REFORMA ACADÉMICA DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
Secretaría Académica

M1

Pte. 1

MATEMÁTICAS, TERCERA EDICIÓN 1997

Matemáticas

AGRADECIMIENTO

Un agradecimiento muy especial al Dr. Raimundo Reguera Vilar catedrático de la Universidad de la Habana y Ministerio de Educación Superior de Cuba, por sus consejos y comentarios respecto a los contenidos del texto que sin ser tan detallados como él hubiera deseado, debido a la premura del tiempo con el que se contó para la revisión de este trabajo, sirvieron para mejorar la versión final de este texto

COLABORADORES

ING. JOSÉ LUIS GUERRA TORRES

ING. ANTONIO MONTEMAYOR SOTO

ING. FERNANDO JAVIER GOMEZ TRIANA

LIC. MIGUEL A. TORRECILLAS GONZÁLEZ

JULIO DE 1997

PRESENTACIÓN

El presente material dirigido a los estudiantes que cursan el módulo I de Matemáticas ha sido diseñado con la nueva metodología de la Reforma Académica en el Nivel Medio Superior que, entre otras cosas, contempla el aplicar las matemáticas a problemas de la vida cotidiana.

Cada unidad del texto posee un listado de metas que el alumno debe alcanzar apoyado en el empleo de diferentes herramientas de carácter didáctico.

Se debe comentar que el uso de la calculadora esta restringido a situaciones muy particulares de los contenidos, más como herramienta que facilite los cálculos numéricos que como medio para la asimilación de conceptos matemáticos.

Todos los profesores de matemáticas deberán trabajar conjuntamente con sus alumnos en el propósito de lograr los objetivos y metas trazadas en el programa del curso.

Les deseamos éxito en el estudio de las matemáticas.

Julio de 1997

COMITÉ TÉCNICO ACADÉMICO DE MATEMÁTICAS

LIC. BLANCA MA. BORGHES ALONSO — ING. ROBERTO SÁNCHEZ AYALA

ING. JUAN ANTONIO CUELLAR CARVAJAL — LIC. SALVADOR RODRIGUEZ VERTIZ

LIC. ALEJANDRO NAVA SEGOVIA

ÍNDICE

Cap.

CAPÍTULO 1

OPERACIONES CON POLINOMIOS

1.1 Terminología algebráica 6
1.2 Introducción a las operaciones con polinomios 9
1.3 Reducción de términos semejantes 10
1.4 Signos de agrupación 12
1.5 Adición de polinomios 13
1.6 Sustracción de polinomios 15
1.7 Multiplicación algebráica 18
1.8 División algebráica 25
1.9 Notación científica 38
1.10 Simplificación de expresiones algebráicas con signos de agrupación 42

CAPÍTULO 2

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

2.1 Polinomios, multiplicación y factorización 46
2.1.1 Producto de dos binomios 47
2.1.2 Factorización de trinomios cuadráticos 49
2.1.3 Factorizando una diferencia de dos cuadrados 52
2.1.4. Binomio elevado al cuadrado 54
2.1.5 Factorizando binomios cuadrados perfectos 56
2.1.6 Factorización de suma ó diferencia de dos cubos 57
2.2 El máximo factor común 58
2.3 Factorizando polinomios que tienen factores comunes 62
2.4 Binomios como factor común 65
2.5 Factorización por agrupamiento (asociación) 68
2.6 Factorización de trinomios de segundo grado 71

CAPÍTULO 3

EXPRESIONES ALGEBRÁICAS RACIONALES

3.1 Introducción a las exprresiones algebráicas racionales 78
3.2 Simplificando expresiones algebráicas racionales 82
3.3 Multiplicación y división de expresiones racionales 87
3.4 Mínimo común múltiplo 91
3.5 Suma y resta de expresiones racionales 95
3.6 Combinación de operaciones y casos especiales 99

