pte 1.

PRESENTACIÓN

Este libro se preparó para impartir un curso que proporcione al alumno los fundamentos de la Geometría Plana, Trigonometría y Geometría Analítica, además de permitirle relacionarlos con su experiencia diaria, así como con el estudio posterior de las Matemáticas. Con las demostraciones el alumno comprenderá el significado del método deductivo y adquirirá la habilidad para aplicarlo a situaciones reales. Asimismo adquirirá experiencia en usar la inducción, analogía y los métodos de razonamiento indirecto.

Los ejercicios de este libro están diseñados de tal manera que, en su solución, el alumno aplique los conocimientos algebraicos adquiridos en el curso anterior para que exista una continuidad en su desarrollo de habilidades matemáticas. El estudiante puede aprender sin mucha dificultad gran parte del material sin la ayuda del profesor pues los contenidos de este texto están expuestos en forma detallada.

A través del libro se le presentan oportunidades para pensar en forma original y creativa. La resolución de ejercicios capacitan al estudiante para realizar demostraciones de teoremas y lo estimula ha que las elabore por sí mismo.

Sin duda este curso ayudará al estudiante en su formación educativa al interrelacionarse estos conocimientos con la Física, Química, Artes y Humanidades, etc.

COMITÉ TÉCNICO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

ING. ROBERTO SÁNCHEZ AYALA. ING.JUAN ANTONIO CUELLAR CARVAJAL

LIC. BLANCA MA. BORGHES ALONSO

MC. ALEJANDRO NAVA SEGOVIA LIC. SALVADOR RODRÍGUEZ VÉRTIZ

Diciembre de 1997

COLABORADORES

ACADÉMICOS

ING. JOSÉ LUIS GUERRA TORRES

ING. ANTONIO MONTEMAYOR SOTO

ING. FERNANDO JAVIER GÓMEZ TRIANA

LIC. MIGUEL A. TORRECILLAS GONZÁLEZ

PERSONAL DE APOYO PARA LA EDICION DE ESTE TEXTO

SRITA. TERESA DE JESUS CASTAÑEDA VALDEZ

ING. MARÍA AMALIA CORTEZ ESPARZA

BIOLOGO CARLOS H. BRICEÑO DE LA FUENTE

AGRADECIMIENTO

A

El Dr. Raimundo Reguera Vilar, de la Universidad de la Habana y Ministerio de Educación Superior y a la Dra. Rita Roldán Inguanzo, de la Facultad de Matemáticas y Computación de la Universidad de la Habana, por su participación en la asesoría y revisión de los contenidos de este Texto. Ya que esta ha sido muy valiosa.

COMITÉ TÉCNICO DE MATEMÁTICAS

INDICE

CAPITULO 1

GEOMETRÍA PLANA

(PRIMERA PARTE)

CAPITUPO 2

GEOMETRÍA PLANA

(SEGUNDA PARTE)

CAPITULO 3

TRIGONOMETRÍA

(PRIMERA PARTE)

CAPITULO 4

TRIGONOMETRÍA

(SEGUNDA PARTE)

CAPITULO 5

GEOMETRÍA ANALÍTICA

(PRIMERA PARTE)

1.1. Introducción

Objetivo

Comprender los conceptos intuitivos de punto, recta, plano y conocer los axiomas básicos de la Geometría Euclidiana.

Si preguntas a una persona cualquiera qué cosa es un cuerpo, seguramente recibirás respuestas como: un objeto, algo que se puede ver y tocar, por ejemplo un jarrón o una pelota, etc. Como puedes observar, en general se relaciona a la palabra cuerpo con objetos materiales. Ello no es totalmente correcto, pues sólo los cuerpos físicos son objetos materiales. Es decir:

- Un **cuerpo físico** es toda porción del espacio que está ocupada por materia.

Sin embargo, existe otro tipo de cuerpos que constituyen el objeto de estudio de la Geometría Plana, los cuerpos geométricos, que no son objetos materiales en general. Es decir:

- Un **cuerpo geométrico** es toda porción limitada del espacio (aunque no esté ocupada por materia).

La Geometría es la parte de las Matemáticas que estudia las propiedades de los cuerpos geométricos en general. Dichas propiedades pueden ser referidas tanto a las medidas de los cuerpos (longitud, área, volumen, etc.) como a las relaciones entre sus diferentes partes.

Los cuerpos geométricos elementales son el punto, la recta y el plano. Resulta imposible obtener una definición rigurosa de dichos conceptos, pues cualquier intento de definición de uno de ellos incluye siempre a alguno de los otros, sin poderse establecer un orden jerárquico que dé sentido globalmente a todas las definiciones. Así, podemos encontrar "definiciones" como las siguientes:

- Un *punto* es la intersección de dos rectas no paralelas.
- Una *recta* es la intersección de dos planos no paralelos.
- Un *plano* es el conjunto de todos los puntos determinados por tres puntos no colineales prefijados.

Sin embargo, cualquier persona es capaz de imaginar más o menos intuitivamente qué es un punto, una recta o un plano, viéndolos por ejemplo coma la esquina de una mesa, el borde de la mesa, o la superficie de la mesa. Luego, para desarrollar el concepto geométrico sólo resta tener en consideración los siguientes factores, que son de gran importancia en el trabajo geométrico y se obvian a menudo:

- el punto no tiene longitud,
- la recta contiene infinitos puntos, no tiene principio ni fin, su longitud es infinita y no tiene área,
- el plano contiene infinitos puntos y rectas, no tiene bordes, su área es infinita y no tiene volumen.

En el trabajo geométrico se dibuja la recta y el plano como objetos finitos por razones obvias de espacio, pero nunca se deben olvidar los factores anteriormente mencionados.

Otros conceptos elementales de la Geometría son los siguientes:

- Si en una recta se fija un punto O, entonces el conjunto formado por todos los puntos de la recta que se encuentran a un mismo lado del punto O, incluyendo el punto O, se llama **semirrecta** o **rayo**, y el punto O se llama **origen de la semirrecta**.
- Si en plano se fija una recta r, entonces el conjunto formado por todos los puntos del plano que se encuentran a un mismo lado de la recta, incluyendo la recta r, se llama **semiplano**.
- Una **superficie** es el conjunto de todos los puntos que limitan un cuerpo geométrico. Todo cuerpo geométrico plano es una superficie (conocida también como **figura plana**).

Además,

- Se dice que tres puntos son **colineales** si se encuentran todos sobre la misma recta, y **coplanales** si están en el mismo plano.
- Dos rectas son **paralelas** si se encuentran en el mismo plano y no tienen ningún punto en común.
- Dos planos son **paralelos** si no tienen ningún punto en común

Conociendo entonces estos conceptos primarios, la Geometría se desarrolla a partir de una serie de axiomas o postulados, los cuales son proposiciones que se consideran válidas gracias a la observación y la experiencia, y que no pueden ser demostradas con rigor matemático partiendo de conocimientos previos.

Algunos axiomas de la Geometría Euclidiana son los siguientes:

- Por un punto pasan infinitas rectas.
- Dos rectas se cortan a lo sumo en un punto.
- Dos puntos distintos determinan una recta.
- Tres puntos no colineales determinan un plano.
- Por un punto exterior a una recta dada se puede trazar una única recta que sea paralela a la anterior.

Este último axioma se conoce con el nombre de postulado de las paralelas y fue objeto de discusión en la Geometría durante muchos años. Se trataba de determinar si él constituía un axioma o no, es decir, si podía ser demostrado con la ayuda de los axiomas ya conocidos o no. Luego de mucho tiempo de estudio se logró determinar que efectivamente el axioma de las paralelas sí podía ser considerado como tal, demostrándose además que su sustitución por otro podía conducir al desarrollo de otras Geometrías llamadas no euclidianas, como son los casos de la Geometría Elíptica y la Geometría Hiperbólica, donde en el lugar de el postulado de las paralelas se considera que:

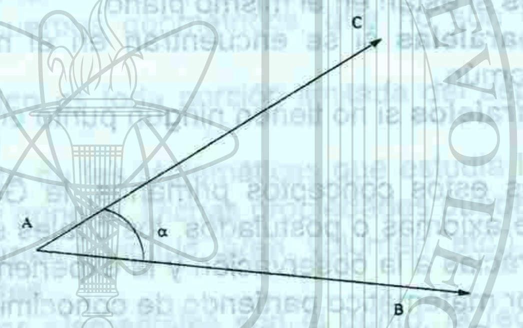
- Por un punto exterior a una recta dada se pueden trazar infinitas rectas que sean paralelas a la anterior, o
- Por un punto exterior a una recta dada no se puede trazar ninguna recta que sea paralela a la anterior.

1.2. Ángulos

Objetivos

Dominar el concepto de ángulo (y su notación) y de grados y radianes como unidades de medición de ángulos
Transformar medidas de ángulos en grados a radianes y viceversa, y aplicarlo a la solución de problemas prácticos de medición de ángulos.

- Si dos semirrectas o rayos tienen el mismo origen, entonces el conjunto unión de ambas es lo que se llama un **ángulo**. Las dos semirrectas se llamarán **lados del ángulo** y el origen común de las semirrectas se llamará el **vértice** del mismo.



En la figura precedente las semirrectas son: AB y AC con origen común en A.

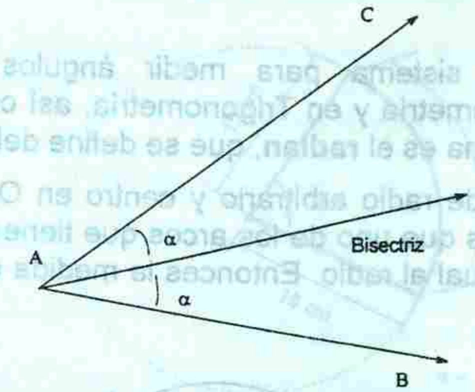
Para designar el ángulo que forman AB y AC se usa una de las dos notaciones siguientes: $\angle$ BAC o $\angle$ CAB situando la letra del vértice en el medio.

A veces, con la finalidad de abreviar, se designa el ángulo con la letra del vértice; en el caso de nuestra figura, así $\angle$ A. Desde luego esto último se hace si no hay más de un ángulo con el mismo vértice.

Si revisas otros libros encontrarás otras definiciones de ángulo que se refieren en general a regiones planas determinadas por dos semirrectas de origen común o por dos rectas que se cortan en un punto. Sin embargo, en casi todas ellas surge alguna ambigüedad al tratar de determinar la región en cuestión.

Esto conduce a otra forma de denotar los ángulos, haciéndolo a través de letras del alfabeto griego que marcan en la gráfica la región determinada por el ángulo como se observa en la figura anterior, así se denota $\angle$ BAC = $\angle$ α.

- Así mismo, se llama **bisectriz** del ángulo $\angle$ BAC a la semirrecta que tiene su origen en el vértice del ángulo y lo divide en dos ángulos de igual magnitud.



En su obra "La isla misteriosa" Julio Verne describe como el ingeniero Ciro Smith calcula aproximadamente la altitud y longitud geográficas de la isla Lincoln con herramientas muy rústicas, pero con la ayuda indiscutible del cálculo geométrico. Para determinar la latitud mide un ángulo determinado y expresa el resultado en grados. Para ello construye un instrumento utilizando un círculo, cuya circunferencia divide en 360 partes iguales. Así logra expresar la medida del ángulo buscado en grados sexagesimales.

Existen diferentes sistemas de medición de ángulos. Los más utilizados y conocidos son el sistema sexagesimal y el circular, los cuales se describen a continuación:

Sistema Sexagesimal

Consideremos una circunferencia con centro en O y de radio arbitrario. Supongámosla dividida en 360 partes (es decir arcos) todos iguales, mediante puntos situados sobre la circunferencia.

Sean A y B dos puntos de división consecutivos. Si los unimos con el centro O se formará el ángulo $\angle$ AOB, que mide, por definición, un grado sexagesimal, y se denota: 1° (se lee: "un grado").

Consecuencia inmediata de lo anterior es que en una circunferencia completa hay 360 grados.

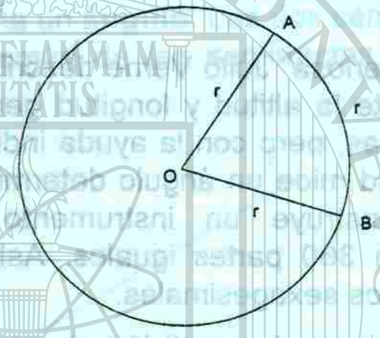
El nombre sexagesimal se debe a que cada grado se divide en 60 partes iguales que se llaman minutos, por tanto un minuto es 1/60 de grado, es decir, la sexagésima parte de un grado. Un ángulo de un minuto se designa así: 1'. A su vez, el minuto se divide en 60 partes que se llaman segundos. Un ángulo de un segundo se denota así: 1". De modo que si escribimos que un ángulo mide: 20° 15 ' 34", leemos: veinte grados, quince minutos y treinta y cuatro segundos.

El transportador es entonces una herramienta muy útil para obreros, técnicos y profesionistas, pues no sólo permite medir ángulos en grados sexagesimales, sino que también ayuda a dibujar cualquier ángulo conociendo su medida.

Sistema Circular

Veremos ahora otro sistema para medir ángulos que se emplea muy frecuentemente en Geometría y en Trigonometría, así como en Física. La unidad adoptada en este sistema es el **radian**, que se define del modo siguiente:

En una circunferencia de radio arbitrario y centro en O, sean A y B dos puntos situados sobre ella tales que uno de los arcos que tienen sus extremos en A y en B tenga una longitud igual al radio. Entonces la medida del ángulo ∠ AOB es, por definición, un radian.



El hecho de que el arco AB tenga longitud igual al radio lo indicamos así: $\overline{AB} = r$.

Entonces:

∠ AOB = 1 radian.

Como es lógico para poder expresar un ángulo, dado en el sistema sexagesimal en el otro sistema, o sea, en radianes, debemos tomar un ángulo de un radian y expresarlo en el sistema sexagesimal (o al revés). Para lograrlo recordemos que la longitud de la circunferencia de radio ***r*** es 2π ***r***, donde π es la letra griega pi que se usa para designar una constante cuyo valor aproximado es de 3.1416.

Si dividimos 2π ***r*** por ***r*** nos dará el número de radianes que hay en un ángulo de una vuelta completa. Es decir que 2π radianes equivale a 360°, ó

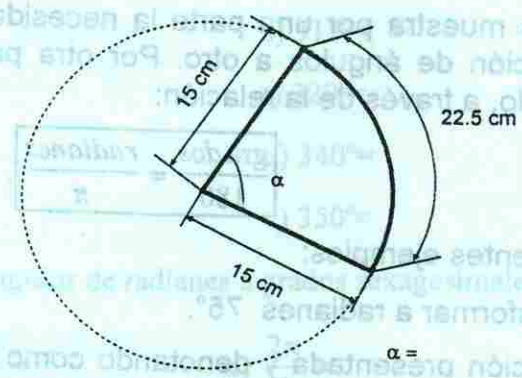
$2\pi = 360°$.

Luego,

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ grados.}$$

Imagina la siguiente situación:

Un ingeniero eléctrico ha diseñado una pieza metálica para un equipo de transporte eléctrico. El siguiente dibujo muestra el diseño de la vista frontal de la pieza realizado por el ingeniero:



El operario que debe elaborar la pieza dispone para ello de una pieza metálica redonda de 30 cm de diámetro, de manera que sólo necesita conocer la medida del ángulo α formado por los bordes rectos de la pieza. Pero, al observar el dibujo descubre que el ingeniero ha olvidado señalar ese dato y ya no tiene modo de localizarlo para obtener la información.

Entonces vuelve a observar detenidamente el dibujo y nota que el ángulo α corresponde a un arco de longitud l=22.5 cm en una circunferencia de radio r=15 cm. Pero el operario recuerda que un radian es la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia de radio r, correspondiente a un arco de longitud igual al radio, es decir, de longitud r. Así obtiene rápidamente que

$$\alpha = \frac{l}{r} \text{ radianes, es decir}$$

$$\alpha = \frac{22.5}{15} = 1.5 \text{ radianes.}$$

Pero, aquí no terminan sus dificultades, pues ahora descubre con sorpresa que sólo dispone de un transportador para dibujar el ángulo sobre la pieza redonda, por lo que necesita conocer la medida del ángulo α en grados sexagesimales. De nuevo esta vez, sus conocimientos de Matemáticas Elementales lo ayudan a solucionar el problema, y piensa así:

Si conozco que 180° equivalen a π radianes, entonces, llamándole x a la medida del ángulo α en grados sexagesimales, puedo plantear la relación: "1.5 radianes es a π radianes como x grados es a 180°". Luego, tengo que

$$\frac{1.5}{\pi} = \frac{x}{180}, \text{ es decir}$$

$$x = (180)\frac{1.5}{\pi} = \frac{270}{\pi} = 85.9.$$

Entonces el ángulo α mide 85.9°.

De esa manera pudo el operario elaborar la pieza.

Este ejemplo nos muestra por una parte la necesidad de saber convertir de un sistema de medición de ángulos a otro. Por otra parte nos indica el camino a seguir para hacerlo, a través de la relación:

$$\boxed{\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}}.$$

Veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Transformar a radianes 75°.

Aplicando la relación presentada y denotando como x al valor buscado, se tiene que

$$\frac{75}{180} = \frac{x}{\pi}, \text{ es decir } x = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}.$$

De manera que 75° es igual a $\frac{5\pi}{12}$ radianes.

Es muy frecuente dar la medida de un ángulo en radianes en función de π. Pero podemos sustituir esta constante por su valor aproximado: 3.1416. En este caso obtendríamos que 75° es aproximadamente igual a 1.309 radianes.

Ejemplo 2. Convertir al sistema sexagesimal $\frac{\pi}{4}$.

En esta caso se tiene

$$\frac{x}{180} = \frac{\pi/4}{\pi}, \text{ es decir } x = \frac{180\pi}{4\pi} = 45.$$

Luego $\frac{\pi}{4}$ radianes equivale a 45°.

Ejercicio 1.2

1) Convierte en radianes los siguientes ángulos sexagesimales.

a) 15°=

b) 25°=

c) 30°=

d) 40°=

e) 100°=

f) 45°=

l) 200°=

m) 220°=

n) 225°=

o) 240°=

p) 270°=

q) 280°=

g) 90°=

h) 120°=

i) 135°=

j) 150°=

k) 180°=

r) 300°=

s) 315°=

t) 320°=

u) 340°=

v) 350°=

2) Convierte los siguientes ángulos de radianes a grados sexagesimales.

a) $\frac{\pi}{12}$ =

b) $\frac{3\pi}{12}$ =

c) $\frac{\pi}{2}$ =

d) $\frac{\pi}{3}$ =

e) $\frac{\pi}{4}$ =

f) $\frac{11\pi}{18}$ =

g) $\frac{7\pi}{9}$ =

h) $\frac{5\pi}{9}$ =

i) $\frac{8\pi}{3}$ =

j) $\frac{10\pi}{9}$ =

k) $\frac{2\pi}{9}$ =

l) $\frac{4\pi}{9}$ =

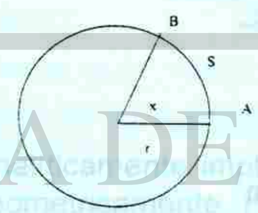
m) $\frac{5\pi}{9}$ =

n) $\frac{\pi}{9}$ =

o) $\frac{5\pi}{9}$ =

3) En cada una de las siguientes figuras, donde S representa la longitud del arco, encuentra la medida del ángulo x en radianes y grados sexagesimales.

a)



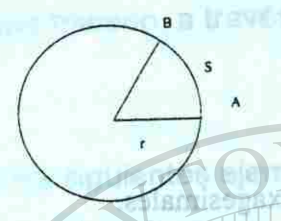
r= 20 cm

S= 20 cm (longitud del arco) $\widehat{AB}$

<x= ___________.

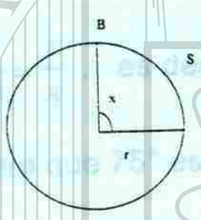
b)

r= 35.81 cm
S= 50 cm
<x= ____________.



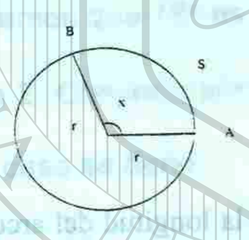
c)

r= 20 cm
S= 30 cm
<x= ____________.



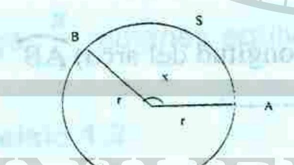
d)

r= 25 cm
S= 60 cm
<x= ____________.



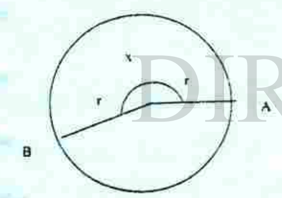
e)

r= 15 cm
S= 40 cm
<x= ____________.



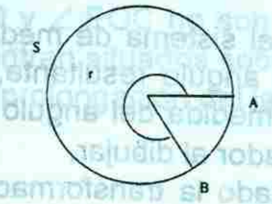
f)

S= 120 cm
r= 30 cm
<x= ____________.



g)

S= 75 cm
r= 15 cm
<x= ____________.



1.3. Clasificación de ángulos

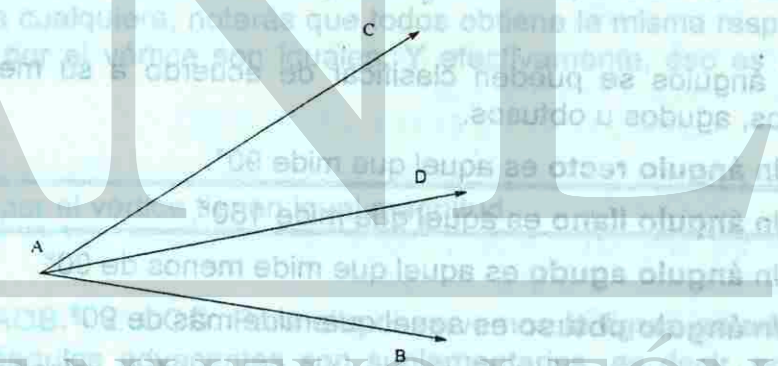
Objetivo

Clasificar los ángulos de acuerdo a su medida

Los ángulos pueden ser sumados y restados tanto analítica como geométricamente.

Sumar ángulos geométricamente implica determinar la apertura del ángulo que se forma al colocar (dibujar) un ángulo a continuación del otro, de modo que coincidan sus vértices y una de las semirrectas que los generan. Así, en la figura que se presenta a continuación se tiene:

$\angle BAD + \angle DAC = \angle BAC$.

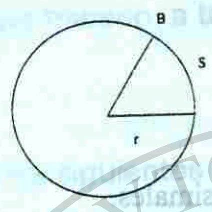


Sumar analíticamente implica determinar la medida del ángulo que se obtuvo al sumar geométricamente. Por ejemplo, si $\angle BAD = 15°$ y $\angle DAC = 20°$, entonces se tiene que $\angle BAD + \angle DAC = 35°$.

Para ello se debe tener en cuenta que tienen que coincidir los sistemas de medición para los ángulos a ser sumados. En caso contrario se debe unificar el sistema de medición de acuerdo a la conveniencia según la tarea propuesta.

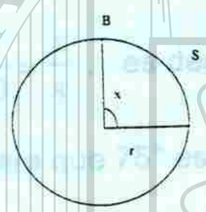
b)

r= 35.81 cm
S= 50 cm
<x= ________.



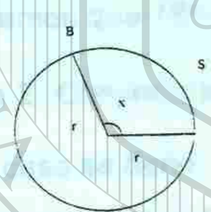
c)

r= 20 cm
S= 30 cm
<x= ________.



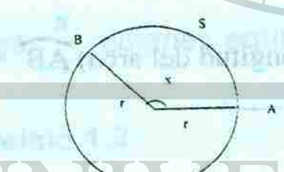
d)

r= 25 cm
S= 60 cm
<x= ________.



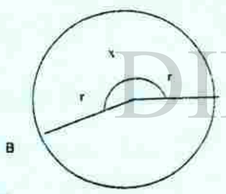
e)

r= 15 cm
S= 40 cm
<x= ________.



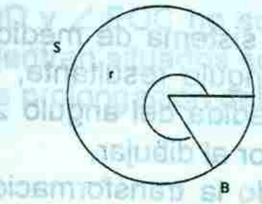
f)

S= 120 cm
r= 30 cm
<x= ________.



g)

S= 75 cm
r= 15 cm
<x= ________.



1.3. Clasificación de ángulos

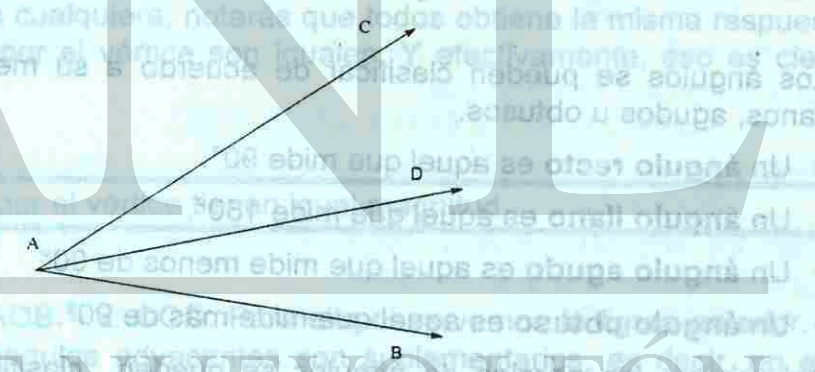
Objetivo

Clasificar los ángulos de acuerdo a su medida

Los ángulos pueden ser sumados y restados tanto analítica como geométricamente.

Sumar ángulos geométricamente implica determinar la apertura del ángulo que se forma al colocar (dibujar) un ángulo a continuación del otro, de modo que coincidan sus vértices y una de las semirrectas que los generan. Así, en la figura que se presenta a continuación se tiene:

$\angle$ BAD + $\angle$ DAC = $\angle$ BAC .



Sumar analíticamente implica determinar la medida del ángulo que se obtuvo al sumar geométricamente. Por ejemplo, si $\angle$ BAD = 15° y $\angle$ DAC = 20°, entonces se tiene que $\angle$ BAD + $\angle$ DAC = 35°.

Para ello se debe tener en cuenta que tienen que coincidir los sistemas de medición para los ángulos a ser sumados. En caso contrario se debe unificar el sistema de medición de acuerdo a la conveniencia según la tarea propuesta.

Ejemplo 1. Determine la suma de los ángulos $\angle$ PQR y $\angle$ RQS, y dibuje el ángulo resultante, si se conoce que $\angle PQR = \frac{\pi}{4}$ y $\angle RQS = 45°$.

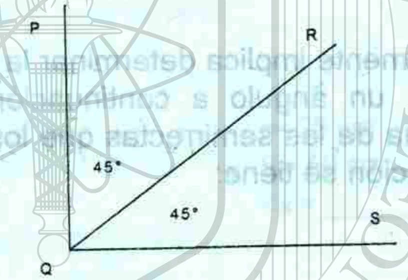
Para resolver este ejercicio resulta necesario unificar el sistema de medición de ángulos. Teniendo en cuenta que se debe dibujar el ángulo resultante, resulta entonces conveniente realizar la transformación de la medida del ángulo $\angle$ PQR a grados sexagesimales para poder utilizar el transportador al dibujar.

En el ejemplo 2 del epígrafe anterior ya hemos realizado la transformación. Así sabemos que

$$\frac{\pi}{4} \text{ radianes} = 45°.$$

Entonces se tiene:

$$\angle PQS = \angle PQR + \angle RQS = 45° + 45° = 90°. \text{ (ver figura)}$$



Los ángulos se pueden clasificar de acuerdo a su medida en ángulos rectos, llanos, agudos u obtusos.

- Un **ángulo recto** es aquel que mide 90°.
- Un **ángulo llano** es aquel que mide 180°.
- Un **ángulo agudo** es aquel que mide menos de 90°.
- Un **ángulo obtuso** es aquel que mide más de 90°.

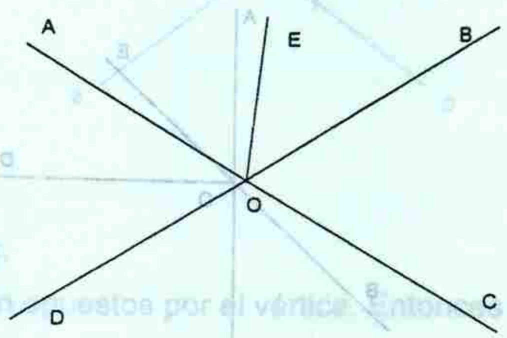
Así mismo, las parejas de ángulos se pueden clasificar en complementarios, suplementarios y conjugados, según el valor de su suma.

- Dos ángulos son **complementarios** si su suma es un ángulo recto.
- Dos ángulos son **suplementarios** si su suma es un ángulo llano.
- Dos ángulos son **conjugados** si su suma mide 360°.

De gran utilidad resulta en la práctica de la Geometría la clasificación siguiente:

Si dos rectas en un plano se cortan en un punto, ellas determinan cuatro ángulos (ver figura), que se clasifican dos a dos de acuerdo a su posición relativa en **adyacentes** (los consecutivos) y **opuestos por el vértices** (los alternos). Así por

ejemplo, en la figura son adyacentes los ángulos $\angle$ AOB y $\angle$ BOC , y son opuestos por el vértice los ángulos $\angle$ AOB y $\angle$ COD. Sin embargo, los ángulos $\angle$AOD y $\angle$ EOC <u>no</u> son opuestos por el vértice, pues los puntos D, O y E no se encuentran situados sobre la misma recta. Es decir, el lado OE del ángulo $\angle$ EOC no es prolongación del lado OD del ángulo $\angle$ AOD.



Como puedes observar fácilmente

Los ángulos adyacentes son a la vez suplementarios pues su suma mide 180°

Si pides a varios amigos que midan con la ayuda de un transportador los ángulos opuestos en una figura cualquiera, notarás que todos obtiene la misma respuesta: los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Y efectivamente, eso es cierto. Demostrémoslo.

Teorema

Los ángulos opuestos por el vértice tienen igual magnitud.

Demostración:

Demostremos que $\angle AOB = \angle COD$. Para ello observemos la figura anterior. Ya hemos visto que los ángulos adyacentes son suplementarios, es decir, en este caso se tiene que

$$\angle AOB + \angle BOC = 180° \quad \text{y} \quad \angle BOC + \angle COD = 180°.$$

De esa manera es

$$\angle AOB = 180° - \angle BOC \quad \text{y} \quad \angle COD = 180° - \angle BOC,$$

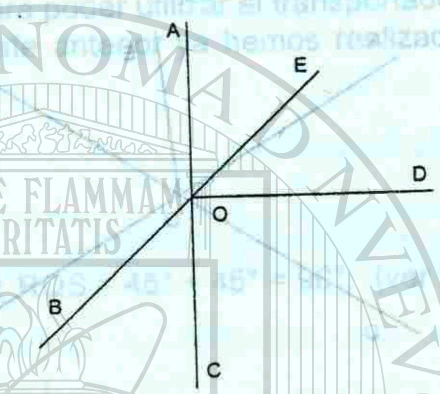
de donde igualando ambas ecuaciones se obtiene

$$\angle AOB = \angle COD$$

que es lo que queríamos demostrar.

Veamos un ejemplo de la utilidad de este resultado:

Ejemplo 2. En la figura que aparece a continuación se conoce que los puntos A, O y C son colineales, al igual que los puntos B, O y E. Además se sabe que el ángulo $\angle$ AOD es recto. Determine el valor del ángulo $\angle$ BOC , si se conoce que la semirrecta de origen en O y que contiene al punto E es bisectriz del ángulo $\angle$AOD.



Para resolver este ejercicio notemos primeramente que

$$\angle AOE = \angle EOD,$$

por ser la semirrecta de origen en O que contiene al punto E bisectriz del ángulo $\angle$AOD. Por otra parte conocemos que

$$\angle AOD = 90°,$$

por ser recto. Luego, como los ángulos $\angle$AOE y $\angle$EOD son complementarios y de igual magnitud se tiene que

$$\angle AOE + \angle EOD = \angle EOD + \angle EOD = 90°,$$

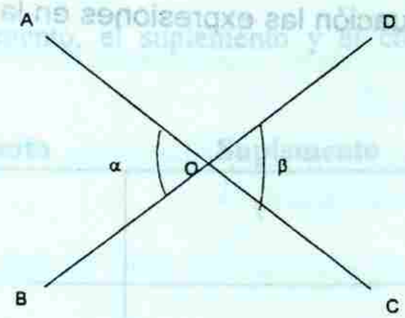
de donde

$$\angle EOD = 45°.$$

Pero los ángulos $\angle$AOE y $\angle$BOC son opuestos por el vértice, por lo que tienen igual magnitud. De ese modo es

$$\angle BOC = 45°.$$

Ejemplo 3. Determina el valor del ángulo $\angle\alpha$ en la figura, si se sabe que $\angle\alpha=6(x+4)°$ y $\angle\beta=4(x+12)°$ para un valor de x en grados sexagesimales.



Tenemos que

$$6(x+4°) = 4(x+12°),$$

pues $\angle\alpha=\angle\beta$ ya que son opuestos por el vértice. Entonces es

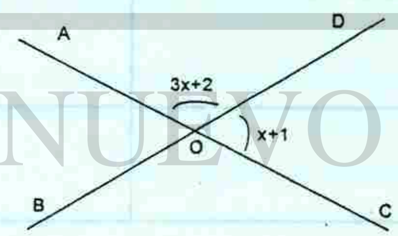
$$6x+24° = 4x+48°$$
$$6x - 4x = 48°-24°$$
$$2x = 24°$$
$$x = 12°.$$

Pero $\angle\alpha = 6(x+4°)$, es decir

$$\angle\alpha = 6(12°+4°) = 6(16°) = 96°.$$

Entonces el ángulo $\angle\alpha$ mide 96°.

Ejemplo 4. Determina el valor de x que aparece en la siguiente figura.



Al resolver este problema debemos tener presente que se pide el valor de x, por lo que los ángulos que esta variable representa deben ser medidos en radianes.

Como los ángulos $\angle$ AOD y $\angle$ DOC son adyacentes, su suma es un ángulo llano, cuya medida en radianes es π, es decir

$\angle$ AOD + $\angle$ DOC = π.
Sustituyendo en esta ecuación las expresiones en la variable x que indica la figura se obtiene la ecuación

$$(x+1) + (3x+2) = \pi,$$

de donde

$$x = \frac{\pi - 3}{4}.$$

Ejercicio 1.3

1. Determina el complemento, el suplemento y el conjugado de cada uno de los siguientes ángulos.

Ángulo	Complemento	Suplemento	Conjugado
30º			
45º			
60º			
63º48'			
24º 36'			
17º12'			
55º24'			
33º45'30"			
81º12'48"			
15º 18'6"			

2) Un ángulo y su suplemento, están a la razón de 5:4, encuentra la medida de dichos ángulos.

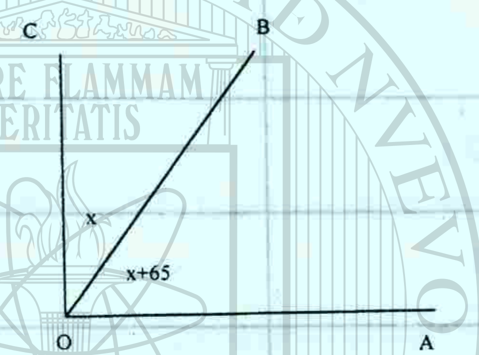
3) Un ángulo y su conjugado están a la razón de 2:1, encuentra la medida del ángulo mayor.

4) Un ángulo y su complemento están a la razón de 3:2, encuentra la medida del ángulo menor.

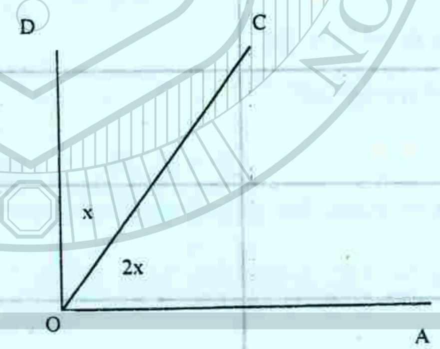
5) Un ángulo es igual a $\frac{1}{3}$ de su complemento, determina la medida de los ángulos.

6) Sean A y B dos ángulos complementarios, donde A= 4 (x+3)° y B= 7 (x-3)°. Encuentra la medida del ángulo B.

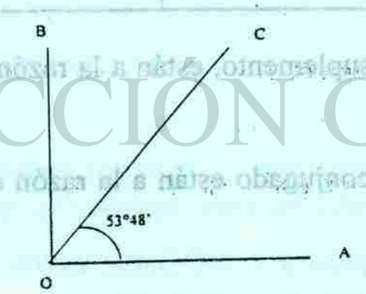
7) En la siguiente figura, sea el ángulo AOC un ángulo recto. ¿Cuánto mide el ángulo ∠AOB?



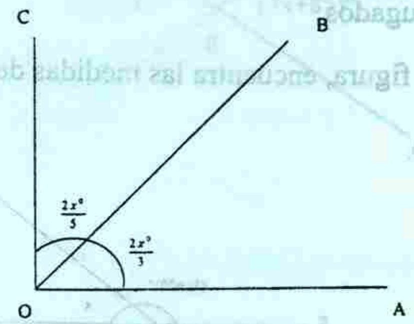
8.- En la siguiente figura sea el ángulo AOD un ángulo recto. Determina la medida del ángulo ∠COD.



9) Calcula el valor del ángulo ∠ BOC de la siguiente figura. Sea el ángulo ∠ AOB recto.



10) En la siguiente figura sea el ángulo ∠AOC, un ángulo recto. Encontrar la medida de los ángulos ∠AOB y ∠BOC.



11) Sean los ángulos A y B ángulos suplementarios, donde A= $\frac{2}{5}x°$ y B= $\frac{7}{4}x°$. Encuentra la medida de dichos ángulos.

12) Sean A y B dos ángulos suplementarios, donde A= 8(2x-3)° y B= 10 (x+3.5)°. Hallar la medida de los ángulos A y B.

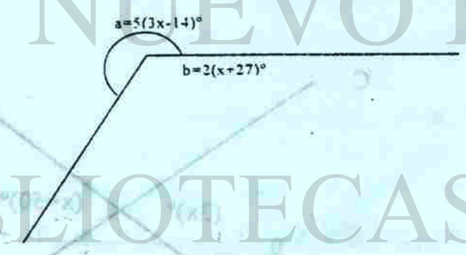
13.- Sean A y B dos ángulos suplementarios, donde A= $\frac{x^0}{2}$ y B= (x-30)°, determina la medida del ángulo A.

14) Sean A y B dos ángulos conjugados, donde A= 8x° y B= (2x+40)°, hallar la medida de dichos ángulos

15) Sean M y N dos ángulos conjugados, donde el ángulo M= 2 (4x-10)° y el ángulo N= 10 (x+2)°, encuentra la medida de ambos ángulos.

