de A. Encuentra su ángulo de elevación de 21°30′. ¿Cuál es la altura de la montaña?
7. Un buque sale de un puerto hacia el sur y navega 84km. Después vira al suroeste y navega 120 km.
   a. ¿Qué distancia tendrá que recorrer para regresar al puerto?
   b. ¿Qué rumbo habrá de tomar?
8. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a 35 km. de A y a 22 km. de C, calcula la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de 50°10′.

9. Tres circunferencias cuyos radios miden 115, 150 y 225 cm. son tangentes exteriormente entre sí. Encuentra los ángulos que forman cuando se unen los centros de dichas circunferencias.

10. Para calcular la anchura BC de una bahía se miden, desde un punto A, dos distancias, AB y AC, y el ángulo BAC. AB = 8 km, AC = 9 km y ∠ BAC = 65°30′ ¿Cuál es el ancho de la bahía?

x	*sen x*	*cos x*	*tan x*	*cot x*	*sec x*	*csc x*	
0° 0′	.00000	1.0000	.00000		1.0000		90° 0′
10′	.00291	1.0000	.00291	343.77	1.0000	343.78	50′
20′	.00582	1.0000	.00582	171.88	1.0000	171.89	40′
30′	.00873	1.0000	.00873	114.59	1.0000	114.59	30′
40′	.01164	.9999	.01164	85.940	1.0001	85.946	20′
50′	.01454	.9999	.01455	68.750	1.0001	68.757	10′
1° 0′	.01745	.9998	.01746	57.290	1.0002	57.299	89° 0′
10′	.02036	.9998	.02036	49.104	1.0002	49.114	50′
20′	.02327	.9997	.02328	42.964	1.0003	42.976	40′
30′	.02618	.9997	.02619	38.188	1.0003	38.202	30′
40′	.02908	.9996	.02910	34.368	1.0004	34.382	20′
50′	.03199	.9995	.03201	31.242	1.0005	31.258	10′
2° 0′	.03490	.9995	.03492	28.6363	1.0006	28.654	88° 0′
10′	.03781	.9993	.03783	26.4316	1.0007	26.451	50′
20′	.04071	.9992	.04075	24.5418	1.0008	24.562	40′
30′	.04362	.9990	.04366	22.9038	1.0010	22.926	30′
40′	.04653	.9989	.04658	21.4704	1.0011	21.494	20′
50′	.04943	.9988	.04949	20.2056	1.0012	20.230	10′
3° 0′	.05234	.9986	.05241	19.0811	1.0014	19.107	87° 0′
10′	.05524	.9985	.05533	18.0750	1.0015	18.103	50′
20′	.05814	.9983	.05824	17.1693	1.0017	17.198	40′
30′	.06105	.9981	.06116	16.3499	1.0019	16.380	30′
40′	.06393	.9980	.06408	15.6048	1.0021	15.637	20′
50′	.06685	.9978	.06700	14.9244	1.0022	14.958	10′
4° 0′	.06976	.9976	.06993	14.3007	1.0024	14.336	86° 0′
10′	.07266	.9974	.07285	13.7267	1.0027	13.763	50′
20′	.07556	.9971	.07578	13.1969	1.0029	13.235	40′
30′	.07846	.9969	.07870	12.7062	1.0031	12.746	30′
40′	.08136	.9967	.08163	12.2505	1.0033	12.291	20′
50′	.08426	.9964	.08456	11.8262	1.0036	11.868	10′
5° 0′	.08716	.9962	.08749	11.4301	1.0038	11.474	85° 0′
10′	.09005	.9959	.09042	11.0594	1.0041	11.105	50′
20′	.09295	.9957	.09335	10.7119	1.0044	10.758	40′
30′	.09585	.9954	.09629	10.3854	1.0046	10.433	30′
40′	.09874	.9951	.09923	10.0780	1.0049	10.128	20′
50′	.10164	.9948	.10216	9.7882	1.0052	9.839	10′
	cos x	*sen x*	*cot x*	*tan x*	*csc x*	*sec x*	*x*

9. Tres circunferencias cuyos radios miden 115, 150 y 225 cm. son tangentes exteriormente entre sí. Encuentra los ángulos que forman cuando se unen los centros de dichas circunferencias.

10. Para calcular la anchura BC de una bahía se miden, desde un punto A, dos distancias, AB y AC, y el ángulo BAC. AB = 8 km, AC = 9 km y $\angle$ BAC = 65°30′ ¿Cuál es el ancho de la bahía?

x	*sen x*	*cos x*	*tan x*	*cot x*	*sec x*	*csc x*	
0° 0′	.00000	1.0000	.00000		1.0000		90° 0′
10′	.00291	1.0000	.00291	343.77	1.0000	343.78	50′
20′	.00582	1.0000	.00582	171.88	1.0000	171.89	40′
30′	.00873	1.0000	.00873	114.59	1.0000	114.59	30′
40′	.01164	.9999	.01164	85.940	1.0001	85.946	20′
50′	.01454	.9999	.01455	68.750	1.0001	68.757	10′
1° 0′	.01745	.9998	.01746	57.290	1.0002	57.299	89° 0′
10′	.02036	.9998	.02036	49.104	1.0002	49.114	50′
20′	.02327	.9997	.02328	42.964	1.0003	42.976	40′
30′	.02618	.9997	.02619	38.188	1.0003	38.202	30′
40′	.02908	.9996	.02910	34.368	1.0004	34.382	20′
50′	.03199	.9995	.03201	31.242	1.0005	31.258	10′
2° 0′	.03490	.9995	.03492	28.6363	1.0006	28.654	88° 0′
10′	.03781	.9993	.03783	26.4316	1.0007	26.451	50′
20′	.04071	.9992	.04075	24.5418	1.0008	24.562	40′
30′	.04362	.9990	.04366	22.9038	1.0010	22.926	30′
40′	.04653	.9989	.04658	21.4704	1.0011	21.494	20′
50′	.04943	.9988	.04949	20.2056	1.0012	20.230	10′
3° 0′	.05234	.9986	.05241	19.0811	1.0014	19.107	87° 0′
10′	.05524	.9985	.05533	18.0750	1.0015	18.103	50′
20′	.05814	.9983	.05824	17.1693	1.0017	17.198	40′
30′	.06105	.9981	.06116	16.3499	1.0019	16.380	30′
40′	.06393	.9980	.06408	15.6048	1.0021	15.637	20′
50′	.06685	.9978	.06700	14.9244	1.0022	14.958	10′
4° 0′	.06976	.9976	.06993	14.3007	1.0024	14.336	86° 0′
10′	.07266	.9974	.07285	13.7267	1.0027	13.763	50′
20′	.07556	.9971	.07578	13.1969	1.0029	13.235	40′
30′	.07846	.9969	.07870	12.7062	1.0031	12.746	30′
40′	.08136	.9967	.08163	12.2505	1.0033	12.291	20′
50′	.08426	.9964	.08456	11.8262	1.0036	11.868	10′
5° 0′	.08716	.9962	.08749	11.4301	1.0038	11.474	85° 0′
10′	.09005	.9959	.09042	11.0594	1.0041	11.105	50′
20′	.09295	.9957	.09335	10.7119	1.0044	10.758	40′
30′	.09585	.9954	.09629	10.3854	1.0046	10.433	30′
40′	.09874	.9951	.09923	10.0780	1.0049	10.128	20′
50′	.10164	.9948	.10216	9.7882	1.0052	9.839	10′
	cos x	*sen x*	*cot x*	*tan x*	*csc x*	*sec x*	*x*