CAPÍTULO 4

ECUACIONES LINEALES

4.1 Introducción a las ecuaciones lineales 108

Cáp.
4.1 Ecuaciones que necesitan dos transformaciones 117
4.3 Ecuaciones con términos semejantes 124
4.4 Aplicando la propiedad distributiva en ecuaciones con términos semejantes 126
4.5 Ecuaciones que contienen variables en ambos miembros 128
4.6 Ecuaciones que involucran decimales 132
4.7 Ecuaciones literales y fórmulas 135
4.8 Ecuaciones lineales como modelos matemáticos 138
4.9 Ecuaciones fraccionales y soluciones extrañas 145
4.10 Problemas que involucran razón y proporción 153

CAPÍTULO 5

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES
5.1 Evaluando expresiones y ecuaciones que contienen dos variables 162
5.2 El sistema de coordenadas cartesiano 165
5.3 Gráfica de ecuaciones que contienen dos variables 171
5.4 Encontrando la intersección de dos gráficas 176
5.5 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por sustitución 178
5.6 Solución de sistemas por el método de combinación lineal 183
5.7 Problemas que involucran dos variables 187

CAPÍTULO 6

ECUACIONES CUADRÁTICAS
6.1 Ecuaciones que contienen valor absoluto y ecuaciones con cuadrados 198
6.2 Ecuaciones con trinomios cuadráticos perfectos 204
6.3 Completando el cuadrado 208
6.4 Resolviendo ecuaciones cuadráticas por el método de completando al cuadrado 211
6.5 La formula cuadrática 215
6.6 Resolución de ecuaciones cuadráticas pro factorización 220
6.7 Problemas con movimiento vertical 225

CAPÍTULO 7

EXPRESIONES ALGEBRAÍCAS CON RADICALES
7.1 Introducción a las expresiones con radicales 233
7.2 Sumas, diferencias y productos de radicales 235
7.3 Cocientes con radicales 239
7.4 Binomios con radicales 245
7.5 Raíces cuadradas de expresiones 249
7.6 Ecuaciones con radicales 251
7.7 Números racionales e irracionales 254

CAPITULO I

OPERACIONES CON POLINOMIOS

En este capítulo aprenderás efectuar las operaciones básicas algebráicas entre polinomios; la suma, resta, multiplicación y división.

Así mismo simplificarás expresiones algebráicas utilizando las leyes de los exponentes y como parte de la aplicación de éstos, la notación científica. Que se utiliza para expresar números muy grandes o muy pequeños con la ayuda de las potencias de base 10.

	Cáp.
4.1 Ecuaciones que necesitan dos transformaciones	117
4.3 Ecuaciones con términos semejantes	124
4.4 Aplicando la propiedad distributiva en ecuaciones con términos semejantes	126
4.5 Ecuaciones que contienen variables en ambos miembros	128
4.6 Ecuaciones que involucran decimales	132
4.7 Ecuaciones literales y fórmulas	135
4.8 Ecuaciones lineales como modelos matemáticos	138
4.9 Ecuaciones fraccionales y soluciones extrañas	145
4.10 Problemas que involucran razón y proporción	153

CAPÍTULO 5

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

5.1 Evaluando expresiones y ecuaciones que contienen dos variables	162
5.2 El sistema de coordenadas cartesiano	165
5.3 Gráfica de ecuaciones que contienen dos variables	171
5.4 Encontrando la intersección de dos gráficas	176
5.5 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por sustitución	178
5.6 Solución de sistemas por el método de combinación lineal	183
5.7 Problemas que involucran dos variables	187

CAPÍTULO 6

ECUACIONES CUADRÁTICAS

6.1 Ecuaciones que contienen valor absoluto y ecuaciones con cuadrados	198
6.2 Ecuaciones con trinomios cuadráticos perfectos	204
6.3 Completando el cuadrado	208
6.4 Resolviendo ecuaciones cuadráticas por el método de completando al cuadrado	211
6.5 La formula cuadrática	215
6.6 Resolución de ecuaciones cuadráticas por factorización	220
6.7 Problemas con movimiento vertical	225