16) Sean B y C dos ángulos conjugados, donde B= 4 (2x+15)° y C= 2x°, encuentra la medida del ángulo B.

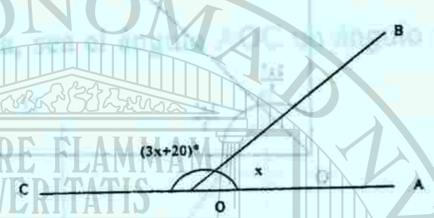
17) Encuentra la medida del ángulo b de la siguiente figura.



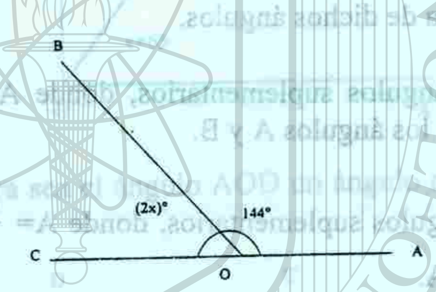
18) Sea el ángulo $A= 8(x+3)°$ y el ángulo $B= 4(12+x)°$. Encuentra el valor de x si:
a) A y B son complementarios
b) A y B son suplementarios

19) A y B son conjugados

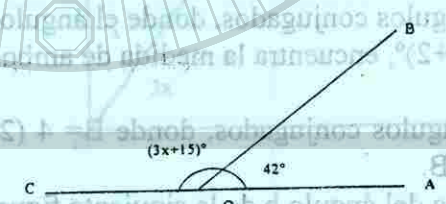
20) En la siguiente figura, encuentra las medidas de los ángulos ∠AOB y ∠BOC.



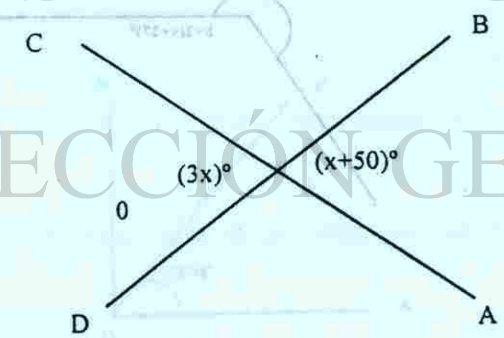
21)



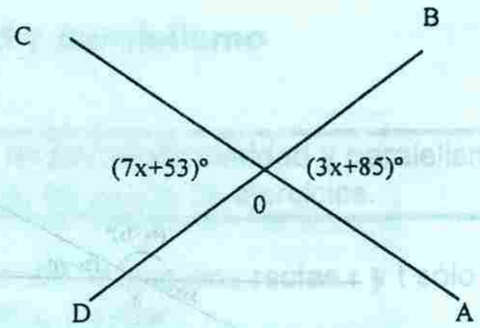
22)



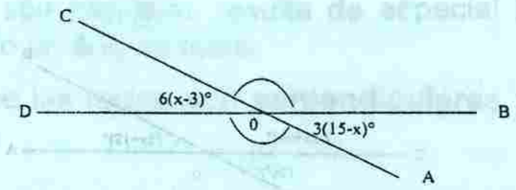
23)



24)

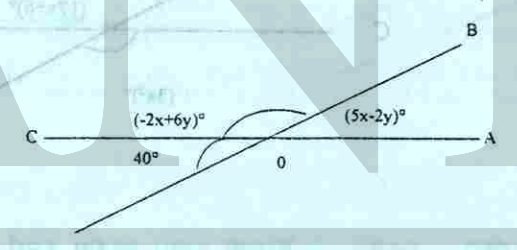


25)

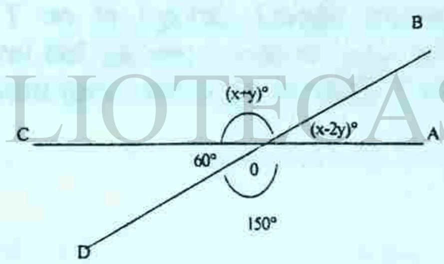


En los ejercicios del 26 al 30, encuentra el valor de *x* y *y*.

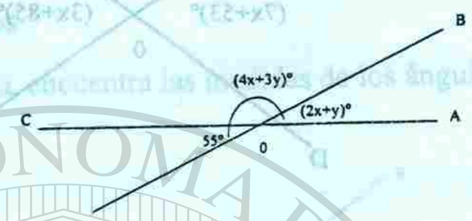
26)



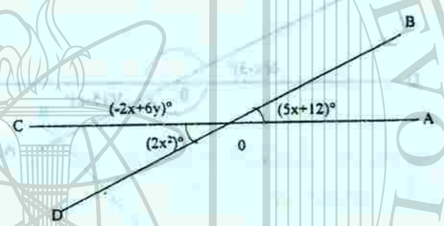
27)



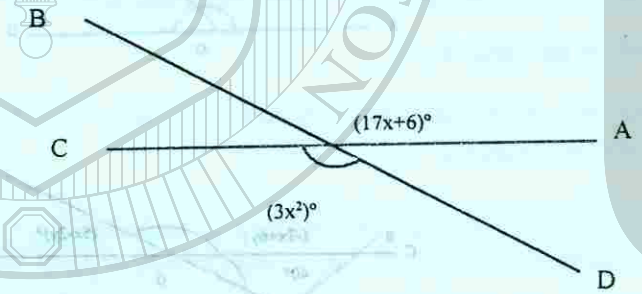
28)



29) En el siguiente problema sea x>0.



30) Sea x>0



1.4. Perpendicularidad y paralelismo

Objetivo

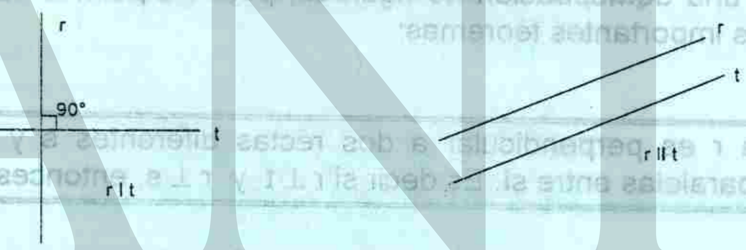
Comprender las relaciones de perpendicularidad y paralelismo de dos rectas y sus propiedades y aplicarlas a la resolución de ejercicios.

En la Geometría Plana es evidente que dos rectas r y t sólo pueden presentar dos posiciones relativas diferentes, a saber:

- se cortan en un punto, o
- no se cortan en ningún punto. En ese caso se dice que las rectas son **paralelas** y se denota $r \| t$. (ver figura)

Cuando las rectas no son paralelas resulta de especial interés el caso en que ellas se cortan formando un ángulo recto.

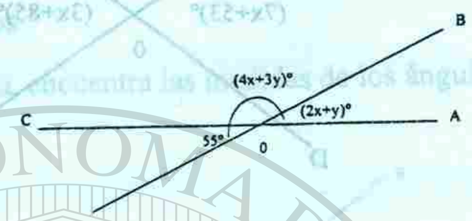
- Entonces se dice que las rectas son **perpendiculares** y se denota $r \perp t$. (ver figura)



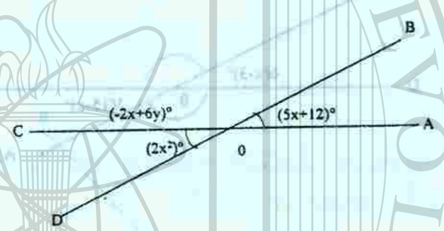
De seguro alguna vez haz visto una regla T. Pero, ¿sabes cómo se utiliza ? ¿y para qué sirve ? y ¿por qué ?

Cuando un ingeniero, o arquitecto, o dibujante técnico desea dibujar rectas paralelas o perpendiculares utiliza la regla T. Para dibujar dos rectas paralelas r y t apoya la regla en el borde lateral del tablero de dibujo y delinea la recta (r) (posición 1 de la regla T en la figura). Luego mueve la regla manteniéndola apoyada en el borde lateral del tablero hasta el lugar en que desea dibujar la otra recta (t) paralela a la primera (posición 2 de la regla T en la figura), obteniendo así el resultado esperado.

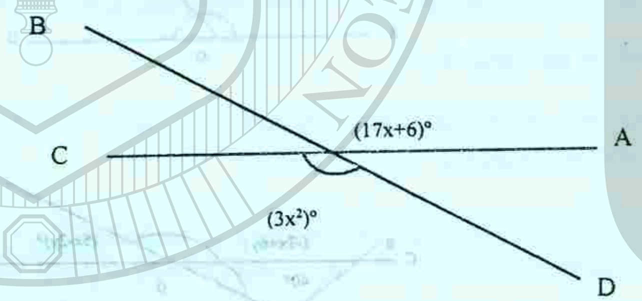
28)



29) En el siguiente problema sea x>0.



30) Sea x>0



1.4. Perpendicularidad y paralelismo

Objetivo

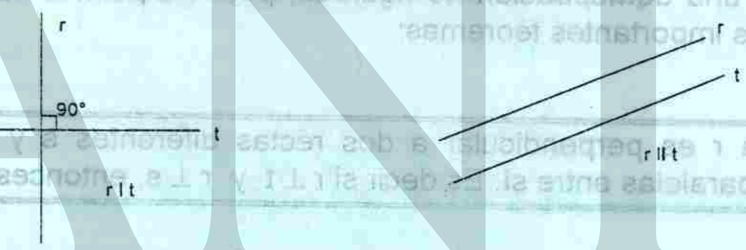
Comprender las relaciones de perpendicularidad y paralelismo de dos rectas y sus propiedades y aplicarlas a la resolución de ejercicios.

En la Geometría Plana es evidente que dos rectas r y t sólo pueden presentar dos posiciones relativas diferentes, a saber:

- se cortan en un punto, o
- no se cortan en ningún punto. En ese caso se dice que las rectas son **paralelas** y se denota $r \parallel t$. (ver figura)

Cuando las rectas no son paralelas resulta de especial interés el caso en que ellas se cortan formando un ángulo recto.

- Entonces se dice que las rectas son **perpendiculares** y se denota $r \perp t$. (ver figura)



De seguro alguna vez haz visto una regla T. Pero, ¿sabes cómo se utiliza ? ¿y para qué sirve ? y ¿por qué ?

Cuando un ingeniero, o arquitecto, o dibujante técnico desea dibujar rectas paralelas o perpendiculares utiliza la regla T. Para dibujar dos rectas paralelas r y t apoya la regla en el borde lateral del tablero de dibujo y delinea la recta (r) (posición 1 de la regla T en la figura). Luego mueve la regla manteniéndola apoyada en el borde lateral del tablero hasta el lugar en que desea dibujar la otra recta (t) paralela a la primera (posición 2 de la regla T en la figura), obteniendo así el resultado esperado.

Tratemos de traducir al lenguaje de la Geometría Plana lo sucedido.

La regla T está construida de manera que la "tilde" forma un ángulo recto con la regla, y el tablero también tiene sus lados consecutivos formando ángulos rectos. De esa manera, dibujar una recta r utilizando la regla T significa trazar una recta perpendicular al borde del tablero. Entonces realmente lo que se realiza es dibujar dos rectas perpendiculares a una misma recta representada en este caso por el borde del tablero.

Esto resulta una demostración no rigurosa, pero no por ello menos aceptada de los siguientes importantes teoremas:

Teorema

Si una recta r es perpendicular a dos rectas diferentes s y t, entonces estas últimas son paralelas entre sí. Es decir si $r \perp t$ y $r \perp s$, entonces $s \parallel t$.

Teorema

Si una recta r es perpendicular a una de dos rectas paralelas, entonces también es perpendicular a la otra recta. Es decir, si $r \perp t$ y $t \parallel s$, entonces $r \perp s$.

Esta idea del uso de la regla T no representa otra cosa que la traslación de rectas, manteniendo el ángulo con una recta representada por el borde del tablero, y permite también asegurar que

Teorema

Dado un punto P sobre una recta r, existe una única recta t que corta a la recta en el punto P y es perpendicular a ella.

Demostración:

La existencia de la recta t puede ser demostrada mediante el mismo procedimiento utilizado en los teoremas anteriores.

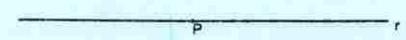
Veamos ahora que dicha recta t es la única que cumple con las condiciones impuestas por el teorema. Para ello recurriremos a la técnica clásica de las demostraciones de unicidad.
Supongamos que existe otra recta s que corta a la recta r en el punto P.
Entonces, por el Teorema 1.4.1., las rectas s y t son paralelas. Pero ambas contienen al punto P, y entonces son coincidentes.
Ello demuestra la unicidad de la recta t, y por tanto el teorema.

■

En la historia de la Geometría siempre se dedicó especial atención a las construcciones geométricas, es decir a determinar cuáles figuras geométricas poseían ser dibujadas con regla y compás y cómo hacerlo.

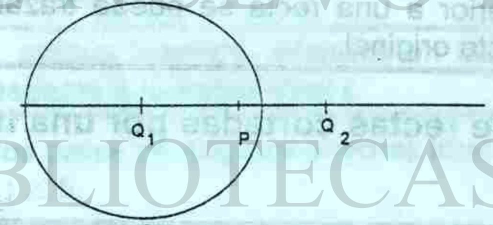
Ahora te mostraremos cómo dibujar una recta t que sea perpendicular a una recta r dada cortándola en un punto P.

1er Paso: Dibuja la recta r y señala en ella el punto P.

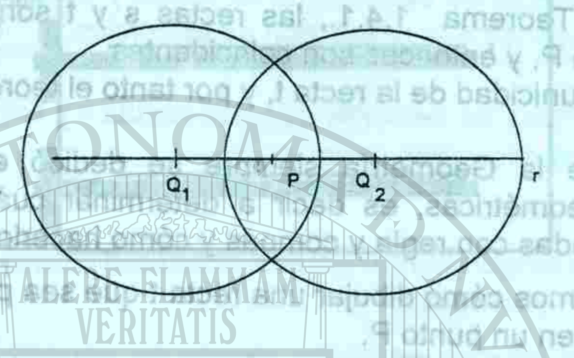


2do Paso: Coloca la punta del compás sobre el punto P y fija una abertura cualquiera en el mismo, marcando así los punto Q_1 y Q_2.

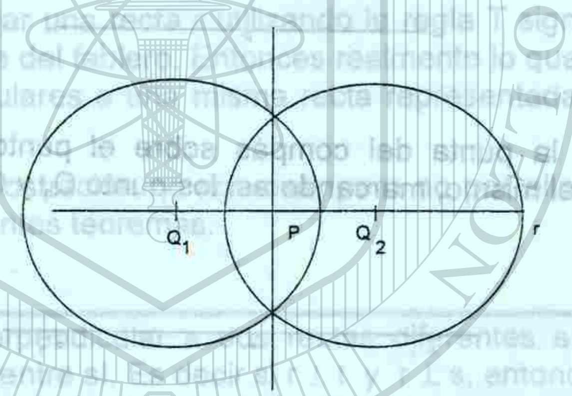
3er Paso: Apoyando la punta del compás en el punto Q_1 y con una abertura ligeramente mayor que la fijada en el segundo paso, dibuja una circunferencia.



4to Paso: Repite el tercer paso apoyando ahora la punta del compás sobre el punto Q_2.



5to Paso: Traza ahora la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias. Esta recta será perpendicular a r y pasará por el punto P.



Del mismo modo y aplicando el axioma de las paralelas, si P es un punto exterior a una recta r dada, existe una única recta t que es paralela a la recta r y contiene a P.. Pero, según el teorema anterior, por P se puede trazar una única recta que sea perpendicular a t (y por tanto también a r). Así se obtiene el siguiente

Teorema

Por un punto P exterior a una recta se puede trazar una única recta que sea perpendicular a la recta original.

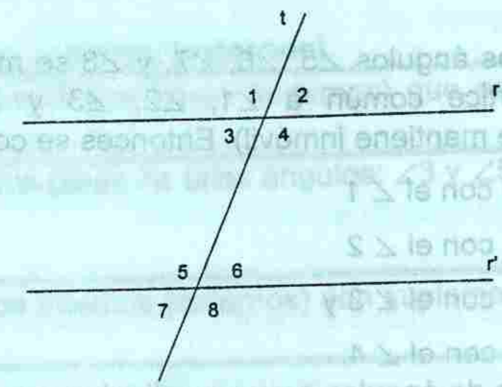
1.5. Ángulos entre rectas cortadas por una transversal.

Objetivo

Dominar la denominación de los ángulos entre rectas paralelas cortadas por un secante y las relaciones entre ellas y ser capaz de utilizar estas últimas en la resolución de ejercicios.

A continuación vamos a estudiar las relaciones que vinculan a un conjunto de ocho ángulos. Como podremos constatar muy pronto estas relaciones tienen un importante papel en muchas aplicaciones, especialmente en la demostración de un teorema mediante el cual sabremos cuánto vale la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Sean *r* y *r'* las rectas paralelas y *t* la transversal:



Se han formado ocho ángulos que hemos designado por los números naturales del 1 al 8, tal como se ve en la figura. De estos ocho hay cuatro que son **internos**, así llamados por hallarse ubicados en la franja comprendida entre *r* y *r'*: ellos son el ∠3, ∠4, ∠5 y ∠6. Los otros cuatro son **externos**, que se hallan en la parte exterior a la citada franja. Es conveniente usar denominaciones especiales para referirnos a ciertas parejas de ángulos que son:

- **Ángulos correspondientes**

Se aplica a dos ángulos, uno interno y otro externo, situados del mismo lado de la transversal y con vértices en dos paralelas distintas.

En nuestra figura, son ángulos correspondientes los siguientes:

∠1 y ∠5 , ∠2 y ∠6 ,
∠3 y ∠7 , ∠4 y ∠8.

- **Ángulos alternos internos**

Son pares de ángulos, ambos internos, situados en lados distintos (es decir en semiplanos distintos) respecto a la transversal *t*.

En nuestra figura hay dos pares de ángulos alternos internos que son:
∠3 ; ∠6 y ∠4 ; ∠5.

- **Ángulos alternos externos**

Son pares de ángulos externos situados en lados distintos respecto a *t*.

Para nuestra figura son ángulos alternos externos:

$\angle 1; \angle 8$ y

$\angle 2; \angle 7.$

Relación entre pares de ángulos correspondientes

Supongamos que efectuamos un movimiento de traslación a la recta *r'* con los requisitos siguientes:

El vértice común a los ángulos $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, y $\angle 8$ se mueve a lo largo de *t* hasta coincidir con el vértice común a $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ y $\angle 4$ (en este movimiento supongamos que *r* se mantiene inmóvil). Entonces se comprende que:

el $\angle 5$ coincidirá con el $\angle 1$

el $\angle 6$ coincidirá con el $\angle 2$

el $\angle 7$ coincidirá con el $\angle 3$ y

el $\angle 8$ coincidirá con el $\angle 4$.

Es decir que los pares de ángulos correspondientes son iguales.

Comentario: El razonamiento anterior no es propiamente una demostración rigurosa de un teorema, pero es una explicación que confiamos en que será convincente. Así pues, a partir de ahora, admitiremos pues que:

Teorema

Los pares de ángulos correspondientes son iguales.

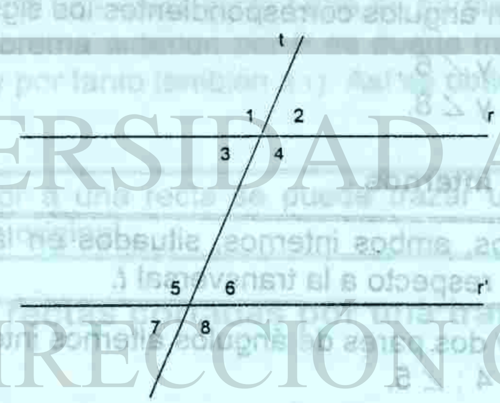
Habiendo establecido esta relación, ahora es muy sencillo demostrar el siguiente

Teorema

Dos ángulos alternos internos son iguales

Demostración:

En la siguiente figura tenemos que r II r' y deseamos demostrar que $\angle 3 = \angle 6$.



Pasos de la demostración:

$\angle 2 = \angle 6$

por ser correspondientes entre las paralelas *r* y *r'* cortadas por la transversal *t*.

$\angle 2 = \angle 3$

por ser opuestos por el vértice. De aquí que

$\angle 3 = \angle 6$

por el carácter transitivo de la igualdad. ■

Comentario: Por supuesto, de manera enteramente análoga se demuestra que $\angle 4 = \angle 5$.

- **Ángulos conjugados internos (externos)**

Se llaman así a dos ángulos internos (externos) que estén situados del mismo lado de la transversal.

En nuestra figura hay dos pares de tales ángulos: $\angle 3$ y $\angle 5$; $\angle 4$ y $\angle 6$.

Teorema

Dos ángulos conjugados internos (externos) son suplementarios (es decir, suman 180°)

Demostración:

Tomemos en cuenta la misma figura utilizada en la demostración del teorema anterior.

Ahora tomemos la pareja de ángulos $\angle 4$ y $\angle 6$.

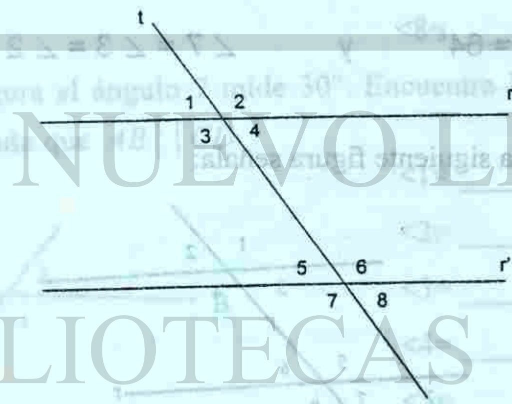
1^er paso: $\angle 2 + \angle 4 = 180°$ por ser suplementarios.

2° paso: $\angle 2 = \angle 6$ por ser correspondientes entre paralelas.

3^er paso: Sustituyendo $\angle 2$ por el $\angle 6$ en la primera igualdad queda:

$\angle 6 + \angle 4 = 180°$. ■

Ejemplo 1. En la figura adjunta r II r' y el ángulo $\angle 5$ mide 73°. Hallar la amplitud de los demás ángulos que aparecen.



En primer lugar, $\angle 8 = \angle 5$ por ser opuestos por el vértice. Luego, $\angle 8 = 73°$.

Pero $\angle 6 + \angle 5 = 180°$.

Luego, $\angle 6 = 180° - 73° = 107°$.

Como $\angle 3 = \angle 6$ por ser alternos internos ; entonces es $\angle 3 = 107°$ y $\angle 2 = \angle 3$ por ser opuestos por el vértice.

Por tanto: $\angle 2 = 107°$.

Resumiendo, los ángulos $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 6$ y $\angle 7$ miden 107°. Es fácil llegar a la conclusión de que los ángulos $\angle 5$, $\angle 8$, $\angle 4$ y $\angle 1$ miden cada uno 73°.

En efecto ya teníamos que: $\angle 5 = 73°$ por datos y $\angle 8 = \angle 5 = 73°$ por ser opuestos por el vértice. Pero $\angle 5 = \angle 1$ por ser correspondientes y $\angle 4 = \angle 1$ por ser opuestos.

En la figura del ejemplo anterior se conoce que

$\angle 1 = (5x - 1)°$ y $\angle 6 = (8x + 12)°$.

Halle la medida de los ángulos señalados sin que en la respuesta aparezca la variable x.

Solución:

Como $\angle 4 = \angle 1 = (5x - 1)°$ por ser ángulos opuestos por el vértice.

Pero $\angle 4 + \angle 6 = 180°$, pues el $\angle 4$ y el $\angle 6$ son conjugados internos.

Sustituyendo $\angle 4$ por $(5x - 1)°$ y $\angle 6$ por $(8x + 12)°$ en la igualdad anterior, tenemos:

$$13x = 169°$$
$$x = 13°.$$

Por tanto:

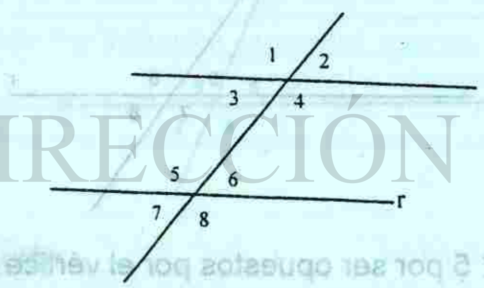
$\angle 1 = 5(13°) - 1 = 64°$ y $\angle 6 = 8(13°) + 12 = 116°$.

Y, en consecuencia:

$\angle 4 = \angle 5 = \angle 8 = 64°$ y $\angle 7 = \angle 3 = \angle 2 = 116°$.

Ejercicio 1.5

1) De acuerdo con la siguiente figura señala:

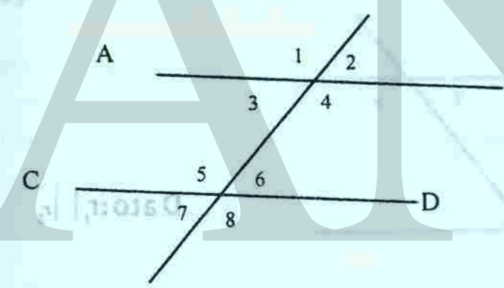


a) Los ángulos internos:
b) Los ángulos externos:
c) Los pares de ángulos que son correspondientes
d) Los ares de ángulos que son alternos-internos
e) Los pares de ángulos que son alternos-externos
f) Los pares de ángulos que son conjugados internos
g) Los pares de ángulos que son conjugados externos

2) Escribe en el paréntesis de la izquierda la letra que corresponde a la respuesta correcta.

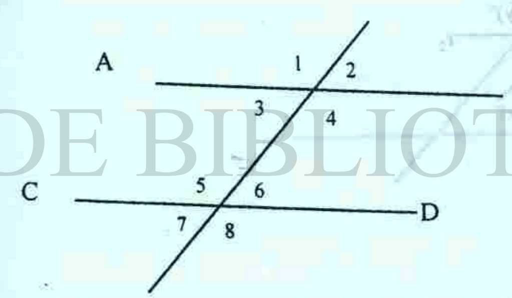
1 ( ) Si dos ángulos son correspondientes, entonces:	a) Son complementarios
2 ( ) Si dos ángulos son conjugados internos, entonces:	
3 ( ) Si dos ángulos son alternos internos, entonces:	b) Son congruentes (igual medida)
4 ( ) Si dos ángulos son conjugados externos, entonces	
5 ( ) Si dos ángulos son alternos externos, entonces:	c) Son suplementarios

3) En la siguiente figura el ángulo 4 mide 125°. Encuentra la medida de los demás ángulos considerando que $AB \mid\mid CD$



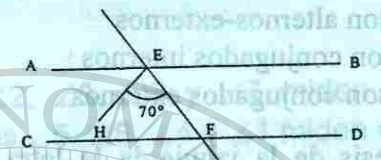
<1= ________
<2= ________
<3= ________
<5= ________
<6= ________
<7= ________
<8= ________

4) En la siguiente figura el ángulo 7 mide 30°. Encuentra las medidas de los demás ángulos considerando que $AB \mid\mid CD$



<1= ________
<2= ________
<3= ________
<4= ________
<5= ________
<6= ________
<8= ________

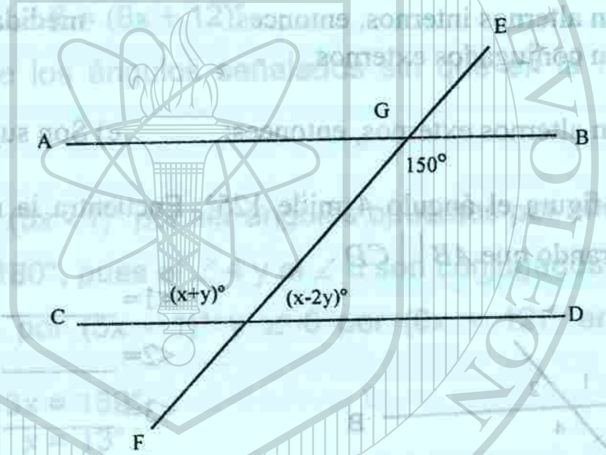
5) En la siguiente figura $AB \mid\mid CD$ y EH es la bisectriz del ángulo AEF. Determina el valor del ángulo F.



En cada una de los siguientes ejercicios encuentra los valores de x y y

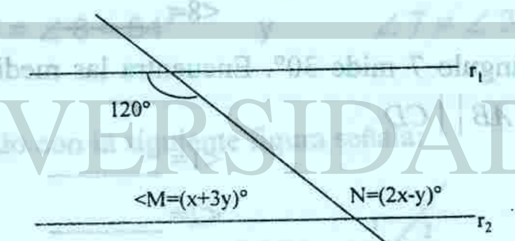
6)

Dato: $AB \mid\mid CD$



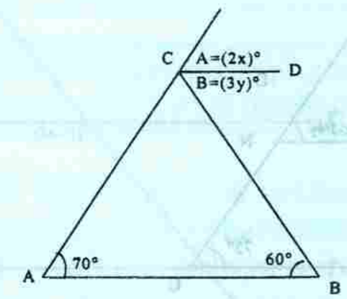
7)

Dato: $r_1 \mid\mid r_2$

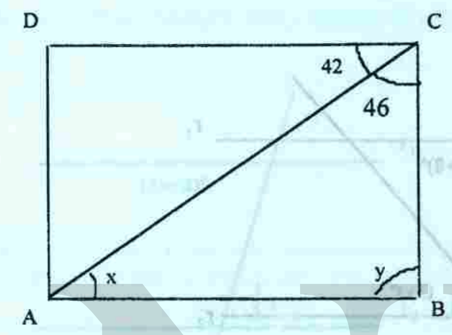


8)

Dato: $AB \mid\mid CD$

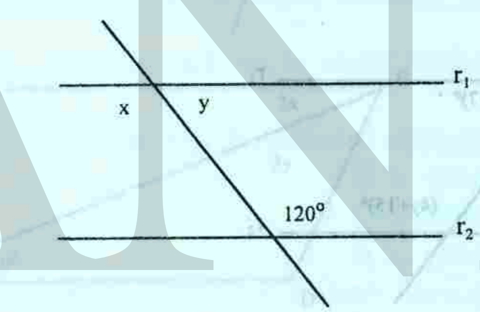


9)



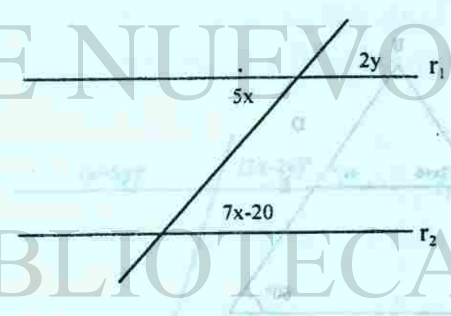
Datos:
$AB \mid\mid CD$
$AD \mid\mid BC$

10)



Dato: $r_1 \mid\mid r_2$

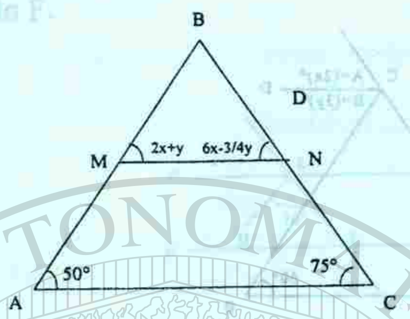
11)



Dato: $r_1 \mid\mid r_2$

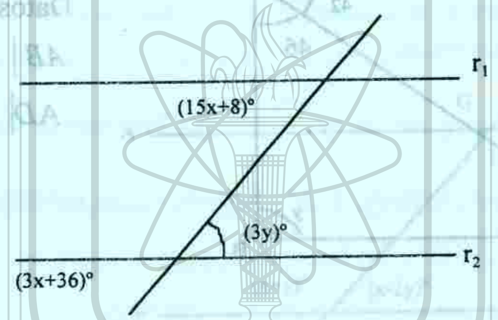
13)

Dato: $MN \parallel AC$



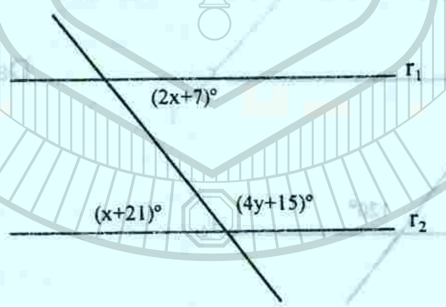
14)

Dato: $r_1 \parallel r_2$



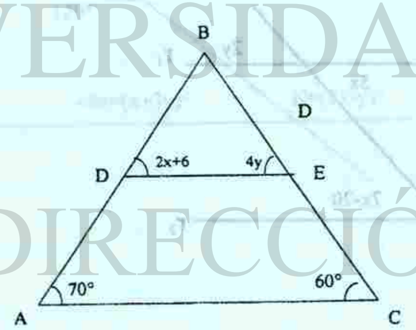
15)

Dato: $r_1 \parallel r_2$



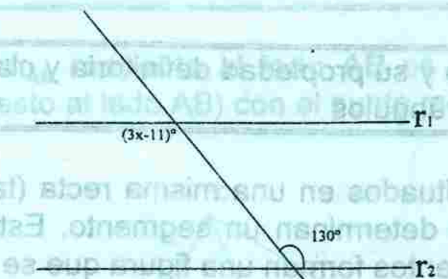
16)

Dato: $DE \parallel AC$



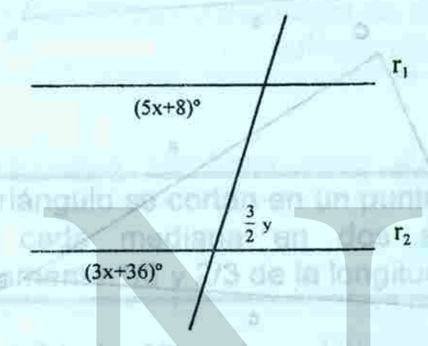
17)

Dato: $r_1 \parallel r_2$

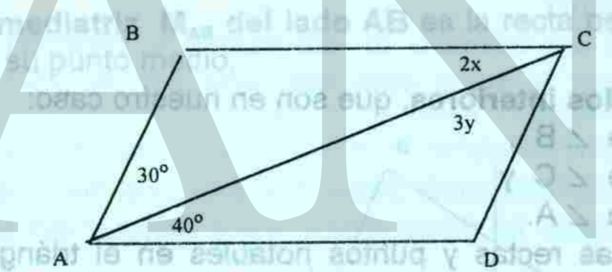


18)

Dato: $r_1 \parallel r_2$



19)

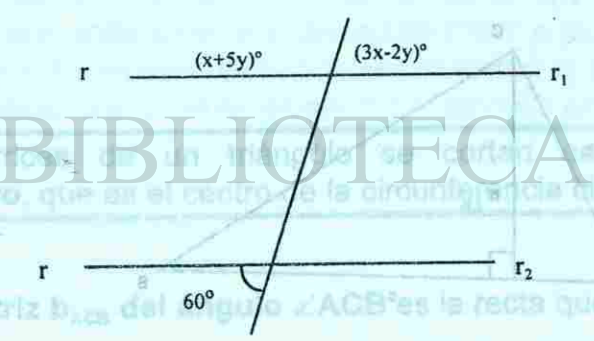


Datos:

$AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

20)



Dato:

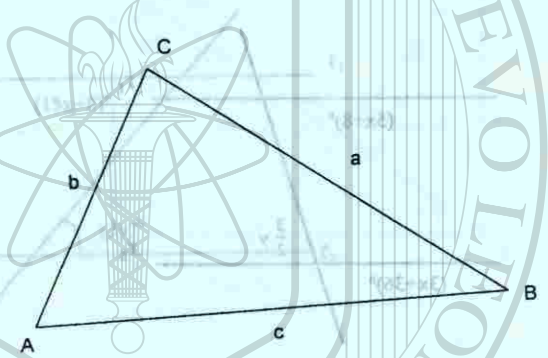
$r_1 \parallel r_2$ $r_1 \parallel r_2$

1.6 Triángulos

Objetivo

Conocer el concepto de triángulo y su propiedad definitoria y clasificar los tipos de triángulos según sus lados y sus ángulos

Sean A, B y C tres puntos no situados en una misma recta (también se dice no alineados). Cada par de puntos determinan un segmento. Estos son: AB, BC y CA. La unión de estos tres segmentos forman una figura que se llama **triángulo**, y se denota así: Δ ABC. Los puntos A, B y C se llaman **vértices del triángulo** y los segmentos AB, BC y CA se llaman **lados**, y se denotan también con letras minúsculas a, b, c. Así podemos tener una figura como la siguiente:

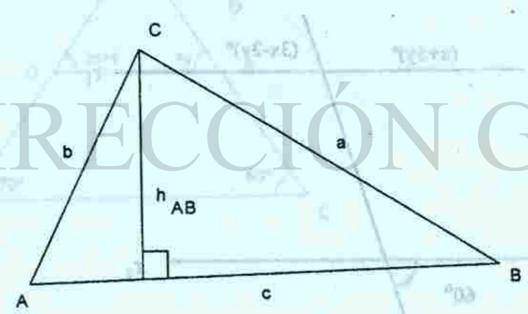


En cada triángulo hay tres **ángulos interiores**, que son en nuestro caso:

el $\angle$ ABC o simplemente $\angle$ B ,
el $\angle$ BCA o simplemente $\angle$ C y
el $\angle$ CAB o simplemente $\angle$ A.

Te presentaremos ahora algunas rectas y puntos notables en el triángulo, así como algunos resultados de gran utilidad que aceptaremos por el momento sin demostración:

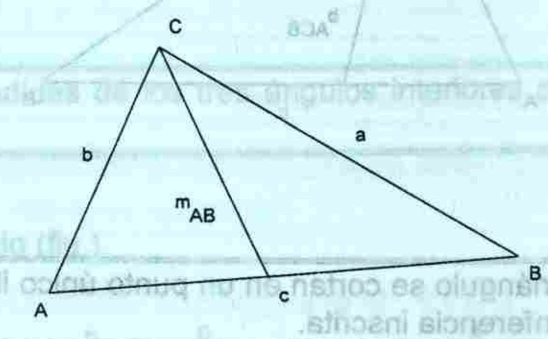
- La **altura h_{AB} respecto al lado AB** es el segmento de recta que une el vértice C (opuesto al lado AB) con el lado AB y es perpendicular a éste último.



Teorema

Las alturas de un triángulo se cortan en un punto único llamado **ortocentro**.

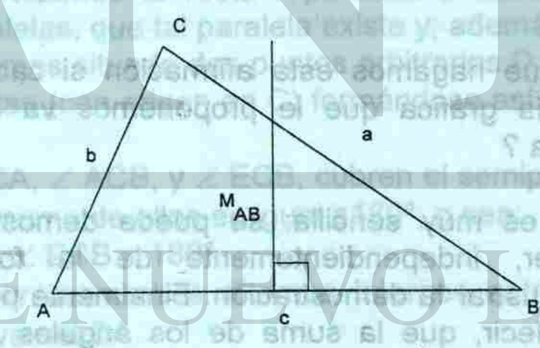
- La **mediana m_{AB} respecto al lado AB** es el segmento de recta que une el vértice C (opuesto al lado AB) con el punto medio del lado AB.