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
6° 0′	.1045	.9945	.10510	9.5144	1.0055	9.5668	84° 0′
10′	.1074	.9942	.10805	9.2553	1.0058	9.3092	50′
20′	.1103	.9939	.11099	9.0098	1.0061	9.0652	40′
30′	.1132	.9936	.11394	8.7769	1.0065	8.8337	30′
40′	.1161	.9932	.11688	8.5555	1.0068	8.6138	20′
50′	.1190	.9929	.11983	8.3450	1.0072	8.4647	10′
7° 0′	.1219	.9925	.12278	8.1443	1.0075	8.2055	83° 0′
10′	.1248	.9922	.12574	7.9530	1.0079	8.0157	50′
20′	.1276	.9918	.12869	7.7704	1.0083	7.8344	40′
30′	.1305	.9914	.13165	7.5958	1.0086	7.6613	30′
40′	.1334	.9911	.1346	7.4287	1.0090	7.4957	20′
50′	.1363	.9907	.1376	7.2687	1.0094	7.3372	10′
8° 0′	.1392	.9903	.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82° 0′
10′	.1421	.9899	.1435	6.9682	1.0102	7.0396	50′
20′	.1449	.9894	.1465	6.8269	1.0107	6.8998	40′
30′	.1478	.9890	.1495	6.6912	1.0111	6.7655	30′
40′	.1507	.9886	.1524	6.5606	1.0116	6.6363	20′
50′	.1536	.9881	.1554	6.4348	1.0120	6.5121	10′
9° 0′	.1564	.9877	.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81° 0′
10′	.1593	.9872	.1614	6.1970	1.0129	6.2772	50′
20′	.1622	.9868	.1644	6.0844	1.0134	6.1661	40′
30′	.1650	.9863	.1673	5.9758	1.0139	6.0589	30′
40′	.1679	.9858	.1703	5.8708	1.0144	5.9554	20′
50′	.1708	.9853	.1733	5.7694	1.0149	5.8554	10′
10° 0′	.1736	.9848	.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80° 0′
10′	.1765	.9843	.1793	5.5764	1.0160	5.6653	50′
20′	.1794	.9838	.1823	5.4845	1.0165	5.5749	40′
30′	.1822	.9833	.1853	5.3955	1.0170	5.4874	30′
40′	.1851	.9827	.1883	5.3093	1.0176	5.4026	20′
50′	.1880	.9822	.1914	5.2257	1.0182	5.3205	10′
11° 0′	.1908	.9816	.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79° 0′
10′	.1937	.9811	.1974	5.0658	1.0193	5.1636	50′
20′	.1965	.9805	.2004	4.9894	1.0199	5.0886	40′
30′	.1994	.9799	.2035	4.9152	1.0205	5.0159	30′
40′	.2022	.9793	.2065	4.8430	1.0211	4.9452	20′
50′	.2051	.9787	.2095	4.7729	1.0217	4.8765	10′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
12° 0′	.2079	.9781	.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78° 0′
10′	.2108	.9775	.2156	4.6382	1.0230	4.7448	50′
20′	.2136	.9769	.2186	4.5736	1.0236	4.6817	40′
30′	.2164	.9763	.2217	4.5107	1.0243	4.6202	30′
40′	.2193	.9757	.2247	4.4494	1.0249	4.5604	20′
50′	.2221	.9750	.2278	4.3897	1.0256	4.5022	10′
13° 0′	.2250	.9744	.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77° 0′
10′	.2278	.9737	.2339	4.2747	1.0270	4.3901	50′
20′	.2306	.9730	.2370	4.2193	1.0277	4.3362	40′
30′	.2334	.9724	.2401	4.1653	1.0284	4.2837	30′
40′	.2363	.9717	.2432	4.1126	1.0291	4.2324	20′
50′	.2391	.9710	.2462	4.0611	1.0299	4.1824	10′
14° 0′	.2419	.9703	.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76° 0′
10′	.2447	.9696	.2524	3.9617	1.0314	4.0859	50′
20′	.2476	.9689	.2555	3.9136	1.0321	4.0394	40′
30′	.2504	.9681	.2586	3.8667	1.0329	3.9939	30′
40′	.2532	.9674	.2617	3.8208	1.0337	3.9495	20′
50′	.2560	.9667	.2648	3.7760	1.0345	3.9061	10′
15° 0′	.2588	.9659	.2679	3.7321	1.0353	3.8637	75° 0′
10′	.2616	.9652	.2711	3.6891	1.0361	3.8222	50′
20′	.2644	.9644	.2742	3.6470	1.0369	3.7817	40′
30′	.2672	.9636	.2773	3.6059	1.0377	3.7420	30′
40′	.2700	.9628	.2805	3.5656	1.0386	3.7032	20′
50′	.2728	.9621	.2836	3.5261	1.0394	3.6652	10′
16° 0′	.2756	.9613	.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74° 0′
10′	.2784	.9605	.2899	3.4495	1.0412	3.5915	50′
20′	.2812	.9596	.2931	3.4124	1.0421	3.5559	40′
30′	.2840	.9588	.2962	3.3759	1.0430	3.5209	30′
40′	.2868	.9580	.2994	3.3402	1.0439	3.4867	20′
50′	.2896	.9572	.3026	3.3052	1.0448	3.4532	10′
17° 0′	.2924	.9563	.3057	3.2709	1.0457	3.4203	73° 0′
10′	.2952	.9555	.3089	3.2371	1.0466	3.3881	50′
20′	.2979	.9546	.3121	3.2041	1.0476	3.3565	40′
30′	.3007	.9537	.3153	3.1716	1.0485	3.3255	30′
40′	.3035	.9528	.3185	3.1397	1.0495	3.2951	20′
50′	.3062	.9520	.3217	3.1084	1.0505	3.2653	10′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
18° 0′	.3090	.9511	.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72° 0′
10′	.3118	.9502	.3281	3.0475	1.0525	3.2074	50′
20′	.3145	.9492	.3314	3.0178	1.0535	3.1792	40′
30′	.3173	.9483	.3346	2.9887	1.0545	3.1516	30′
40′	.3201	.9474	.3378	2.9600	1.0555	3.1244	20′
50′	.3228	.9465	.3411	2.9319	1.0566	3.0977	10′
19° 0′	.3256	.9455	.3443	2.9042	1.0576	3.0716	71° 0′
10′	.3283	.9446	.3476	2.8770	1.0587	3.0458	50′
20′	.3311	.9436	.3508	2.8502	1.0598	3.0206	40′
30′	.3338	.9426	.3541	2.8239	1.0609	2.9957	30′
40′	.3365	.9417	.3574	2.7980	1.0620	2.9714	20′
50′	.3393	.9407	.3607	2.7725	1.0631	2.9474	10′
20° 0′	.3420	.9397	.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70° 0′
10′	.3448	.9387	.3673	2.7228	1.0653	2.9006	50′
20′	.3475	.9377	.3706	2.6985	1.0665	2.8870	40′
30′	.3502	.9367	.3739	2.6746	1.0676	2.8555	30′
40′	.3529	.9356	.3772	2.6511	1.0688	2.8334	20′
50′	.3557	.9346	.3805	2.6279	1.0700	2.8118	10′
21° 0′	.3584	.9336	.3839	2.6051	1.0712	2.7904	69° 0′
10′	.3611	.9325	.3872	2.5826	1.0724	2.7695	50′
20′	.3638	.9315	.3906	2.5605	1.0736	2.7488	40′
30′	.3665	.9304	.3939	2.5386	1.0748	2.7285	30′
40′	.3692	.9293	.3973	2.5172	1.0760	2.7085	20′
50′	.3719	.9283	.4006	2.4960	1.0773	2.6888	10′
22° 0′	.3746	.9272	.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68° 0′
10′	.3773	.9261	.4074	2.4545	1.0798	2.6504	50′
20′	.3800	.9250	.4108	2.4342	1.0811	2.6316	40′
30′	.3827	.9239	.4142	2.4142	1.0824	2.6131	30′
40′	.3854	.9228	.4176	2.3945	1.0837	2.5949	20′
50′	.3881	.9216	.4210	2.3750	1.0850	2.5770	10′
23° 0′	.3907	.9205	.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67° 0′
10′	.3934	.9194	.4279	2.3369	1.0877	2.5419	50′
20′	.3961	.9182	.4314	2.3183	1.0891	2.5247	40′
30′	.3987	.9171	.4348	2.2998	1.0904	2.5078	30′
40′	.4014	.9159	.4383	2.2817	1.0918	2.4912	20′
50′	.4041	.9147	.4471	2.2637	1.0932	2.4748	10′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
24° 0′	.4067	.9135	.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66° 0′
10′	.4094	.9124	.4487	2.2286	1.0961	2.4426	50′
20′	.4120	.9112	.4522	2.2113	1.0975	2.4269	40′
30′	.4147	.9100	.4557	2.1943	1.0990	2.4114	30′
40′	.4173	.9088	.4592	2.1775	1.1004	2.3961	20′
50′	.4200	.9075	.4628	2.1609	1.1019	2.3811	10′
25° 0′	.4226	.9063	.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65° 0′
10′	.4253	.9051	.4699	2.1283	1.1049	2.3515	50′
20′	.4279	.9038	.4734	2.1123	1.1064	2.3371	40′
30′	.4305	.9026	.4770	2.0965	1.1079	2.3228	30′
40′	.4331	.9013	.4806	2.0809	1.1095	2.3088	20′
50′	.4558	.9001	.4841	2.0655	1.1110	2.2949	10′
26° 0′	.4384	.8988	.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64° 0′
10′	.4410	.8975	.4913	2.0353	1.1142	2.2677	50′
20′	.4436	.8962	.4950	2.0204	1.1158	2.2543	40′
30′	.4462	.8949	.4986	2.0057	1.1174	2.2412	30′
40′	.4488	.8936	.5022	1.9912	1.1190	2.2282	20′
50′	.4514	.8923	.5059	1.9768	1.1207	2.2154	10′
27° 0′	.4540	.8910	.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63° 0′
10′	.4566	.8897	.5132	1.9486	1.1240	2.1902	50′
20′	.4592	.8884	.5169	1.9347	1.1257	2.1779	40′
30′	.4617	.8870	.5206	1.9210	1.1274	2.1657	30′
40′	.4643	.8857	.5243	1.9074	1.1291	2.1537	20′
50′	.4669	.8843	.5280	1.8940	1.1308	2.1418	10′
28° 0′	.4695	.8829	.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62° 0′
10′	.4720	.8816	.5354	1.8676	1.1343	2.1185	50′
20′	.4746	.8802	.5392	1.8546	1.1361	2.1070	40′
30′	.4772	.8788	.5430	1.8418	1.1379	2.0957	30′
40′	.4797	.8774	.5467	1.8291	1.1397	2.0846	20′
50′	.4823	.8760	.5505	1.8165	1.1415	2.0736	10′
29° 0′	.4848	.8746	.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61° 0′
10′	.4874	.8732	.5581	1.7917	1.1452	2.0519	50′
20′	.4899	.8718	.5619	1.7796	1.1471	2.0413	40′
30′	.4924	.8704	.5658	1.7675	1.1490	2.0308	30′
40′	.4950	.8689	.5696	1.7556	1.1509	2.0204	20′
50′	.4975	.8675	.5735	1.7437	1.1528	2.0101	10′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
30° 0′	.5000	.8660	.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60° 0′
10′	.5025	.8646	.5812	1.7205	1.1567	1.9900	50′
20′	.5050	.8631	.5851	1.7090	1.1586	1.9801	40′
30′	.5075	.8616	.5890	1.6977	1.1606	1.9703	30′
40′	.5100	.8601	.5930	1.6864	1.1626	1.9606	20′
50′	.5125	.8587	.5969	1.6753	1.1646	1.9511	10′
31° 0′	.5150	.8572	.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59° 0′
10′	.5175	.8557	.6048	1.6534	1.1687	1.9323	50′
20′	.5200	.8542	.6088	1.6426	1.1708	1.9230	40′
30′	.5225	.8526	.6128	1.6319	1.1728	1.9139	30′
40′	.5250	.8511	.6168	1.6212	1.1749	1.9049	20′
50′	.5275	.8496	.6208	1.6107	1.1770	1.8959	10′
32° 0′	.5299	.8480	.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58° 0′
10′	.5324	.8465	.6289	1.5900	1.1813	1.8783	50′
20′	.5348	.8450	.6330	1.5798	1.1835	1.8699	40′
30′	.5373	.8434	.6371	1.5697	1.1857	1.8612	30′
40′	.5398	.8418	.6412	1.5597	1.1879	1.8527	20′
50′	.5422	.8403	.6453	1.5497	1.1901	1.8444	10′
33° 0′	.5446	.8387	.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57° 0′
10′	.5471	.8371	.6536	1.5301	1.1946	1.8279	50′
20′	.5495	.8355	.6577	1.5204	1.1969	1.8198	40′
30′	.5519	.8339	.6619	1.5108	1.1992	1.8118	30′
40′	.5544	.8323	.6661	1.5013	1.2015	1.8039	20′
50′	.5568	.8307	.6703	1.4919	1.2039	1.7960	10′
34° 0′	.5592	.8290	.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56° 0′
10′	.5616	.8274	.6787	1.4733	1.2086	1.7806	50′
20′	.5640	.8258	.6830	1.4641	1.2110	1.7730	40′
30′	.5664	.8241	.6873	1.4550	1.2134	1.7655	30′
40′	.5688	.8225	.6916	1.4460	1.2158	1.7581	20′
50′	.5712	.8208	.6959	1.4370	1.2183	1.7507	10′
35° 0′	.5736	.8192	.7002	1.4281	1.2208	1.7435	55° 0′
10′	.5760	.8175	.7046	1.4193	1.2233	1.7362	50′
20′	.5783	.8158	.7089	1.4106	1.2258	1.7291	40′
30′	.5807	.8141	.7133	1.4019	1.2283	1.7221	30′
40′	.5831	.8124	.7177	1.3934	1.2309	1.7151	20′
50′	.5854	.8107	.7221	1.3848	1.2335	1.7082	10′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
36° 0′	.5878	.8090	.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54° 0′
10′	.5901	.8073	.7310	1.3680	1.2387	1.6945	50′
20′	.5925	.8056	.7355	1.3597	1.2413	1.6878	40′
30′	.5948	.8039	.7400	1.3514	1.2440	1.6812	30′
40′	.5972	.8021	.7445	1.3432	1.2467	1.6746	20′
50′	.5995	.8004	.7490	1.3351	1.2494	1.6681	10′
37° 0′	.6018	.7986	.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53° 0′
10′	.6041	.7969	.7581	1.3190	1.2549	1.6553	50′
20′	.6065	.7951	.7627	1.3111	1.2577	1.6489	40′
30′	.6088	.7934	.7673	1.3032	1.2605	1.6427	30′
40′	.6111	.7916	.7720	1.2954	1.2633	1.6365	20′
50′	.6134	.7898	.7766	1.2876	1.2662	1.6304	10′
38° 0′	.6157	.7880	.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52° 0′
10′	.6180	.7862	.7860	1.2723	1.2719	1.6183	50′
20′	.6202	.7844	.7907	1.2647	1.2748	1.6123	40′
30′	.6225	.7826	.7954	1.2572	1.2779	1.6064	30′
40′	.6248	.7808	.8002	1.2497	1.2808	1.6005	20′
50′	.6271	.7790	.8050	1.2423	1.2837	1.5948	10′
39° 0′	.6293	.7771	.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51° 0′
10′	.6316	.7753	.8146	1.2276	1.2898	1.5833	50′
20′	.6338	.7735	.8195	1.2203	1.2929	1.5777	40′
30′	.6361	.7716	.8243	1.2131	1.2960	1.5721	30′
40′	.6383	.7698	.8292	1.2059	1.2991	1.5666	20′
50′	.6406	.7679	.8342	1.1988	1.3022	1.5611	10′
40° 0′	.6428	.7660	.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50° 0′
10′	.6450	.7642	.8441	1.1847	1.3086	1.5504	50′
20′	.6472	.7623	.8491	1.1778	1.3118	1.5450	40′
30′	.6494	.7604	.8541	1.1708	1.3151	1.5398	30′
40′	.6517	.7585	.8591	1.1640	1.3184	1.5346	20′
50′	.6539	.7566	.8642	1.1571	1.3217	1.5294	10′
41° 0′	.6561	.7547	.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49° 0′
10′	.6583	.7528	.8744	1.1436	1.3284	1.5192	50′
20′	.6604	.7509	.8796	1.1369	1.3318	1.5142	40′
30′	.6626	.7490	.8847	1.1303	1.3352	1.5092	30′
40′	.6648	.7470	.8899	1.1237	1.3386	1.5042	20′
50′	.6670	.7451	.8952	1.1171	1.3421	1.4993	10′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