CAPÍTULO 7

EXPRESIONES ALGEBRAÍCAS CON RADICALES

7.1 Introducción a las expresiones con radicales	233
7.2 Sumas, diferencias y productos de radicales	235
7.3 Cocientes con radicales	239
7.4 Binomios con radicales	245
7.5 Raíces cuadradas de expresiones	249
7.6 Ecuaciones con radicales	251
7.7 Números racionales e irracionales	254

CAPITULO I

OPERACIONES CON POLINOMIOS

En este capítulo aprenderás efectuar las operaciones básicas algebráicas entre polinomios; la suma, resta, multiplicación y división.

Así mismo simplificarás expresiones algebráicas utilizando las leyes de los exponentes y como parte de la aplicación de éstos, la notación científica. Que se utiliza para expresar números muy grandes o muy pequeños con la ayuda de las potencias de base 10.

1.1 TERMINOLOGÍA ALGEBRAICA.

Literal: En el álgebra, además de los números que se utilizan en la aritmética, se usan letras para representar cualquier número de un conjunto o intervalo numérico, los números que se representan por letras se llaman literales .

EJEMPLOS:

$x+6=10$

$4<x<7$, donde $x \varepsilon N$

Coeficiente numérico y parte literal. Teniendo en cuenta la notación que se emplea en el álgebra para representar, por ejemplo, el producto del número 8 por el número a se escribe: 8a.

Así mismo la expresión 6ab, representa el producto del número 6 por el número a y el resultado por el número b. En dicha expresión la a y la b son factores literales, mientras que el 6 es un factor numérico. El factor numérico de un término algebraico se llama coeficiente numérico, mientras que los factores literales con su respectivos exponentes forman la parte literal.

EJEMPLOS:

	Coeficiente numerico	Parte literal
$9xy$	9	xy
$-8x^2z$	-8	w^2z

Cuando no aparece un número especific[o] precediendo a la parte literal se sobreentiende que el coeficiente es el núm[ero] 1.

EJEMPLO:

	Coeficiente numerico	Parte literal
w^3z	1	w^3z

Si el coeficiente numérico es un entero positivo, el mismo nos indica cuantas veces se toma como sumando la parte literal.

EJEMPLOS:

$7\omega = \omega+\omega+\omega+\omega+\omega+\omega+\omega$

$-5Z = (-Z)+(-Z)+(-Z)+(-Z)+(-Z)$

Exponente: Consideremos la multiplicación 5x5x5; esta operación

también la podemos representar en la forma 5^3. El pequeño número 3 que se escribe arriba y a la derecha del 5 indica que este se toma como factor tres veces y recibe el nombre de exponente; el 5 se llama base y 5^3 se llama una potencia.

EJEMPLOS:

$n^4= n(n)\,(n)\,(n)$

$x^2= x(x)$

$(-y)^3= (-y)\,(-y)\,(-y)$

$4^6= 4\,(4)\,(4)\,(4)\,(4)\,(4)$

$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$

Cuando no aparece un número especifico arriba y a la derecha de un número o literal, se sobreentiende que el exponente es 1.

EJEMPLOS:

$4a$: El exponente del número 4 es 1 y el de la literal "a" también es 1.

$-5a^2b$: El exponente de a es 2, el de b es 1 y el de -5 es 1.

El producto de n factores, cada uno de ellos igual a m, se escribe en la forma m^n, donde n, recibe el nombre de exponente y la expresión m^n es una potencia, en tanto que m es la base de la misma.

Expresión Algebraica Cualquier combinación de literales y constantes que contenga las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación todas o algunas de ellas, pudiendo ser una sola recibe el nombre de expresión algebráica.

EJEMPLOS:

$2a$	$(2x-3y)^3$
$5x^2$	$\dfrac{2x^2-y^2}{x-y}$
$x+2y$	
x^2+7x-6	
$7(x+y)$	$\sqrt{x^3y^4}$

Una expresión algebraíca que solamente contenga un coeficiente y una parte literal se llama término. (también se suele decir monomio).