Teorema

Las medianas de un triángulo se cortan en un punto único llamado **baricentro**. El baricentro divide a cada mediana en dos segmentos cuyas longitudes representan respectivamente 1/3 y 2/3 de la longitud de la mediana.

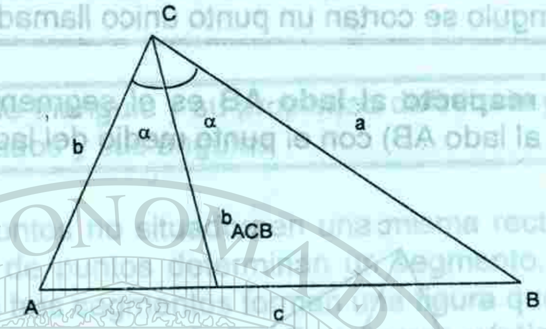
- La **mediatriz M_{AB} del lado AB** es la recta perpendicular al lado AB, que pasa por su punto medio.



Teorema

Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto único llamado **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia circunscrita.

- La **bisectriz b_{ACB} del ángulo $\angle$ACB** es la recta que divide el ángulo a la mitad.



Teorema

Las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto único llamado **incentro**, que es el centro de la circunferencia inscrita.

Antes de seguir explicándote otros aspectos referentes a los triángulos te proponemos que hagas la siguiente experiencia gráfica.

- Traza un triángulo arbitrario.
- Toma un transportador de ángulos interiores y mide la amplitud de cada uno de los ángulos interiores del triángulo.
- Suma las tres amplitudes de los mismos. Si has hecho la medición con un mínimo de cuidado, verás que la suma obtenida debe ser de 180° o muy próxima.

¿Cómo es posible que hagamos esta afirmación si cada uno de ustedes, al realizar la experiencia gráfica que le proponemos va a dibujar un triángulo arbitrario, a su manera ?

Pues la explicación es muy sencilla: se puede demostrar la afirmación que acabamos de hacer, independientemente de la forma y tamaño que seleccionemos para ilustrar la demostración. Finalmente podemos garantizar que esta propiedad (es decir, que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es constante e igual a 180°) es uno de los resultados más importantes y útiles de toda la Geometría y, francamente, sin saber aplicarlo correctamente, no se puede ir muy lejos en esta Ciencia. Afortunadamente, como verás, es muy fácil entenderlo y aplicarlo.

1.7. Suma de los ángulos interiores de un triángulo

Objetivo

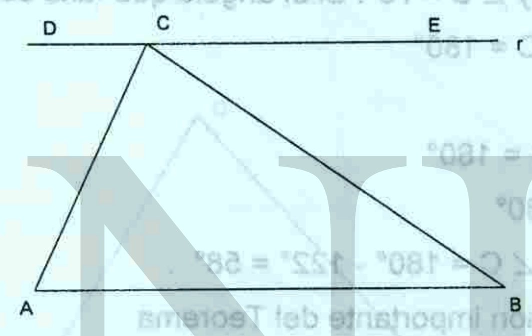
Aplicar los conceptos anteriores y el teorema sobre los ángulos interiores de un triángulo a la resolución de ejercicios prácticos y de demostraciones.

Teorema

La suma de las medidas de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° .

Demostración:

Sea ABC un triángulo (fig.)



1. Por el punto C trazamos la recta *r* paralela al lado AB. Sabemos, por el postulado de las paralelas, que tal paralela existe y, además, que es única.
2. Sobre la recta *r* hemos situado dos puntos arbitrarios D y E, distintos de C pero en semirrectas distintas (con origen en C) formándose así los ángulos $\angle$ DCA y $\angle$ ECB.
3. Los ángulos: $\angle$ DCA, $\angle$ ACB, y $\angle$ ECB, cubren el semiplano inferior cuyo borde es *r*, de modo que la suma de ellos es igual a180°, o sea:
$\angle$ DCA + $\angle$ ACB + $\angle$ ECB = 180°. (1)
4. $\angle$ DCA = $\angle$ A por ser ambos alternos internos entre las paralelas *r* y AB cortadas por la transversal CA.
$\angle$ ACB = $\angle$ C (cambio de notación !)
$\angle$ ECB = $\angle$ B por ser alternos internos entre las paralelas *r* y AB cortadas por la transversal CB.
5. Sustituyendo en (1) los ángulos $\angle$ DCA, $\angle$ ACB y $\angle$ ECB por $\angle$ A, $\angle$ C y $\angle$ B respectivamente queda:
$\angle$ A + $\angle$ C + $\angle$ B = 180°
que es lo queríamos demostrar.

■

Corolario

En un triángulo no puede haber más que un ángulo interior obtuso.

Demostración:

En efecto, si hubiera dos obtusos su suma sería mayor de 180° ; lo cual es imposible. ■

Corolario

Si en un triángulo hay un ángulo recto los otros dos son agudos y su suma es 90°. Es decir, los otros dos son complementarios.

Ejemplo 1. En un triángulo dos de sus ángulos interiores miden 49° y 73°. Hallar la amplitud del tercer ángulo.

Solución:

Tomamos $\angle A = 49°$ y $\angle B = 73°$. Si el ángulo que falta es C ; sabemos que:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Luego:

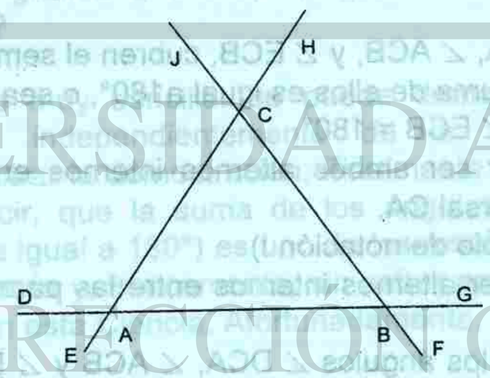
$$49° + 73° + \angle C = 180°$$

$$122° + \angle C = 180°$$

Despejando, queda: $\angle C = 180° - 122° = 58°$.

Veamos otra aplicación importante del Teorema

Si se consideran las rectas determinadas por los lados de un triángulo, cada vértice determinan cuatro ángulos (ver figura). Así, a cada ángulo interior corresponden dos ángulos adyacentes y uno opuesto por el vértice, que están determinados por el mismo vértice.



- Se dice que un ángulo es **exterior** de un triángulo si este es adyacente y suplementario de un ángulo interior del triángulo. Los otros dos ángulos interiores del triángulo se llaman **ángulos internos opuestos al ángulo exterior**.

De esa manera, en la figura

- el ángulo $\angle$ GBC y el ángulo $\angle$ FBA son exteriores opuestos a los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCA$,
- el ángulo $\angle$ EAB y el ángulo $\angle$ DAC son exteriores opuestos a los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$, y
- el ángulo $\angle$ JCA y el ángulo $\angle$ HCB son exteriores opuestos a los ángulos $\angle CBA$ y $\angle CAB$.

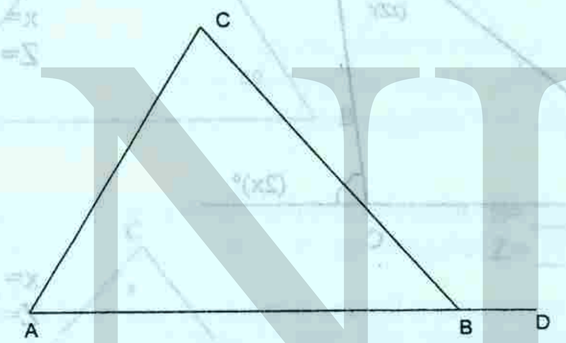
Respecto a los ángulos exteriores del un triángulo se cumple el siguiente teorema:

Teorema

La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de sus dos ángulos interiores opuestos.

Demostración:

En la figura, el ángulo $\angle DBC$ es exterior opuesto a los ángulos interiores $\angle BAC$ y $\angle BCA$.



Se desea demostrar que

$$\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA.$$

Sabemos que

$\angle DBC + \angle ABC = 180°$ por ser suplementarios, y

$\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180°$ por el teorema 1.7.1.

Igualando los miembros izquierdos de las ecuaciones anteriores es

$$\angle DBC + \angle ABC = \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA ,$$

de donde

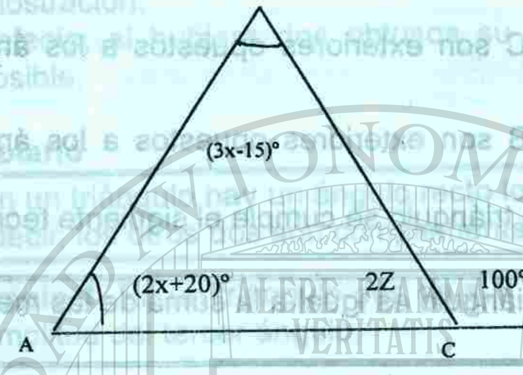
$$\angle DBC = \angle BAC + \angle BCA ,$$

que es lo que queríamos demostrar ■

Ejemplo 2. En el triángulo del ejemplo 1, el ángulo exterior opuesto a los ángulos dados (que miden 49° y 73°) mide 49°+73°=122°.

Ejercicio 1.7

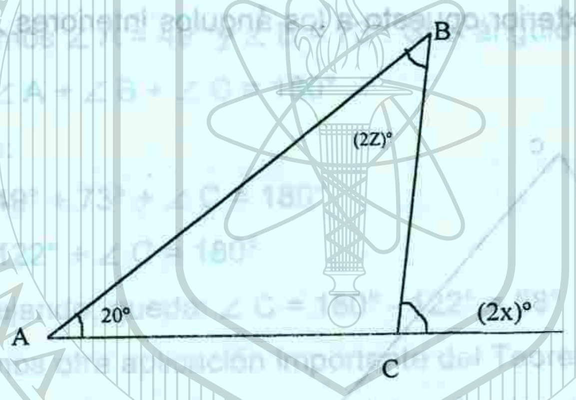
1) Para los siguientes ejercicios encuentra los valores de x y z, según los datos dados.



x= ________

Z= ________

2)

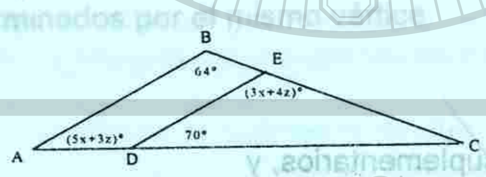


Dato:
‹ACB= (5x-30)°

x= ________

Z= ________

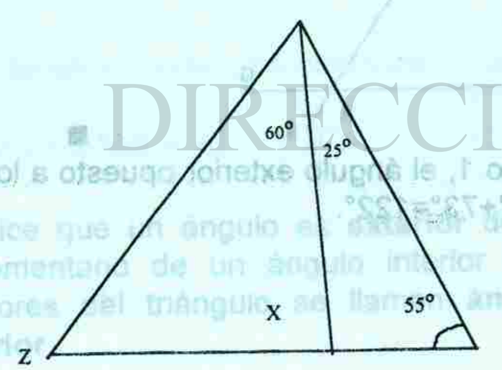
3)



x= ________

Z= ________

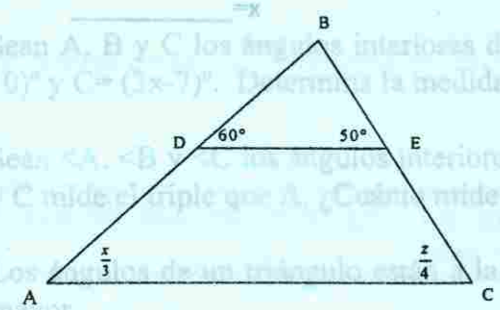
4)



x= ________

Z= ________

5)

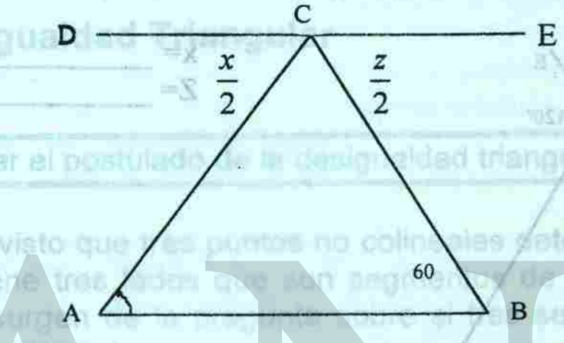


Dato: DE || AC

x= ________

Z= ________

6)

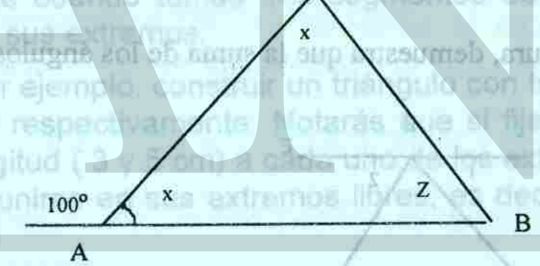


Dato: DE || AB

x= ________

Z = ________

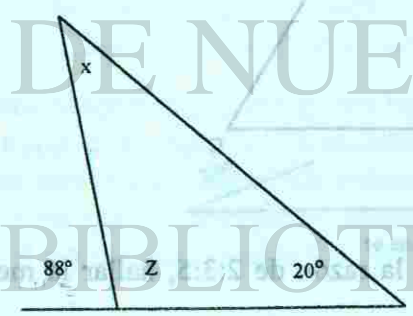
7)



x= ________

Z= ________

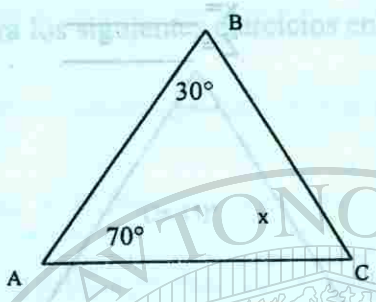
8)



x= ________

Z= ________

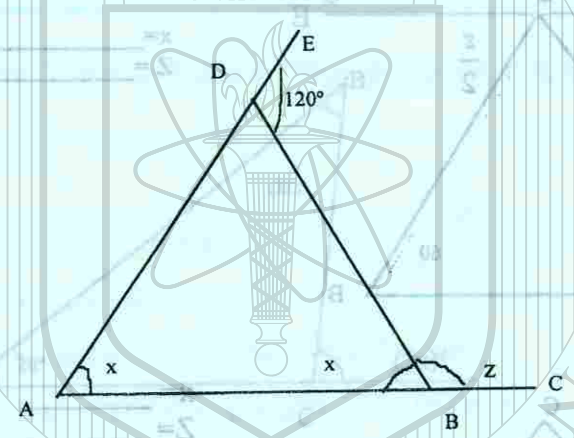
9)



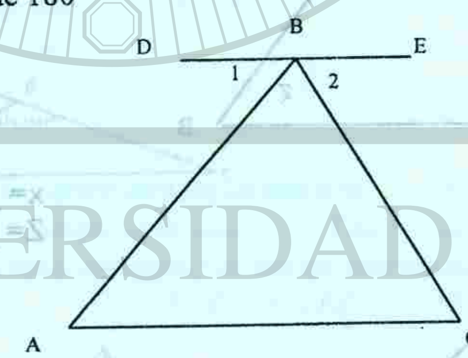
x= ____________

10) En cada uno de los siguientes ejercicios, hallar los valores de "x" y de "z".

x= ____________
Z= ____________



11) Basándote en la siguiente figura, demuestra que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180°



Demostrar que <A+<B+<C= 180°

12) Los ángulos de un triángulo están a la razón de 2:3:5, hallar la medida de dichos ángulos.

13) Los ángulos de un triángulo están a la razón de 7:6:5, encuentra la medida de dichos ángulos.

14) En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos están a la razón de 2:3. Encuentra la medida de dichos ángulos.

15) Sean A, B y C los ángulos interiores de un triángulo, donde A= (2x+35)°, B= (4x-10)° y C= (3x-7)°. Determina la medida de los ángulos.

16) Sean <A, <B y <C los ángulos interiores de un triángulo. Si B mide el doble que A y C mide el triple que A. ¿Cuánto mide cada ángulo?

17) Los ángulos de un triángulo están a la razón de 3:4:5. Hallar la medida del ángulo mayor.

1.8. Desigualdad Triangular

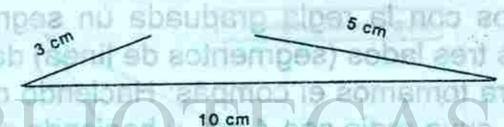
Objetivo

Comprender el postulado de la desigualdad triangular

Ya hemos visto que tres puntos no colineales determinan un triángulo, y que este siempre tiene tres lados que son segmentos de recta unidos por sus extremos. Entonces surgen de la pregunta sobre si tres segmentos de recta determinarán siempre un triángulo.

Te recomendamos que antes de seguir leyendo trates de responderla, probando qué sucede cuando tomas tres segmentos de longitudes diferentes y tratas de unirlos por sus extremos.

Intenta, por ejemplo, construir un triángulo con tres segmentos de longitudes de 3, 5 y 10 cm respectivamente. Notarás que si fijas cada uno de los segmentos de menor longitud (3 y 5 cm) a cada uno de los extremos del segmento mayor, estos no logran unirse en sus extremos libres, es decir que resultan demasiado cortos. (ver figura)



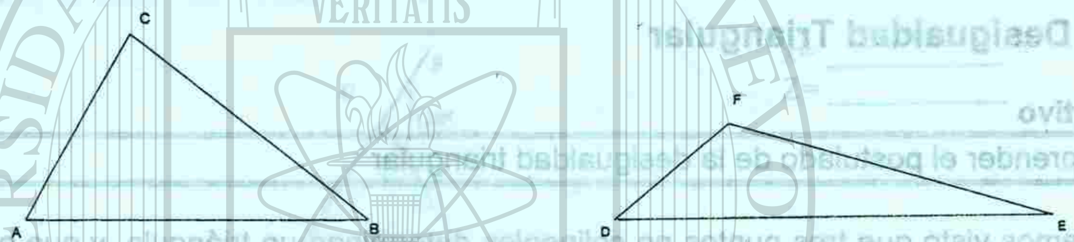
Intentémoslo de otra manera:

Traza un triángulo cualquiera, mide los tres lados con una regla graduada, suma las longitudes de dos de sus lados. Podemos afirmar que dicha suma es mayor que la longitud del tercer lado.
Esta desigualdad se cumple para todo triángulo y lo aceptamos como un postulado, conocido como

DESIGUALDAD TRIANGULAR

En un triángulo cualquiera, la suma de las longitudes de dos de sus lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado.

Consideremos las siguientes figuras:



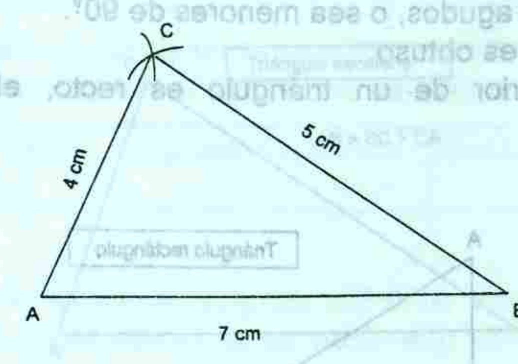
Donde: AC + CB > AB y DF + FE > DE

Observación: En el triángulo DEF podríamos hacer una modificación; dejar DE con la misma longitud, pero cambiar la posición del vértice F de modo que se sitúe muy cerca del lado DE. Entonces la suma de DF + FE disminuiría, pero se mantendría mayor que DE, es decir que la desigualdad triangular seguiría siendo válida.

Ejemplo 1.
Explica por qué existe un triángulo cuyos lados miden 7 cm., 4 cm. y 5 cm., y trázalo.

El mayor lado sería 7 cm.

Como 7 < 4 + 5, se cumple la desigualdad triangular y el triángulo existe.
Para dibujarlo trazamos con la regla graduada un segmento cuya longitud sea igual a la de uno de los tres lados (segmentos de línea) dados, por ejemplo el de 7 cm. Sea éste AB. Ahora tomamos el compás: Haciendo centro en A, trazamos un arco de circunferencia, cuyo radio sea 4 cm. y haciendo centro en B trazamos otro arco de radio 5 cm.
Los dos arcos tienen que cortarse: el punto y donde lo hacen es, precisamente, en el tercer vértice, es decir, en C.



Seguro haz oído decir y haz repetido y aplicado muchísimas veces que la distancia más corta entre dos puntos está determinado por la línea recta. Intenta demostrarlo ahora que ya conoces la desigualdad triangular.
El siguiente resultado, que aceptaremos también como postulado, resulta de gran aplicación en la Geometría Plana:

Postulado

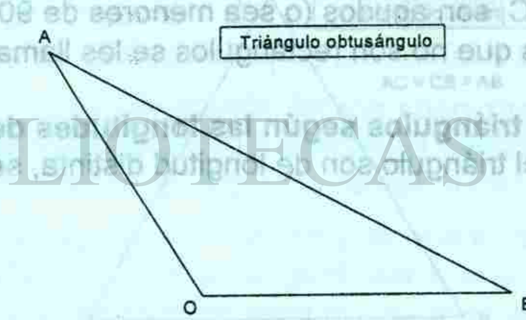
En un triángulo cualquiera Δ ABC, el ángulo $\angle$ A tiene mayor amplitud que el ángulo $\angle$ B, sí y sólo sí el lado BC (opuesto a $\angle$ A) tiene mayor longitud que el lado AC (opuesto a $\angle$ B). Es decir, a mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto, y viceversa.

1.9. Clasificación de triángulos

Objetivo

Clasificar los triángulos según sus ángulos y las longitudes de sus lados.

Los triángulos se clasifican según sus ángulos y según sus lados. Veamos las diferentes clasificaciones:
Clasificación de los triángulos según sus ángulos
- Si en un triángulo hay un ángulo obtuso se le llama **obtusángulo**. Así :

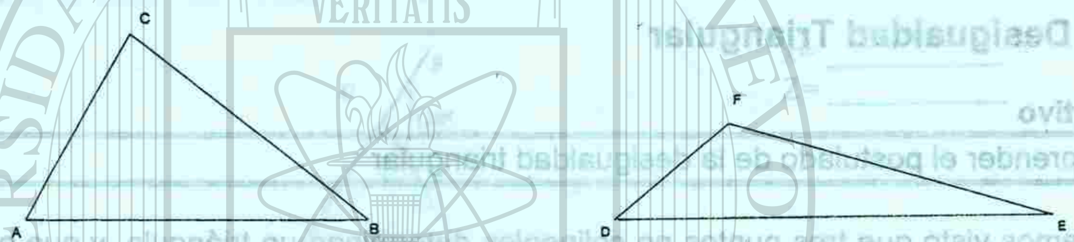


Traza un triángulo cualquiera, mide los tres lados con una regla graduada, suma las longitudes de dos de sus lados. Podemos afirmar que dicha suma es mayor que la longitud del tercer lado.
Esta desigualdad se cumple para todo triángulo y lo aceptamos como un postulado, conocido como

DESIGUALDAD TRIANGULAR

En un triángulo cualquiera, la suma de las longitudes de dos de sus lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado.

Consideremos las siguientes figuras:



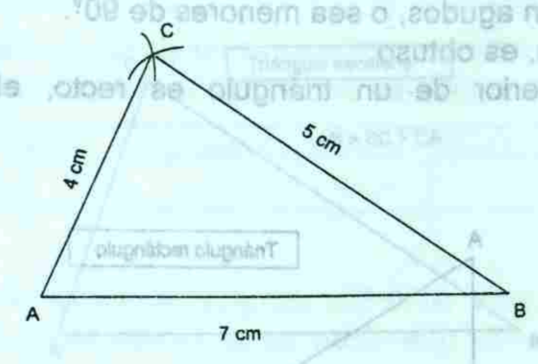
Donde: AC + CB > AB y DF + FE > DE

Observación: En el triángulo DEF podríamos hacer una modificación; dejar DE con la misma longitud, pero cambiar la posición del vértice F de modo que se sitúe muy cerca del lado DE. Entonces la suma de DF + FE disminuiría, pero se mantendría mayor que DE, es decir que la desigualdad triangular seguiría siendo válida.

Ejemplo 1.
Explica por qué existe un triángulo cuyos lados miden 7 cm., 4 cm. y 5 cm., y trázalo.

El mayor lado sería 7 cm.

Como 7 < 4 + 5, se cumple la desigualdad triangular y el triángulo existe.
Para dibujarlo trazamos con la regla graduada un segmento cuya longitud sea igual a la de uno de los tres lados (segmentos de línea) dados, por ejemplo el de 7 cm. Sea éste AB. Ahora tomamos el compás: Haciendo centro en A, trazamos un arco de circunferencia, cuyo radio sea 4 cm. y haciendo centro en B trazamos otro arco de radio 5 cm.
Los dos arcos tienen que cortarse: el punto y donde lo hacen es, precisamente, en el tercer vértice, es decir, en C.



Seguro haz oído decir y haz repetido y aplicado muchísimas veces que la distancia más corta entre dos puntos está determinado por la línea recta. Intenta demostrarlo ahora que ya conoces la desigualdad triangular.
El siguiente resultado, que aceptaremos también como postulado, resulta de gran aplicación en la Geometría Plana:

Postulado

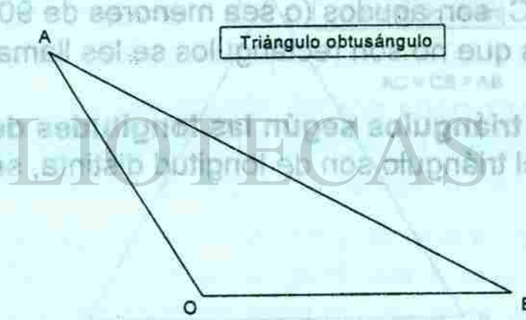
En un triángulo cualquiera Δ ABC, el ángulo $\angle$ A tiene mayor amplitud que el ángulo $\angle$ B, sí y sólo sí el lado BC (opuesto a $\angle$ A) tiene mayor longitud que el lado AC (opuesto a $\angle$ B). Es decir, a mayor ángulo corresponde mayor lado opuesto, y viceversa.

1.9. Clasificación de triángulos

Objetivo

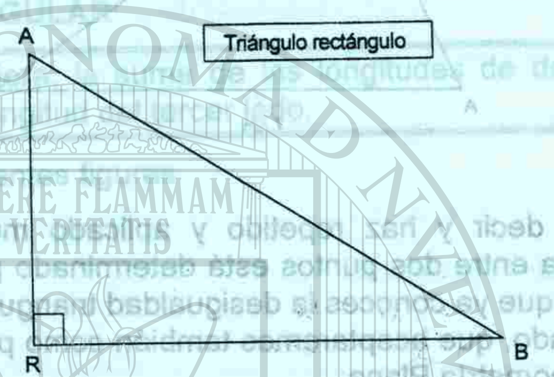
Clasificar los triángulos según sus ángulos y las longitudes de sus lados.

Los triángulos se clasifican según sus ángulos y según sus lados. Veamos las diferentes clasificaciones:
Clasificación de los triángulos según sus ángulos
- Si en un triángulo hay un ángulo obtuso se le llama **obtusángulo**. Así :



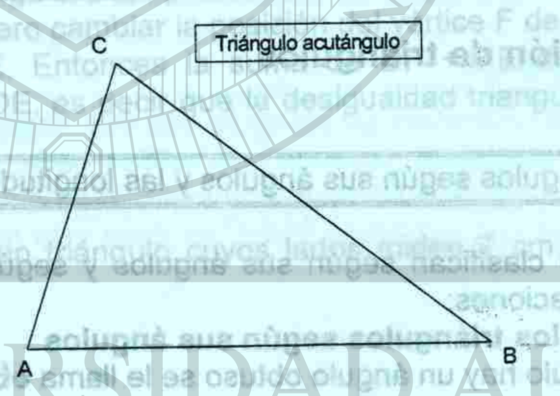
Donde: $\angle A$ y $\angle B$ son agudos, o sea menores de 90°.
Y el $\angle O > 90°$, o sea, es obtuso.

- Si un ángulo interior de un triángulo es recto, el triángulo es llamado **rectángulo**. Así:



Donde $\angle A$ y $\angle B$, son agudos (menores de 90°).
Y el $\angle R$ es igual a 90°, o sea un ángulo recto.

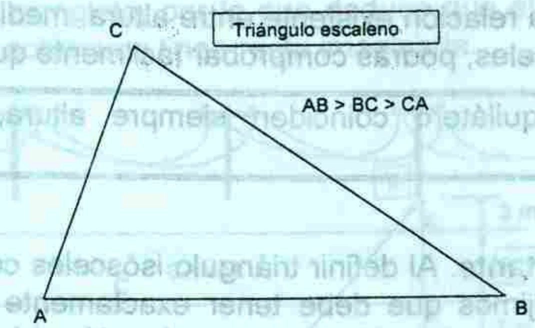
- Si en un triángulo, los tres ángulos interiores son agudos, se le llama **acutángulo**. Así:



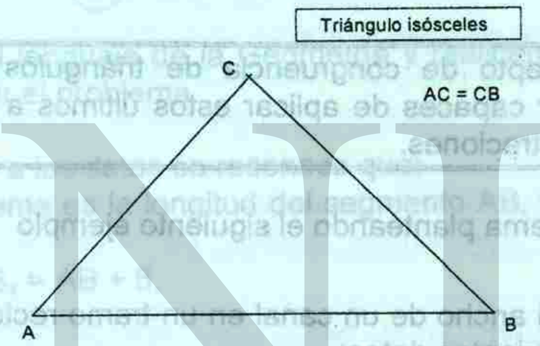
Donde $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$, son agudos (o sea menores de 90°).
Nota: A los triángulos que no son rectángulos se les llama **oblicuángulos**.

Clasificación de los triángulos según las longitudes de sus lados

- Si los tres lados del triángulo son de longitud distinta, se le denomina **escaleno**.



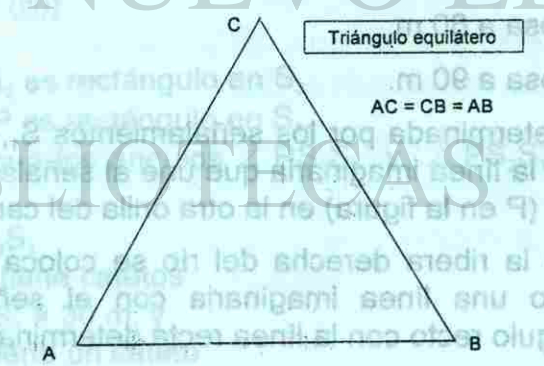
- Si en el triángulo hay dos lados iguales, se dice que éste es **isósceles**. Al tercer lado se le llama base del triángulo. En general a cualquier lado de un triángulo se le puede llamar base del triángulo.



Importante: Observa que decimos que hay dos lados iguales pero no le impusimos ninguna condición a la longitud del tercer lado.
Como ejercicio interesante te recomendamos comprobar que

En un triángulo isósceles de base AB coinciden la altura h_{AB}, la mediana m_{AB}, la mediatriz M_{AB} y la bisectriz del ángulo $\angle ACB$ opuesto al lado AB.

- Si los tres lados son iguales, se dice que el triángulo es **equilátero**.



Si ya comprobaste la relación existente entre altura, mediana, mediatriz y bisectriz en un triángulo isósceles, podrás comprobar fácilmente que

En un triángulo equilátero coinciden siempre altura, mediana, mediatriz y bisectriz.

Observación importante. Al definir triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados iguales, no dijimos que debe tener exactamente o solamente dos lados iguales. Hacemos esta aclaración porque **todo triángulo equilátero es también isósceles**, puesto que, como tiene sus tres lados iguales, es cierto que tiene también dos lados iguales.

1.10. Congruencia de triángulos

Objetivo

Dominar el concepto de congruencia de triángulos y los teoremas sobre y congruencia y ser capaces de aplicar estos últimos a la resolución de ejercicios prácticos y demostraciones.

Iniciaremos este tema planteando el siguiente ejemplo

Se desea medir el ancho de un canal en un tramo recto del mismo, y para ello se dispone de los siguientes datos:

(i) En la ribera izquierda del canal y a una distancia de 3 m de la misma se encuentra una hilera de postes eléctricos.

(ii) En la ribera derecha del canal y también a una distancia de tres metros del mismo se encuentran señaladores de camino (S_1, S_2 y S_3 en la figura) que marcan cada 30 metros la distancia que falta para llegar a una curva peligrosa. Es decir, el texto de los señalamientos dice:

S_1: Curva peligrosa a 30 m,

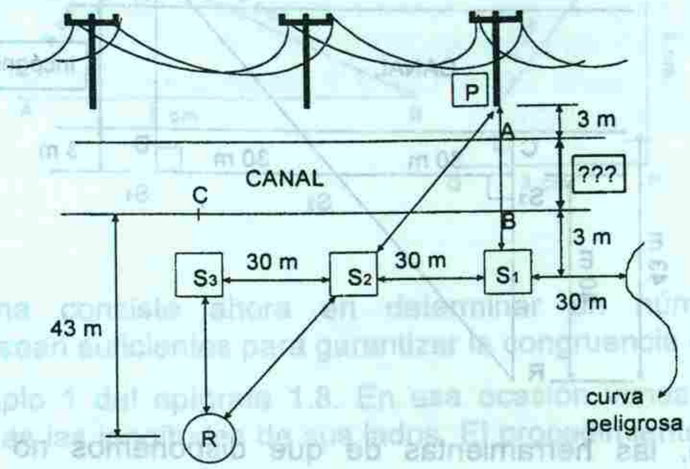
S_2: Curva peligrosa a 60 m,

S_3: Curva peligrosa a 90 m.

(iii) La línea recta determinada por los señalamientos S_1, S_2 y S_3 se encuentra en ángulo recto con la línea imaginaria que une al señalamiento S_1 con uno de los postes eléctricos (P en la figura) en la otra orilla del canal.

(iv) A 43 metros de la ribera derecha del río se coloca un observador (R en la figura), formando una línea imaginaria con el señalamiento S_3, que se encuentra en ángulo recto con la línea recta determinada por los señalamientos S_1, S_2 y S_3.

(v) Al mirar hacia el poste P, el observador descubre que el señalamiento S_2 no le permite ver el poste completo, por lo que deduce que él, el señalamiento y el poste se encuentran sobre una línea recta imaginaria.



Traslademos los datos al lenguaje de la Geometría y realicemos un dibujo plano para tratar de comprender el problema.

En la figura y de acuerdo a los datos se reconoce que:

- La incógnita del problema es la longitud del segmento AB. Pero $AP = BS_1 = 3$ m (por (i) y (ii)) y
  $PS_1 = AB + AP + BS_1 = AB + 6.$
  Entonces
  $AB = PS_1 - 6.$ (1)
- Por otra parte, se conoce que
  $RC = 43$ m (por (iv)),
  $CS_3 = 3$ m (por (ii)) y
  $RC = RS_3 + S_3C$
  entonces
  $RS_3 = 40$m. (2)
- Además
  $RS_3 \perp S_3S_2$ (por (iv)) y (3)
  $S_2S_1 \perp PS_1$ (por (iii)) (4)
  entonces
  el triángulo ΔRS_3S_2 es rectángulo en S_3
  el triángulo ΔS_2S_1P es rectángulo en S_1.
- Por (v) se observa que los ángulos $\angle RS_2S_3$ y $\angle PS_2S_1$ son opuestos por el vértice. Entonces
  $\angle RS_2S_3 = \angle PS_2S_1$ (5)
- El triángulo ΔRS_3S_2 tiene catetos
  $RS_3 = 40$ m y $S_3S_2 = 30$ m, y (6)
  el triángulo ΔS_2S_1P tiene un cateto
  $S_2S_1 = 30$ m (por (ii)). (7)

Si ya comprobaste la relación existente entre altura, mediana, mediatriz y bisectriz en un triángulo isósceles, podrás comprobar fácilmente que

En un triángulo equilátero coinciden siempre altura, mediana, mediatriz y bisectriz.

Observación importante. Al definir triángulo isósceles como aquel que tiene dos lados iguales, no dijimos que debe tener exactamente o solamente dos lados iguales. Hacemos esta aclaración porque **todo triángulo equilátero es también isósceles**, puesto que, como tiene sus tres lados iguales, es cierto que tiene también dos lados iguales.

1.10. Congruencia de triángulos

Objetivo

Dominar el concepto de congruencia de triángulos y los teoremas sobre y congruencia y ser capaces de aplicar estos últimos a la resolución de ejercicios prácticos y demostraciones.

Iniciaremos este tema planteando el siguiente ejemplo

Se desea medir el ancho de un canal en un tramo recto del mismo, y para ello se dispone de los siguientes datos:

(i) En la ribera izquierda del canal y a una distancia de 3 m de la misma se encuentra una hilera de postes eléctricos.

(ii) En la ribera derecha del canal y también a una distancia de tres metros del mismo se encuentran señaladores de camino (S_1, S_2 y S_3 en la figura) que marcan cada 30 metros la distancia que falta para llegar a una curva peligrosa. Es decir, el texto de los señalamientos dice:

S_1: Curva peligrosa a 30 m,

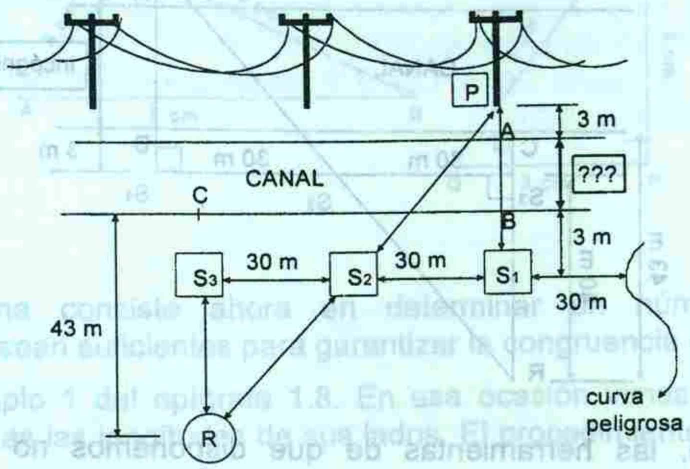
S_2: Curva peligrosa a 60 m,

S_3: Curva peligrosa a 90 m.

(iii) La línea recta determinada por los señalamientos S_1, S_2 y S_3 se encuentra en ángulo recto con la línea imaginaria que une al señalamiento S_1 con uno de los postes eléctricos (P en la figura) en la otra orilla del canal.

(iv) A 43 metros de la ribera derecha del río se coloca un observador (R en la figura), formando una línea imaginaria con el señalamiento S_3 , que se encuentra en ángulo recto con la línea recta determinada por los señalamientos S_1, S_2 y S_3.