continuación...

x	sen x	cos x	tan x	cot x	sec x	csc x	
42° 0′	.6691	.7431	.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48° 0′
10′	.6713	.7412	.9057	1.1041	1.3492	1.4897	50′
20′	.6734	.7392	.9110	1.0977	1.3527	1.4849	40′
30′	.6756	.7373	.9163	1.0913	1.3563	1.4802	30′
40′	.6777	.7353	.9217	1.0850	1.3600	1.4755	20′
50′	.6799	.7333	.9271	1.0786	1.3636	1.4709	10′
43° 0′	.6820	.7314	.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47° 0′
10′	.6841	.7294	.9380	1.0661	1.3711	1.4617	50′
20′	.6862	.7274	.9435	1.0599	1.3748	1.4572	40′
30′	.6884	.7254	.9490	1.0538	1.3786	1.4527	30′
40′	.6905	.7234	.9545	1.0477	1.3824	1.4483	20′
50′	.6926	.7214	.9601	1.0416	1.3863	1.4439	10′
44° 0′	.6947	.7193	.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46° 0′
10′	.6967	.7173	.9713	1.0295	1.3941	1.4352	50′
20′	.6988	.7153	.9770	1.0235	1.3980	1.4310	40′
30′	.7009	.7133	.9827	1.0176	1.4020	1.4267	30′
40′	.7030	.7112	.9884	1.0117	1.4061	1.4225	20′
50′	.7050	.7092	.9942	1.0058	1.4101	1.4184	10′
45° 0′	.7071	.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45° 0′
	cos x	sen x	cot x	tan x	csc x	sec x	x

Tabla A
Proporciones de área bajo la curva normal

(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z	(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z	(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z
0.00	.0000	.5000	0.45	.1736	.3264	0.90	.3159	.1841
0.01	.0040	.4960	0.46	.1772	.3228	0.91	.3186	.1814
0.02	.0080	.4920	0.47	.1808	.3192	0.92	.3212	.1788
0.03	.0120	.4880	0.48	.1844	.3156	0.93	.3238	.1762
0.04	.0160	.4840	0.49	.1879	.3121	0.94	.3264	.1736
0.05	.0199	.4801	0.50	.1915	.3085	0.95	.3289	.1711
0.06	.0239	.4761	0.51	.1950	.3050	0.96	.3315	.1685
0.07	.0279	.4721	0.52	.1985	.3015	0.97	.3340	.1660
0.08	.0319	.4681	0.53	.2019	.2981	0.98	.3365	.1635
0.09	.0359	.4641	0.54	.2054	.2946	0.99	.3389	.1611
0.10	.0398	.4602	0.55	.2088	.2912	1.00	.3413	.1587
0.11	.0438	.4562	0.56	.2123	.2877	1.01	.3438	.1562
0.12	.0478	.4522	0.57	.2157	.2843	1.02	.3461	.1539
0.13	.0517	.4483	0.58	.2190	.2810	1.03	.3485	.1515
0.14	.0557	.4443	0.59	.2224	.2776	1.04	.3508	.1492
0.15	.0596	.4404	0.60	.2257	.2743	1.05	.3531	.1469
0.16	.0636	.4364	0.61	.2291	.2709	1.06	.3554	.1446
0.17	.0675	.4325	0.62	.2324	.2676	1.07	.3577	.1423
0.18	.0714	.4286	0.63	.2357	.2643	1.08	.3599	.1401
0.19	.0753	.4247	0.64	.2389	.2611	1.09	.3621	.1379
0.20	.0793	.4207	0.65	.2422	.2578	1.10	.3643	.1357
0.21	.0832	.4168	0.66	.2454	.2546	1.11	.3665	.1335
0.22	.0871	.4129	0.67	.2486	.2514	1.12	.3686	.1314
0.23	.0910	.4090	0.68	.2517	.2483	1.13	.3708	.1292
0.24	.0948	.4052	0.69	.2549	.2451	1.14	.3729	.1271
0.25	.0987	.4013	0.70	.2580	.2420	1.15	.3749	.1251
0.26	.1026	.3974	0.71	.2611	.2389	1.16	.3770	.1230
0.27	.1064	.3936	0.72	.2642	.2358	1.17	.3790	.1210
0.28	.1103	.3897	0.73	.2673	.2327	1.18	.3810	.1190
0.29	.1141	.3859	0.74	.2704	.2296	1.19	.3830	.1170
0.30	.1179	.3821	0.75	.2734	.2266	1.20	.3849	.1151
0.31	.1217	.3783	0.76	.2764	.2236	1.21	.3869	.1131
0.32	.1255	.3745	0.77	.2794	.2206	1.22	.3888	.1112
0.33	.1293	.3707	0.78	.2823	.2177	1.23	.3907	.1093
0.34	.1331	.3669	0.79	.2852	.2148	1.24	.3925	.1075
0.35	.1368	.3632	0.80	.2881	.2119	1.25	.3944	.1056
0.36	.1406	.3594	0.81	.2910	.2090	1.26	.3962	.1038
0.37	.1443	.3557	0.82	.2939	.2061	1.27	.3980	.1020
0.38	.1480	.3520	0.83	.2967	.2033	1.28	.3997	.1003
0.39	.1517	.3483	0.84	.2995	.2005	1.29	.4015	.0985
0.40	.1554	.3446	0.85	.3023	.1977	1.30	.4032	.0968
0.41	.1591	.3409	0.86	.3051	.1949	1.31	.4049	.0951
0.42	.1628	.3372	0.87	.3078	.1922	1.32	.4066	.0934
0.43	.1664	.3336	0.88	.3106	.1894	1.33	.4082	.0918
0.44	.1700	.3300	0.89	.3133	.1867	1.34	.4099	.0901

Tabla A
Continuación

(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z	(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z	(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z
1.35	.4115	.0885	1.80	.4641	.0359	2.25	.4878	.0122
1.36	.4131	.0869	1.81	.4649	.0351	2.26	.4881	.0119
1.37	.4147	.0853	1.82	.4656	.0344	2.27	.4884	.0116
1.38	.4162	.0838	1.83	.4664	.0336	2.28	.4887	.0113
1.39	.4177	.0823	1.84	.4671	.0329	2.29	.4890	.0110
1.40	.4192	.0808	1.85	.4678	.0322	2.30	.4893	.0107
1.41	.4207	.0793	1.86	.4686	.0314	2.31	.4896	.0104
1.42	.4222	.0778	1.87	.4693	.0307	2.32	.4898	.0102
1.43	.4236	.0764	1.88	.4699	.0301	2.33	.4901	.0099
1.44	.4251	.0749	1.89	.4706	.0294	2.34	.4904	.0096
1.45	.4265	.0735	1.90	.4713	.0287	2.35	.4906	.0094
1.46	.4279	.0721	1.91	.4719	.0281	2.36	.4909	.0091
1.47	.4292	.0708	1.92	.4726	.0274	2.37	.4911	.0089
1.48	.4306	.0694	1.93	.4732	.0268	2.38	.4913	.0087
1.49	.4319	.0681	1.94	.4738	.0262	2.39	.4916	.0084
1.50	.4332	.0668	1.95	.4744	.0256	2.40	.4918	.0082
1.51	.4345	.0655	1.96	.4750	.0250	2.41	.4920	.0080
1.52	.4357	.0643	1.97	.4756	.0244	2.42	.4922	.0078
1.53	.4370	.0630	1.98	.4761	.0239	2.43	.4925	.0075
1.54	.4382	.0618	1.99	.4767	.0233	2.44	.4927	.0073
1.55	.4394	.0606	2.00	.4772	.0228	2.45	.4929	.0071
1.56	.4406	.0594	2.01	.4778	.0222	2.46	.4931	.0069
1.57	.4418	.0582	2.02	.4783	.0217	2.47	.4932	.0068
1.58	.4429	.0571	2.03	.4788	.0212	2.48	.4934	.0066
1.59	.4441	.0559	2.04	.4793	.0207	2.49	.4936	.0064
1.60	.4452	.0548	2.05	.4798	.0202	2.50	.4938	.0062
1.61	.4463	.0537	2.06	.4803	.0197	2.51	.4940	.0060
1.62	.4474	.0526	2.07	.4808	.0192	2.52	.4941	.0059
1.63	.4484	.0516	2.08	.4812	.0188	2.53	.4943	.0057
1.64	.4495	.0505	2.09	.4817	.0183	2.54	.4945	.0055
1.65	.4505	.0495	2.10	.4821	.0179	2.55	.4946	.0054
1.66	.4515	.0485	2.11	.4826	.0174	2.56	.4948	.0052
1.67	.4525	.0475	2.12	.4830	.0170	2.57	.4949	.0051
1.68	.4535	.0465	2.13	.4834	.0166	2.58	.4951	.0049
1.69	.4545	.0455	2.14	.4838	.0162	2.59	.4952	.0048
1.70	.4554	.0446	2.15	.4842	.0158	2.60	.4953	.0047
1.71	.4564	.0426	2.16	.4846	.0154	2.61	.4955	.0045
1.72	.4573	.0427	2.17	.4850	.0150	2.62	.4956	.0044
1.73	.4582	.0418	2.18	.4854	.0146	2.63	.4957	.0043
1.74	.4591	.0409	2.19	.4857	.0143	2.64	.4959	.0041
1.75	.4599	.0401	2.20	.4861	.0139	2.65	.4960	.0040
1.76	.4608	.0392	2.21	.4864	.0136	2.66	.4961	.0039
1.77	.4616	.0384	2.22	.4868	.0132	2.67	.4962	.0038
1.78	.4625	.0375	2.23	.4871	.0129	2.68	.4963	.0037
1.79	.4633	.0367	2.24	.4875	.0125	2.69	.4964	.0036