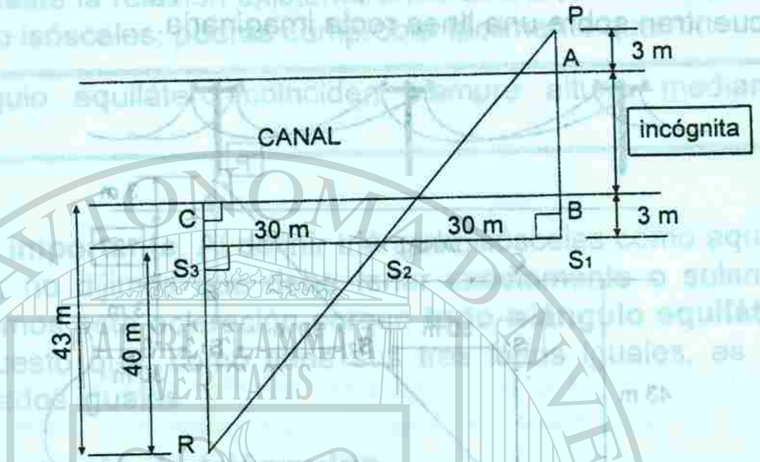
(v) Al mirar hacia el poste P, el observador descubre que el señalamiento S_2 no le permite ver el poste completo, por lo que deduce que él, el señalamiento y el poste se encuentran sobre una línea recta imaginaria.



Traslademos los datos al lenguaje de la Geometría y realicemos un dibujo plano para tratar de comprender el problema.

En la figura y de acuerdo a los datos se reconoce que:

- La incógnita del problema es la longitud del segmento AB. Pero $AP = BS_1 = 3$ m (por (i) y (ii)) y
  $PS_1 = AB + AP + BS_1 = AB + 6$.
  Entonces
  $AB = PS_1 - 6$. (1)
- Por otra parte, se conoce que
  $RC = 43$ m (por (iv)),
  $CS_3 = 3$ m (por (ii)) y
  $RC = RS_3 + S_3C$
  entonces
  $RS_3 = 40$m. (2)
- Además
  $RS_3 \perp S_3S_2$ (por (iv)) y (3)
  $S_2S_1 \perp PS_1$ (por (iii)) (4)
  entonces
  el triángulo ΔRS_3S_2 es rectángulo en S_3
  el triángulo ΔS_2S_1P es rectángulo en S_1.
- Por (v) se observa que los ángulos $\angle RS_2S_3$ y $\angle PS_2S_1$ son opuestos por el vértice. Entonces
  $\angle RS_2S_3 = \angle PS_2S_1$ (5)
- El triángulo ΔRS_3S_2 tiene catetos
  $RS_3 = 40$ m y $S_3S_2 = 30$ m, y (6)
  el triángulo ΔS_2S_1P tiene un cateto
  $S_2S_1 = 30$ m (por (ii)). (7)



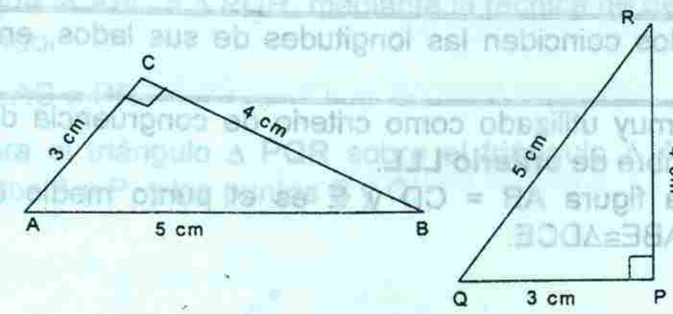
Evidentemente, las herramientas de que disponemos no nos permiten aun resolver este problema. Sin embargo, si pudiésemos encontrar una relación entre los triángulos ΔRS_3S_2 y ΔS_2S_1P que nos permitiese relacionar de alguna manera la distancia RS_3 con la distancia PS_1, seríamos capaces de encontrar la medida buscada.

Si observamos detenidamente el dibujo, vemos que los triángulos rectángulos ΔRS_3S_2 y ΔS_2S_1P "parecen ser iguales", por lo que la distancia buscada debe ser $PS_1 = 40$ m.

Veamos a continuación la teoría que nos permite solucionar este tipo de problemas:

- Si en dos triángulos cualesquiera ΔABC y ΔPQR se puede establecer una correspondencia entre sus lados y ángulos de manera que a cada lado del triángulo ΔABC corresponda uno y sólo un lado del triángulo ΔPQR de igual longitud, y a cada ángulo del triángulo ΔABC corresponda uno y sólo un lado del triángulo ΔPQR de igual medida, entonces se dice que los triángulos ΔABC y ΔPQR son **congruentes** y se denota este hecho por
- $\Delta ABC \cong \Delta PQR$.
- Cada lado o ángulo del triángulo ΔPQR se dice **homólogo** al lado o ángulo correspondiente en el triángulo ΔABC.

Así, en la figura es $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, siendo homólogos los lados AB y QR, BC y PR, AC y PQ, y los ángulos $\angle CAB$ y $\angle PQR$, $\angle ABC$ y $\angle QRP$, $\angle ACB$ y $\angle QPR$.



Nuestro problema consiste ahora en determinar un número mínimo de condiciones que sean suficientes para garantizar la congruencia de triángulos.

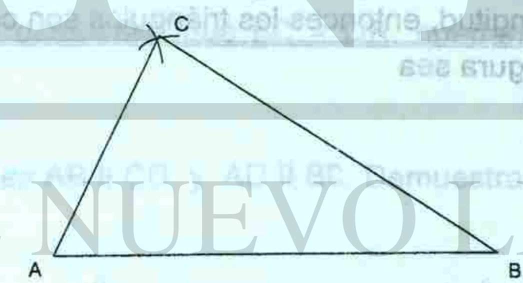
Observa el ejemplo 1 del epígrafe 1.8. En esa ocasión vimos cómo dibujar un triángulo conocidas las longitudes de sus lados. El procedimiento seguido fue (ver figura) :

1er Paso: Se traza el segmento AB de longitud conocida.

2do Paso: Con centro en A y radio igual a la longitud de AC se traza un sector de circunferencia a un lado del segmento AB.

3er Paso: Al mismo lado del segmento AB y con centro en B y radio igual a la longitud del segmento BC se traza otro sector de circunferencia.

4to Paso: Los sectores de circunferencia trazados en los pasos 2 y 3 se cortan en un punto único que corresponde al tercer vértice (C) del triángulo ΔABC.



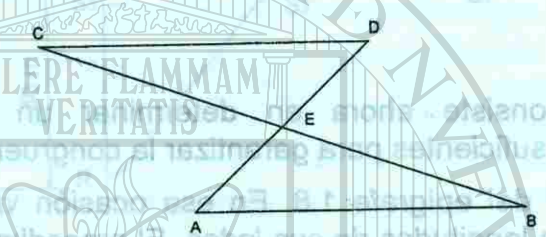
De ese modo se observa que un triángulo está totalmente determinado por las longitudes de sus lados. Por esa razón la coincidencia de las longitudes de los de los triángulos implica de modo automático la coincidencia de la medida de sus ángulos homólogos. Así, es válido el siguiente

Teorema

Si en dos triángulos coinciden las longitudes de sus lados, entonces ellos son congruentes.

Este teorema es muy utilizado como criterio de congruencia de triángulos y se conoce con el nombre de **criterio LLL**.

Ejemplo 1: En la figura AB = CD y E es el punto medio de AD y de BC. Demuestre que $\Delta ABE \cong \Delta DCE$.



Demostración: En este problema se tiene que

AE = ED por ser E punto medio de AD
BE = EC por ser E punto medio de BC
AB = CD por hipótesis.

Entonces por el criterio LLL es

$\Delta ABE \cong \Delta DCE$.

■

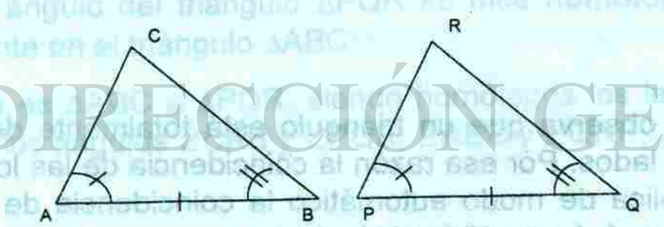
El siguiente teorema se conoce como **criterio ALA**.

Teorema

Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales y el lado comprendido entre esos ángulos es de igual longitud, entonces los triángulos son congruentes.

Demostración: En la figura sea

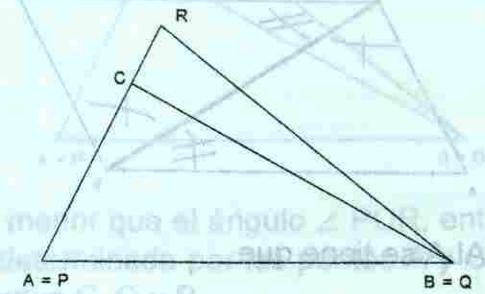
$\angle CAB = \angle RPQ$
$\angle CBA = \angle RQP$
AB = PQ.



Demostraremos que $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, mediante la técnica de demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $AC \neq PR$.

Traslademos ahora el triángulo ΔPQR sobre el triángulo ΔABC de modo que coincidan los puntos A y P, y los puntos B y Q.



En esta traslación el punto R quedará situado sobre la recta determinada por los puntos A y C, pues $\angle A = \angle P$.

Como hemos supuesto que $AC \neq PR$, entonces los puntos C, Q y R determinan un triángulo, de manera que el ángulo $\angle CQR$ tiene una amplitud positiva (no nula).

Pero entonces es

$\angle PQR = \angle ABC + \angle CQR$,

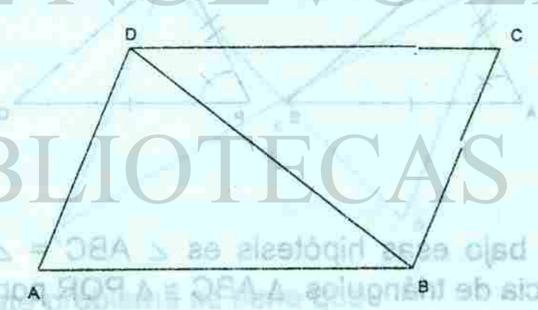
lo cual contradice la igualdad de los ángulos $\angle PQR$ y $\angle ABC$.

Luego, tiene que ser AC = PR.

De manera análoga se demuestra que BC = QR, quedando así demostrado el teorema.

■

Ejemplo 2: En la figura es AB II CD y AD II BC. Demuestra que $\Delta ABD \cong \Delta CDB$.

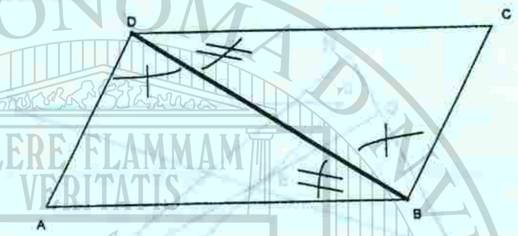


Demostración: En este problema se tiene que

$\angle ADB = \angle DBC$ (alternos internos entre las paralelas AD y BC cortadas por la transversal DB)

$\angle ABD = \angle CDB$ (alternos internos entre las paralelas AB y DC cortadas por la transversal DB)

El lado DB es común a ambos triángulos.



Entonces por el criterio ALA se tiene que

$\Delta ABD \cong \Delta CDB$ ■

Existe un tercer criterio de congruencia de triángulos conocido como **criterio LAL**.

Teorema

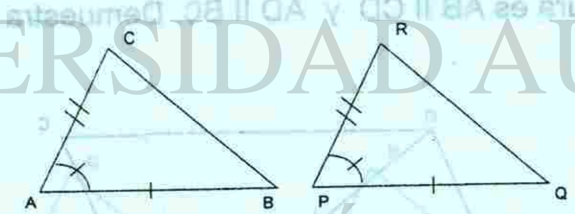
Si dos triángulos tienen dos lados con iguales longitudes y el ángulo comprendido tiene igual magnitud, entonces ellos son congruentes.

Demostración: En la figura sea

$\angle CAB = \angle RPQ$

$AB = PQ$

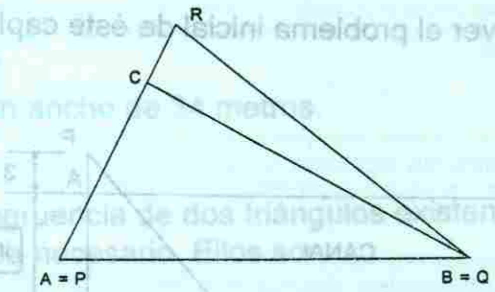
$AC = PR$.



Demostraremos que bajo esas hipótesis es $\angle ABC = \angle PQR$, con lo que se obtendría la congruencia de triángulos $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ por el criterio ALA.

Utilicemos nuevamente la técnica de demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que el ángulo $\angle ABC$ es menor que el ángulo $\angle PQR$, y traslademos el triángulo ΔPQR sobre el triángulo ΔABC de modo que coincidan los puntos A y P, y los puntos B y Q (ver figura).



Si el ángulo $\angle ABC$ es menor que el ángulo $\angle PQR$, entonces el punto R quedará situado sobre la recta determinada por los puntos A y C, formándose un triángulo determinado por los puntos C, Q y R.

Pero entonces sería

$PR = AC + CR$,

lo cual contradice la hipótesis de la igualdad de las longitudes de los lados AC y PC..

Luego, tiene que ser

$\angle ABC \geq \angle PQR$.

De manera análoga se demuestra que

$\angle ABC \leq \angle PQR$,

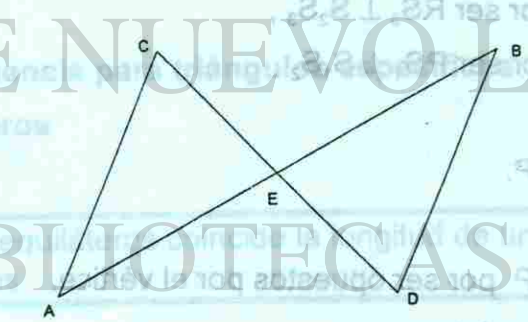
siendo así

$\angle ABC = \angle PQR$.

Aplicando entonces el criterio ALA se obtiene

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$. ■

Ejemplo 3: En la figura E es punto medio de AB y de CD. Demuestra que $\Delta AEC \cong \Delta BED$.



Demostración: En este problema se tiene que

$CE = ED$ por ser E punto medio de CD

$AE = EB$ por ser E punto medio de AB

$\angle AEC = \angle BED$ por ser opuestos por el vértice.

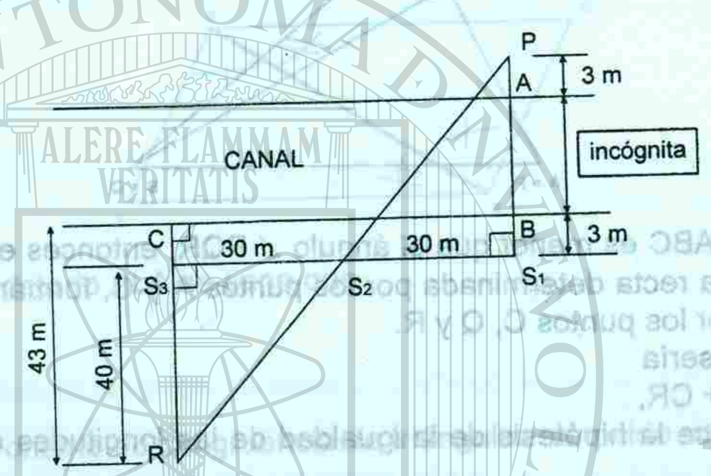
Entonces es

$\Delta AEC \cong \Delta BED$

por el criterio LAL.

■

Intentemos ahora resolver el problema inicial de éste capítulo:



Los resultados obtenidos en el análisis preliminar del problema son:

S_1S_2 = c= 30 m

RS_3 = 40 m

$RS_3 \perp S_2S_3$

$PS_1 \perp S_1S_2$

La incógnita es AB = (PS_1 - 6)

Analizando el problema desde el punto de vista de la congruencia de triángulos se tiene que

$\angle S_2S_3R = 90°$ por ser $RS_3 \perp S_2S_3$,

$\angle S_2S_1P = 90°$ por ser $PS_1 \perp S_1S_2$.

Entonces es

$\angle S_2S_3R = \angle S_2S_1P$.

Así mismo es

$\angle RS_2S_3 = \angle S_1S_2P$ por ser opuestos por el vértice.

Además, se conoce por dato que

$S_2S_1 = S_2S_3$ 30 m.

Entonces, por el criterio ALA se tiene que

$\Delta RS_2S_3 \cong \Delta P S_2S_1$.

De ahí que los lados homólogos PS_1 y RS_3 tengan igual longitud, es decir

$PS_1 = RS_3 = 40$ m,

y entonces es

AB = PS_1 - 6 = 34.

Luego, el canal tiene un ancho de 34 metros.

Resumen

Para determinar la congruencia de dos triángulos existen tres criterios que pueden ser aplicados según sea necesario. Ellos son:

Criterio	**igual magnitud de**
LLL	los tres lados iguales
ALA	dos ángulos y el lado comprendido de igual magnitud
LAL	dos lados y el ángulo comprendido de igual magnitud

Te recomendamos ahora que analices la posibilidad de simplificar estos criterios en el caso de triángulos específicos, por ejemplo, en los triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos.

Inténtalo primeramente por tí mismo. Para ello puedes preguntarte si serán congruentes todos los triángulos equiláteros, o isósceles, o rectángulos ; o que condición necesitarías para poder dibujar dos triángulos congruentes del mismo tipo.

A continuación te mostramos cuáles son esos criterios y te encargamos su demostración como ejercicio.

Criterios de congruencia para triángulos específicos

Triángulos equiláteros

Corolario

Si en dos triángulos equiláteros coincide la longitud de uno de sus lados, entonces ellos son congruentes.

Triángulos isósceles

Corolario

Si en dos triángulos isósceles coinciden las magnitudes de un lado y de uno de sus ángulos, entonces ellos son congruentes.

Triángulos rectángulos

Corolario

Dos triángulos rectángulos de catetos de igual longitud son congruentes.

Corolario

Si en dos triángulos rectángulos coinciden las longitudes de la hipotenusa y de uno de sus catetos, entonces ellos son congruentes.

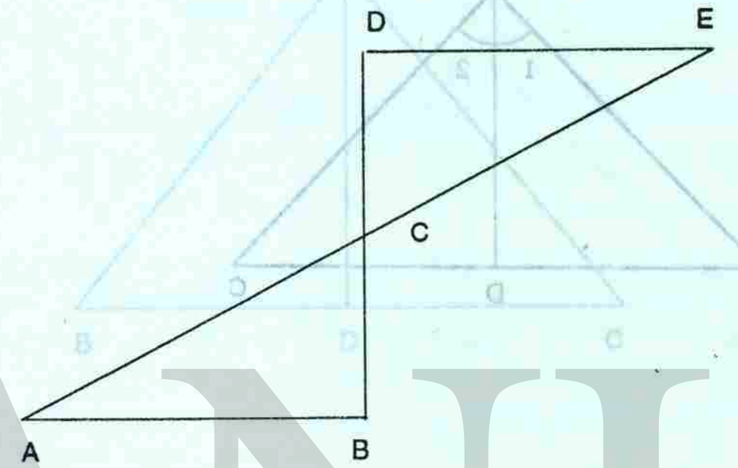
Corolario

Si en dos triángulos rectángulos coincide uno de sus ángulos agudos y la longitud de uno de sus lados, entonces ellos son congruentes.

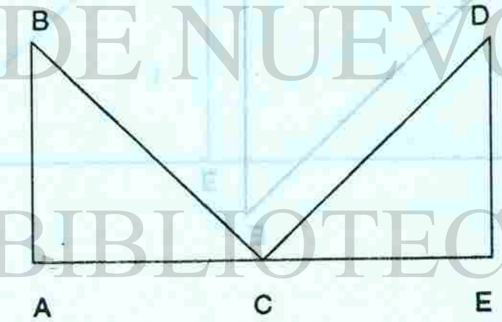
Mas adelante veremos otra aplicación importantísima de la congruencia de triángulos a la demostración del conocido Teorema de Pitágoras.

Ejercicio 1. 10

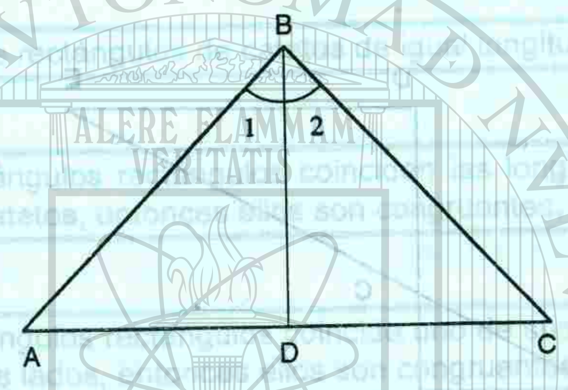
1) Si en la figura $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ se bisectan mutuamente en C, $\overline{DE} \perp \overline{BD}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BD}$. Demuestra que $\Delta ABC \cong \Delta EDC$.



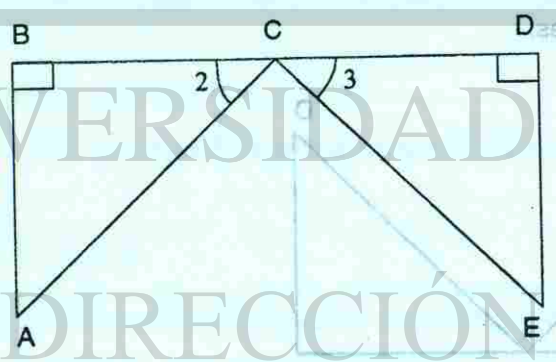
2) Si en la figura $\overline{AB} \perp \overline{AE}$; $\overline{DE} \perp \overline{AE}$, C es el punto medio de $\overline{AE}$ y $< ACB \cong < ECD$. Demuestra que los triángulos ΔACB y ΔECD son congruentes.



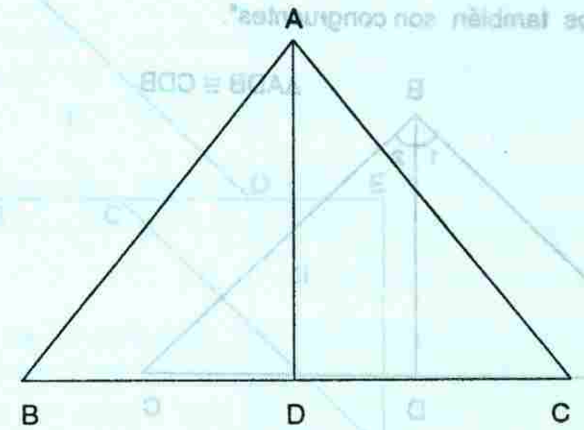
3) En la figura $\overline{BD}$ biseca a el ángulo ABC y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Demuestra que los triángulos Δ ADB Δ CDB son congruentes.



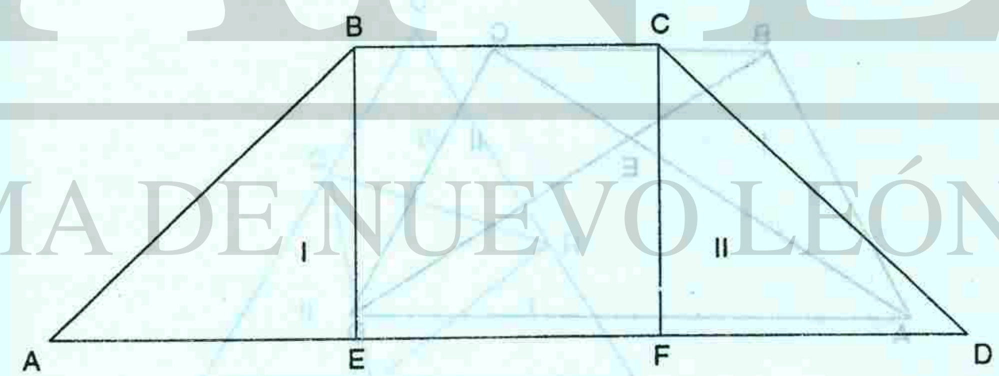
4) Si en la figura C es el punto medio de $\overline{BD}$ y $< 2 \cong < 3$, demuestra que los triángulos Δ ABC y Δ EDC son congruentes.



5) En la figura, si $AB \cong AC$ y AD es una mediana, demuestra que los triángulos ΔABD y ΔACD son congruentes.



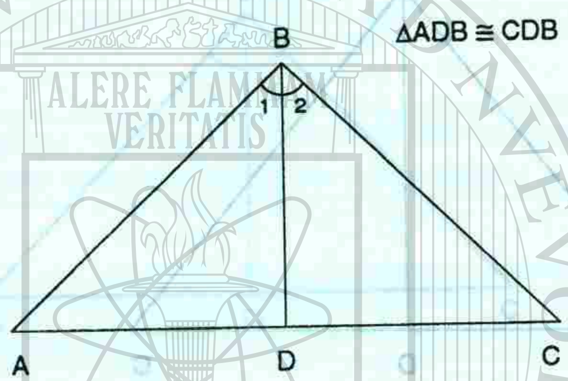
6) Si en la figura $\overline{BE} \perp \overline{AD}$, $\overline{CF} \perp \overline{AD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{AD}$ está trisecado, demuestra que los triángulos I y II son congruentes.



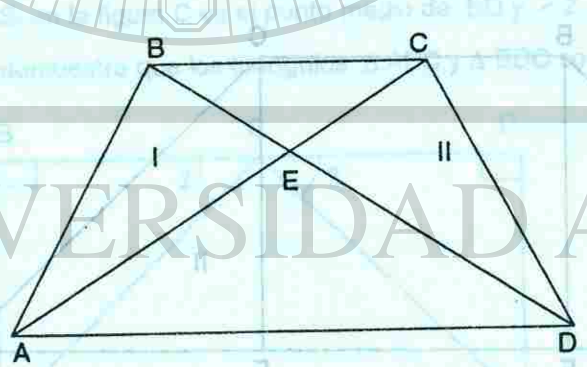
7) Sea el triángulo Δ ABC isósceles, donde el segmento de recta $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, con bisectriz $\underline{BD}$, demuestra el siguiente teorema:

"Si dos lados de un triángulo son congruentes, los ángulos opuestos a ellos también son congruentes".

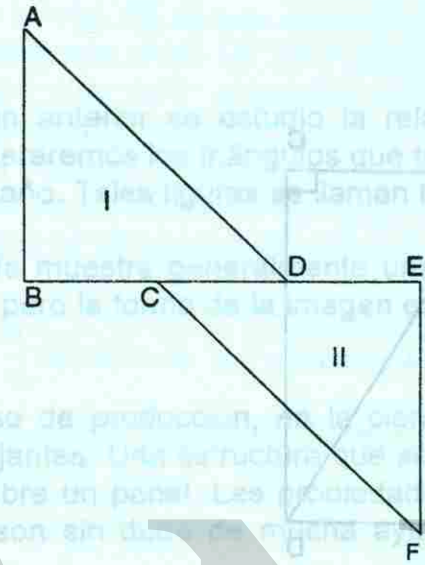
$\Delta ADB \cong CDB$



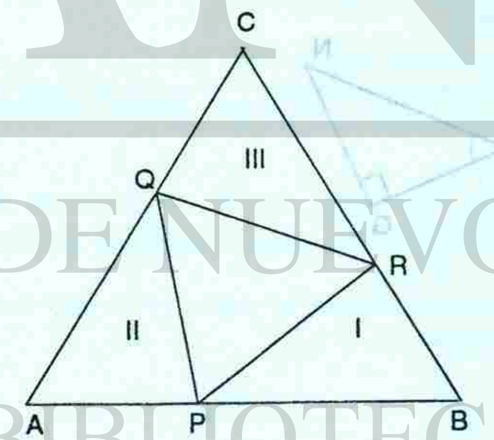
8) Si BE $\cong$ EC, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$, demostrar que Δ I $\cong \Delta$ II.



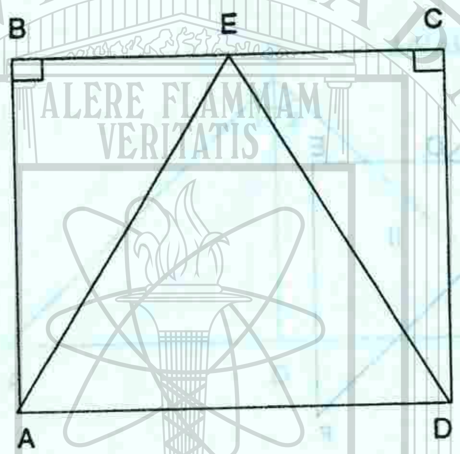
9) Si AB $\perp$ BE , $\overline{EF} \perp$ BE, $\overline{BC} \cong$ DE y $\overline{AB} \cong \overline{EF}$, demostrar que los triángulos I y II son congruentes.



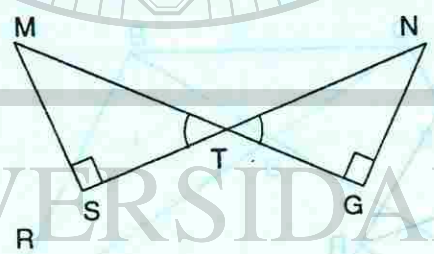
10) Sea el triángulo ΔABC equilatero con $\overline{AP} \cong \overline{CQ} \cong \overline{BR}$, demuestra que los triángulos I, II y III son congruentes.



11) Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$, E es el puntomedio de $\overline{BC}$, demostrar que $\triangle AEB \cong CED$.



12) Si en la figura $\overline{MS} \perp \overline{SN}$; $\overline{NG} \perp \overline{MG}$ y $\overline{ST} \cong \overline{TG}$, demostrar que los triángulo Δ STM y Δ GTN son congruentes.



CAPITULO 2

GEOMETRÍA PLANA
SEGUNDA PARTE

En la sección anterior se estudio la relación de congruencia entre triángulos. Ahora consideraremos los triángulos que tienen la misma forma , pero que pueden diferir en tamaño. Tales figuras se llaman triángulos semejantes.

Una fotografía muestra generalmente una imagen menor o mayor que el objeto fotografiado, pero la forma de la imagen es precisamente la del objeto en términos geométricos.

En el proceso de producción, en la ciencia etc., se trabaja continuamente con figuras semejantes. Una estructura que se va a diseñar, primero se traza a escala su diseño sobre un papel. Las propiedades de razón y proporción de las figuras semejantes son sin duda de mucha ayuda para resolver problemas de la vida diaria.

2.1 Teorema de Thales

Objetivo

Recordar los conceptos de razón, proporción y el Teorema de Thales.

Imagina ahora que deseas medir la altura de uno de los postes eléctricos que se mencionan en el problema 1 del epígrafe 1.10. Es obvio que subir al poste es una estrategia demasiado peligrosa para intentarla. Por otra parte, no es fácil encontrar puntos de referencia que permitan construir triángulos congruentes, a causa de la posición vertical del poste. Sin embargo, también esta vez acude a nuestra ayuda la Geometría Plana a través de la semejanza de triángulos.

Recordemos primeramente lo que conocemos acerca de la proporcionalidad de segmentos.

- Llamamos **razón de dos números reales a y b** al cociente $\frac{a}{b}$ (b ≠ 0).
- Se llama entonces **razón de dos segmentos** AB y CD a la razón de sus longitudes $\frac{AB}{CD}$.
- Una **proporción** es una expresión numérica de la forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b ≠ 0 y d ≠ 0).
- Se dice que dos pares de segmentos AB, CD y PQ, RS son **proporcionales** si es válida la proporción de sus longitudes, es decir, si $\frac{AB}{CD} = \frac{PQ}{RS}$.

Uno de los teoremas más usados en Geometría Plana es el teorema de Thales que te recordamos a continuación.

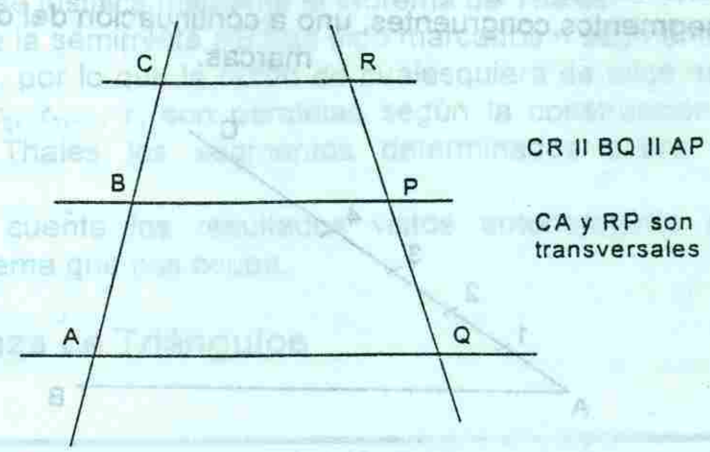
Teorema de Thales

Si a rectas paralelas las cortan transversales, estas determinan segmentos proporcionales.

El recíproco también es válido. Es decir, si los segmentos determinados por transversales que cortan varias rectas son proporcionales, entonces estas últimas son paralelas.

Así por ejemplo en la figura se tiene

$$\frac{BC}{AC} = \frac{QR}{PR}$$



A continuación te mostramos un ejemplo práctico de este resultado.

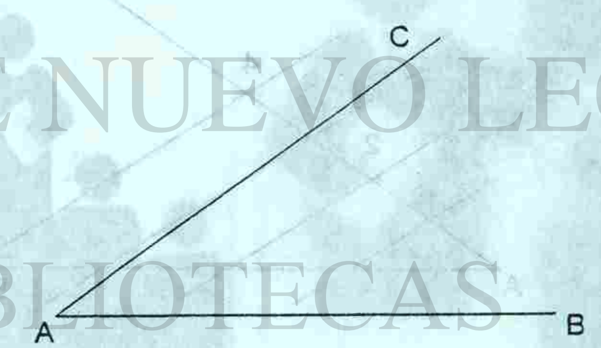
Ejemplo 1: Partición de un segmento en la razón dada

Dado un segmento AB, dividirlo en n segmentos de igual longitud, con la utilización exclusiva de regla y compás.

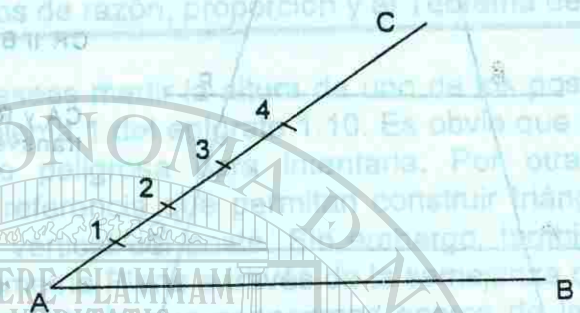
Te mostraremos como resolver este problema para n = 4.

1° Paso: Dibuja el segmento AB.

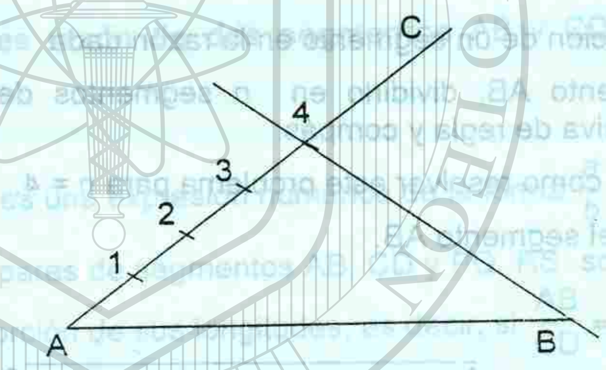
2° Paso: Dibuja un rayo AC con origen en A y formando un ángulo cualquiera con el segmento AB.



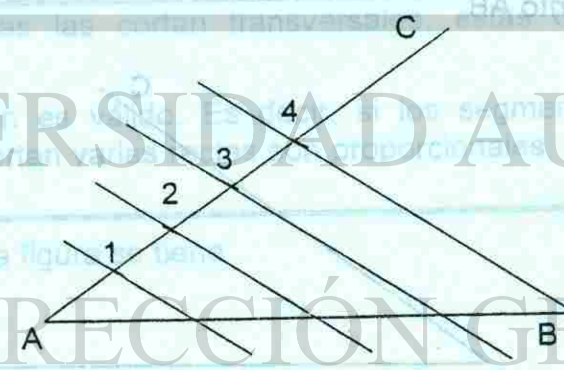
3° Paso: Con una abertura fija en el compás marca en AC (partiendo del punto A) 4 segmentos congruentes, uno a continuación del otro y numera las marcas.



4° Paso: Traza una recta que contenga al punto B y al punto numerado 4 sobre AC.



5° Paso: Traza rectas r_1, r_2, r_3, que sean paralelas a r_4 y que contengan a los puntos numerados 1, 2, 3 respectivamente.



6° Paso: Los puntos de intersección de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 con el segmento AB marcan la división del segmento AB en 4 segmentos iguales.

La posibilidad de aplicar la técnica aquí explicada para dividir un segmento en n partes iguales se justifica mediante el teorema de Thales.
Nota que sobre la semirrecta AB han sido marcados n segmentos consecutivos de igual magnitud, por lo que la razón de cualesquiera de ellos es 1. Por otra parte, las rectas r_1, r_2, r_3,..., r_n son paralelas según la construcción. Luego, según el Teorema de Thales los segmentos determinados sobre AB mantienen la proporción 1.
Tomando en cuenta los resultados vistos anteriormente podemos pasar a desarrollar el tema que nos ocupa.

2.2 Semejanza de Triángulos

Objetivo

Definir el concepto de semejanza de triángulos

Observa las siguientes figuras:


Fig A

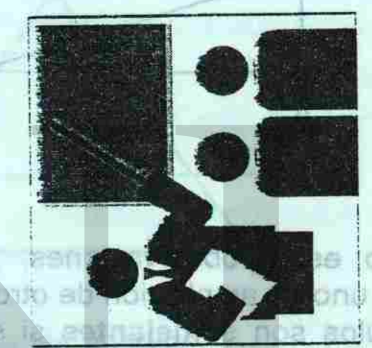


Fig. B

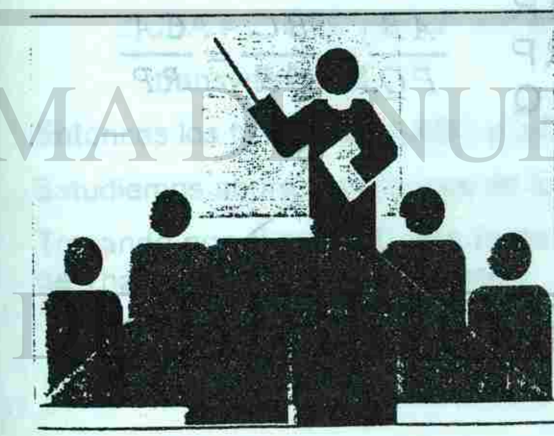


Fig. C

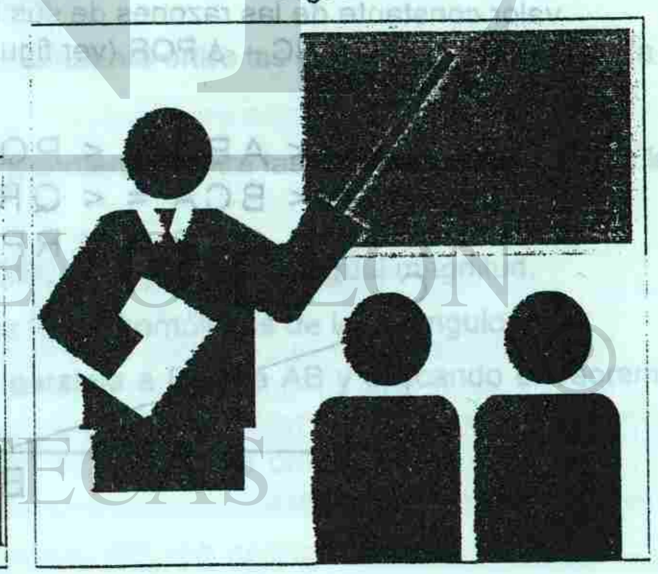
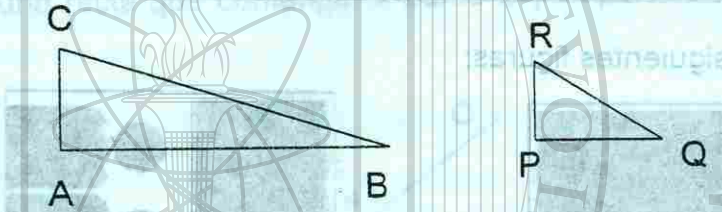


Fig. D

¿Cuáles son semejantes en tu opinión? ¿Cuáles dirías que son congruentes?
Efectivamente, las figuras A y B son congruentes, mientras que la figura D es sólo semejante a ellas, pues es más grande, la figura C no es semejante a ninguna de las anteriores.
¿Que criterio hemos aplicado?

- Consideramos que son congruentes las figuras que coinciden en todos sus puntos.
- Son semejantes las figuras que coinciden en su forma.

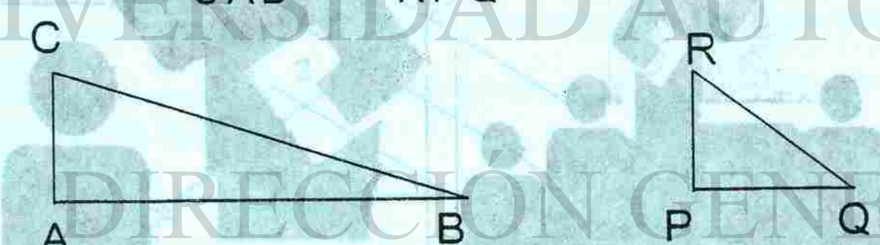
Según este criterio, dos triángulos equiláteros son siempre semejantes pero no siempre son congruentes (excepto cuando coinciden las longitudes de sus lados). Sin embargo, dos triángulos rectángulos no siempre son semejantes (ver figura).



Generalizando estas observaciones, podemos notar que dos triángulos son semejantes si uno es ampliación de otro, es decir:

* Dos triángulos son **semejantes** si sus ángulos son congruentes y los lados homólogos son proporcionales. En ese caso se llama **razón de semejanza** al valor constante de las razones de sus lados homólogos.
NOTACIÓN: Δ ABC ~ Δ PQR (ver figura):

$$< ABC = < PQR \qquad < BCA = < QRP \qquad < CAB = < RPQ \qquad \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$$



Δ ABC ~ Δ PQR.

2.3 Teorema Fundamental de Semejanza de Triángulos

Objetivo

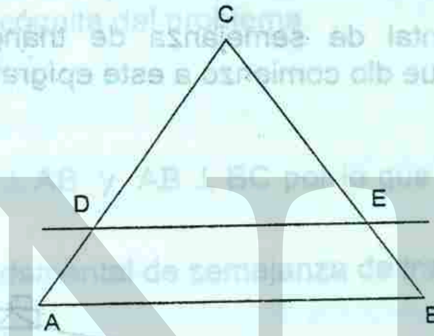
Comprender y aplicar el Teorema Fundamental de Semejanza de Triángulos.

Teorema

Toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros lados un triángulo semejante al primero y viceversa, es decir, si al trazar una recta en el interior de un triángulo se obtiene un triángulo semejante al primero entonces la recta trazada es paralela al lado del triángulo que no corta.

Demostración:

En la figura se tiene que DE || AB y se quiere demostrar que Δ ABC ~ Δ DEC.



Demostraremos primero la igualdad de los ángulos

$\angle$ C es común a ambos triángulos

$\angle$ CAB = $\angle$ CDE por ser correspondiente entre las paralelas AB y CD con la transversal AC.

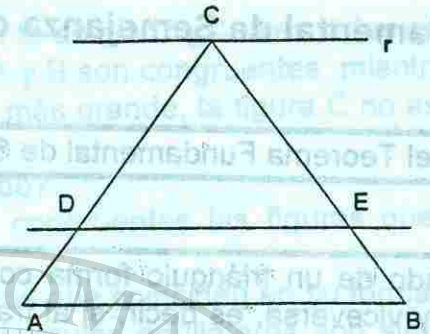
$\angle$ CBA = $\angle$ CED por ser correspondientes entre las paralelas AB y CD con la transversal CB.

Entonces los triángulos Δ ABC y Δ DEC tiene ángulos de igual magnitud.

Estudiemos ahora las razones de los lados homólogos de los triángulos.

Trazando por el punto C una recta paralela a DE y a AB y aplicando el Teorema de Thales (ver figura) se obtiene

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}$$



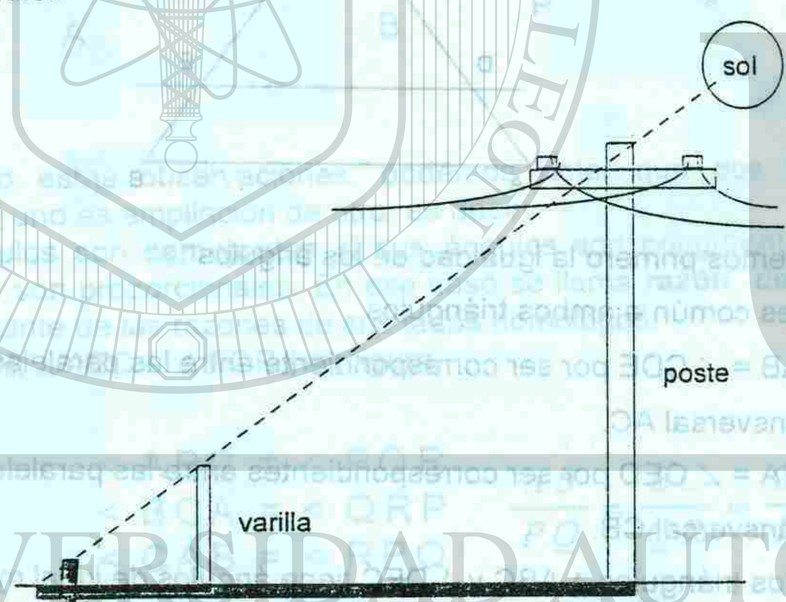
Entonces los triángulos Δ ABC y Δ DEC tienen ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales, lo cual demuestra que

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC.$$

■

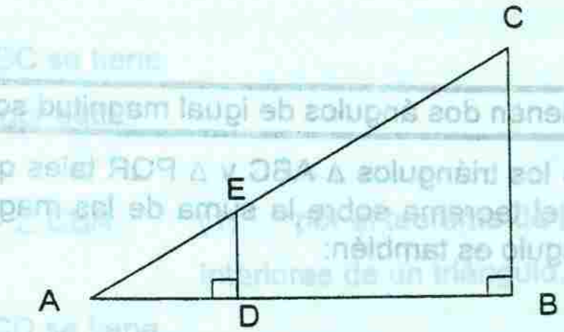
El teorema fundamental de semejanza de triángulos nos permite entonces resolver el problema que dio comienzo a este epígrafe.

Observa la figura:



Para calcular la altura del poste (que se encuentra colocado formando un ángulo recto con el suelo) aprovecharemos la sombra que este proyecta. Para ello fijaremos una varilla recta de longitud conocida en ángulo recto con el suelo de manera que el extremo de su sombra coincida con el extremo de la sombra del poste. (ver figura anterior)

De esta manera se forman dos triángulos rectángulos Δ ABC y Δ DEC, de los que se conoce que:



- DE representa la varilla por lo que su longitud es conocida.
- AD representa la sombra de la varilla y AB la sombra del poste, por lo que sus longitudes son fáciles de determinar y se pueden considerar conocidas.
- BC representa el poste del que se pretende calcular la altura, por lo que la longitud de BC es la incógnita del problema.

Resolución del problema:

Por construcción es $DE \perp AB$ y $AB \perp BC$ por lo que aplicando el teorema 1.4.1 se obtiene $DE \parallel BC$.

Entonces, el teorema fundamental de semejanza de triángulos nos asegura que:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$$

Por esta razón los lados homólogos de ambos triángulos son proporcionales, por lo que

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

de donde despejando CB se obtiene la fórmula para calcularlo.

$$CB = \frac{DE \bullet AB}{AD}$$

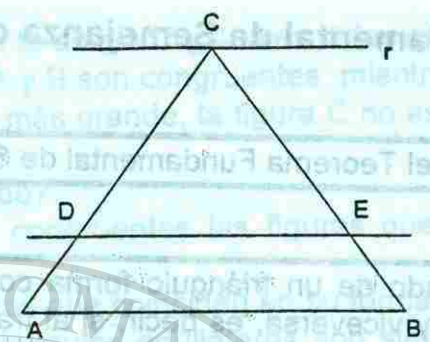
partiendo de las longitudes de DE, AB y AD que son conocidas.

2.4 Criterios de semejanza de triángulos

Objetivo

Dominar los criterios de semejanza de triángulos y aplicarlos en la resolución de ejercicios.

Al igual que en la congruencia, existen criterios que permiten determinar más fácilmente la semejanza de dos triángulos. Estos son:



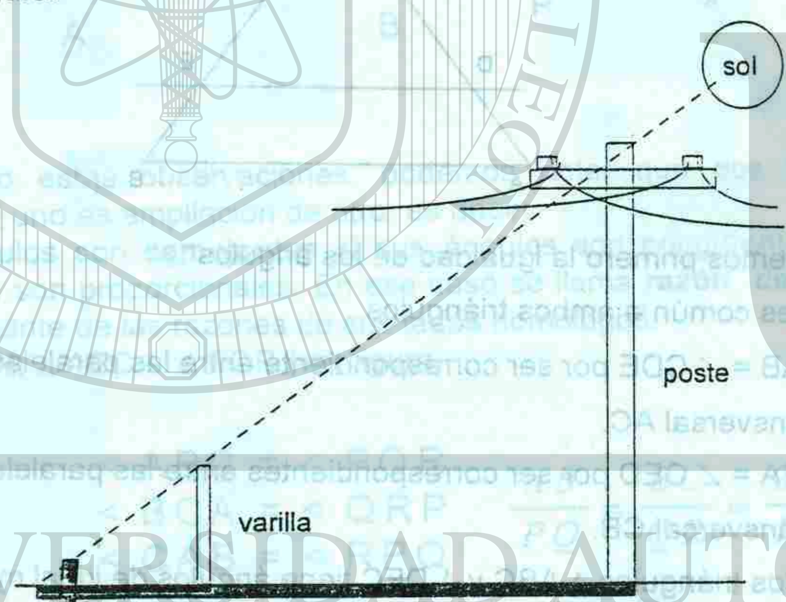
Entonces los triángulos Δ ABC y Δ DEC tienen ángulos congruentes y lados homólogos proporcionales, lo cual demuestra que

$$\Delta ABC \sim \Delta DEC.$$

■

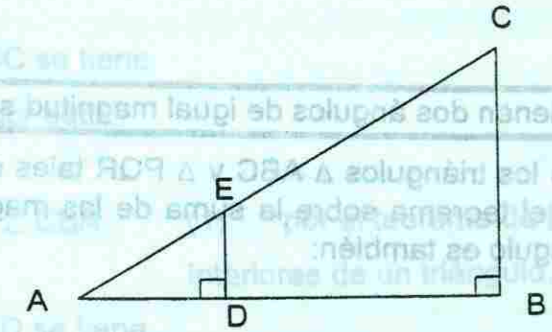
El teorema fundamental de semejanza de triángulos nos permite entonces resolver el problema que dio comienzo a este epígrafe.

Observa la figura:



Para calcular la altura del poste (que se encuentra colocado formando un ángulo recto con el suelo) aprovecharemos la sombra que este proyecta. Para ello fijaremos una varilla recta de longitud conocida en ángulo recto con el suelo de manera que el extremo de su sombra coincida con el extremo de la sombra del poste. (ver figura anterior)

De esta manera se forman dos triángulos rectángulos Δ ABC y Δ DEC, de los que se conoce que:



- DE representa la varilla por lo que su longitud es conocida.
- AD representa la sombra de la varilla y AB la sombra del poste, por lo que sus longitudes son fáciles de determinar y se pueden considerar conocidas.
- BC representa el poste del que se pretende calcular la altura, por lo que la longitud de BC es la incógnita del problema.

Resolución del problema:

Por construcción es $DE \perp AB$ y $AB \perp BC$ por lo que aplicando el teorema 1.4.1 se obtiene $DE \parallel BC$.

Entonces, el teorema fundamental de semejanza de triángulos nos asegura que:

$\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Por esta razón los lados homólogos de ambos triángulos son proporcionales, por lo que

$$\frac{CB}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

de donde despejando CB se obtiene la fórmula para calcularlo.

$$CB = \frac{DE \bullet AB}{AD}$$

partiendo de las longitudes de DE, AB y AD que son conocidas.

2.4 Criterios de semejanza de triángulos

Objetivo

Dominar los criterios de semejanza de triángulos y aplicarlos en la resolución de ejercicios.

Al igual que en la congruencia, existen criterios que permiten determinar más fácilmente la semejanza de dos triángulos. Estos son:

Criterio AA

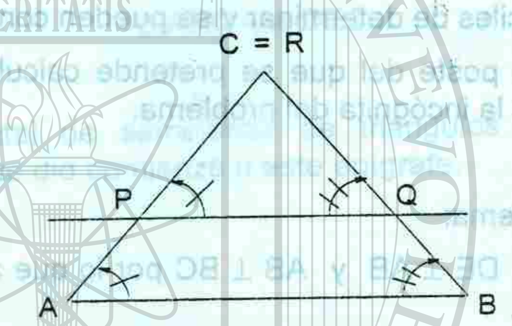
Teorema

Dos triángulos que tienen dos ángulos de igual magnitud son semejantes.

Demostración: Sean los triángulos Δ ABC y Δ PQR tales que $\angle A = \angle P$ y $\angle B = \angle Q$. Entonces aplicando el teorema sobre la suma de las magnitudes de los ángulos interiores de un triángulo es también:

$\angle C = \angle R$.

Luego, podemos transportar el triángulo Δ PQR sobre el triángulo Δ ABC, de manera que coincidan los vértices C y R y que los lados PR y QR del triángulo ΔPQR se encuentren sobre los lados AC y BC del triángulo Δ ABC. (ver figura)



Los ángulos $\angle$CAB y $\angle$CPQ son correspondientes entre las rectas PQ y AB, con la transversal CA, así como los ángulos $\angle$ABC y $\angle$PQR tomando a CB como transversal.

Pero se conoce que

$\angle RPQ = \angle CAB$

$\angle RQP = \angle CBA$

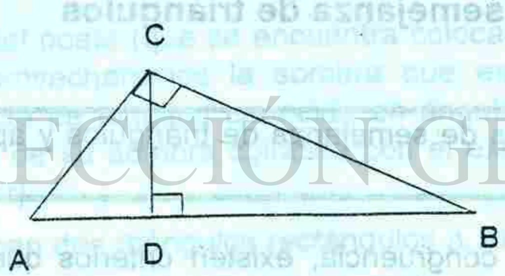
Entonces se tiene que

PQ || AB

Y los triángulos Δ ABC y Δ PQR son semejantes.

■

Ejemplo 2: En la siguiente figura, CD es la altura del triángulo ΔABC el cual es rectángulo en C. Demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$.



Demostración:

En el triángulo Δ ABC se tiene

$\angle ACB = 90°$ por dato.

Entonces

$\angle CAB = 90° - \angle CBA$ (1) por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

En el triángulo Δ ACD se tiene

$\angle ADC = 90° = \angle ACB$ (2) por dato.

Entonces

$\angle ACD = 90° - \angle CAB$ por el teorema de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Luego aplicando (1) se tiene

$\angle ACD = 90° - (90° - \angle CBA) = \angle CBA$ (3).

Aplicando el criterio AA y los resultados (1) y (3) se demuestra que

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$.

■

Como ejercicio te recomendamos que demuestres los siguientes corolarios:

Corolario

Dos triángulos rectángulos con un ángulo agudo de igual magnitud son semejantes.

Corolario

Dos triángulos isósceles con un ángulo agudo de igual magnitud son semejantes.

Corolario

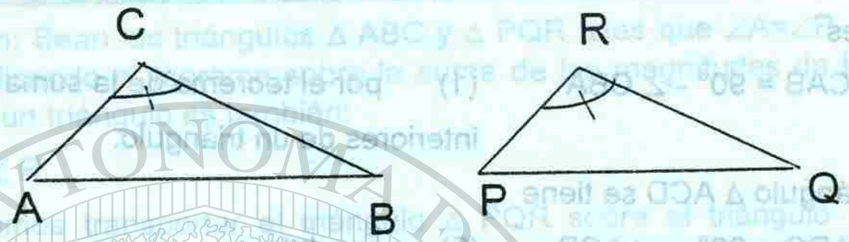
Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Criterio LAL

Teorema

Dos triángulos que tienen un ángulo de igual magnitud comprendido entre lados proporcionales, son semejantes.

Demostración: En la figura sea

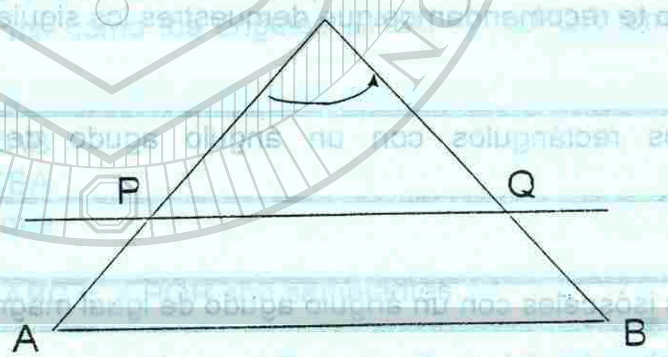


$$\angle C = \angle R$$

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{RQ}$$

y queremos demostrar que Δ ABC ~ Δ PQR.

Transponiendo el triángulo Δ PQR sobre el triángulo Δ ABC, de manera que coincidan los vértices C y R y que los lados PR y QR del triángulo Δ PQR se encuentren sobre los lados AC y BC del triángulo Δ ABC (ver figura)



Entonces, aplicando el recíproco del Teorema de Thales se obtiene que:

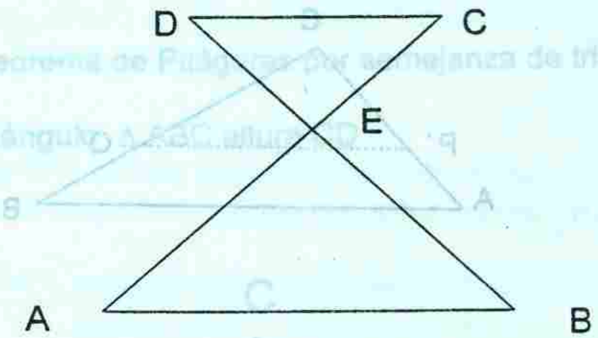
PQ || AB,

de donde es

Δ ABC ~ Δ PQR.

por el teorema fundamental de semejanza de triángulos. ■

Ejemplo 3: En la figura E corta a DB y a CA en la proporción $\frac{1}{3}$. Demostrar que Δ DEC ~ Δ BEA



Demostración:

$\angle$ DEC = $\angle$ BEA por ser opuestos por el vértice

$\frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB} = \frac{1}{3}$ por dato.

Entonces por el criterio LAL se tiene

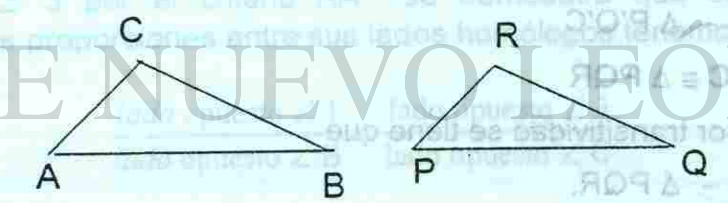
Δ DEC ~ Δ BEA ■

Criterio LLL

Teorema

Dos triángulos que tienen los tres lados proporcionales son semejantes.

Demostración: En la figura, sea

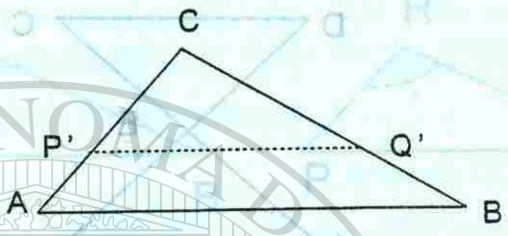


$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

y queremos demostrar que: Δ ABC ~ Δ PQR.

Sean P' y Q' puntos en CA y CB respectivamente tales que

CP' = RP y CQ' = RQ (ver figura).



Entonces

$$\frac{CA}{CP'} = \frac{CB}{CQ'}.$$

Además, el ángulo ∠C es común a los triángulos Δ P'Q'C y Δ ABC, luego, se tiene que

Δ ABC ~ Δ P'Q'C por el criterio LAL.

Por otra parte se tiene

$$\frac{AB}{P'Q'} = \frac{CA}{CP'}$$ por semejanza de triángulos

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{CA}{CP'}$$ por dato.

Entonces es P'Q' = PQ de donde

Δ P'Q'C ≅ Δ PQR.

Resulta entonces que tenemos que

Δ ABC ~ Δ P'Q'C

Δ P'Q'C ≅ Δ PQR

por lo que por transitividad se tiene que

Δ ABC ~ Δ PQR,

que es lo que queríamos demostrar. ■

Este criterio resulta es más útil para demostrar que:

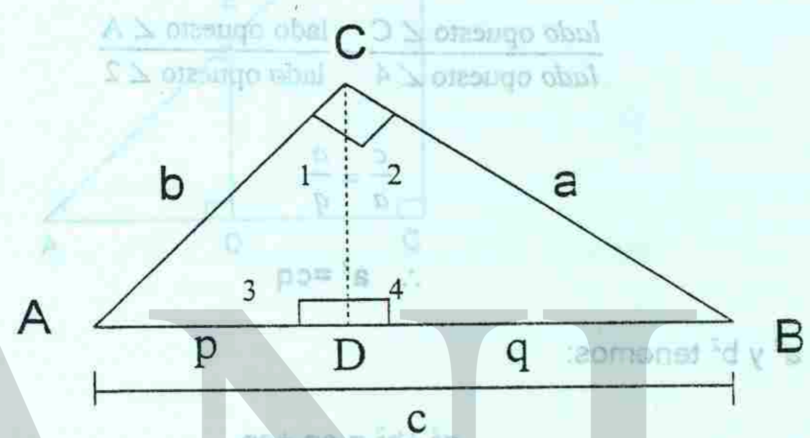
Todos los triángulos equiláteros son semejantes.

Te recomendamos que intentes obtener criterios de semejanza que te sean útiles para tipos específicos de triángulos, al igual que se procedió en el caso de la congruencia de triángulos.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Demostración del Teorema de Pitágoras por semejanza de triángulos.

Sea el triángulo rectángulo Δ ABC altura CD



Podemos demostrar que el triángulo Δ ADC ~ Δ ACB

∠A + ∠1 = 90°

∠A + ∠B = 90°

∴ ∠B = ∠1

Como ∠ C = ∠ 3 por el criterio AA se demuestra que son semejantes. Estableciendo las proporciones entre sus lados homólogos tenemos:

$$\frac{\text{lado opuesto } \angle 1}{\text{lado opuesto } \angle B} = \frac{\text{lado opuesto } \angle 3}{\text{lado opuesto } \angle C}$$

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{c}$$

∴ $b^2 = pc$

así mismo demostraremos que los Δ BDC ~ Δ ACB

$\angle C = \angle 4$ (rectos)

$\angle A + \angle 1 = 90°$

$\angle 2 + \angle 1 = 90°$

$\therefore \angle A = \angle 2$

Por el criterio AA., queda demostrado que dichos triángulos son semejantes. Estableciendo la proporción entre sus lados homólogos; tenemos que:

$$\frac{\textit{lado opuesto } \angle C}{\textit{lado opuesto } \angle 4} = \frac{\text{lado opuesto } \angle A}{\text{lado opuesto } \angle 2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{q}$$

$$\therefore \ a^2 = cq$$

Sumando a^2 y b^2 tenemos:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= cq + cp \\ &= c(q + p) \\ &= c(c) \\ &= c^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

La expresión anterior representa matemáticamente el Teorema de Pitágoras.

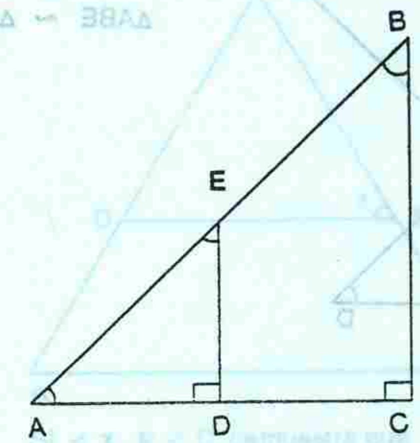
Teorema

La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Ejercicio 2.4

En cada uno de los siguientes ejercicios demuestra que los triángulos que se indican son semejantes y establece la proporcionalidad entre lados homólogos.

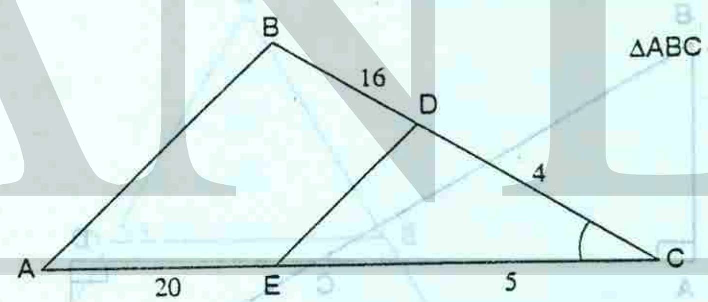
1)



$\Delta ABC \sim \Delta AED$

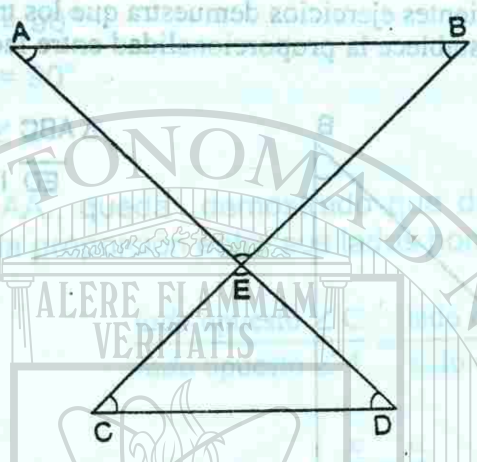
$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$

2)



$\Delta ABC \sim \Delta EDC$

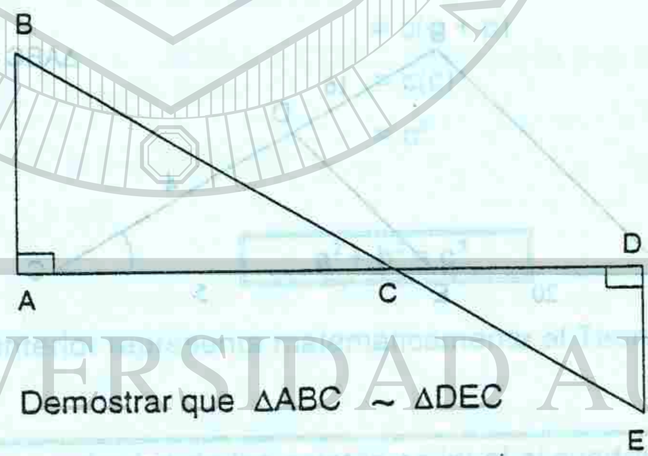
3)



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

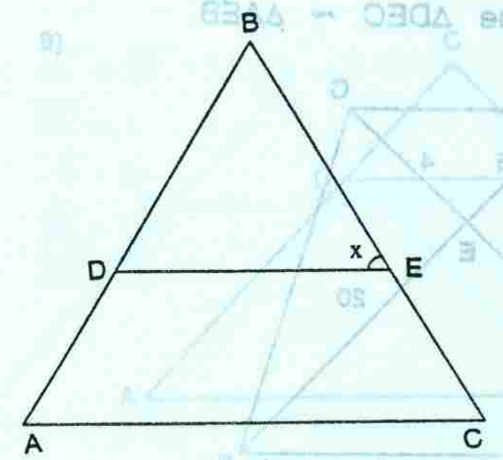
$\Delta ABE \sim \Delta CED$

4)



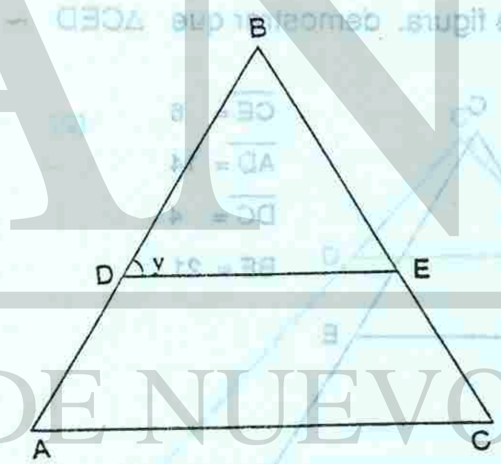
Demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta DEC$

5)



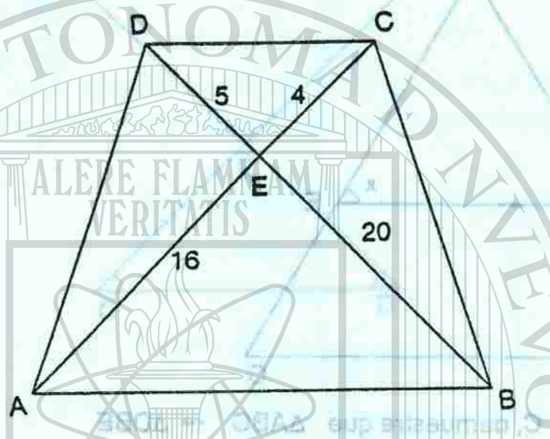
Si $\angle x \cong \angle C$, demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

6)



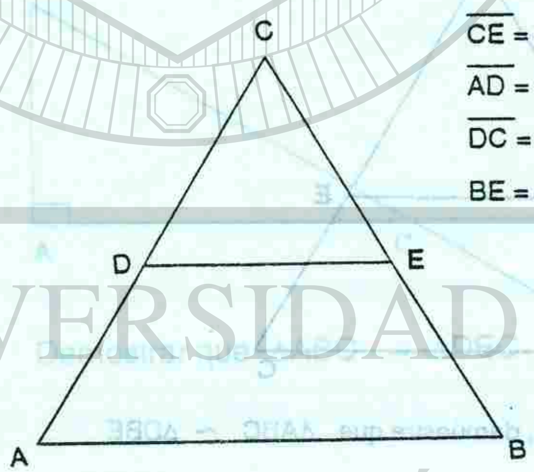
Si $\angle y \cong \angle A$, demuestre que $\Delta ABC \sim \Delta DBE$

7) Demostrar que $\Delta DEC \sim \Delta AEB$



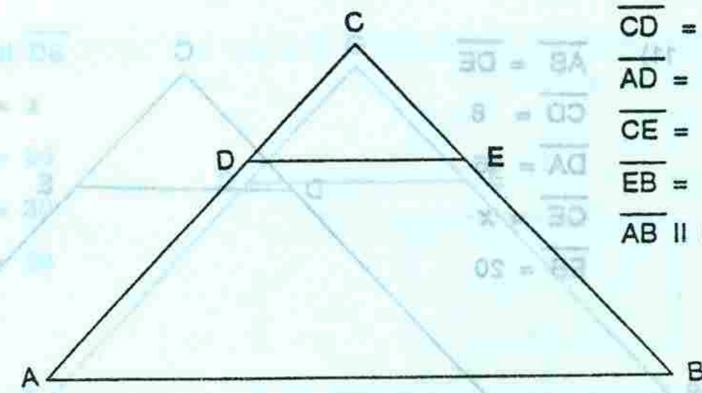
8) En la siguiente figura, demostrar que $\Delta CED \sim \Delta CAB$

$\overline{CE} = 6$
$\overline{AD} = 14$
$\overline{DC} = 4$
$BE = 21$



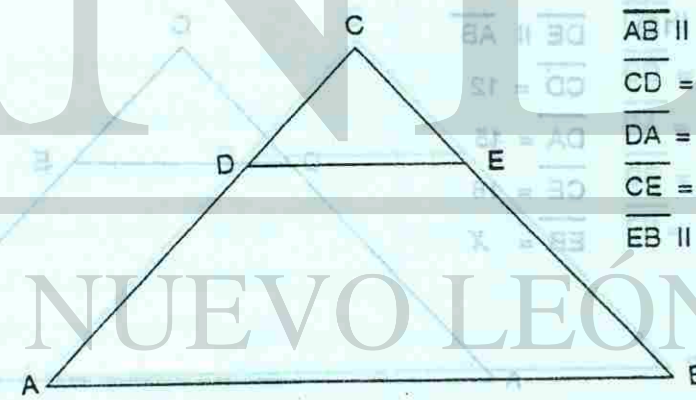
Hallar el valor de ***x*** en cada uno de los ejercicios

9)



$\overline{CD} = x$
$\overline{AD} = 12$
$\overline{CE} = 9$
$\overline{EB} = 15$
$\overline{AB} \parallel DE.$

10)



$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$
$\overline{CD} = 6$
$\overline{DA} = x$
$\overline{CE} = 6$
$\overline{EB} \parallel 8.$

Hallar el valor de x en cada uno de los siguientes ejercicios

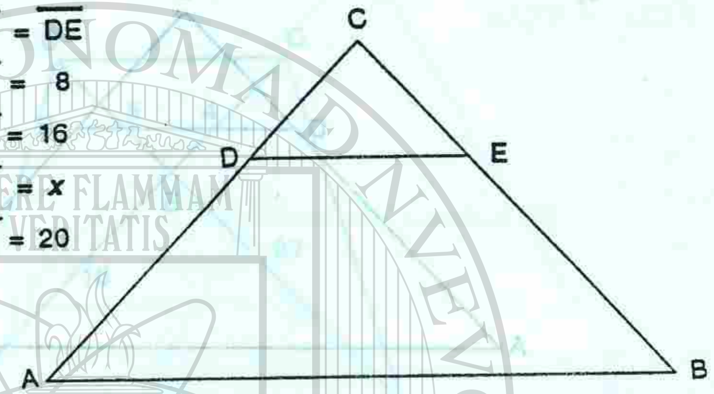
11) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\overline{CD} = 8$

$\overline{DA} = 16$

$\overline{CE} = x$

$\overline{EB} = 20$



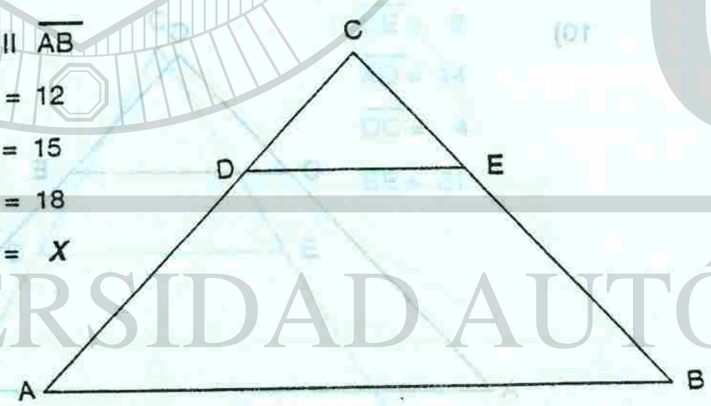
12) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\overline{CD} = 12$

$\overline{DA} = 15$

$\overline{CE} = 18$

$\overline{EB} = x$



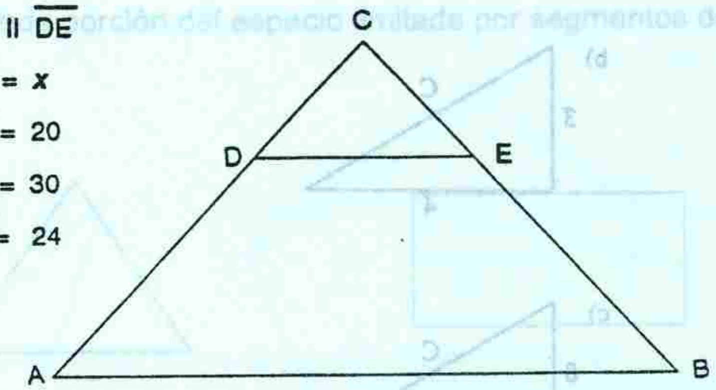
13) $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$

$\overline{CD} = x$

$\overline{CE} = 20$

$\overline{EB} = 30$

$\overline{AD} = 24$



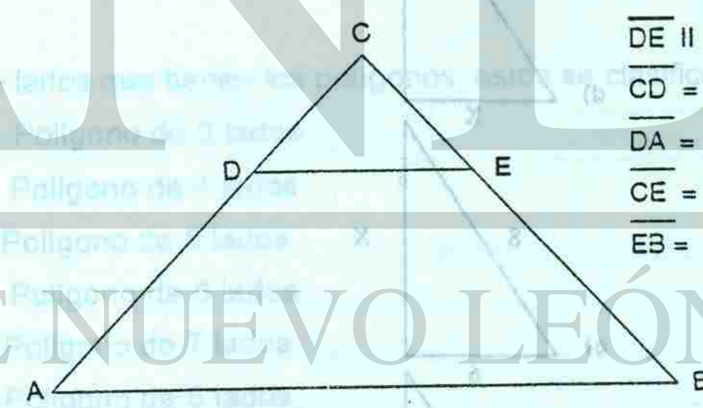
14) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\overline{CD} = 10$

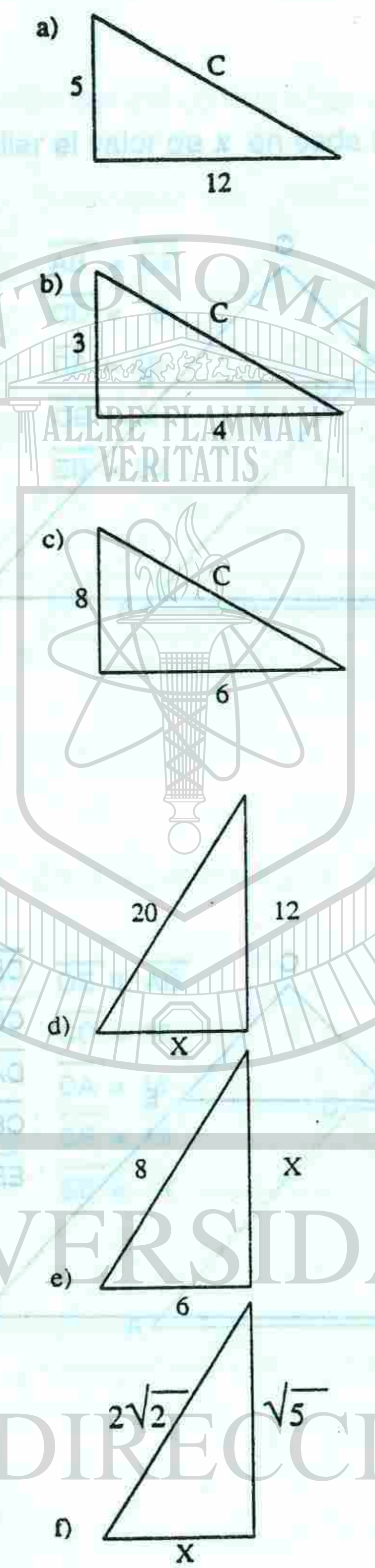
$\overline{DA} = 15$

$\overline{CE} = 12$

$\overline{EB} = x$



15)



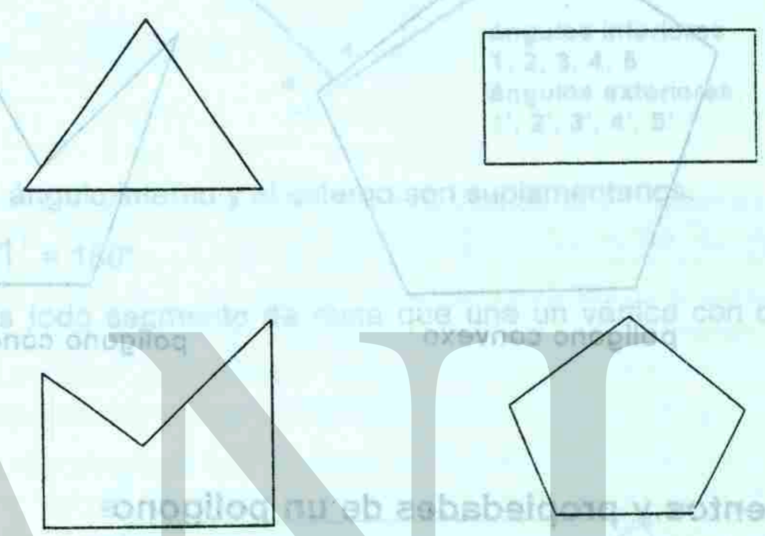
2.5 . Polígonos

Objetivo

Dominar el concepto de polígono y polígono convexo y su clasificación según sus lados y ángulos.