Tabla A
Continuación

(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z	(A) z	(B) área entre la media y z	(C) área más allá de z
2.70	.4965	.0035	3.15	.4992	.0008
2.71	.4966	.0034	3.16	.4992	.0008
2.72	.4967	.0033	3.17	.4992	.0008
2.73	.4968	.0032	3.18	.4993	.0007
2.74	.4969	.0031	3.19	.4993	.0007
2.75	.4970	.0030	3.20	.4993	.0007
2.76	.4971	.0029	3.21	.4993	.0007
2.77	.4972	.0028	3.22	.4994	.0006
2.78	.4973	.0027	3.23	.4994	.0006
2.79	.4974	.0026	3.24	.4994	.0006
2.80	.4974	.0026	3.25	.4994	.0006
2.81	.4975	.0025	3.30	.4995	.0005
2.82	.4975	.0024	3.35	.4996	.0004
2.83	.4977	.0023	3.40	.4997	.0003
2.84	.4977	.0023	3.45	.4997	.0003
2.85	.4978	.0022	3.50	.4998	.0002
2.86	.4979	.0021	3.60	.4998	.0002
2.87	.4979	.0021	3.70	.4999	.0001
2.88	.4980	.0020	3.80	.4999	.0001
2.89	.4981	.0019	3.90	.49995	.00005
2.90	.4981	.0019	4.00	.49997	.00003
2.91	.4982	.0018			
2.92	.4982	.0018			
2.93	.4983	.0017			
2.94	.4984	.0016			
2.95	.4984	.0016			
2.96	.4985	.0015			
2.97	.4985	.0015			
2.98	.4986	.0014			
2.99	.4986	.0014			
3.00	.4987	.0013			
3.01	.4987	.0013			
3.02	.4987	.0013			
3.03	.4988	.0012			
3.04	.4988	.0012			
3.05	.4989	.0011			
3.06	.4989	.0011			
3.07	.4989	.0011			
3.08	.4990	.0010			
3.09	.4990	.0010			
3.10	.4990	.0010			
3.11	.4991	.0009			
3.12	.4991	.0009			
3.13	.4991	.0009			
3.14	.4992	.0008			

LABORATORIO No. 1 NOMBRE ____________________

SECCION 1.1 y 1.2 FECHA ____________________

1. Traza la gráfica de la siguiente función cúbica $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10$

2. Para los siguientes problemas simplifica y escribe el resultado en términos de "i"
a) i^{32} b) i^{87} c) i^{125} d) i^{-324} e) $i\sqrt{-36}$ f) $i^3\sqrt{-625}$

3. Efectúa las operaciones indicadas con los siguientes números complejos.
a) $(8+3i)+(4-5i)$ b) $(-12-7i)+(4-3i)$

c) $(19+5i)-(-2-3i)$ d) $(25+19i)-(32+26i)$

e) $(6+7i)(4-2i)$ f) $(7-8i)(7+8i)$

g) $(1+5i)\div(2-3i)$ h) $(-2+i)\div(-2-i)$

LABORATORIO No. 2 NOMBRE ____________________

SECCION 1-3 FECHA ____________________

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas y comprueba las soluciones.

1. $x^2+2x+2=0$
2. $x^2-2x+5=0$
3. $x^2+10x+29=0$
4. $9x^2-12x+229=0$

Dadas las siguientes soluciones encuentra la ecuación cuadrática.

5. 4 y -3
6. -5 y -2
7. $(1+2i)$ y $(1-2i)$
8. $(-5+i)$ y $(-5-i)$

Factoriza los siguientes polinomios expresándolos como factores lineales.

9. x^2-4x+5
10. x^2+4x+7
11. $4x^2+25$
12. $36x^2+49$

LABORATORIO No. 3 NOMBRE ____________________

SECCION 1.4 FECHA ____________________

Encuentra el valor de la funcion indicada por sustitución sintética.

1. $f(x) = x^3-4x^2+5x-13$ encuentra f(3)
2. $g(x) = 4x^3+2x^2+3x-30$ encuentra g(5)
3. $m(x) = -3x^3-5x^2+7x-9$ encuentra m(2)
4. $f(x) = 2x^4-5x^3+4x^2-10x-90$ encuentra f(2)

Para los siguientes problemas:

a) **Traza la gráfica (para el dominio dado) calculando los puntos a trazar por sustitución sintética.**

b) **Encuentra todos los ceros, reales y complejos**

5. $p(x) = x^3-x^2-4x+4$ dominio $-4\leq x\leq 4$
6. $p(x) = x^3-x^2-10x+10$ dominio $-4\leq x\leq 5$
7. $p(x) = x^3+x^2-7x-15$ dominio $-4\leq x\leq 4$
8. $p(x) = -2x^3+2x^2+7x-10$ dominio $-3\leq x\leq 4$

Usando el teorema del Residuo, encuentra el residuo rápidamente del polinomio dado dividido entre el binomio lineal.

9. $3x^3+7x^2-12x+1$ entre $x+3$
10. x^4-10x^2+9 entre $x-3$

LABORATORIO No. 4 NOMBRE ____________________
SECCION 1-5 FECHA ____________________

Encuentra el número de las posibles soluciones positivas, negativas y complejas.

1. $p(x) = x^3+4x^2-7x+2$

2. $p(x) = x^3-x^2+4x-6$

3. $p(x) = x^4+5x^2+2x-11$

4. $p(x) = x^4-x^3-11x^2+9x+8$

5. $p(x) = x^5+4x^3+2x$

Encuentra los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior y bosqueje gráfica entre este intervalo.

6. $p(x) = x^3-4x^2-5x+7$

7. $p(x) = x^4-x^3-2x^2+3x+6$

8. $p(x) = 2x^5-13x^3+2x-5$

LABORATORIO No. 5 NOMBRE ____________________
SECCION 1-6 FECHA ____________________

Resuelve los siguientes problemas del mundo real, usando funciones cúbicas o de grado superior.

1. Problema de la viscocidad del aceite.
La viscocidad o "grueso" del aceite de motor que usan los automóviles desciende cuando la temperatura aumenta. Los aceites de motor para "todo clima", retienen una relativa viscocidad constante en todo su rango de temperaturas de operación. En un laboratorio químico se ha encontrado las siguientes viscocidades para un aceite de motor para "todo clima".

Temperatura °F	Viscocidad
100	54
200	50
300	52
400	54

Siendo V el número de unidades de viscocidad, y "t" el número de centésimas de grado (Ej. $t=1$ significa que la temperatura es 100°). Asume que una función cúbica es un modelo razonable de cómo "V" varía con "t".
a) Encuentra la ecuación particular expresando V en términos de "t".
b) ¿Cuál será la viscocidad a 0°, 500° y 600°?
c) Traza la gráfica de V contra "t" con un dominio $0 \leq t \leq 6$
d) ¿Es $V=0$ para algún valor de "t" en este dominio? Justifica la respuesta.

2. Problema de la madera aserrada.
Antonio tiene el problema de saber cuánta madera se puede obtener de varios tamaños de árboles. De los archivos de un aserradero encontró los siguientes datos: el diámetro del árbol (en pies) y la longitud correspondiente del tablón que puede ser cortado (pies).

Diámetro (pies)	Madera (tablón/pies)
1	10
2	99
3	324
4	745

Antonio decide que si un tablón/pie es una medida cúbica, una función de ese grado sería un modelo matemático razonable.
a) Encuentra la ecuación particular expresando tablón/pies en términos del diámetro.
b) ¿Cuánta madera puede ser obtenida de un árbol con un tronco de 5 pies de diámetro?
c) Antonio encuentra que la función tiene una solución entera. Encuentra las otras soluciones.
d) Grafica la función.
e) El jefe de Antonio le dice que no debe de talar ningún árbol de menos de 200 tablón/pie. ¿Cuál será el diámetro menor de los árboles que se deben talar?

LABORATORIO No. 6 NOMBRE ____________

SECCION Repaso Cap. I FECHA ____________

Para los siguientes problemas, simplifica y escribe el resultado en términos de "i".

1. i^{43} 2. i^{129} 3. i^{-825} 4. $i^2\sqrt{-121}$

Efectúa las operaciones indicadas con los siguientes números complejos.

5. $(16-5i)+(-7-4i)$
6. $(3+2i)\div(5+3i)$

Dadas las siguientes soluciones encuentra la ecuación cuadrática.

7. -3 y 5 8. $(3+4i)$ y $(3-4i)$

Encuentra el valor de la función indicada por sustitución sintética.

9. $f(x) = 4x^3+5x^2-8x-10$ encuentra $f(4)$
10. $g(x) = 12x^3-20x^2-33x+20$ encuentra $g(-2)$

Traza la gráfica (para el dominio dado) calculando los puntos a trazar por sustituc sintética y encuentra todos los ceros, reales y complejos.

11. $p(x) = -2x^3-x^2+6x+8$ dominio $-3 \le x \le 3$

Usando el Teorema del Residuo, encuentra el residuo rápidamente del polinomio da dividido por el binomio lineal.

12. $f(x) = x^4-4x^3+5x^2-4x+4$ entre $x+1$

Encuentra el número de las posibles soluciones positivas, negativas y complejas.

13. $2x^3+x^2+3x-2=0$

Encuentra los enteros mayor y menor que son las cotas superior e inferior y bosqueja gráfica entre este intervalo.