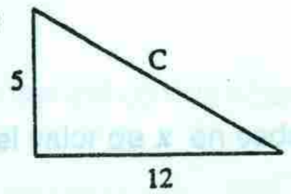
- **Un polígono** es toda porción del espacio limitada por segmentos de recta.

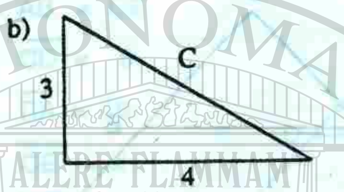
Ejemplo:

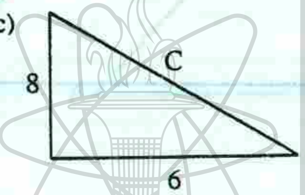


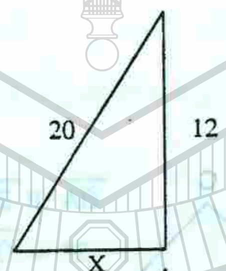
Según el número de lados que tienen los polígonos, estos se clasifican en:

- Triángulo: Polígono de 3 lados
- Cuadrilátero: Polígono de 4 lados
- Pentágono: Polígono de 5 lados
- Hexágono: Polígono de 6 lados
- Heptágono: Polígono de 7 lados
- Octágono: Polígono de 8 lados
- Nonágono: Polígono de 9 lados
- Decágono: Polígono de 10 lados
- Endecágono: Polígono de 11 lados
- Dodecágono: Polígono de 12 lados
- Pentadecágono: Polígono de 15 lados
- Icoságono: Polígono de 20 lados

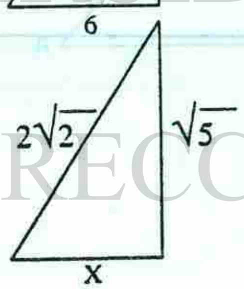
15) a)


b)


c)


d)


e)


f)


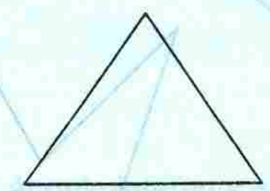
2.5 . Polígonos

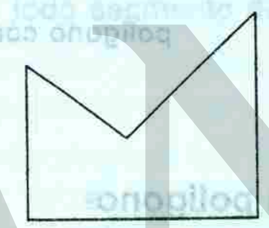
Objetivo

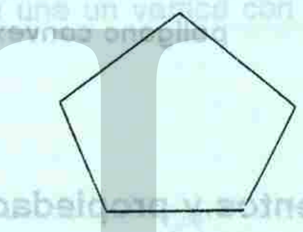
Dominar el concepto de polígono y polígono convexo y su clasificación según sus lados y ángulos.

- Un **polígono** es toda porción del espacio limitada por segmentos de recta.

Ejemplo:







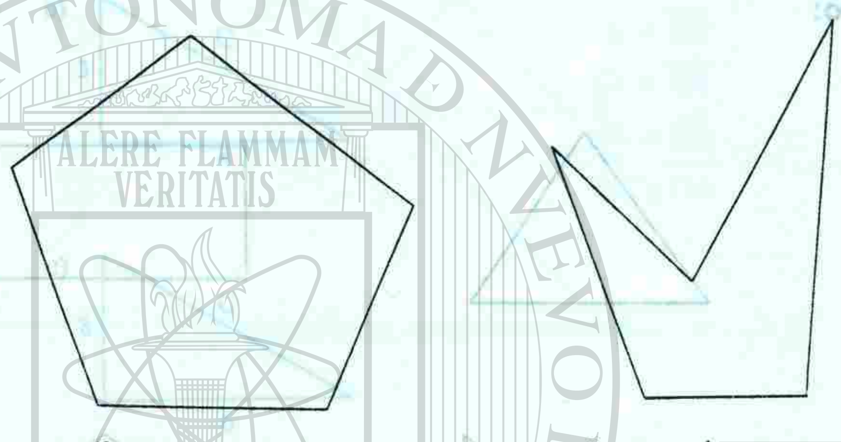
Según el número de lados que tienen los polígonos, estos se clasifican en:

- Triángulo: Polígono de 3 lados
- Cuadrilátero: Polígono de 4 lados
- Pentágono: Polígono de 5 lados
- Hexágono: Polígono de 6 lados
- Heptágono: Polígono de 7 lados
- Octágono: Polígono de 8 lados
- Nonágono: Polígono de 9 lados
- Decágono: Polígono de 10 lados
- Endecágono: Polígono de 11 lados
- Dodecágono: Polígono de 12 lados
- Pentadecágono: Polígono de 15 lados
- Icoságono: Polígono de 20 lados

- Un **polígono regular** es aquel que tiene sus lados y sus ángulos iguales.

Además los polígonos se clasifican en polígonos convexos y cóncavos.

- Un polígono es **convexo** cuando el segmento de recta que une a cualesquiera dos de sus puntos se encuentra totalmente en su interior, en caso contrario se dice que el polígono es **cóncavo**.



2.6 Elementos y propiedades de un polígono

Objetivo

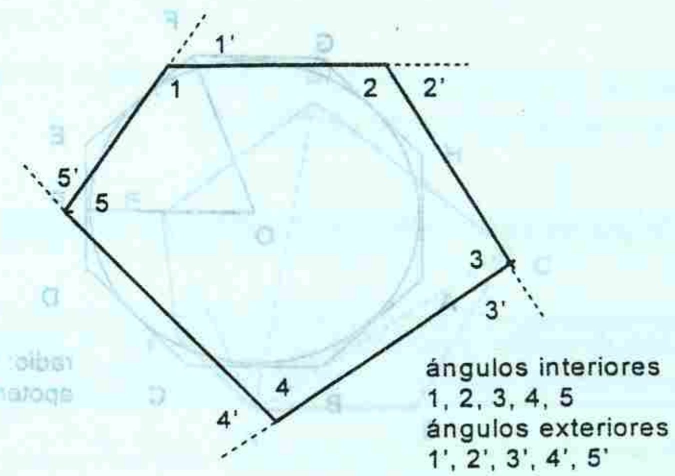
Aplicar las propiedades de los polígonos a la resolución de ejercicios.

Elementos de un polígono

En un polígono tenemos los siguientes elementos:

Ángulos interiores: Son los ángulos formados por cada dos lados consecutivos.

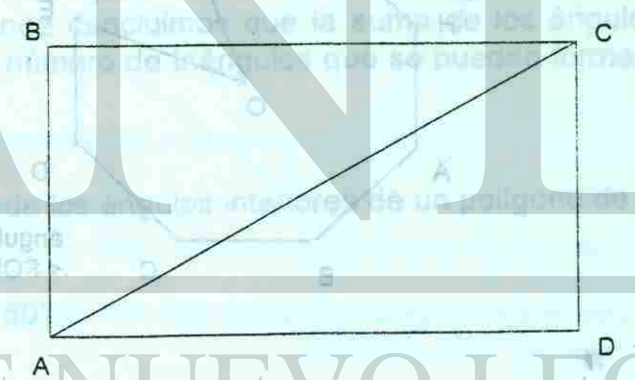
Ángulos externos: Son los ángulos adyacentes a los ángulos interiores, que se obtienen al prolongar los lados de estos.



Observa que el ángulo interno y el externo son suplementarios.

$\angle 1 + \angle 1' = 180°$

- **Diagonal**: Es todo segmento de recta que une un vértice con otro que no es consecutivo.



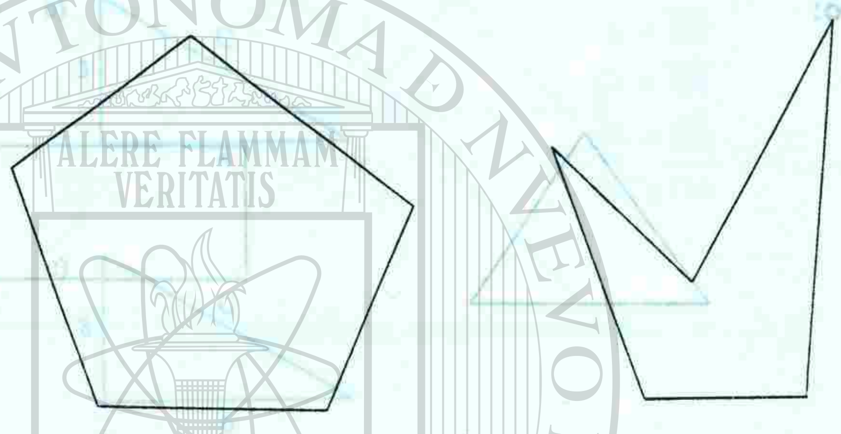
AC es una diagonal del polígono de la figura.

- **Radio**: Es el radio de la circunferencia circunscrita en un polígono regular, y se obtiene mediante el segmento de recta que une el centro de ésta última con uno de los vértices del polígono.
- **Apotema**: El segmento de recta perpendicular a cualquiera de los lados de un polígono regular, trazada desde el centro de la circunferencia inscrita en el mismo.

- Un **polígono regular** es aquel que tiene sus lados y sus ángulos iguales.

Además los polígonos se clasifican en polígonos convexos y cóncavos.

- Un polígono es **convexo** cuando el segmento de recta que une a cualesquiera dos de sus puntos se encuentra totalmente en su interior, en caso contrario se dice que el polígono es **cóncavo**.



2.6 Elementos y propiedades de un polígono

Objetivo

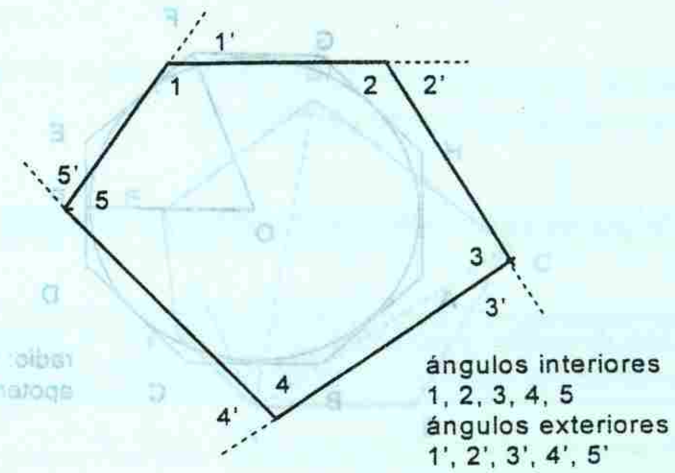
Aplicar las propiedades de los polígonos a la resolución de ejercicios.

Elementos de un polígono

En un polígono tenemos los siguientes elementos:

Ángulos interiores: Son los ángulos formados por cada dos lados consecutivos.

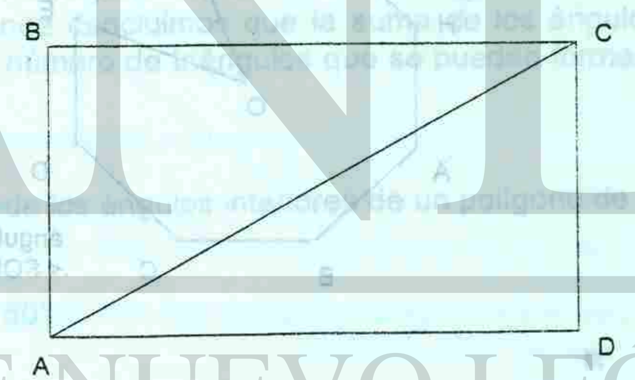
Ángulos externos: Son los ángulos adyacentes a los ángulos interiores, que se obtienen al prolongar los lados de estos.



Observa que el ángulo interno y el externo son suplementarios.

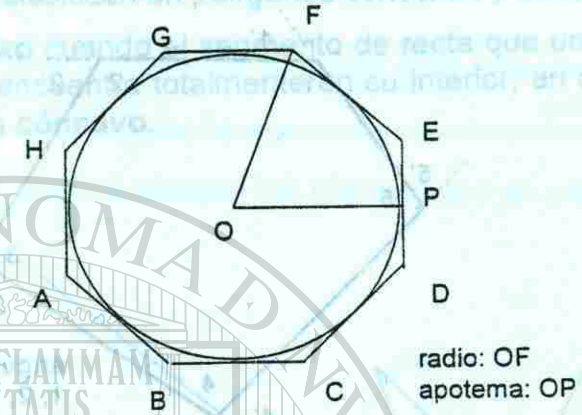
$\angle 1 + \angle 1' = 180°$

- **Diagonal**: Es todo segmento de recta que une un vértice con otro que no es consecutivo.

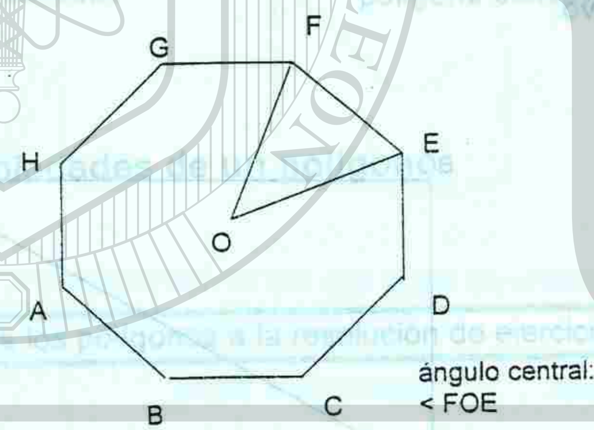


AC es una diagonal del polígono de la figura.

- **Radio**: Es el radio de la circunferencia circunscrita en un polígono regular, y se obtiene mediante el segmento de recta que une el centro de ésta última con uno de los vértices del polígono.
- **Apotema**: El segmento de recta perpendicular a cualquiera de los lados de un polígono regular, trazada desde el centro de la circunferencia inscrita en el mismo.



- **Ángulo central**: Es el ángulo que forman los radios que pasan por dos vértices consecutivos, en un polígono regular.



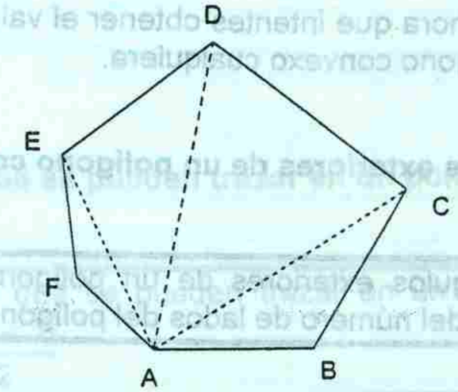
¿Recuerdas el valor de la suma de los ángulos interiores de un triángulo? Un triángulo es un polígono regular de tres lados. Intenta entonces obtener una fórmula similar para la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo cualquiera.

Suma de los ángulos interiores de un polígono convexo

Teorema

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es igual a (n-2)180°.

Demostración:



AC, AD y AE son diagonales del polígono de la figura (aquí la cantidad de lados es n = 6. Observa que desde el vértice A de éste polígono se pueden trazar tres diagonales (n-3) = 6-3 = 2 del mismo, obteniéndose así una división de éste en cuatro triángulos (n-2) = 6-2 = 4. Este análisis puede ser fácilmente generalizado a un polígono de n lados: Si se fija un vértice, entonces , partiendo de él se pueden trazar n-3 diagonales del polígono, dividiéndolo así en n-2 triángulos.

Pero ya hemos demostrado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es de 180° , de donde concluimos que la suma de los ángulos interiores de un polígono es igual al número de triángulos que se pueden formar, multiplicando por 180°.

Es decir, sea

Sai(n) = suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados.

Entonces es

Sai(n) = (n-2)180°.

■

Medida de un ángulo interior de un polígono regular

Como la suma de los ángulos interiores de un polígono regular de "n" lados está dada por la expresión Sai(n) = (n-2)180°, entonces se deduce que la medida de cada ángulo interior se obtiene dividiendo dicha suma entre el número de lados, es decir

$$\boxed{Ai(n) = \frac{Sai}{n} = \frac{(n-2)180°}{n}}$$

donde Ai(n) es la medida de cada ángulo interior de un polígono regular de n lados.

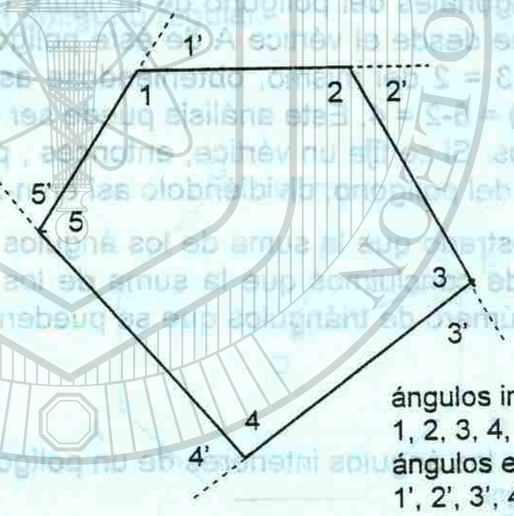
Te recomendamos ahora que intentes obtener el valor de la suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo cualquiera.

Suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo

Teorema

La suma de los ángulos exteriores de un polígono convexo es igual a 360°, independientemente del número de lados del polígono.

Demostración:



ángulos interiores
1, 2, 3, 4, 5
ángulos exteriores
1', 2', 3', 4', 5'

Como el número de lados es igual al número de vértices, en cada vértice el ángulo interior y exterior suman 180°, es decir

$$\angle 1 + \angle 1' = 180°.$$

Por lo tanto, la suma total de ángulos interiores y exteriores es de 180° multiplicado por el número de lados n.

Suma de ángulos interiores + Suma de ángulos exteriores = 180°n.

Sea Sae(n) = Suma de los ángulos exteriores, entonces es

$$Sae(n) = 180°n - Sai(n)$$

$$Sae(n) = 180°n - 180°(n-2)$$

$$Sae(n) = 180°n - 180°n + 360°.$$

De donde se concluye que:

$$Sae(n) = 360°.$$

■

Número de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo

Teorema

El número de diagonales que se pueden trazar en un polígono convexo de n lados es igual a: $d = \frac{n(n-3)}{2}$

Demostración:

Ya hemos visto que desde cada vértice del polígono se pueden trazar (n-3) diagonales. Sin embargo, cualquier diagonal trazada desde un vértice prefijado coincide con una diagonal trazada desde otro vértice. Por esa razón, si sumamos las cantidades de diagonales que se pueden trazar desde cada vértice, obtendremos el doble de la cantidad total de diagonales del polígono. Así es

$$2d = n(n-3),$$

de donde:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

siendo d es el número de diagonales del polígono.

■

Para fines de este curso nos interesa aprender lo relacionado con los polígonos regulares.

Resumen:

Si n representa el número de lados de un polígono regular, tenemos que:

a) Suma de ángulos interiores $Sai(n) = 180°(n-2)$

b) Medida de cada ángulo interior $Ai(n) = \frac{Sai(n)}{n} = \frac{180°(n-2)}{n}$

> c) Suma de los ángulo exteriores
> $S_{ae}(n) = 360°$

> d) Número de diagonales (d)
> $$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

> e) Medida de cada ángulo exterior
> $$A_e(n) = \frac{360°}{n}$$

> f) El valor de un ángulo central
> $$\theta(n) = \frac{360°}{n}$$

Ejemplo 1: Calcular en un octágono regular:

a) La suma de los ángulos interiores

$Sai(8) = 180°(n-2)$

$Sai(8) = 180°\ (8-2)$

$Sai(8) = 180°\ (6)$

$Sai(8) = 1080°$

b) La medida de cada ángulo interior

$$A_i(8) = \frac{Sai(8)}{8} = \frac{1080°}{8} = 135°$$

c) La medida de cada ángulo exterior

$$A_e(8) = \frac{360°}{8} = 45°$$

d) El número de diagonales

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$d = \frac{8(8-3)}{2}$$

$$d = \frac{8(5)}{2} = 20 \text{ diagonales}$$

e) El valor de cada ángulo central, expresado en radianes.

$$\theta = \frac{360°}{8} = 45°$$

$$\theta = \frac{45°\pi}{180} rad$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} rad$$

Ejemplo 2: ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores suman 1260°?

$Sai(n) = 180°(n-2)$

$1260° = 180°(n-2)$

$1260° = 180°n - 360°$

$1260° + 360° = 180°n$

$180°n = 1620°$

$$n = \frac{1620}{180}$$

$n = 9$

El polígono tiene 9 lados, es decir se trata de un nonágono.

Ejemplo 3: ¿Cuántos lados tiene un polígono regular cuyos ángulos interiores miden 108° cada uno?

$$A_i(n) = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$108° = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$108°n = 180°n - 360°$

$108°n - 180°n = -360°$

$-72°n = -360°$

$$n = \frac{-360°}{-72°}$$

$n = 5$

Ejemplo 4: Hallar el número de lados de un polígono regular, si su ángulo externo mide 10°.

$$Ae(n) = \frac{360°}{n}$$

$$10° = \frac{360°}{n}$$

$$10°\, n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{10°} = 36.$$

El polígono tiene 36 lados.

Ejemplo 5: Hallar el número de lados de un polígono regular, si su ángulo interno mide el triple de su ángulo externo.

$$Ai(n) + Ae(n) = 180°$$

Como $Ai(n) = 3\,Ae(n)$; tenemos:

$$3\,Ae(n) + Ae(n) = 180°$$

$$4\,Ae(n) = 180°$$

$$Ae(n) = \frac{180°}{4} = 45°$$

Como $Ae(n) = \dfrac{360°}{n}$, tenemos que:

$$45° = \frac{360°}{n}$$

$$45° n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{45°}$$

$$n = 8$$

Ejemplo 6: Los ángulos interiores de un pentágono están representados por:

$\angle A = (x\text{-}10)°$

$\angle B = (2x\text{-}20)°$

$\angle C = (2x\text{-}10)°$

$\angle D = (2x+10)°$

$\angle E = (3x\text{-}30)°$

Encuentra la medida de cada ángulo.

• Por su parte, los **rombos** cumplen:

6) Cada diagonal de un rombo lo divide en dos triángulos congruentes e isósceles.
7) Las diagonales de un rombo se bisecan mutuamente, son congruentes y son perpendiculares entre sí.
8) Sin embargo, los ángulos interiores de un rombo en general no son rectos.

Te recomendamos que intentes demostrar cada una de estas propiedades.

Aplicaciones de las propiedades de los paralelogramos

Ejemplo 1. Hallar los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, si el $\angle A = (x\text{-}5)°$, $\angle B = (x+20)°$, $\angle C = (2x\text{-}45)°$ y $\angle D = (2x\text{-}30)°$

Solución :

La suma de los ángulos interiores es de 360°, por lo tanto :

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$$

$$(x\text{-}5)° + (x+20)° + (2x\text{-}45)° + (2x\text{-}30)° = 360°$$

$$6x - 60 = 360°$$

$$6x = 360 + 60$$

$$6x = 420$$

$$x = \frac{420}{6}$$

$$x = 70$$

Por lo tanto :

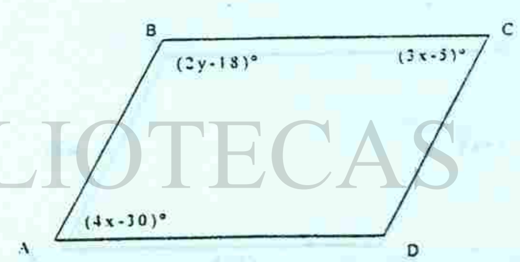
$$\angle A = (x\text{-}5)° = (70\text{-}5)° = 65°$$

$$\angle B = (x+20)° = (70+20)° = 90°$$

$$\angle C = (2x - 45)° = [2(70)\text{-}45]° = 95°$$

$$\angle C = (2x\text{-}30)° = [2(70)\text{-}30]° = 110°$$

Ejemplo 2. Si ABCD es un paralelogramo, encontrar *x* y *y*



Solución:

$\angle A = \angle C$ por ser ángulos opuestos del paralelogramo

$4x-30 = 3x-5$

$4x - 3x = -5+30$

$x = 25°$

$\angle A + \angle B = 180°$ por se suplementarios

$[4(25)-30]° + \angle B = 180°$

$(100-30)° + \angle B = 180°$

$70° + \angle B = 180°$

$\angle B = 180° - 70°$

$\angle B = 110°$

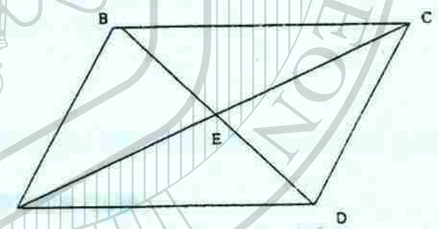
Por lo que: $(2y-18)° = 110°$

$2y - 18 = 110$

$2y = 110+18$

$y = \frac{110+18}{2} = 64$

Ejemplo 3: Si el cuadrilátero de la figura, es un paralelogramo, hallar *x* y *y*.



AE = x+2y

EC = 15

BE = x

DE = 3y

Solución:

Como las diagonales se bisecan mutuamente, entonces:

$x+2y = 15$

$x = 3y$

Resolviendo:

$3y+2y = 15$

$5y = 15$

$y = \frac{15}{5}$

$y = 3$

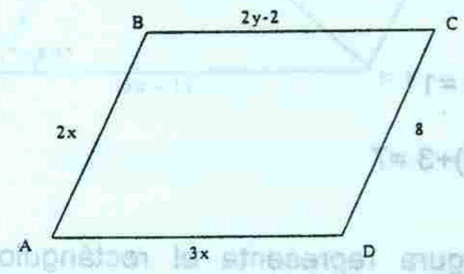
Entonces sustituyendo

$x = 3y$

$x = 3(3)$

$x = 9$

Ejemplo 4: Encuentra los valores de *x* y *y* en el siguiente paralelogramo.



AB = CD por ser lados opuestos del paralelogramo

$2x = 8$

$x = \frac{8}{2}$

$x = 4$

AD = BC por ser lados opuestos del paralelogramo

$2y-2 = 3x$

$2y-2 = 3(4)$

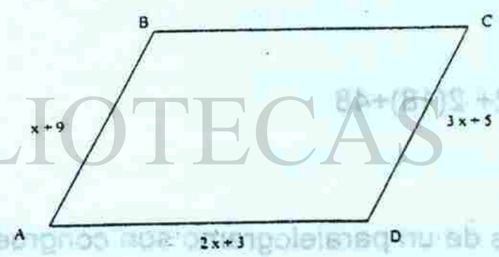
$2y = 12+2$

$2y = 14$

$y = \frac{14}{2}$

$y = 7$

Ejemplo 5. Si ABCD es un paralelogramo, encuentra la longitud de sus lados.



Solución:

AB=CD por ser lados opuestos del paralelogramo

$3x+5 = x+9$

$3x - x = 9-5$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Por lo tanto:

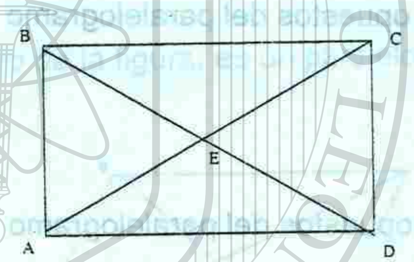
$AB = x+9 = 2 + 9 = 11$

$CD = AB = 11$

$AD = 2x+3 = 2(2)+3 = 7$

$BC = AD = 7$

Ejemplo 6. Si la figura representa el rectángulo ABCD, encuentra BD si: AE=4x+12 y CE=2x +48



Solución:

Como las diagonales se bisecan mutuamente, entonces:

$AE=CE$

$4x+12 = 2x+48$

$4x-2x = 48-12$

$2x = 36$

$x = \frac{36}{2}$

$x = 18$

$AC = AE+CE$

$AC = 4(18) +12+ 2(18)+48$

$AC = 84+84$

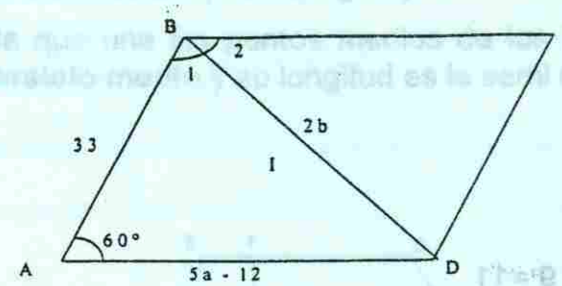
$AC = 168$

Como las diagonales de un paralelogramo son congruentes; entonces

$BD = AC$

$BD = 168$

Ejemplo 7. El cuadrilátero ABCD de la figura es un rombo, hallar a y b.



$AD = AB$

$5a-12 = 33$

$5a = 33+12$

$5a = 45$

$a = \frac{45}{5}$

$a = 9$

$\angle A + \angle B = 180$ por ser ángulos consecutivos de un rombo, entonces

$\angle B = 180° - \angle A$

$\angle B = 180-60$

$\angle B = 120°$

Como BD es bisectriz de el $\angle B$

$\angle 1 = \frac{120°}{2} = 60°$

Por lo tanto el triángulo Δ ABD es equilátero, entonces:

$2b = 33$

$b = \frac{33}{2} = 16.5$

Solución:

AB=CD por ser lados opuestos del paralelogramo

$3x+5 = x+9$

$3x - x = 9-5$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2}$

$x = 2$

Por lo tanto:

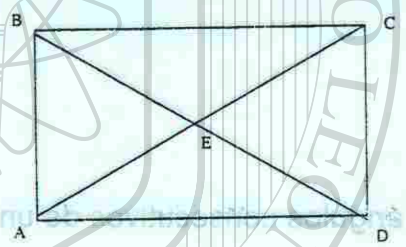
$AB = x+9 = 2 + 9 = 11$

$CD = AB = 11$

$AD = 2x+3 = 2(2)+3 = 7$

$BC = AD = 7$

Ejemplo 6. Si la figura representa el rectángulo ABCD, encuentra BD si: AE=4x+12 y CE=2x +48



Solución:

Como las diagonales se bisecan mutuamente, entonces:

$AE=CE$

$4x+12 = 2x+48$

$4x-2x = 48-12$

$2x = 36$

$x = \frac{36}{2}$

$x = 18$

$AC = AE+CE$

$AC = 4(18) +12+ 2(18)+48$

$AC = 84+84$

$AC = 168$

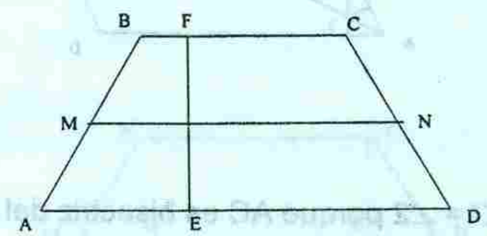
Como las diagonales de un paralelogramo son congruentes; entonces

$BD = AC$

$BD = 168$

Se llama **altura** del trapecio al segmento de recta perpendicular a las bases que determina la distancia entre estas. (h en la figura)

El segmento de recta que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio se llaman **paralelo medio** y su longitud es la semi suma de sus bases.



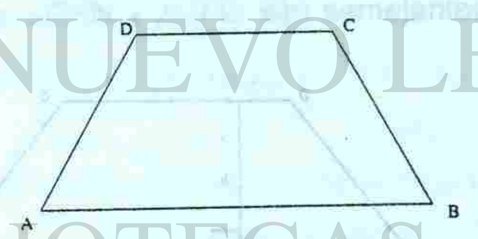
EF = Altura = h

MN = Paralela media si M y N son los puntos medios de AB y CD respectivamente, luego se puede demostrar que:

$$\boxed{MN = \frac{BC + AD}{2}}$$

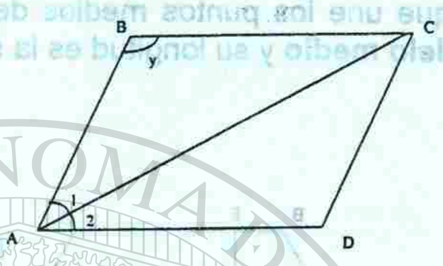
Te recomendamos que demuestres esta última afirmación.

- Un trapecio se dice **isósceles** si los lados no paralelos tienen igual longitud.



AD = BC

Ejemplo 8. Encontrar *x* y *y* en el rombo de la siguiente figura.



$\angle 1 = 7x - 10$

$\angle 2 = 3x + 18$ y $\angle 1 = \angle 2$ porque AC es bisectriz del $\angle A$, entonces

$7x - 10 = 3x + 18$

$7x - 3x = 18 + 10$

$4x = 28$

$x = 7$

$\angle A + \angle B = 180°$ por ser ángulos consecutivos de un rombo y además

$\angle A = \angle 1 + \angle 2$ por adición de ángulos, entonces

$\angle A = 7(7) - 10 + 3(7) + 18$

$\angle A = 49 - 10 + 21 + 18$

$\angle A = 78°$

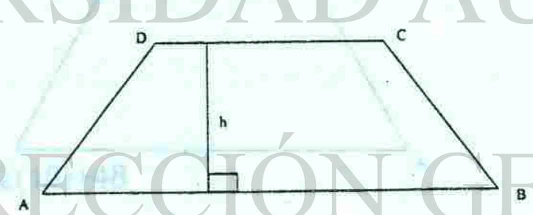
$78° + y = 180°$

$y = 180 - 78$

$y = 102°$

Trapecios

Los lados paralelos de un trapecio se llaman bases y como son de diferente longitud, una es la **base mayor** y la otra la **base menor** (generalmente se denotan como B y b respectivamente.



En la figura anterior :

CD es la base menor (b)

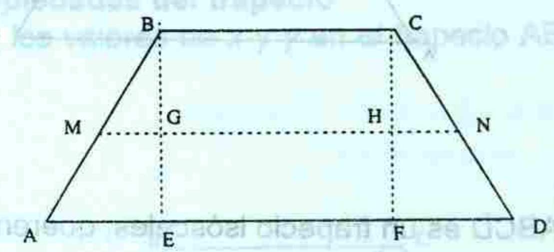
AB es la base mayor (B)

Teorema

Los ángulos contiguos a cada uno de los lados no paralelos de un trapecio son suplementarios.

Teorema

La longitud de la paralela media de un trapecio, es igual a la semi suma de las bases.



Queremos demostrar que:

$$MN = \frac{BC + AD}{2}$$

En la figura tenemos que los triángulos ΔABE y ΔMBG , son semejantes, por lo que sus lados son proporcionales, como M es punto medio de AB, es

$\frac{MG}{AE} = \frac{1}{2}$, por lo tanto:

$$MG = \frac{AE}{2}$$

Así mismo, los triángulos ΔCHN y ΔCFD son semejantes y como N es el punto medio de CD,

$\frac{HN}{FD} = \frac{1}{2}$, es decir,

$$HN = \frac{FD}{2}$$

Expresando el segmento MN en términos de AE y FD resulta:

$$MN = MG + BC + HN$$

$$MN = \frac{AE}{2} + BC + \frac{FD}{2}$$

Propiedades de los trapecios

Teorema

Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son congruentes

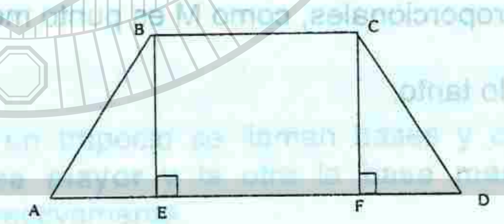
Demostración:

Si el cuadrilátero ABCD es un trapecio isósceles, queremos demostrar que :

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle C$

Tracemos en la figura anterior los segmentos de recta BE y CF perpendiculares a AD, por lo que son altura del trapecio.



Podemos demostrar que los triángulos Δ ABE y Δ DCF son congruentes, pues:

AB = CD por definición,

BE = CF por ser ambos segmentos alturas del trapecio

y $\angle$ AEB = $\angle$ DFC por ser ángulos rectos.

Si dos triángulos rectángulos tienen congruente su hipotenusa y un cateto, entonces los triángulos son congruentes. Como el segmento AE es el homólogo de FD, entonces es $\angle A = \angle D$.

Así mismo, te recomendamos que demuestres que :

$$MN=\frac{AE+2BC+FD}{2}$$

Pero BC=EF , luego 2BC se puede descomponer como BC+EF, por lo que

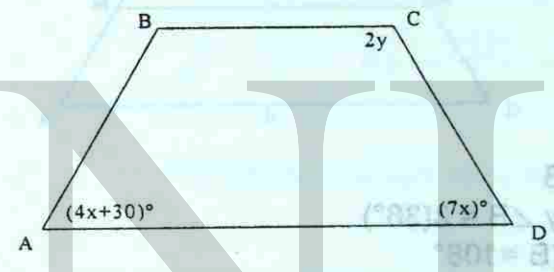
$$MN=\frac{AE+FD+BC+EF}{2}=\frac{Ae+EF+FD+BC}{2}$$

$$MN=\frac{AD+BC}{2}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Aplicación de las propiedades del trapecio

Ejemplo 1. Encuentra los valores de *x* y *y* en el trapecio ABCD de la figura si es isósceles.



$\angle A = \angle D$ por ser ángulos de la base de un trapecio isósceles

$4x + 30 = 7x$

$30 = 7x - 4x$

$3x = 30$

$x = \frac{30}{3}$

$x = 10°$

$\angle D + \angle C = 180$ por ser conjugados internos

$7x + 2y = 180°$

$7(10) + 2y = 180°$

$70° + 2y = 180°$

$2y = 180° - 70°$

$2y = 110°$

$y = \frac{110°}{2} = 55°$

Ejemplo 2. Si el trapecio ABCD de la figura es isósceles, encuentra el valor de los ángulos A, B, C, y D si B y A están enrazón de 3:2

Solución:

Tenemos que el $\angle A + \angle B = 180°$ ¿Porqué?

Ahora sea x el factor proporcional,

$3x + 2x = 180°$

$5x = 180°$

$x = \frac{180°}{5}$

$x = 36°$

$\angle A = 2x$ y $\angle B$

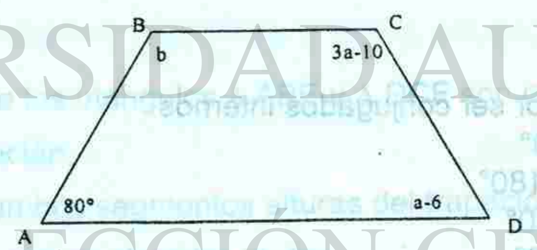
$\angle A = 2(36°)$ y $\angle B = 3(36°)$

$\angle A = 72°$ y $\angle B = 108°$

y además $\angle A = \angle D$ por ser ángulos de la base de un triángulo isósceles

y además $\angle B = \angle C$ por la misma razón.

Ejemplo 3. Encuentra los valores de *a* y *b* en el trapecio de la figura.



Solución:

$b+80° = 180°$

$b = 180° - 80°$

$b = 100°$

$(3a-10) + (a-6) = 180°$

$4a - 16 = 180°$

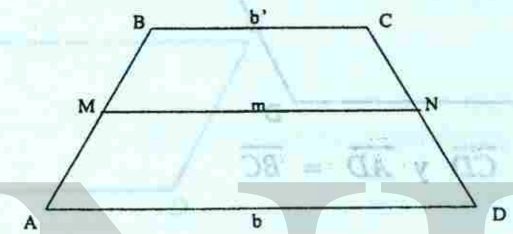
$4a = 180° + 16$

$4a = 196°$

$a = \frac{196}{4}$

$a = 49°$

Ejemplo 4. Si MN es la paralela media del siguiente trapecio ABCD, determinar los valores de m, b' y b:



a) Si b=40 y b' =30

$m = \frac{b+b'}{2} = \frac{40+30}{2} = \frac{70}{2}$

$m = 35$

b) Si b=26 y m=20

$m = \frac{b+b'}{2}$

$20(2) = 26+b'$

$40-26 = b'$

$b' = 14$

c) Si b' =16 y m =30

$m = \frac{b+b'}{2}$

$30 = \frac{b+16}{2}$

$60 = b + 16$

$b = 60 - 16$

$b = 44$

Ejercicio 2.7

1) Hallar los ángulos interiores de un cuadrilátero si se representan por :

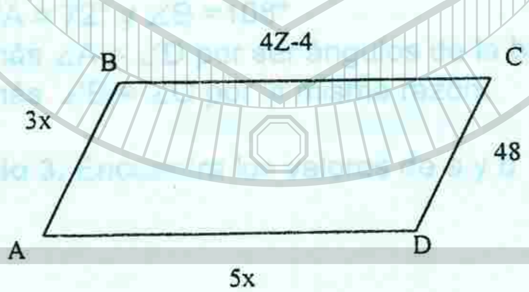
A= (2x+10)°, B= (8x)°, C= (7x-5)° D) (9x+5)°

2) Hallar la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero, si sus ángulos externos están a la razón de 2 ;3 :4 :6

3) Demuestra que los lados opuestos de un paralelogramo son congruentes

Demuestra que $\overline{AB} = \overline{CD}$ y $\overline{AD} = \overline{BC}$

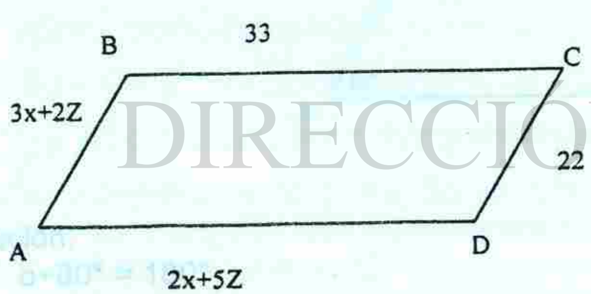
4) Si ABCD es un paralelogramo, hallar x y Z



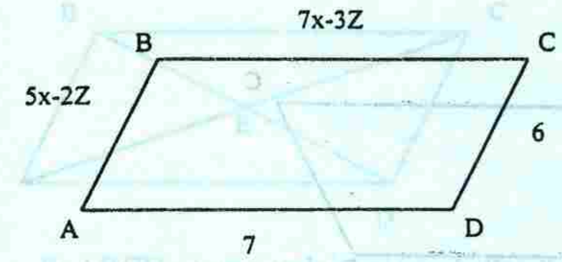
x= ________

Z= ________

5) Si ABCD es un paralelogramo, hallar x y Z



6) Si ABCD es un paralelogramo hallar X y Z



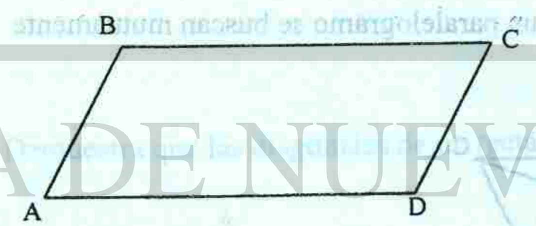
7) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z

∠ A= (2x+40)°

∠ B= 110°

∠ C= 2z

8) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z

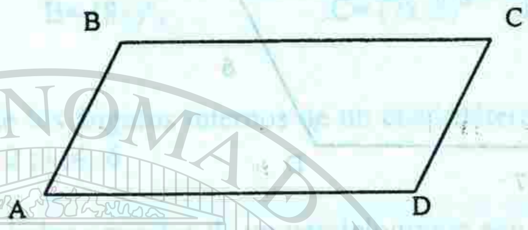


<A= (4x-50)°

<B= (2Z)°

<C=(x+28)°

9) Demuestra que los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

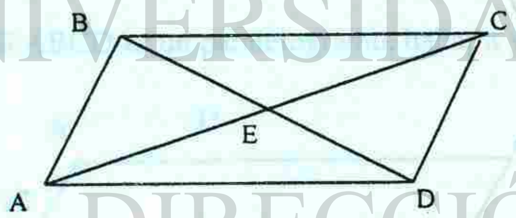


Demuestra que <A= <C
<B= <D

10) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z

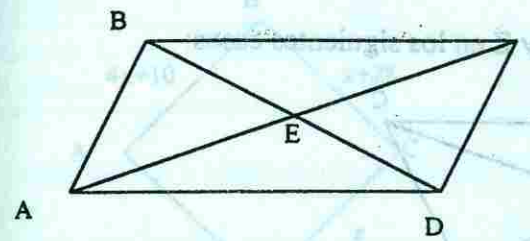
<B= 140°
<D= 4 (2x+10)°
<A= 5Z

11) Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se buscan mutuamente



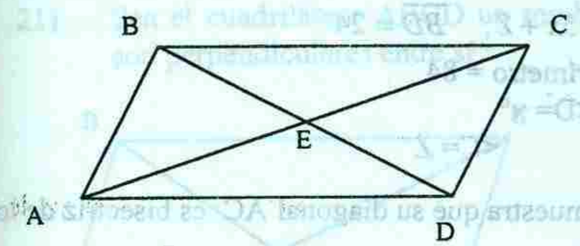
Demostrar que E es el punto medio de $\overline{AC} y \overline{BD}$.
(Sugerencia, demuestra que $\Delta ABE \cong \Delta DEC$

12) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z



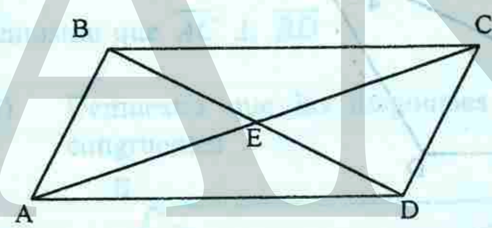
AE= 1.5x
AC= 30
BE= 8
DE= 2Z

13) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z



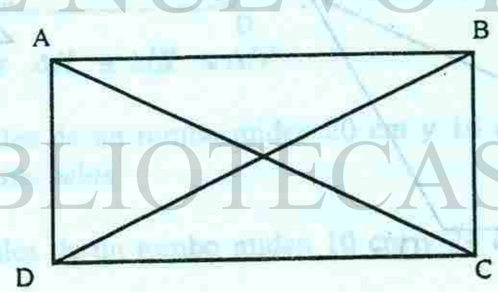
$\overline{AE} = 4x - 2$
$\overline{EC} = Z$
$\overline{BE} = 2x + 3Z$
$\overline{ED} = 22$
$x =$ _______
$z =$ _______

14) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z



$\overline{AE} = 5x + 3Z$
$\overline{AC} = 66$
$\overline{BE} = 4x + 6Z$
$\overline{BD} = 60$
$X =$ _____
$Z =$ _____

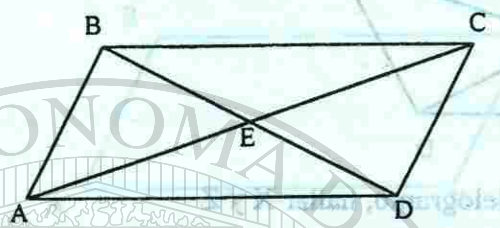
15) Demuestra que las diagonales de un rectángulo son congruentes



Demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

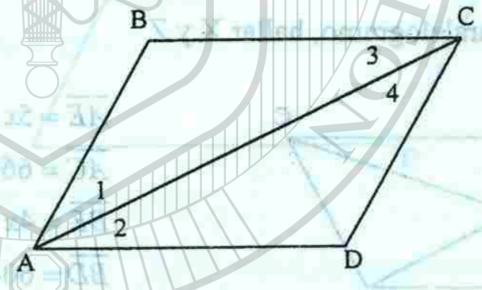
16) El largo y el ancho de un rectángulo están a la razón de 3:4 Encuentra la longitud de sus diagonales si su perímetro es de 140 cm

17) Si ABCD es un paralelogramo, hallar X y Z en los siguientes casos:



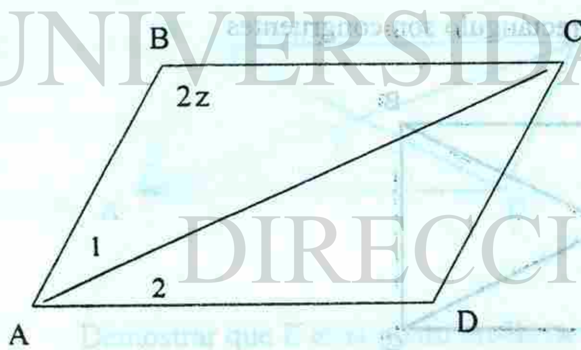
a) $\overline{AE} = x + Z$, $\overline{EC} = 20$, $\overline{BE} = x - Z$, $\overline{ED} = 8$
b) $\overline{AE} = 2x + Z$, $\overline{AC} = 30$, $\overline{BE} = 5x + Z$, $\overline{BD} = 24$
c) $\overline{AD} = 5x$ $\overline{AB} = 2x$, $\overline{CD} = Z$; perímetro = 84
d) <A=(4Z-60)°, <C=2Z°, <D= x°
e) <A=3x°, <B=(10x-15)°, <C= Z

18) Si la figura siguiente es un rombo, demuestra que su diagonal AC es bisectriz de los ángulos de los vértices que une.



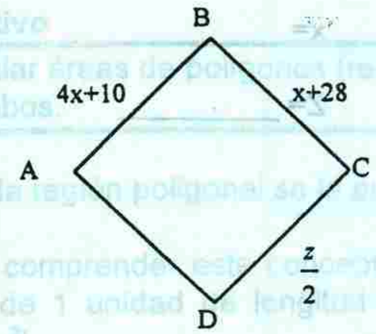
Demostrar que: <1 ≅ <2
<3 ≅ <4

19) Si ABCD es un rombo, encuentra x y z



$\angle 1 = (5x + 26)°$
$\angle 2 = (7x + 6)°$

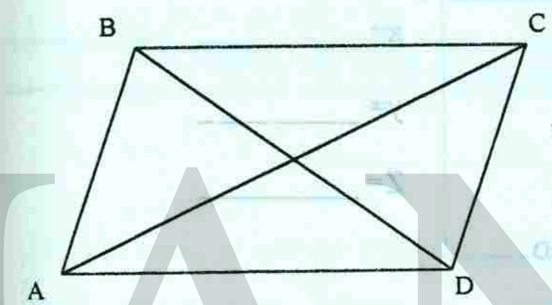
20)



x= ____________

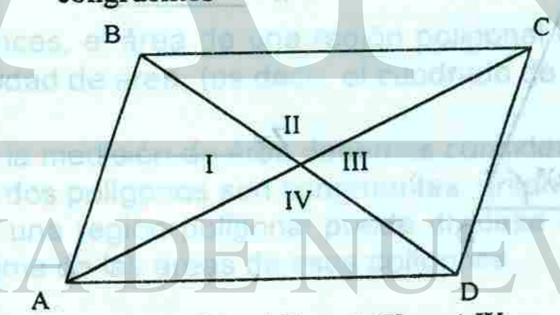
z= ____________

21) Sea el cuadrilátero ABCD un rombo. Demuestra que las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí :



Demostrar que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

22) Demuestra que las diagonales de un rombo, lo dividen en cuatro triángulos congruentes



Demostrar que $\Delta I \cong \Delta II \cong \Delta III \cong \Delta IV$

23) Las diagonales de un rombo miden 20 cm y 16 cm respectivamente, encuentra la longitud de sus lados

24) Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm respectivamente, encuentra su perímetro.

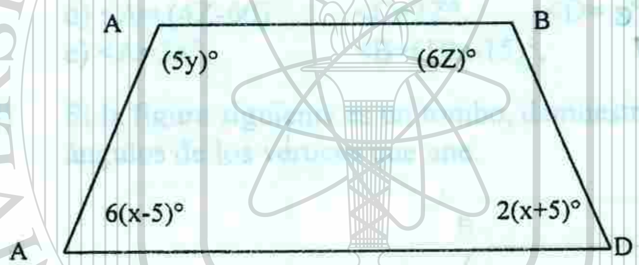
25) El perímetro de un rombo es de 40 cm y una de sus diagonales mide 12 cm. Encuentra la magnitud de la otra diagonal.

26) Si ABCD es un trapecio, hallar x y z

x= ________

Z= ________

27) Si ABCD es un trapecio isósceles, hallar y, x y z

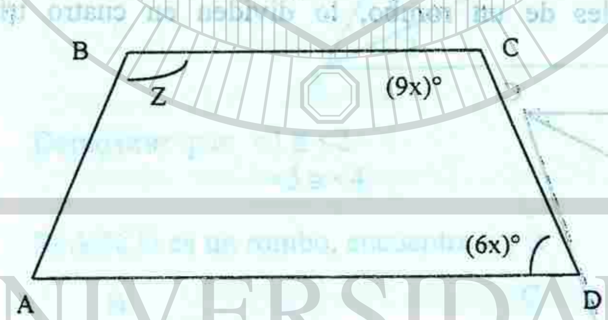


x= ________

y= ________

Z= ________

28) Si ABCD es un trapecio isósceles, hallar x y z



x= ________

Z= ________

2.8 Áreas de regiones poligonales

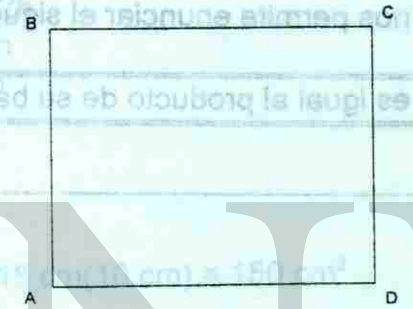
Objetivo

Calcular áreas de polígonos (rectangulares, paralelogramos, triángulos, trapecios y rombos.

A cada región poligonal se le puede relacionar un número positivo que se llama su **área.**

Para comprender este concepto comenzaremos por asumir que un cuadrado de lado de 1 unidad de longitud tiene un área de 1 unidad cuadrada de longitud ($A=1u^2$)

Supongamos que la figura siguiente ABCD sea un cuadrado cuyo lado mide 1 cm de longitud.



Así es:

La unidad de área = (unidad de longitud)^2

Entonces, el área de una región poligonal expresa cuantas veces está contenida la unidad de área, (es decir, el cuadrado de lado 1) en dicha región.

Para la medición de área debemos considerar los siguientes postulados:

1) Si dos polígonos son congruentes, entonces sus áreas son iguales.
2) Si una región poligonal puede dividirse en diferentes polígonos, su área es la suma de las áreas de esos polígonos.

Área de un rectángulo

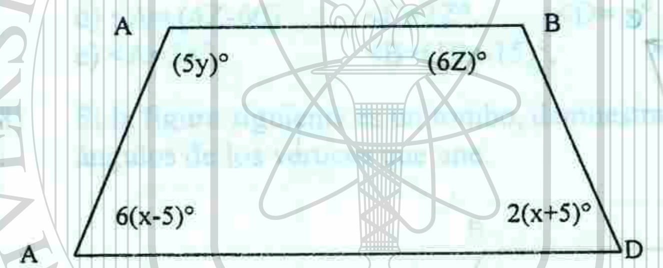
Si se considera que el rectángulo ABCD de la figura tiene una longitud de 3 unidades, y una altura de 5 unidades, los segmentos horizontales y verticales forman un total de 15 cuadrados. Por lo tanto, su área es de 15 unidades de área.

26) Si ABCD es un trapecio, hallar x y z

x= ________

Z= ________

27) Si ABCD es un trapecio isósceles, hallar y, x y z

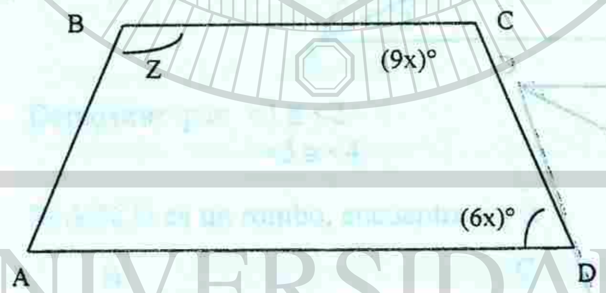


x= ________

y= ________

Z= ________

28) Si ABCD es un trapecio isósceles, hallar x y z



x= ________

Z= ________

2.8 Áreas de regiones poligonales

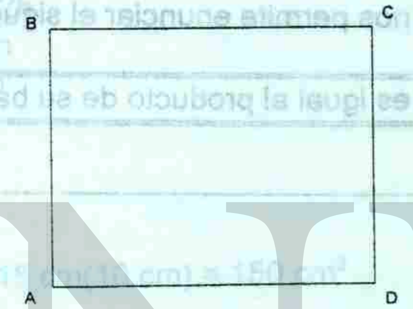
Objetivo

Calcular áreas de polígonos (rectangulares, paralelogramos, triángulos, trapecios y rombos.

A cada región poligonal se le puede relacionar un número positivo que se llama su **área.**

Para comprender este concepto comenzaremos por asumir que un cuadrado de lado de 1 unidad de longitud tiene un área de 1 unidad cuadrada de longitud ($A=1u^2$)

Supongamos que la figura siguiente ABCD sea un cuadrado cuyo lado mide 1 cm de longitud.



Así es:

La unidad de área = (unidad de longitud)^2

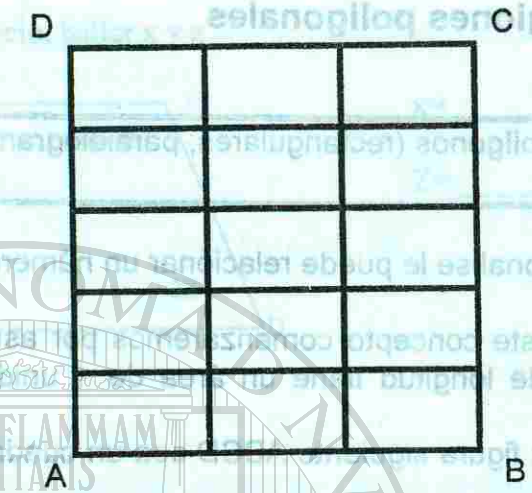
Entonces, el área de una región poligonal expresa cuantas veces está contenida la unidad de área, (es decir, el cuadrado de lado 1) en dicha región.

Para la medición de área debemos considerar los siguientes postulados:

1) Si dos polígonos son congruentes, entonces sus áreas son iguales.
2) Si una región poligonal puede dividirse en diferentes polígonos, su área es la suma de las áreas de esos polígonos.

Área de un rectángulo

Si se considera que el rectángulo ABCD de la figura tiene una longitud de 3 unidades, y una altura de 5 unidades, los segmentos horizontales y verticales forman un total de 15 cuadrados. Por lo tanto, su área es de 15 unidades de área.

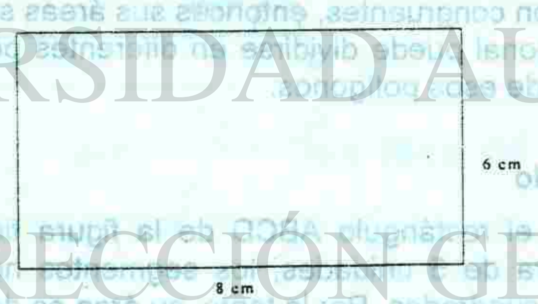


El razonamiento anterior nos permite enunciar el siguiente postulado:

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

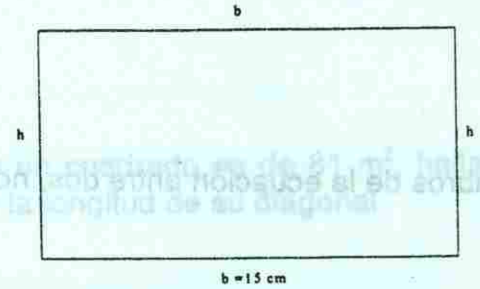
$$\boxed{A = bh}$$

Ejemplo 1. Encuentra el área del rectángulo de la figura.



$A = (8\text{ cm})(6\text{cm})$
$A = 48\text{ cm}^2$

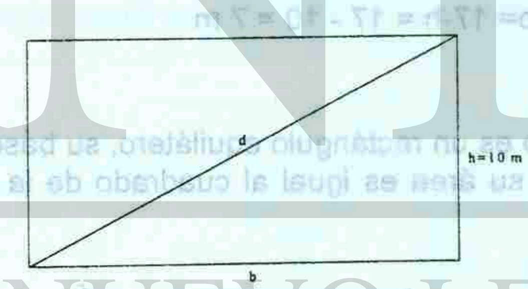
Ejemplo 2. Hallar el área de un rectángulo si su base es de 15 cm y su perímetro es de 50 cm.



$A = bh$
$A = 15h$
$p = 2b+2h$
$50\text{ cm} = 2(15\text{ cm})+2h$
$50\text{ cm} = 30\text{ cm} + 2h$
$2h = 50\text{ cm} - 30\text{ cm}$
$2h = 20\text{ cm}$
$h = \dfrac{20cm}{2}$
$h = 10\text{ cm}$

Por lo tanto el área $A = 15\text{ cm}(10\text{ cm}) = 150\text{ cm}^2$

Ejemplo 3. Hallar el área de un rectángulo si su altura es de 10 m y su diagonal es de 26 m.



$A = bh$
$A = b(10)$
$A = 10b$
$d^2 = b^2 + h^2$
$d^2 - h^2 = b^2$
$b^2 = (26m)^2 - (10m)^2$
$b^2 = 676\text{ m}^2\ \ 100\text{ m}^2$
$b^2 = 576\text{ m}^2$
$b = \sqrt{576m^2}$
$b = 24\text{ m}$

Por lo tanto: $A = 10\text{ m}(24\text{ m}) = 240\text{ m}^2$

Ejemplo 4. El área de un rectángulo es de 70 m^2 y su perímetro es de 34 m. Hallar la base y la altura.

$A = bh$
$bh = 70\ m^2$
$2b+2h = p$
$2b+2h = 34$

Dividendo ambos miembros de la ecuación entre dos, nos queda:

$$\frac{2b+2h}{2} = \frac{34}{2}$$

$b+h = 17$

De lo anterior nos resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

1) $bh = 70$
2) $b+h = 17$

despejando *b* en la ecuación 2 y sustituyendo en la ecuación 1, resulta:

$b = 17 - h$
$(17-h)h = 70$
$17h - h^2 = 70$
$-h^2 + 17h - 70 = 0$

cambiándole los signos a la ecuación, resulta:

$h^2 - 17h + 70 = 0$

resolviendo por el método de factorización, nos queda:

$(h-7)(h-10) = 0$
$h = 7 \quad h = 10$

Si h = 7 m, la base $b = 17-h = 17-7 = 10$ m
Si h = 10 m, la base $b = 17-h = 17 - 10 = 7$ m

Área del cuadrado:

Dado que el cuadrado es un rectángulo equilátero, su base y su altura tienen igual longitud, por lo tanto su área es igual al cuadrado de la longitud de uno de sus lados.

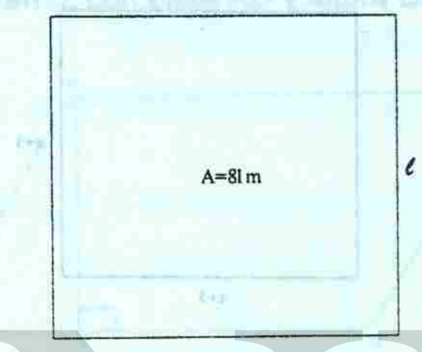
Si ABCD es un cuadrado:

$$\boxed{A = \ell^2}$$

Ejemplo 1. Hallar el área de un cuadrado, si cada uno de sus lados miden 15 cm.

$A = \ell^2$
$A = (15\ cm)^2$
$A = 225\ cm^2$

Ejemplo 2. Si el área de un cuadrado es de 81 m^2, hallar: a) la longitud de sus lados, b) el perímetro y c) la longitud de su diagonal.



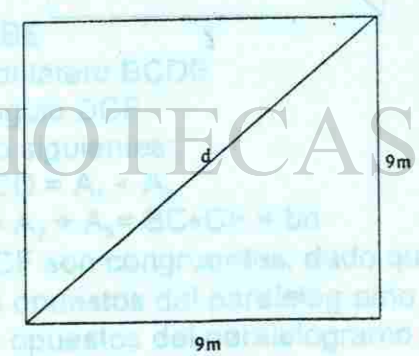
a)

$A = \ell^2$
$\ell^2 = 81\ m^2$
$\ell = \sqrt{81 m^2}$
$\ell = 9$ m

b)

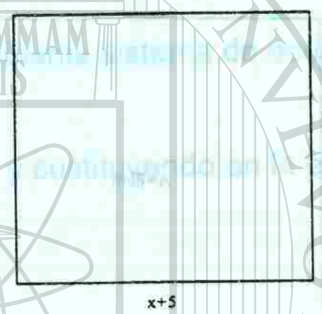
$p = 4\ell$
$p = 4(9\ m)$
$p = 36$ m

c)



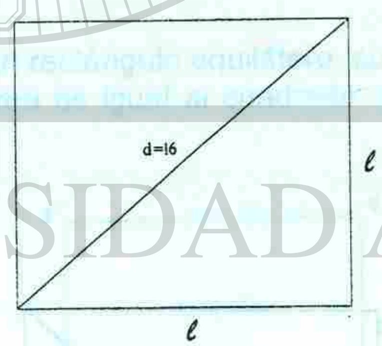
$d^2 = (9\ m^2) + (9\ m^2)$
$d^2 = (81 + 81)\ m^2$
$d^2 = 2(81)m^2$
$d = \sqrt{2(81)m^2}$
$d = 9\sqrt{2}\ m$

Ejemplo 3. El lado de un cuadrado mide (x+5)cm. Si su área es de 144 cm^2. Encuentra el valor de x.



$A = (x+5)^2$
$(x+5)^2 = 144$
$x+5 = \pm 12$ (se rechaza el número negativo)
$x = 12-5$
$x = 7$ cm

Ejemplo 4. Hallar el lado de un cuadrado cuyo diagonal es de 16 cm.



$d^2 = \ell^2 + \ell^2$

$d^2 = 2\ell^2$

$\ell^2 = \dfrac{d^2}{2}$

$\ell = \sqrt{\dfrac{d^2}{2}}$

$\ell = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

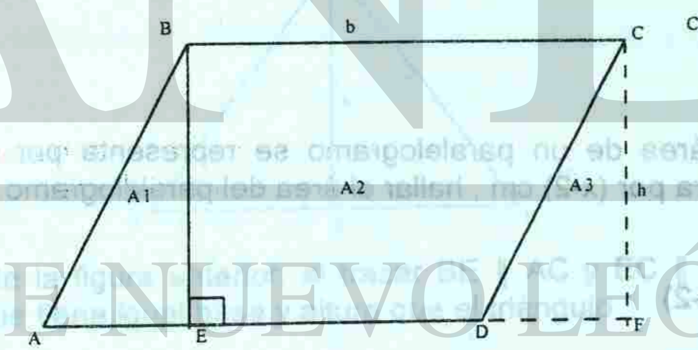
$\ell = \dfrac{16}{\sqrt{2}} \bullet \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$\ell = \dfrac{16\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{2}$ cm

Área de un paralelogramo.

Sea la figura un paralelogramo, con base AD y altura BE.

Al trazar por C el segmento de recta BF perpendicular a la prolongación de la base AD, se forma un rectángulo que tiene la misma base y la misma altura que el paralelogramo. Demostraremos que el área del paralelogramo ABCD, es de igual longitud que el área del rectángulo BCFE.



Sea A_1 = Área del Δ ABE
Sea A_2 = Área del cuadrilátero BCDE
Sea A_3 = Área del triángulo DCF
De lo anterior resulta lo siguientes:
Área del paralelogramo ABCD = $A_1 + A_2$
Área del rectángulo BCFE = $A_2 + A_3$ = BC•CF = bh
Los triángulos Δ ABE y Δ DCF son congruentes, dado que:
AB = DC Por ser lados opuestos del paralelogramo.
BE = CF Por ser lados opuestos del paralelogramo BCFE

Si dos triángulos rectángulos, tienen dos lados congruentes, entonces los triángulos son congruentes entre sí.
De acuerdo con lo anterior, si dos triángulos son congruentes, entonces sus áreas son iguales.

$$\boxed{A_1 = A_3}$$

Área del paralelogramo ABCD = $A_1 + A_2 = A_2 + A_3$ = Área del rectángulo BCFE

$$\boxed{A_2 + A_3 = bh}$$

por lo tanto el área del paralelogramo ABCD = bh

Ejemplo 1. Hallar el área de un paralelogramo cuya base mide 20 cm y cuya altura mide 8 cm.

$A = bh$
$A = (20\text{ cm})(8\text{ cm})$
$A = 160\text{ cm}^2$

Ejemplo 2. Hallar la base de un paralelogramo, si su área es de 45 m^2 y su altura de 15 m^2.

$A = bh$
$45\text{ m}^2 = b(15\text{ m})$
$b = \dfrac{45m^2}{15m}$
$b = 3\text{ m}$

Ejemplo 3. El área de un paralelogramo se representa por x^2 , la base por (x+3)cm y la altura por (x-2) cm , hallar el área del paralelogramo.

$A = bh$
$x^2 = (x+3)(x-2)$
$x^2 = x^2 + x - 6$
$x^2 - x^2 = x - 6$
$x - 6 = 0$
$x = 6\text{ cm}$

$A = x^2$
$A = (6)^2$
$A = 36\text{ cm}^2$

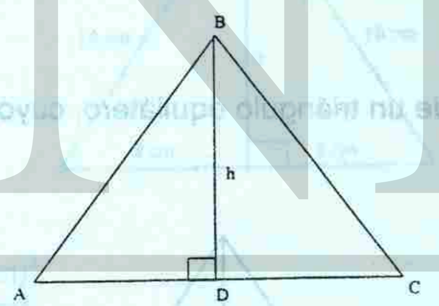
Ejemplo 4. La base de un paralelogramo se representa por (x+3)m, la altura por (x+1)m y su área es de 48 m^2 . Calcula la longitud de la base.

$bh = A$
$(x+3)(x+1) = 48$
$x^2 + 4x + 3 = 48$
$x^2 + 4x + 3 - 48 = 0$
$x^2 + 4x - 45 = 0$
Resolviendo por factorización:
$(x+9)(x-5) = 0$
$x = -9$, $x = 5$, se rechaza $x = -9$ $\therefore x = 5$
$b = x+3$
$b = 5+3$
$b = 8\text{ m}$

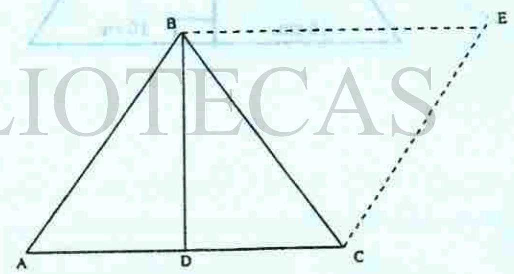
Área de un triángulo
El área de un triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura; como lo vamos a demostrar.

$$\boxed{A = \frac{bh}{2}}$$

Sea el triángulo Δ ABC, con base AC = b y altura BD = h.



En el triángulo de la figura anterior, al trazar BE ∥ AC y EC ∥ AB, se forma un paralelogramo que tiene igual base y altura que el triángulo



Entonces BC es una diagonal que divide al paralelogramo en dos triángulos congruentes.

$\Delta ABC \cong \Delta BCE$

Por lo tanto el área del triángulo ΔABC en la mitad del área del paralelogramo

Ejemplo 1. La base de un triángulo es de 12 cm y su altura es de 7 cm. Hallar su área.

$A = \dfrac{bh}{2}$

$A = \dfrac{(12cm)(7cm)}{2}$

$A = \dfrac{84cm^3}{2}$

$A = 42\ cm^2$

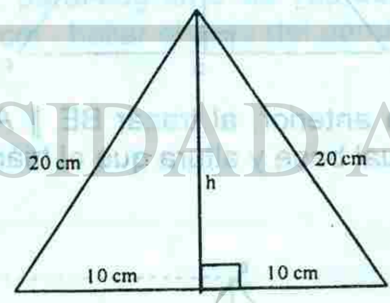
Ejemplo 2. Hallar el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 m y 12 m respectivamente.

$A = \dfrac{bh}{2}$

$A = \dfrac{(8m)(12m)}{2} = \dfrac{96m^2}{2}$

$A = 48\ m^2$

Ejemplo 3. Hallar el área de un triángulo equilátero, cuyos lados miden 20 cm.



$(20)^2 = h^2 + (10)^2$

$h^2 = (20)^2 - (10)^2$

$h^2 = 400 - 100$

$h^2 = 300$

$h = \sqrt{300}$

$h = \sqrt{3(100)}$

h) $10\sqrt{3}$

$A = \dfrac{bh}{2}$

$A = \dfrac{(20cm)(10\sqrt{3})cm}{2} = 100\sqrt{3}cm$

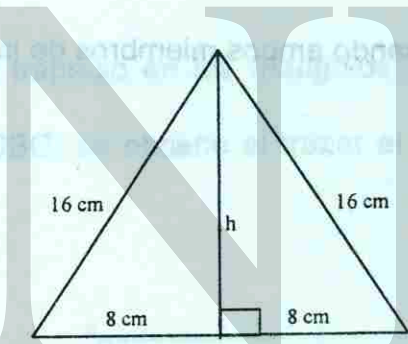
Ejemplo 4. El perímetro de un triángulo equilátero es de 48 cm. Hallar el área.

$P = 3\ell$

$3\ell = 48$ cm

$\ell = \dfrac{48cm}{3}$

$\ell = 16$ cm



$(16\ cm)^2 = h^2 + (8\ cm)^2$

$h^2 = 256\ cm^2 - 64\ cm^2$

$h^2 = 192\ cm^2$

$h = \sqrt{192cm^2}$

$h = \sqrt{3(64cm)^2}$

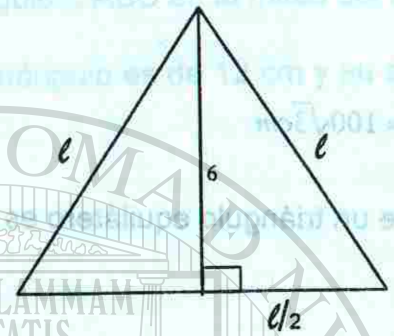
$h = 8\sqrt{3}$ cm

$A = \dfrac{bh}{2}$

$A = \dfrac{16(8\sqrt{3})}{2}$

$A = 64\sqrt{3}\ cm^2$

Ejemplo 5. Hallar el área de un triángulo equilátero si su altura es igual a 6 m.