14. $2x^3-5x^2+4x-8=0$

LABORATORIO No. 7 NOMBRE ____________

SECCION 2.1 FECHA ____________

Para las siguientes sucesiones encuentra:

a) Los términos a_7 y a_8 ____________

b) La fórmula para a_n ____________

c) Calcula el término a_{120} ____________

1. 1,4,9,16,25,36,...

2. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}, \ldots$

3. 3,6,9,12,15,18,...

4. 2,6,18,54,162,486,...

Dadas las siguientes sucesiones encuentra los siguientes dos términos y di qué patrón fue usado.

5. 1,1,2,2,3,4,4,8,5,16,6,32,...

6. 100,100,75,50,50,25,25,...

LABORATORIO No. 8 NOMBRE ______________________

SECCION 2.2 FECHA ______________________

En las siguientes sucesiones di si son aritméticas o geométricas o ninguna de éstas. Si es aritmética encuentra la diferencia común, si es geométrica la razón común

1. 3,6,12,... ______________________
2. -1,0,1,... ______________________
3. -1,2,-3,... ______________________
4. 25,50,75,... ______________________
5. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ ______________________

Para las siguientes sucesiones aritméticas encuentra el término que se indica

6. El término 29 de 7,11,15,...
7. El término 68 de 95,92,89,...
8. El término 95 de 136,131,126,...

Para las siguientes sucesiones geométricas encuentra el término que se indica.

9. El término 10 de 12,6,3,...
10. El término 6 de 1, $-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \ldots$
11. El término 31 de la sucesión en la cual $a_1 = 1000$, $r = 0.95$

Para las siguientes sucesiones encuentra qué término es (n), del número dado.

12. 111 en la sucesión aritmética con $a_1 = 7$, $d = 4$
13. 4374 en la sucesióm geométrica con $a_1 = 2$, $r = 3$

LABORATORIO No. 9 NOMBRE ______________________

SECCION 2.3 FECHA ______________________

Para los siguientes problemas encuentra las medias aritméticas indicadas entre los dos números dados.

1. 4 medias entre 55 y 85
2. 5 medias entre -91 y -67
3. 6 medias entre 17 y -60
4. 3 medias entre -257 y -397
5. 2 medias entre 67 y 90

Para los siguientes problemas encuentra las medias geométricas indicadas entre los dos números dados.

6. 3 medias entre 7 y 112
7. 2 medias entre 128 y 54
8. 3 medias entre $\frac{1}{525}$ y $\frac{25}{21}$
9. 2 medias entre X^5 y X^{17}
10. 2 medias entre 13 y 26

LABORATORIO No. 10 NOMBRE ______________________

SECCION 2.4 FECHA ______________________

* Evalúa la expresión escribiendo los términos y después súmalos.

1. $\sum_{k=1}^{6} 3k - 4$

2. $\sum_{k=1}^{4} 2/k$

3. $\sum_{k=1}^{5} k^3 - 4$

4. $\sum_{k=1}^{6} (-1)^k(3k-2)$

5. $2\sum_{k=1}^{4} (k+3)^k$

6. $\sum_{k=1}^{3} (1.05)^k$

* Para los siguientes problemas expresa Sn usando la notación Σ

7. S_{30} para $1+8+27+64+125+\ldots$

8. S_{100} para $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots$

9. S_{50} para $3+6+12+24+48+\ldots$

10. S_{80} para $5+8+11+14+17+\ldots$

LABORATORIO No. 11 NOMBRE ______________________

SECCION 2.5 FECHA ______________________

Para los siguientes problemas encuentra Sn de las series aritméticas siguientes:

1. S_{13} para $9+20+31+\ldots$

2. S_{30} para la serie con $a_1=17$ y $d=10$

3. S_{18} para la serie con $a_1=29$ y $d=-3$

4. S_{50} para la serie con $a_1=7$ y $a_9=47$

5. $\sum_{k=1}^{7} 4+3(k+3)$

Para los siguientes problemas encuentra Sn de las series geométricas siguientes:

6. S_8 para $2+6+18+\ldots$

7. S_5 para $3-6+12-\ldots$

8. S_{10} para la serie con $a_1=7$ y $r=2$

9. S_{18} para la serie con $a_1=20$ y $a_2=19$

10. $\sum_{k=1}^{7} 3(2)^{k-1}$

Para los siguientes ejemplos la suma parcial es dada, junto con otra información. Encuentra el número del término de la suma parcial.

11. Serie aritmética $S_n=4859$, $a_1=8$, $d=5$, $n=?$

12. Serie aritmetica $S_n=19149.6$, $a_1=2.8$, $a_3=3.6$, $n=?$

13. Serie geométrica $S_n \approx 6817.748$, $a_1=47$, $r=1.06$, $n=?$

14. Serie geométrica $S_n \approx 1856.42$, $a_1=200$, $a_3=162$, $n=?$

LABORATORIO No. 12 NOMBRE ____________
SECCION 2.6 FECHA ____________

Para los siguientes problemas, determina si las series geométricas indicadas convergen o no. Si es convergente encontrar el valor a la cuál convergen.

1. $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{3}$
2. $a_1 = 42$ y $r = -\frac{4}{3}$
3. $a_1 = 18$ y $r = -\frac{5}{7}$
4. $a_1 = 100$ y 0.001

Para los siguientes problemas, escribe la decimal repetida como la razón de dos enteros y simplifica.

5. 0.848484...
6. 0.990990990...
7. 2.363636...
8. 1.6454545...

LABORATORIO No. 13 NOMBRE ____________
SECCION 2.7 FECHA ____________

Sucesiones y series como modelos matemáticos

1. Problemas de pantalones de mezclilla:
Considera que siempre que se lavan pantalones de mezclilla, pierden el 4% de color que tenían antes de ser lavados.

a) Explica por que el porcentaje que queda del color original de la mezclilla varía geométricamente con el número de lavadas. ¿Cuál es la razón común?

b) Qué tanto del color original quedará después de 10 lavadas?

c) Supón que compraste unos pantalones nuevos de mezclilla y decides lavarlos las veces necesarias de manera que quede sólo el 25% del color original. ¿Cuántas veces tienes que lavarlos?

2. Problema de colocación de pilotes.
Una máquina para clavar pilotes empieza a clavar un pilote en la tierra. En el primer impacto el pilote se introduce 100 cm. en la tierra. En el segundo impacto se introduce 96 cm. más.

a) Asumiendo que las distancias que se mueven forman una sucesión aritmética:
- ¿Qué tan profundo se introducirá en el décimo impacto?
- ¿Qué tan profundo se habrá introducido después del décimo impacto?

b) Si consideras que las distancias que el pilote se introduce en cada impacto forman una sucesión geométrica:
- ¿Qué tan profundo se introducirá en el décimo impacto?
- ¿Qué tan profundo se habrá introducido en la tierra después de 10 impactos?

LABORATORIO No. 14 NOMBRE ____________
SECCION 2.8 FECHA ____________

Simplifica las siguientes expresiones:

1. $3!\,5!$ 2. $\frac{8!}{5!}$

3. $\frac{8!3!}{6!}$ 4. $\frac{6!}{2!4!}$

5. $\frac{10!}{7!3!}$ 6. $\frac{(n+2)!}{n!}$

Escribe las siguientes expresiones como una razón de factoriales.

7. $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ 8. $35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32$

9. $100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$ 10. $\frac{43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{4!}$

Evalúa la suma dada

11. $\sum_{k=0}^{5} k!$ 12. $\sum_{k=1}^{5} \frac{(2k+1)!}{(k-1)!}$

LABORATORIO No. 15 NOMBRE ____________
SECCION 2.9 y 2.10 FECHA ____________

1. Desarrolla $(a+b)^7$ como una serie binomial.

2. Construye el Triángulo de Pascal hasta el binomio $(a+b)^{10}$

3. Escribe la fórmula Binomial

Desarrolla el binomio dado como una serie binomial

4. $(x-2)^6$ 5. $(3a+4)^5$

6. $(x^2-x^{-2})^{10}$ 7. $(1+i)^7$

Encuentra el término con la potencia especificada en el desarrollo del binomio dado.

8. $(x+y)^{11}$, $\underline{y^4}$ 9. $(x^3+y^2)^{29}$, $\underline{x^{72}}$

Encuentra el término especificado en el desarrollo del binomio dado.

10. $(a+b)^{51}$ <u>término 19</u> 11. $(3x^2-2y^3)^8$ <u>término 6</u>

LABORATORIO No. 16 NOMBRE ______
REPASO CAPITULO 2 FECHA ______

Para las siguientes sucesiones aritméticas encuentra el término que se indica.

1. El primer término de la sucesión cuyos cuarto y quinto términos son 5 y -3

2. El término 17 de 4, -1, -6, -11,...

Para las siguientes sucesiones geométricas encuentra el término que se indica

3. El octavo término de 54, 18, 6,...

4. El 43avo. término de la sucesión en la cual $a_1 = 100$, $r = 1.04$

Para los siguientes problemas encuentra la media que se te pide.

5. Intercala 3 medias aritméticas entre -1 y 2.

6. Intercala 3 medias geométricas entre 5 y 45.

Para los siguientes problemas encuentra S_n

7. De los primeros 6 términos de la sucesión aritmética 5, 1, -3, ...

8. De los primeros 10 términos de la sucesión geométrica 60, 6, 0.6, 0.06, ...

Evalúa la expresión escribiendo los términos y después súmalos.

9. $\sum_{k=1}^{6} 2(k-1)!$

10. Encuentra a_1 y n en la siguiente serie aritmética $S_n = 50$, $a_n = 6$, $d = -2$

11. Para el siguiente problema determina si la serie geométrica indicada converge o no. Si converge encontrar el valor a la cual converge.
$a_1 = 81$ y $a_5 = 1$

12. Problema de Ancestros.
Tus ancestros de la primera, segunda y tercer generación son los padres, abuelos y bisabuelos.
a) Escribe el número de ancestros que tienes (vivos o muertos) en la primera y tercera generación.
b) Este número de ancestros forman una sucesión goemétrica o aritmética. ¿Cuál es la razón común o la diferencia común?

c) ¿Cuántos ancestros tienes en la 20^{ava} generación?

d) ¿Cuál es el número total de ancestros que tienes en las primeras 20 generaciones.

13. Desarrolla el binomio $(2x - 1)^8$ como serie binomial

14. Dado el binomio $(x^2-3y^3)^{12}$ encuentra el término de enmedio.

LABORATORIO No. 17 NOMBRE ____________________
SECCION 3.1 FECHA ____________________

Resuelve los siguientes problemas.

1. En una urna que contiene una pelota negra, una roja y una blanca, se arroja al azar una de ellas.
¿Cuál es la probabilidad de que la pelota arrojada sea :
a) Negra ?
b) Roja ?
c) Blanca ?

2. En una urna que contiene una canica azul, dos verdes y tres amarillas, se arroja al azar una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad que la que se arroje sea:
a) Azul ?
b) Verde ?
c) Amarilla ?