A = $\frac{bh}{2}$

A = $3lm^2$, pero:

$\ell^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + (6)^2$

$\ell^2 = \frac{l^2}{4} + 36$ (Multiplicando ambos miembros de la ecuación por 4)

$4\ell^2 = \ell^2 + 144$

$4\ell^2 - \ell^2 = 144$

$3\ell^2 = 144$

$\ell^2 = \frac{144}{3}$

$\ell = \sqrt{\frac{144}{3}}$

$\ell = \sqrt{48} = \sqrt{16(3)} = 4\sqrt{3}$ cm

A = $\frac{bh}{2}$

A = $\frac{l}{2}(6) = 3\ell$

A = $\frac{4\sqrt{3}}{2}(6)$

A = $2\sqrt{3}(6)$

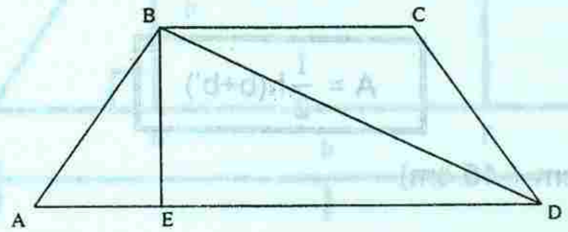
A = $12\sqrt{3}$ cm

Área de un trapecio

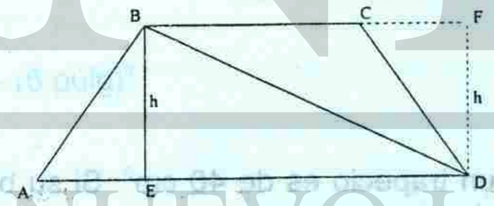
El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de su altura por la suma de sus bases como lo vamos a demostrar.

$$\boxed{A = \frac{1}{2}(B+b)h}$$

Sea el trapecio ABCD, de altura BE =h , base AD = B y base BC = b' .



La diagonal BD, divide al trapecio en los triángulos Δ ABD y Δ DBC y ambos tienen igual altura.
La altura del triángulo Δ DBC, se obtiene al trazar el segmento DF ⊥ BC en su prolongación.



BE = FD porque son lados opuestos del paralelogramo BFDE.

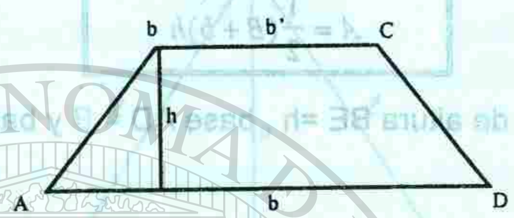
Área del trapecio = Área Δ ABD + Área Δ DBC

Área del trapecio = $\frac{1}{2}AD \bullet BE + \frac{1}{2}BC \bullet DF$

Área del trapecio = $\frac{1}{2}Bh + \frac{1}{2}bh$

$$\boxed{\text{Área del trapecio} = \frac{1}{2}h(B+b)}$$

Ejemplo 1. Hallar el área del trapecio ABCD, si b=25 cm, b'=15 cm y h= 7 cm



$$\boxed{A = \frac{1}{2}h(b+b')}$$

$A = \frac{1}{2}(7\text{ cm})(25\text{ cm} + 15\text{ cm})$

$A = 140\text{ cm}^2$

Ejemplo 2. Hallar el área de un trapecio y su paralela media mide 10 m y su altura es de 2 m.

$A = \frac{1}{2}h(b+b')$

$A = mh$

$A = 10\text{ m }(2\text{ m})$

$A = 20\text{ m}^2$

Ejemplo 3. El área de un trapecio es de 40 cm². Si su base mide 13 cm y 7 cm respectivamente, determina su altura.

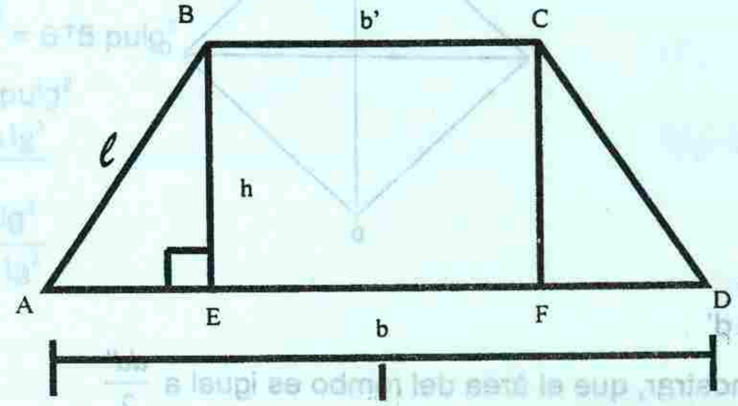
$A = \frac{1}{2}h(b+b')$

$2A = h(b+b')$

$h = \frac{2A}{(b+b')}$

$h = \frac{2(40cm^2)}{(13cm+7cm)}$

Ejemplo 4. Hallar el área del trapecio isósceles ABCD, si b'= 17 pulg, ℓ =10 pulg. y h= 7pulg.



$b = AE + EF + FD$

$b = AE + b' + FD$

$b = AE + 17 + FD$

Como el trapecio es isósceles, entonces AE = FD

$b = 17 + 2AE$

$AE^2 + h^2 = \ell^2$

$AE^2 = \ell^2 - h^2$

$AE^2 = (10\text{ pulg})^2 - (6\text{ pulg})^2$

$AE^2 = 64\text{ pulg}^2$

$AE = 8\text{ pulg.}$

$b = 17\text{ pulg.} + 2AE$

$b = 17 + 2(8)$

$b' = 33\text{ pulg.}$

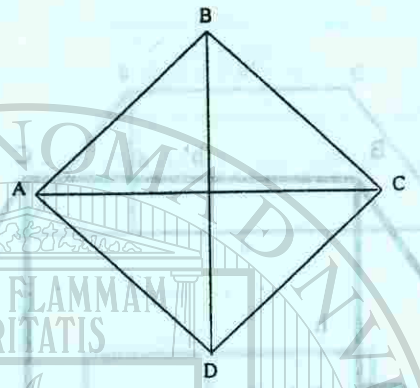
$A = \frac{1}{2}h(b+b')$

$A = \frac{1}{2}(6\text{ pulg})(33\text{ pulg} + 17\text{ pulg})$

$A = 150\text{ pulg}^2$

Área del rombo.

El área de un rombo es igual al semiproducto de sus diagonales.



Sea AC =
BD = d'

Queremos demostrar, que el área del rombo es igual a $\frac{dd'}{2}$

$$\boxed{A = \frac{dd'}{2}}$$

Como ya hemos demostrado, las diagonales son mutuamente mediatrices y los cuatro triángulos formados son congruentes, entonces:

Área de uno de los triángulos = $\frac{1}{2}bh$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d'}{2}\right)$

$= \frac{dd'}{8}$

Área total = $4\left(\frac{dd'}{8}\right)$

Área total = $\frac{4dd'}{8}$

Área total = $\frac{dd'}{2}$

Ejemplo 1. Hallar el área de un rombo, si sus diagonales miden 14 c, y 10 cm respectivamente.

A = $\frac{dd'}{2}$

A = $\frac{(14cm)(10cm)}{2}$

A = 70 cm

Ejemplo 2. El área de un rombo es de 675 pulg^2 .Si sus diagonales están a la razón de 3:2 , encuentra la longitud de sus diagonales.

A = $\frac{dd'}{2}$

Sea d = 3x

d' = 2x

A = $\frac{(3x)(2x)}{2}$ = 675 pulg^2

6x^2 = 1350 pulg^2

x^2 = $\frac{1350 pu\lg^2}{6}$

x^2 = 225 pulg^2

x = $\sqrt{225 pu\lg^2}$

x = 15 pulg

d = 3x

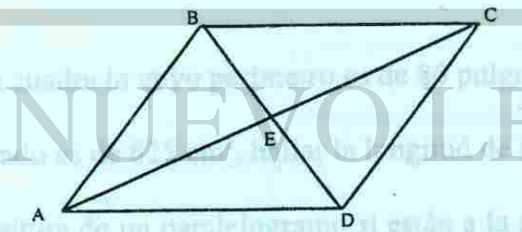
d = 3(15 pulg) = 45 pulg.

d' = 2x

d' = 2(15 pulg)

d' = 30 pulg

Ejemplo 3. Sea la figura un rombo, con diagonal BD = 30 cm y AB = 17, encuentre el área del rombo.



BD = d' = 30 cm

AB = 17

AB^2 = AE^2 + BE^2

$$AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$AB^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d'}{2}\right)^2$$

$$(17)^2 = \frac{d^2}{4} + \left(\frac{30}{2}\right)^2$$

$$289 = \frac{d^2}{4} + 225$$

$$\frac{d^2}{4} = 289\text{-}225$$

$$\frac{d^2}{4} = 64$$

$$d^2 = 4(64)$$

$$d = 16 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{dd'}{2} = \frac{16cm(30cm)}{2} = 240cm^2$$

Ejemplo 4. El área de un rombo es de 96 cm^2 , si una de sus diagonales mide 12 cm, hallar:

a) La longitud de la otra diagonal

b) La longitud de sus lados

a)

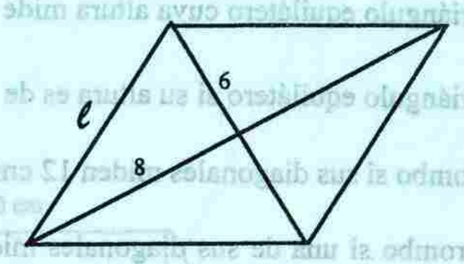
$$A = \frac{dd'}{2}$$

$$\frac{2A}{d'} = d$$

$$\frac{2(96cm^2)}{12cm} = d$$

d= 16 cm

b)



$$\ell^2 = (8)^2+(6)^2$$

$$\ell^2 = 64+36$$

$$\ell^2 = 100$$

$$\ell = \sqrt{100}$$

$$\ell = 10$$

Ejercicio 2.8

1) Hallar el área de un rectángulo si su base mide 25 cm y el perímetro mide 90 cm.

2) Hallar el área de un rectángulo si su base mide 5 m y su diagonal 13 m.

3) Hallar la base y la altura de un rectángulo si su área es de 180 m^2 y su perímetro mide 56m.

4) Hallar el área de un cuadrado cuyo perímetro es de 80 pulgadas.

5) El área de un cuadrado es de 625 cm^2, hallar la longitud de sus lados

6) Hallar la base y la altura de un paralelogramo si están a la razón de 4 :5 y su área es de 1280 cm^2

7) Hallar la base de un paralelogramo, si su altura es de 15 cm y su área es de 40 cm^2

8) Hallar el área de un triángulo con base 20 cm y altura 12 cm

9) Hallar el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 28 pies y 8 pies respectivamente.

10) Hallar el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro es de 30 cm

11) Hallar el área de un triángulo equilátero cuya altura mide 6 pulgadas

12) Hallar el área de un triángulo equilátero si su altura es de $5\sqrt{3}$ pulgadas

13) Hallar el área de un rombo si sus diagonales miden 12 cm y 8 cm respectivamente

14) Hallar el área de un rombo si una de sus diagonales mide 10 pulgadas y sus lados miden 13 pulgadas

15) Hallar el área de un rombo cuyo perímetro es de 40 cm y una de sus diagonlaes mide 12 cm

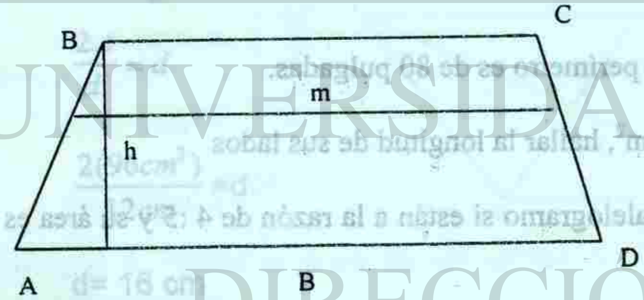
16) El área de un rombo es de 35 pulgadas, una de sus diagonales mide 7 pulgadas, hallar la longitud de la otra diagonal.

17) Las diagonales de un rombo están a la razón de 5 :4. Si el área es de 54 m, encontrar la longitud de sus lados.

18) Las bases de un trapecio miden 9 pies y 11 pies respectivamente. Si su área es de 60 pies^2, encuentra la medida de su altura.

19) Las bases de un trapecio son 25 cm y 35 cm respectivamente, Si el área es de 300 cm^2, hallar la magnitud de la altura

Para cada uno de los siguientes casos, hallar el área del trapecio ABCD



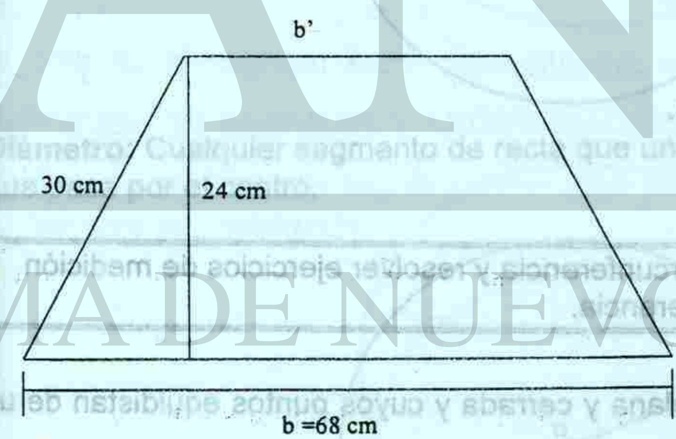
20) b=25cm
b'=15cm
h= 7cm

21) b= 36
b'=20
h= 6

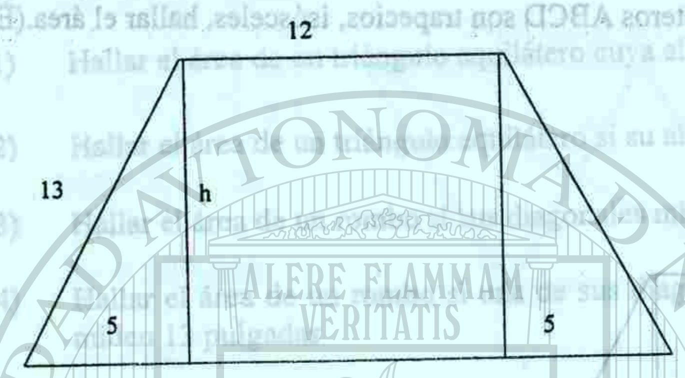
Si cada uno de los siguientes cuadriláteros ABCD son trapecios, isósceles, hallar el área.(En los problemas 22, 23 y 24

22)

23)



24)



25) Hallar la altura de un trapecio, si sus bases miden 13 m y 7 m respectivamente y su área es de $40 m^2$

26) Hallar la altura de un trapecio si la suma de sus bases es el doble de su altura y su área es de $400 cm^2$.

27) Hallar las bases de un trapecio, si la mayor es el doble de la menor la altura es 8 cm y el área es de $84 cm^2$.

2.9 Circunferencia y círculo.

Objetivo

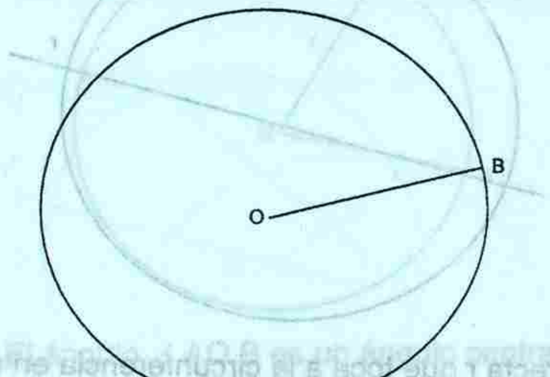
Identificar los elementos de una circunferencia y resolver ejercicios de medición de ángulos y arcos en una circunferencia.

Una circunferencia es una curva plana y cerrada y cuyos puntos equidistan de un punto interior fijo llamado centro.

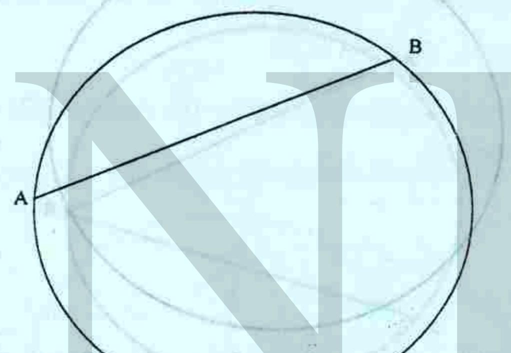
La circunferencia divide al plano que la contiene en dos partes, una exterior y otra interior. Al conjunto de los puntos interiores de una circunferencia se llama círculo.

Elementos de la circunferencia

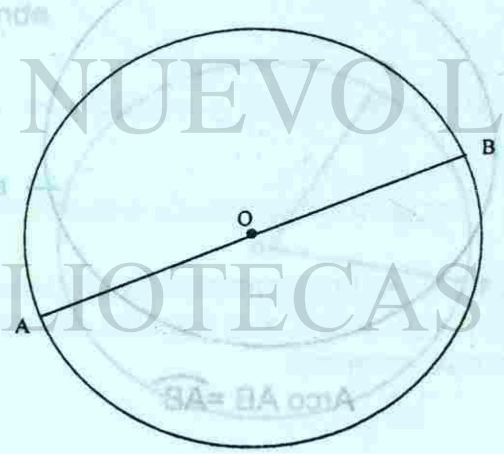
Radio: Cualquier segmento de recta que une al centro con un punto de la circunferencia.



Cuerda: Cualquier segmento de recta que une dos punto de la circunferencia.

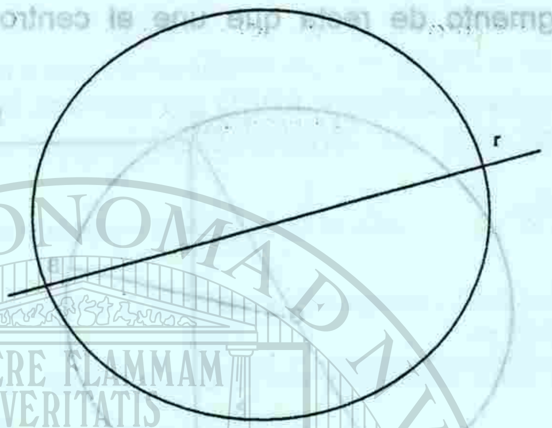


Diámetro: Cualquier segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia y que pasa por el centro.

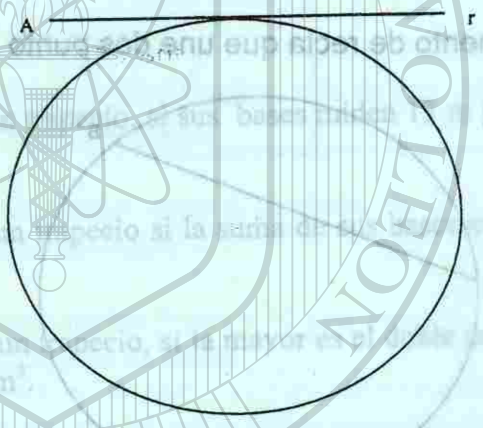


El diámetro es la cuerda de mayor longitud y su tamaño es dos veces el radio.

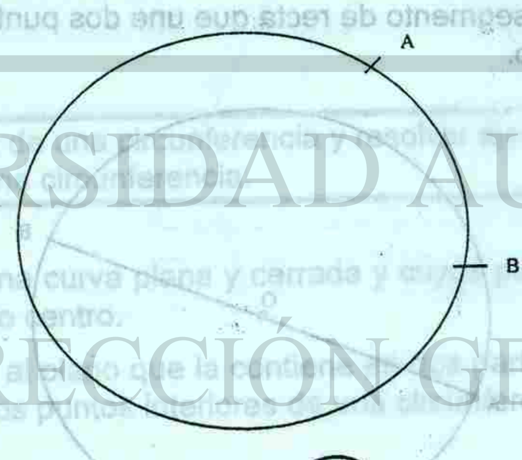
Secante: Cualquier recta que corta a la circunferencia en dos puntos.



Tangente: Cualquier recta r que toca a la circunferencia en uno y sólo en uno.

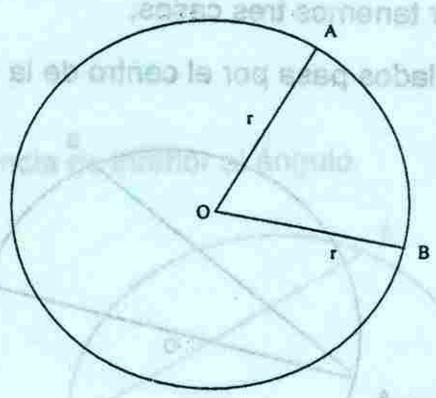


Arco: Es cualquier porción de la circunferencia. Para representar un arco se emplea el símbolo ⌒



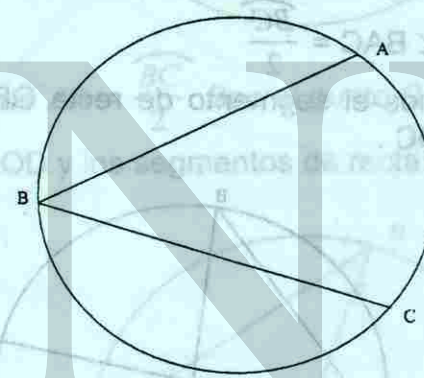
Arco AB $=\overset{\frown}{AB}$

Ángulo central: Es cualquier ángulo con vértice en el centro y cuyos lados son radios de la circunferencia.



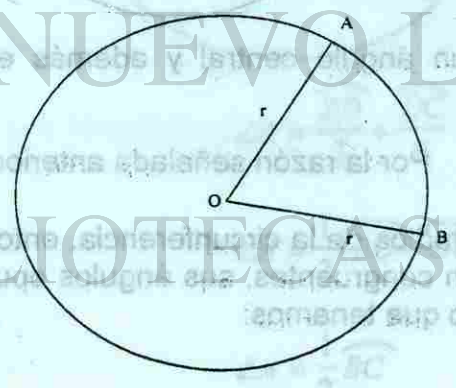
El ángulo $\angle$ AO B es un ángulo central.

Ángulo inscrito: Es cualquier ángulo que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son cuerdas de la circunferencia.



MEDICIÓN DE ÁNGULOS Y ARCOS EN UNA CIRCUNFERENCIA.

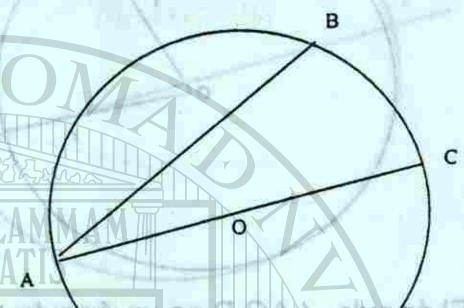
a) **Ángulo central**: Un ángulo central tiene por medida en radianes, la magnitud del arco que subtiende.



$\angle AOB = \overset{\frown}{AB}$

b) Un ángulo inscrito tiene por medida, la mitad de la medida del ángulo central que subtiende el mismo arco.
Para demostrar lo anterior tenemos tres casos.

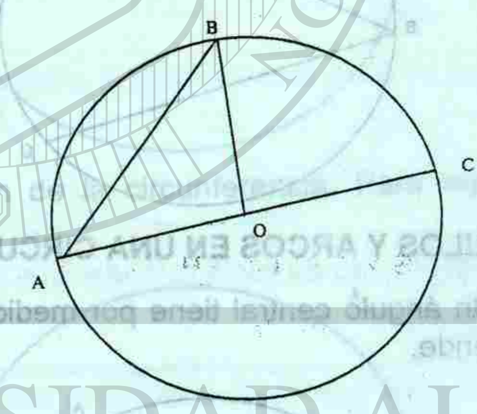
Primer caso: Uno de los lados pasa por el centro de la circunferencia.



En la circunferencia anterior, sea el punto O el centro de la circunferencia.

Queremos demostrar que: $\angle BAC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

En la figura anterior trazamos el segmento de recta OB, que en un radio de la circunferencia al igual que OC .



El ángulo $\angle$ BOC es un ángulo central y además es un ángulo externo del triángulo Δ ABO.

$\angle BOC = \angle A + \angle B$. Por la razón señalada anteriormente.

Como AO = BO por ser radios de la circunferencia, entonces tenemos que, si dos lados de un triángulo son congruentes, sus ángulos opuestos también lo son, por lo tanto $\angle A \cong \angle B$. Por lo que tenemos:

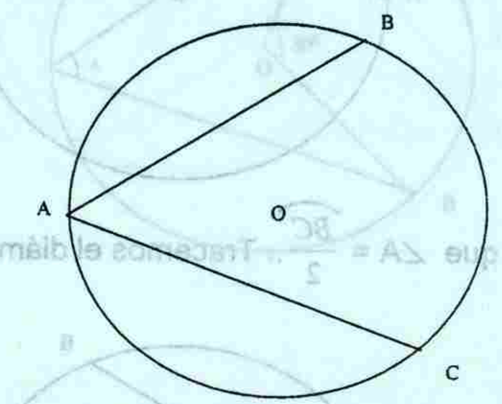
$\angle BOC = \angle A + \angle B$

$\angle BOC = 2\angle A$

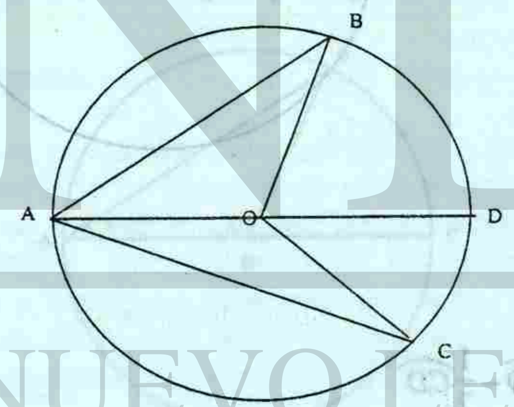
$$\frac{\angle BOC}{2} = \angle A$$

$$\angle A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$$

Segundo caso.
El centro de la circunferencia es interior al ángulo.



Queremos demostrar que $\angle A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$. Sea el punto O el centro de la circunferencia, tracemos el diámetro AOD y los segmentos de recta $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$



$\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC}$

$\angle BAD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$

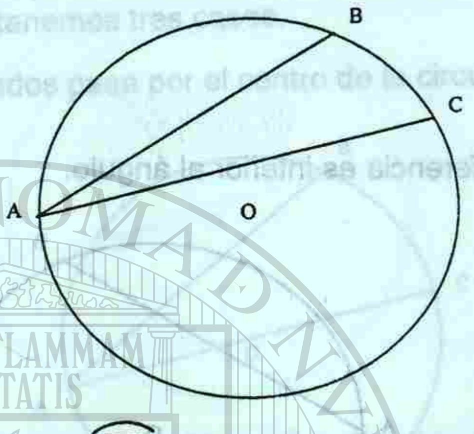
$\angle DAC = \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

$\angle A = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{2}$

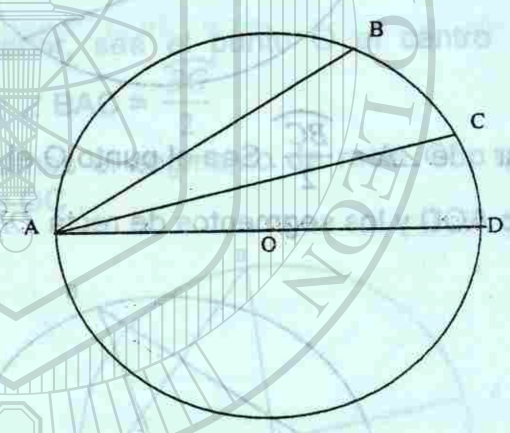
$\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} + \overset{\frown}{DC})$

$\angle A = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$

Tercer caso: El centro de la circunferencia es exterior al ángulo.



Queremos demostrar que $\angle A = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$.. Tracemos el diámetro $\overline{AD}$.



$$\angle BAD = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$$\angle CAD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$$

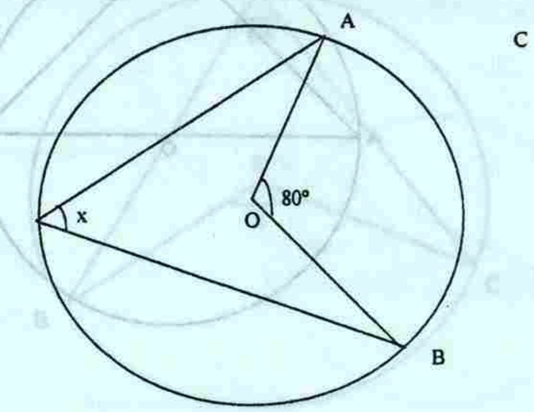
$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{CD})$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

Ejemplos: Determina la medida de los ángulos que se te indican.

1)

$\angle x =$ ____



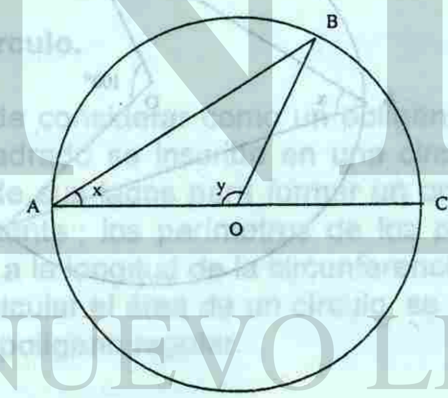
$\angle AOB = 80°$

$\angle x = \frac{\angle AOB}{2}$

$\angle x = \frac{80°}{2}$

$\angle x = 40°$

2) Hallar la medida del ángulo x , si el ángulo y es igual a 120°



Tenemos que $\angle BOC + \angle y = 180°$ Por ser ángulos adyacentes, luego

$\angle BOC = 180° - \angle y$

$\angle BOC = 180 - 120°$

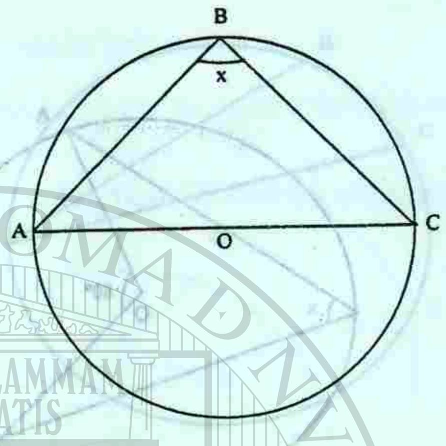
$\angle BOC = 60°$

$\angle x = \frac{\angle BOC}{2}$

$\angle x = \frac{60°}{2}$

$\angle x = 30°$

3). Hallar la medida del ángulo x, si AC es un diámetro de la circunferencia.

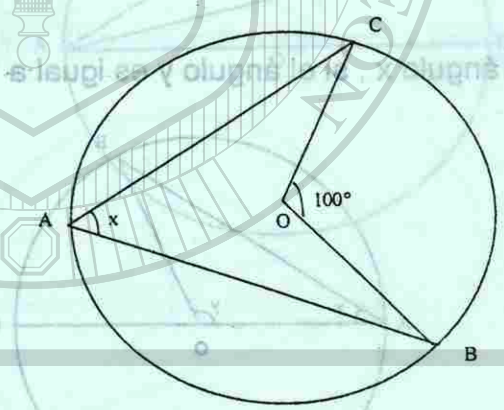


$\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2}$

$\angle x = \dfrac{180°}{2}$

$\angle x = 90°$

4) Hallar la medida del ángulo x.

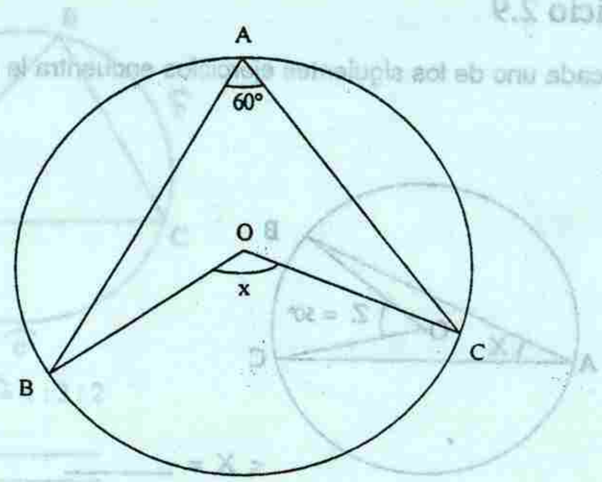


$\angle x = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

$\angle x = \dfrac{100°}{2}$

$\angle x = 50°$

5) Hallar la medida del ángulo x



$\angle A = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

$\angle A = \dfrac{\angle x}{2}$

$\angle x = 2\angle A$

$\angle x = 2(60°)$

$\angle x = 120°$

Área y perímetro de un círculo.

Una circunferencia se puede considerar como un polígono regular de un número infinito de lados. Si un cuadrado se inscribe en una circunferencia y se duplica continuamente el número de sus lados para formar un octágono, es 16-gono, un 32-gono, y así sucesivamente ; los perímetros de los polígonos resultantes se aproximarán cada vez mas a la longitud de la circunferencia.
De tal manera que, para calcular el área de un círculo, se puede utilizar la fórmula para calcular el área de un polígono regular.

$A = \dfrac{1}{2}pr$, en lo que *p* se sustituye por el perímetro del circunferencia.

$A = \dfrac{1}{2}(2\pi r)r$

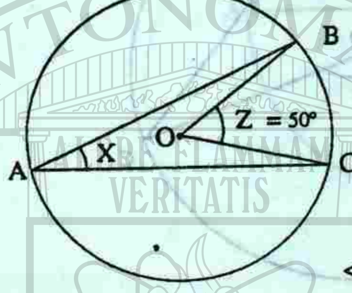
$A = \dfrac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$

$\boxed{A = \pi r^2}$

Ejercicio 2.9

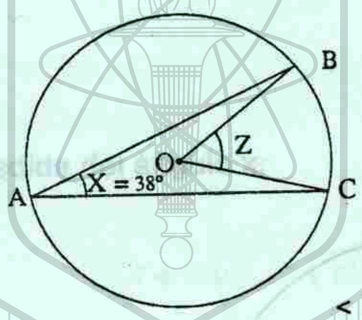
En cada uno de los siguientes ejercicios encuentra la medida del ángulo que se te indica.

1)



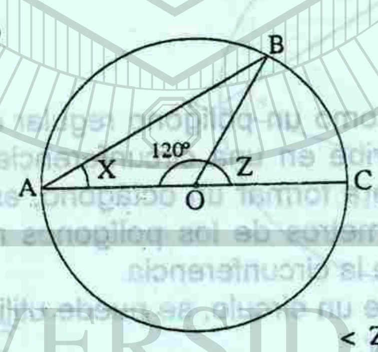
< X = ________

2)



< Z = ________

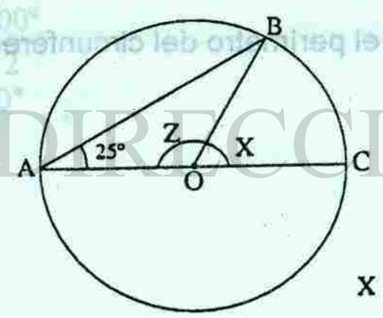
3)



< Z = ________

< X = ________

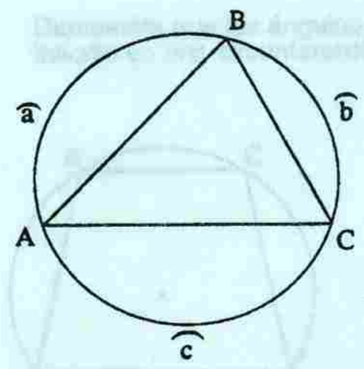
4)



X = ________

Z = ________

5)



Si $\widehat{a}:\widehat{b}:\widehat{c} = 4:3:2$

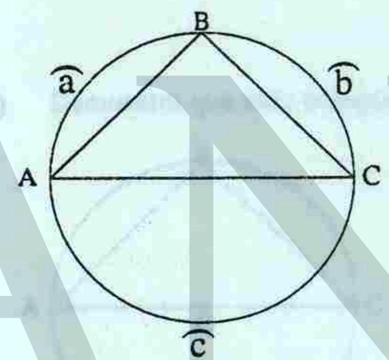
Hallar:

< A= ________

< B= ________

< C= ________

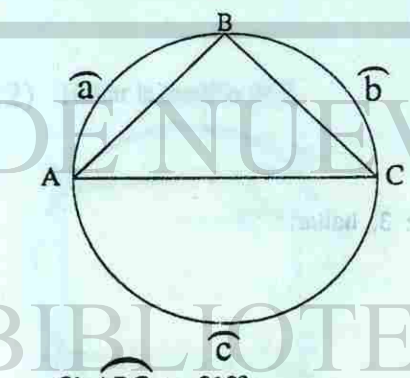
6)



Si $\overline{AC}$ es un diámetro y $\widehat{a}:\widehat{b} = 5:4$

Hallar: < A ________

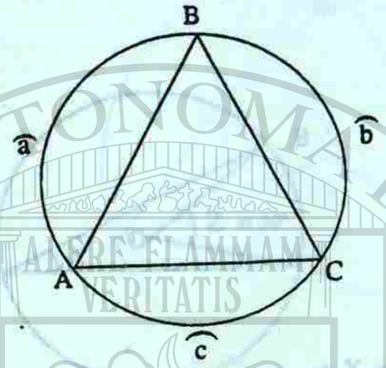
7)



Si $\widehat{ABC} = 210°$

Hallar: < B ________

8)



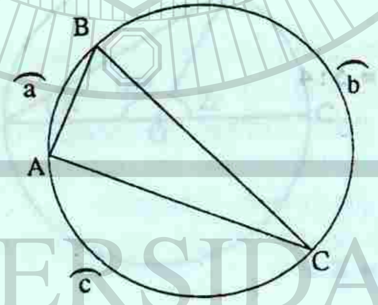
Si $\widehat{a} : \widehat{b} : \widehat{c} = 5 : 4 : 3$., hallar:

< A = __________

< B = __________

< C = __________

9)



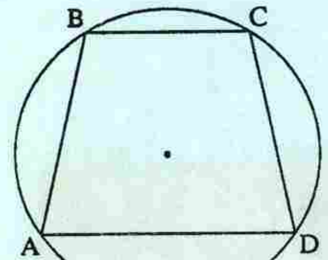
Si < A : < B : C = 5 : 4 : 3, hallar:

$\widehat{a}$ = __________

$\widehat{b}$ = __________

$\widehat{c}$ = __________

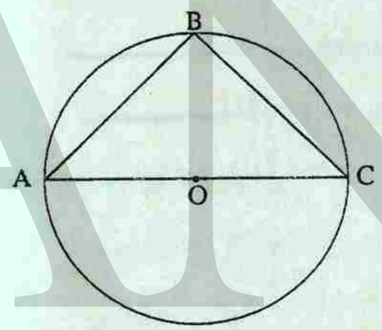
10) **Demuestra que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios.**



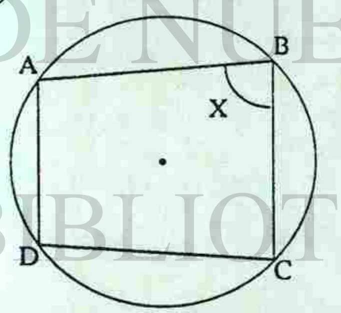
Demostrar que <A + <C = 180°

<B + <D = 180°

11) **Demuestra que todo triángulo inscrito en una semicircunferencia es rectángulo.**



12) Hallar la medida de Z



$\widehat{AD} = 70°$; $\widehat{DC} = Z$; $<X = 60°$