3. Si se lanza un dado. ¿ Cuál es la probabilidad de que el número que salga sea:
a) Impar
b) Menor que seis ?
c) Mayor que seis ?
d) Mayor que cero ?
e) Menor que siete ?
f) Menor que uno ?

4. De una baraja ordinaria de 52 cartas se saca una de éstas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de sacar:
a) Un rey ?
b) Un diamante ?
c) Una carta roja ?

5. Si al tirar un dado:
a) ¿ Cuál es el espacio muestral ?
b) ¿ Cuál es la probabilidad de que la cara superior contenga un número impar ?
c) ¿ Cuál es la probabilidad de que contenga tres puntos ?
d) ¿ Cuál es la probabilidad de que la cara superior tenga menos de cinco puntos ?

6. Una moneda es lanzada tres veces. Determina la probabilidad de obtener:
a) Cara en la primera y última tirada, y cruz en la segunda
b) Al menos dos caras
c) Cuando mucho dos caras.

LABORATORIO No. 18 NOMBRE ____________________
SECCION 3.2 FECHA ____________________

Resuelve los siguientes problemas.

Existen cinco carreteras entre las ciudades A y B, y cuatro carreteras entre las ciudades B y C. Hallar el número de formas diferentes en que una persona puede viajar de A a C pasando por B.

Hallar el número de enteros diferentes de tres cifras que pueden formarse con los dígitos 2, 3, 5, 7, en los casos siguientes:
a) No se permite la repetición
b) Se permite la repetición

Un edificio tiene seis puertas. ¿ En cuántas formas diferentes puede una persona entrar al edificio saliendo por una puerta diferente de la que usó al entrar ?

Un club tiene 12 miembros y se va a elegir un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero. ¿ Cuántas candidaturas diferentes pueden formarse si cualquier miembro del club es elegible para cualquier cargo ?

¿ Cuántas señales pueden formarse con cinco diferentes tipos de banderas colocadas en una asta de arriba hacia abajo ? y ¿ Cuántas señales pueden formarse si se usan tan sólo cuatro banderas a un tiempo ?

Una biblioteca tiene 463 libros de Ciencia y 592 de Ficción de esos, 37 son de Ciencia Ficción. ¿ Cuantos libros hay de Ciencia o Ficción ?

LABORATORIO No. 19 NOMBRE ____________________
SECCION 3.3 FECHA ____________________

Resuelva los siguientes problemas.

1. ¿ De cuántas maneras diferentes se pueden escribir las letras de la palabra "TRIUNFO":
   a) Tomadas tres a la vez ?
   b) Tomadas cinco a la vez ?
   c) Tomadas todas a la vez ?

2. ¿ Cuántas diferentes quintas de basket-ball pueden formarse si hay 7 jugadores disponibles para jugar cualquier posición ?

3. Un programa consta de 9 canciones. ¿ De cuántas maneras pueden ordenarse las canciones en el programa ?

4. Encuentra cuántos números pares de tres dígitos cada uno pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 6, 7 si no se ha de repetir dígito alguno.

5. Una tabla de mortalidad muestra que de 949,171 personas de 21 años, 577,882 aún viven a la edad de 65 años. Calcular la probabilidad de que un hombre que actualmente tiene 21 años viva lo necesario para retirarse a los 65 años.

6. Considerando todas las palabras diferentes de 12 letras que se pueden formar con la palabra "CALIFICACION":
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que al seleccionar al azar una palabra de ellas, empiece con la letra "C"?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una palabra de ellas, termine con la letra "N" ?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar al azar una palabra de ellas empiece, con las siguientes tres letras "CAL" (en ese orden) ?

LABORATORIO No. 20 NOMBRE ____________________
SECCION 3.4 FECHA ____________________

Evalúa:

a) C(8,3) b) C(12,5) c) C(13,6)

¿ Cuántas maneras distintas hay de formar un equipo de tenis de 4 elementos de entre 17 jugadores ?

Doce personas se reúnen en un salón y cada una saluda a las demás con un apretón de manos. ¿ Cuántos apretones de manos hubo ?

Encuentra el número de maneras que se tiene para elegir 9 pelotas de entre 6 rojas, 5 blancas y 4 azules si cada elección consiste en 3 pelotas de cada color.

Encuentra cuántas sumas de dinero, cada una consistiendo en tres o más monedas, pueden formarse si se dispone de 6 tipos distintos de monedas.

¿ Cuántas sumas de dinero diferentes pueden formarse a partir de un conjunto de monedas en el que hay una de 1 centavo, una de 5 y una de 10 centavos, si se seleccionan dos monedas ?

Si las monedas del problema anterior están en una alcancía. ¿ Cuál es la probabilidad de tener una suma de 6 centavos cuando se eligen 2 monedas al azar?

¿ De cuántas maneras pueden elegirse dos cartas de una baraja de 52 naipes ?
a) Cuál es la probabilidad de que se elijan dos ases cuando dos cartas son seleccionadas al azar a partir de esa baraja ?

LABORATORIO No. 21 NOMBRE ____________________
SECCION 3.5 FECHA ____________________

1. A continuación se muestran los resultados obtenidos por 130 alumnos de segundo grado de una preparatoria en un examen final de matemáticas:

57	55	68	62	68	55	63	53	65	70
70	93	100	85	70	72	70	93	75	45
85	66	60	72	50	68	90	68	60	72
55	85	90	100	75	53	58	83	95	66
75	70	70	66	60	93	78	62	66	55
43	40	62	78	96	70	66	40	93	83
78	76	68	45	74	57	76	70	43	62
62	74	58	70	43	83	48	75	90	57
83	65	93	68	90	72	88	65	70	78
60	70	65	66	70	63	75	83	50	65
88	48	83	55	65	88	60	55	78	85
74	90	36	78	85	74	85	72	74	55
55	75	100	75	63	48	68	95	58	63

a) Determina la distribución de frecuencias agrupadas usando 13 intervalos de clase
b) Anota los límites verdaderos y puntos medios de cada intervalo.
c) Obtén las columnas de frecuencias acumuladas y de porcentajes acumulados de cada intervalo de la distribución (acumulando las frecuencias hacia arriba).
d) Dibuja el histograma de la distribución (utilizando los limites verdaderos)
e) Dibuja el polígono de frecuencias correspondiente.
f) Dibuja el polígono de porcentajes acumulados (ojiva) de la distribución.
g) Utilizando la curva anterior, encuentra la calificación correspondiente al 50% percentil.
h) Encuentra el rango percentílico correspondiente a una calificación de 70.
i) Calcula la media, la mediana y la moda.
j) Calcula la desviación estándar de la distribución.

2. En una distribución normal con una media de 75 y una desviación estándar de 8, encuentra:

a) Las calificaciones estándar equivalentes para las siguientes calificaciones:
i) 60 ii) 70 iii) 80 iv) 90

b) Los rangos percentílicos de cada una de las calificaciones anteriores.

ABORATORIO No. 22 NOMBRE ____________________
EPASO CAPITULO 3 FECHA ____________________

Una caja contiene tres canicas rojas y ocho verdes. ¿ Cuál es la probabilidad de que, al primer intento:

a) Salga una canica roja ?
b) Salga una canica verde ?

Un sombrero contiene cuatro tiras de papel de distintos colores: rojo, verde, negro y azul. ¿Cuál es la probabilidad de que en un solo intento, se saque la tira azul ?

En un cierto Estado del País las placas de automóviles constan de 5 lugares, los 2 primeros se llenan con cualesquiera de las 27 letras del alfabeto y los 3 últimos se llenan con cualesquiera de los 10 dígitos del 0 al 9 inclusive, con la excepción de que el cero no puede usarse en el espacio de las unidades. Calcular el número total de placas diferentes que pueden formarse si no se permite la repetición ni de letras ni de dígitos.

Una joyería tiene 544 brazaletes y 215 piezas con perlas. De los brazaletes 129 tienen perlas. ¿ Cuantas piezas son brazaletes o contienen perlas ?

A continuación se dan las calificaciones del alumno Javier Martínez., La media y la desviación estándar en cada una de las tres pruebas efectuadas a los 3,000 estudiantes de la escuela

Prueba	$\bar{x}$	S	Calif. de Javier
Comprensión	47	5	53
Ortografía	64	8	71
Aritmética	75	11	77

a) Convierte cada calificación de Martínez en calificaciones estándar
b) ¿En cuál prueba obtuvo una posición mejor? ¿En cuál peor?
c) ¿Cuántos estudiantes sobrepasaron la calificación que Martínez obtuvo en aritmética? ¿En ortografía?
d) ¿Qué suposición se debe hacer para contestar la pregunta anterior?

LABORATORIO No. 23 NOMBRE ______________________
SECCION 4.1 FECHA ______________________

A qué clase de ángulos pertenecen cada uno de los siguientes:

1. 72° ______________ 2. 143° ______________

3. 190° ______________ 4. 90° ______________

5. 360° ______________ 6. 180° ______________

Encuentra el complemento de cada uno de los siguientes ángulos.

7. 35° ______________ 8. 64° ______________

9. 12° ______________ 10. 81° ______________

Encuentra el suplemento de cada uno de los siguientes ángulos.

11. 124° ______________ 12. 172° ______________

13. 25° ______________ 14. 180° ______________

Encuentra el conjugado de cada uno de los siguientes ángulos.

15. 120° ______________ 16. 48° ______________

17. 235° ______________ 18. 199° ______________

BORATORIO No. 24 NOMBRE ______________________
CCION 4.2 FECHA ______________________

presa en radianes cada uno de los ángulos siguientes.

1. 38° ______________ 2. 76°47′ ______________

3. 165° ______________ 4. 92°13′12″ ______________

presa en grados, minutos y segundos cada uno de los ángulos siguientes:

5. $\frac{2}{5}$ rad. ______________ 6. $\frac{\pi}{7}$ rad. ______________

7. $\frac{4\pi}{3}$ rad. ______________ 8. 2.5 rad. ______________

suelve los siguientes problemas:

9. El minutero de un reloj mide 12 cm. ¿Qué distancia recorre la punta del minutero durante 20 minutos? (En 20 minutos la aguja describe un ángulo $\theta = 120°$)

10. El extremo de un péndulo de 40 cm. de longitud describe un arco de 5 cm. ¿Cuál es el ángulo de oscilación del péndulo?

11. La escala sobre un amperímetro es de 8 cm. de longitud. Si la escala es un arco de círculo que tiene un radio de 3.2 cm., ¿Qué ángulo en grados hará la aguja entre la lectura 0 y una lectura de toda la escala?

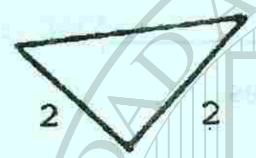
12. Encuentra la longitud de arco sobre un círculo de radio 5 cm. que subtiende un ángulo central de 38°.

LABORATORIO No. 25 NOMBRE ______________________
SECCION 4.3 FECHA ______________________

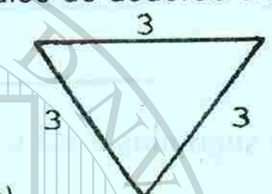
1. En un triángulo rectángulo si uno de los ángulos mide 48°35′ ¿Cuánto medirá el otro ángulo agudo?

2. Uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 27°30′. Encuentra la medida de los otros dos ángulos.

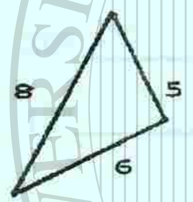
3. Clasifica cada uno de los siguientes triángulos de acuerdo a su longitud de sus lados.

a) 

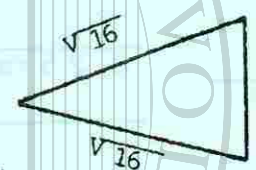
____

b) 

____

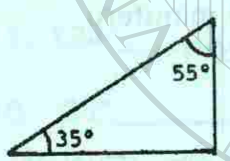
c) 

____

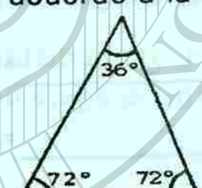
d) 

____

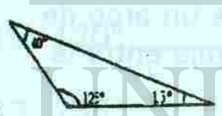
4. Clasifica cada uno de los triángulos de acuerdo a la medida de sus ángulos.

a) 

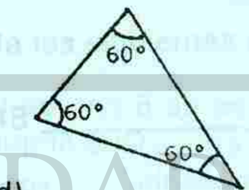
____

b) 

____

c) 

____

d) 

____

5. Dado el triángulo ABC, encuentra:

a) Dado a = 3, b = 8 Encuentra c = ?
b) Dado b = 10, c = 5 Encuentra a = ?
c) Dado a = 7, c = 4 Encuentra b = ?

LABORATORIO No. 26 NOMBRE ______________________
SECCION 4.4 FECHA ______________________

Utiliza las relaciones fundamentales para encontrar el valor exacto de la función trigonométrica indicada.

1. $\cos\theta = \frac{5}{6}$, Encuentra $\text{Sen}\,\theta$.

2. $\tan\beta = \frac{8}{11}$, Encuentra $\cot\beta$.

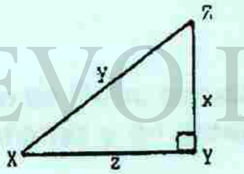
3. $\csc\alpha = \frac{9}{7}$, Encuentra $\text{Sen}\,\alpha$.

4. $\sec\theta = \sqrt{5}$, Encuentra las otras cinco.

Utiliza las relaciones fundamentales y una calculadora para encontrar las funciones trigonométricas indicadas.

5. $\text{Sen}\,\alpha = 0.5735$, Encuentra $\csc\alpha$.
6. $\tan\phi = 1.4825$, Encuentra $\cot\phi$.
7. $\cos\theta = 0.6560$, Encuentra $\sec\theta$.
8. $\cot\omega = 2.3558$, Encuentra $\tan\omega$.

Dado el triángulo



Encuentra el lado faltante y el valor de las funciones trigonométricas para el ángulo X.

9. x = 13
y = 21
z = ?

10. x = 8.5
z = 10.6
y = ?

LABORATORIO No. 27 NOMBRE ____________________

SECCION 4.5 FECHA ____________________

Encuentra el valor de cada una de las siguientes funciones:

1. Tan 28° 2. Sen 47°28′
3. Cot 23.7° 4. Csc 86°40′
5. Cos 60.3° 6. Sec 12°39′

Encuentra la medida del ángulo agudo en grados decimales y en grados y minutos.

7. $\text{Sen}\theta = 0.2116$ 8. $\text{Cos}\theta = 0.8825$
9. $\text{Cot}\theta = 1.2946$ 10. $\text{Sec}\theta = 7.5610$
11. $\text{Csc}\theta = 3.0715$ 12. $\text{Tan}\theta = 1.3359$

Utilizando los valores exactos de las funciones 30°, 45° y 60°, demuestra que el miembro de la izquierda es igual al miembro de la derecha.

13. $\text{Sen } 30° = \dfrac{1}{\text{Csc } 30°}$

14. $\text{Cot } 30° - \text{Cot } 60° = \text{Csc } 60°$

15. $\text{Tan } 30° + \text{Cot } 30° = 2 \text{ Csc } 60°$

16. $\text{Sen}^2 30° + \text{Cos}^2 30° = 1$

17. $\text{Sec}^2 45° - \text{Tan}^2 45° = 1$

18. $\text{Cos } 60° = 2 \text{ Cos}^2 30° - 1$

19. $\text{Cos } 60° = \text{Cos}^2 30° - \text{Sen}^2 30°$

20. $\text{Csc}^2 45° - \text{Cot}^2 45° = 1$

LABORATORIO No. 28 NOMBRE ____________________

REPASO CAPITULO 4 FECHA ____________________

Encuentra el complemento, suplemento y el conjugado de los siguientes ángulos:

1. 49°20′ ____________________

2. 77°13′ ____________________

Expresa en radianes cada uno de los siguientes ángulos.

3. 123°37′ ____________________

4. 215°24′12″ ____________________

Expresa en grados, minutos y segundos cada uno de los siguientes ángulos.

5. 7.4 rad. ____________________

6. $\frac{2}{3}\pi$ rad. ____________________

7. Un ángulo central determina un arco de 6 cm. en una circunferencia de 30 cm. de radio. Expresar el ángulo central θ en radianes y en grados.

Utiliza las relaciones fundamentales para encontrar el valor exacto de la función trigonométrica indicada.

8. $\text{Tan}\theta = \dfrac{7}{2}$ Encuentra las otras cinco.

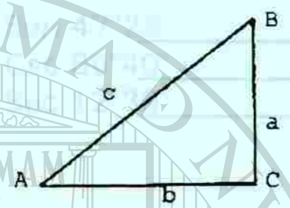
9. $\text{Csc}\alpha = 1.8871$ Encuentra $\text{Sen}\alpha =$ ____________________

10. $\text{Cos}\beta = 0.7808$ Encuentra $\text{Sec}\beta =$ ____________________

LABORATORIO No. 29 NOMBRE ______________________

SECCION 5.1 FECHA ______________________

Resuelve cada uno de los siguientes triángulos rectángulos ABC



Dados:

1. a = 21, b = 20
2. ∠A = 71° 4′ y c = 37
3. ∠B = 36° 20′ y a = 25
4. ∠B = 51° 50′ y c = 287.68
5. b = 254.88 y c = 461.44
6. ∠A = 54° 54′ y c = 11
7. ∠B = 10° 23′ y b = 22
8. b = 15 y c = 57.25
9. ∠A = 71° 58′ y a = 38.69
10. ∠B = 41° 41′ y c = 84.725

11. Problema de la chimenea.
Una chimenea mide 60m de altura. ¿Cuántos metros de cable se necesitan si se requiere sujetar el cable a la parte superior de la chimenea, a 8 m de distancia de la base, haciendo un ángulo de 80° con el suelo?

12. Problema del asta de bandera
Se sujetan unos cables de 13.8 m de largo a la parte superior de una asta de 12.7 m. ¿A qué distancia de la base del asta se sujetan los cables al suelo y qué ángulo hace con éste?

LABORATORIO No. 30 NOMBRE ______________________

SECCION 5.2 FECHA ______________________

Encuentra el valor de las funciones trigonométricas del ángulo Θ si su lado final pasa por:

1. (7,12) 2. (-8,-5)

Encuentra los valores de las demás funciones trigonométricas de α dado:

3. $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{5}$ 4. $\tan\alpha = -7$

Evalúa cada una de las siguientes expresiones:

5. sen 90° + 2 cos 30° - 4 cos 180° + sen 0°

6. csc 30° - 4 tan 45° + 5 sec 60° + 8 sen 30°

7. $\tan\frac{\pi}{4} + 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{\pi}{3} + 3\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$

Expresa cada una de las funciones del ángulo dado como la misma función de su ángulo de referencia y encuentra el valor de la función.

8. tan 320° 9. csc 187°

10. sen (-295°)

Dado el valor de la función, encuentra la medida del ángulo Θ si 0° ≤ Θ < 360°

11. senΘ = -0.8290 12. secΘ = -1.1792

13. tanΘ = -1.1918 14. cosΘ = 0.6820

LABORATORIO No. 31 NOMBRE ____________
SECCION 5.3 FECHA ____________

Expresa cada una de las demás funciones de θ en términos de "cos θ"

1) Sen θ

2) tan θ

3) cot θ

4) sec θ

5) csc θ

Simplifica cada una de las siguientes expresiones:

6) $\tan\theta \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$

7) $\operatorname{sen}\theta \sec\theta \cot\theta$

8) $\sec\theta - \sec\theta \operatorname{sen}^2\theta$

9) $1 - \dfrac{\cos^2\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}$

10) $\dfrac{1+\cos 2\theta}{\operatorname{sen} 2\theta}$

Verifica cada una de las siguientes identidades:

11) $\dfrac{\operatorname{sen}\theta(\sec\theta+\csc\theta)}{\operatorname{sen}\theta+\cos\theta} = \sec\theta$

12) $\dfrac{\sec\theta+\csc\theta}{\tan\theta+\cot\theta} - \cos\theta = \operatorname{sen}\theta$

13) $\cot\theta + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta} = \csc\theta$

14) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \operatorname{sen}(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

Dado $\cos\theta = 3/5$, utiliza las relaciones fundamentales e identidades para encontrar el valor de cada una de las siguientes funciones:

15) sen θ

16) cos θ

17) sen $(\theta - 30°)$

18) cos 2θ

19) sen $\theta/2$

20) tan $(\theta + 30°)$

21) sen $(\theta + 30°)$

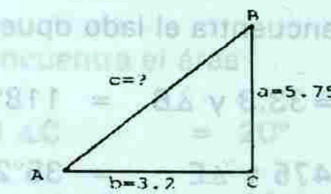
22) cos $(\theta - 30°)$

23) tan 2θ

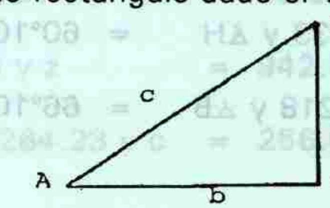
24) $\tan\dfrac{\theta}{2}$

LABORATORIO No. 32 NOMBRE ____________
Repaso del capítulo 5 FECHA ____________

1. Encuentra el lado faltante y las funciones trigonométricas del siguiente triángulo rectángulo para el $\angle A$



2. Resuelve el siguiente triángulo rectángulo dado el $\angle A = 28°45'$ y la hipotenusa igual a 32 cm.



3. Problema del Pozo
Un pozo de una mina penetra a la tierra con un ángulo de 5°20'. ¿Cuál debe ser la longitud del pozo para llegar hasta una veta de mineral que se encuentra a 26 m debajo de la superficie?

4. Encuentra el valor de las funciones trigonométricas del ángulo θ si un lado final pasa por (-12,7)

5. Expresa la tan 108° como la misma función de su ángulo de referencia y encuentra el valor de la función.

6. Dado el valor de Sen $\theta = 0.8572$ encuentra la medida del ángulo θ, si $0° \leq \theta < 360°$

7. Simplifica la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\sec\theta+\tan\theta} + \tan\theta$$

8. Verifica la siguiente identidad:

$$\tan\theta \operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta$$

9. Dado $\tan\theta = \frac{3}{4}$, utiliza las relaciones fundamentales e identidades para encontrar el valor de cada una de las siguientes funciones:

a) cos $(\theta + 30°)$

b) tan $(\theta - 30°)$

c) sen 2θ

d) $\cos\dfrac{\theta}{2}$

LABORATORIO No. 33 NOMBRE ______________________
SECCION 6.1 FECHA ______________________

Para los siguientes problemas encuentra el lado opuesto al ángulo dado.

1. En el $\triangle ABC$, $b = 50.4$, $c = 33.3$ y $\measuredangle B = 118°30'$
2. En el $\triangle DEF$, $d = 320$, $f = 475$ y $\measuredangle E = 35°20'$
3. En el $\triangle PQR$, $q = 120$, $r = 270$ y $\measuredangle P = 118°40'$
4. En el $\triangle HJK$, $j = 139$, $k = 133$ y $\measuredangle H = 60°10'$
5. En el $\triangle ABC$, $a = 339$, $c = 218$ y $\measuredangle B = 66°10'$

Para los siguientes problemas encuentra el ángulo que se indica

6. En el $\triangle ABC$, $a = 24.5$, $b = 18.6$ y $c = 26.4$ Encuentra $\measuredangle B$
7. En el $\triangle RST$, $r = 6.34$, $s = 7.30$ y $t = 9.98$ Encuentra $\measuredangle T$
8. En el $\triangle PQR$, $p = 25.2$, $q = 37.8$ y $r = 43.4$ Encuentra $\measuredangle P$
9. En el $\triangle NOD$, $n = 1475$, $o = 2053$ y $d = 1428$ Encuentra $\measuredangle O$
10. En el $\triangle SQR$, $s = 1504$, $q = 2465$ y $r = 1953$ Encuentra $\measuredangle S$

LABORATORIO No. 34 NOMBRE ______________________
SECCION 6.2 y 6.3 FECHA ______________________

Dados los siguientes triángulos encuentra el área

1. En $\triangle ABC$ si $a = 8$, $b = 14$ y el $\measuredangle C = 20°$
2. En $\triangle DEF$ si $d = 12.9$, $f = 24.3$ y el $\measuredangle E = 18°20'$
3. En $\triangle OPQ$ si $p = 17.6$, $q = 38.24$ y el $\measuredangle O = 45°38'$
4. En $\triangle XYZ$ si $x = 600$, $y = 550$ y $z = 942.5$
5. En $\triangle ABC$ si $a = 123.79$, $b = 264.23$ y $c = 256.04$

Resuelve los siguientes triángulos utilizando la ley de los senos y la de los cosenos.

6. Dado el $\measuredangle B = 72°$, $\measuredangle A = 62°$ y $b = 63.1$
7. Dado el $\measuredangle A = 12.7°$, $a = 1020$ y $c = 940$
8. Dado el $\measuredangle P = 48°$, $p = 37$ y $q = 42$
9. Dado el $\measuredangle B = 45°$, $a = 7$ y $c = 4$
10. Dado el lado $m = 62$, $n = 45$ y $o = 51$

LABORATORIO No. 35 NOMBRE ____________________

SECCION 6.4 FECHA ____________________

Para los siguientes problemas encuentra la longitud del lado indicado

1. En el $\triangle ABC$ $\angle A = 13°$, $a = 12$, $b = 15$. Encuentra c.

2. En el $\triangle XYZ$ $\angle Y = 34°$, $x = 4$, $y = 5$. Encuentra z.

3. En el $\triangle ABC$ $\angle A = 13°$, $a = 12$, $b = 5$. Encuentra c.

4. En el $\triangle ABC$ $\angle C = 27°18'$, $b = 74.1$, $c = 64.2$. Encuentra a.

5. En el $\triangle ABC$ $\angle B = 65°38'$, $a = 0.2789$, $b = 0.2271$. Encuentra c.

En los siguientes problemas determina si hay uno o dos triángulos y después encuentra el ángulo que se pide.

6. En $\triangle ABC$ $\angle C = 37°09'$, $a = 4.25$, $c = 4.53$ Encuentra $\angle A$

7. En $\triangle XYZ$ $\angle X = 18°$, $x = 24$, $z = 31$ Encuentra $\angle Z$

8. En $\triangle ABC$ $\angle B = 65°38'$, $a = 0.28$, $b = 0.23$ Encuentra $\angle A$

9. En $\triangle MNQ$ $\angle M = 110°$, $m = 1000$, $q = 900$ Encuentra $\angle Q$

10. En $\triangle ABC$ $\angle A = 30°$, $a = 6$, $b = 8$ Encuentra $\angle B$

LABORATORIO No. 36 NOMBRE ____________________

SECCION 6.5 FECHA ____________________

Para los siguientes problemas encuentra los datos faltantes

1. En el $\triangle ABC$ dado $a = 100$, $b = 210$ y $\angle C = 113°20'$

2. En el $\triangle ABC$ dado $a = 2000$, $b = 1700$ y $\angle C = 142°$

3. En el $\triangle ABC$ dado $a = 8$, $b = 9$ y $c = 7$

4. En el $\triangle ABC$ dado $a = 3$, $b = 6$ y $c = 4$

5. En el $\triangle ABC$ dado $a = 3$, $b = 9$ y $c = 4$

6. En el $\triangle ABC$ dado $a = 6$, $\angle A = 56°20'$ y $\angle B = 64°30'$

7. En el $\triangle ABC$ dado $a = 10$, $\angle A = 139°10'$ y $\angle B = 38°40'$

8. En el $\triangle ABC$ dado $c = 400$, $\angle A = 143°10'$ y $\angle B = 8°20'$

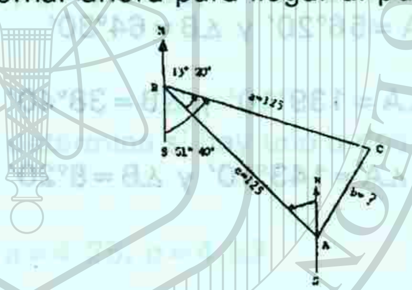
LABORATORIO No. 37 NOMBRE ______________________
SECCION 6.6 FECHA ______________________

Resuelve los siguientes problemas

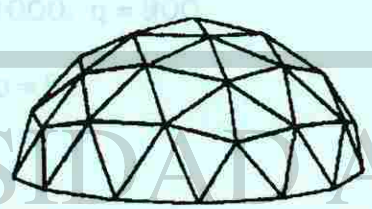
1. Un lado de un paralelogramo es 56, y los ángulos comprendidos entre este lado y las diagonales son de 31°14′ y 45°37′. Encuentra todos los lados del paralelogramo.

2. El área de un triángulo es de 1356, y dos de sus lados 53 y 69. Encuentra el ángulo comprendido entre ellos.

3. Un piloto sale de un punto A y vuela 125 km en dirección N38°20′W. Trata, entonces, de regresar al punto de partida, pero, por un error, vuela 125 km en dirección S 51°40′E. Calcular a qué distancia se encuentra de A y cuál ha de ser la dirección que ha de tomar ahora para llegar al punto A.

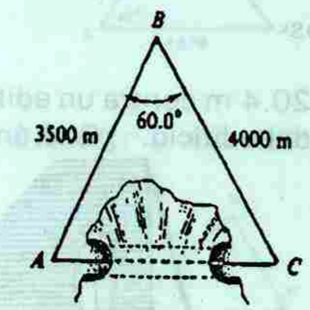


4. Si los lados de las secciones triangulares de un domo geodésico (como el Río 70) son 1.65, 1.65 y 1.92 m. ¿Cuáles son los ángulos interiores de las secciones triangulares?



Domo Geodésico

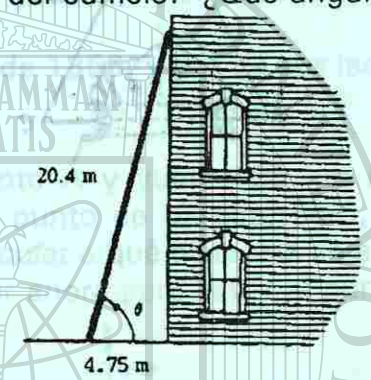
5. Al planear un túnel bajo la Loma Larga, el ingeniero emplea el triángulo ABC, como se muestra en la figura con el fin de determinar el curso del túnel. Si AB = 3500m, BC = 4000m y el ∡B = 60° ¿cuáles son las medidas de los ángulos ∡A y ∡C y la longitud de A C?



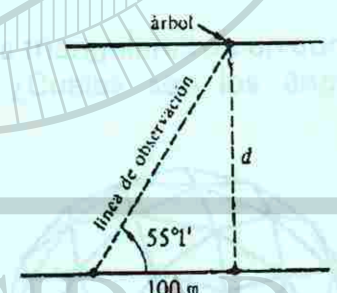
LABORATORIO No. 38 NOMBRE ____________________
REPASO CAPITULO 6 FECHA ____________________

Resuelve los siguientes triángulos

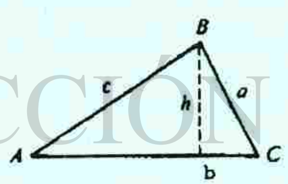
1. Se coloca una escalera de 20.4 m contra un edificio de modo que su extremo inferior está a 4.75 m de la base del edificio. ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso?



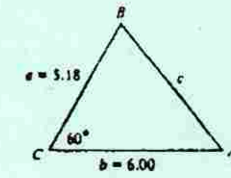
2. Un ingeniero desea saber la anchura de un río. Camina 100m corriente abajo desde un punto situado directamente frente a un árbol sobre la orilla opuesta. Si el ángulo entre la orilla del río y la línea de observación hacia el árbol en este punto es de 55°01′ ¿cuál es la anchura del río?



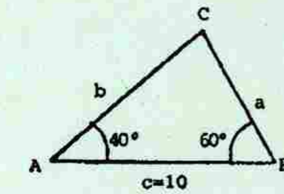
3. Encuentra el área de un triángulo con a = 3.8 cm, b = 5.1 cm y ∡C = 48°



4. Resuelve el triángulo con lado a = 5.18, b = 6 y ∡C = 60°



5. En un triángulo c = 10cm, ∡A = 40° y ∡B = 60° Encuentra a, b y ∡C



6. En un puente de acero, una parte de la armazón es de la forma de un triángulo isósceles como se muestra en la figura ¿Con qué ángulos se juntan los lados de la armazón?