EJEMPLOS:

$4a^2bc^3$
$-\frac{5}{2}a^{10}$
$25abcx^3$
7

Cuando en una expresión algebraíca, aparecen solamente, sumas, diferencias, productos y potencias (no necesariamente todas), la expresión recibe el nombre de polinomio.

EJEMPLOS:

$3x^4-5x^3+2x-8$
m^6-9
$5x^2y^3-4xy^4+2y^5$

Las partes de un polinomio precedidas de los signos + o - son sus términos. Así, en la expresión: $3x^4-5x^3+2x-8$, los términos son: $3x^4$; $-5x^3$, $2x$; -8

Se debe sobreentender que si en el primer término como es el caso precedente, no aparece ningún signo, el término es positivo.

A la expresión algebraíca que consta de un solo término se le llama monomio, a la que consta de dos términos, binomio y a la que consta de tres se le llama trinomio. Si tiene más de tres términos se dice: polinomio de cuatro, de cinco términos, etc.

EJEMPLOS:

Frente a cada expresión algebraica, aparece su nombre atendiendo al número de términos que tienen.

$2x+7y$	Binomio	$\frac{2}{5}x$	Monomio
$-4x^3y^2z$	Monomio	$5x^4-2x^3+x^2-9x+5$	Polinomio de cinco términos
x^2-y^2	Binomio		
$a+2b+C$	Trinomio		
$x^2-8x+12$	Trinomio		
-7	Monomio		
y^2	Monomio		
x^3-8	Binomio		

1.2 INTRODUCCIÓN A LAS OPERACIONES CON POLINOMIOS.

Para aprender a efectuar correctamente las operaciones con polinomios conviene que recordemos algunos aspectos del álgebra que serán necesarios. Haremos este repaso utilizando ejemplos o mencionando propiedades de las operaciones con números y literales.

1) Si $a < b$, entonces $a-b$ es negativo

EJEMPLOS:

3-20= -12
6-96= -90
1- 5= - 4

2) Para sumar algebraicamente dos o más números con el mismo signo, sumamos como aprendimos en la aritmética y al resultado le ponemos el signo común a los números dados.

EJEMPLOS:

(-8) + (-13)= - (8+13)= -21
(-7) + (-9) + (-14)= - (7+9+14)=-30

Nota: (-8) + (-13) puede escribirse como -8-13= -21

3) Si tenemos que efectuar la suma de varios números positivos con varios negativos; se suman los positivos y después los negativos; las sumas obtenidas se restan y el resultado de esta diferencia irá precedida del signo de la mayor de las sumas.

EJEMPLOS:

8-3-14+9-20
8+9=17
3+14+20=37

ENTONCES:

8-3-14+9-20= 17-37= -20

2) -12+61-30-9
12+30+9=51, entonces
-51+61=61-51= 10

4) En la multiplicación de números positivos y negativos, recordemos que:

El producto de dos números de igual signo es positivo, mientras que el producto de dos números de signos contrarios es negativo.

EJEMPLOS:

(7) (10)= 70
(-7) (-3)= 21
(-7) (3)= -21
4 (-7)= -28

5) Al multiplicar más de dos factores, si el número de estos con signo negativo es par, el resultado es positivo, si es impar, será negativo.

EJEMPLO:

(-2) (-13) (17) (-150) (-8) (20) (-3). El resultado es negativo.

1.3 REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES

En los polinomios los términos que tienen la misma parte literal, es decir los mismos factores literales afectados de iguales exponentes, se llaman <u>términos semejantes.</u>

EJEMPLOS

1) $8x$, $7x$, $-15x$, x
2) $7a^2b$, $-15a^2b$, a^2b
3) $-mn^3$, $\frac{2}{5}mn^3$, $-7mn^3$
4) a^{n+1}, $-3a^{n+1}$, $8a^{n+1}$

En la expresión algebraica;

$8ab+3b-7ab+5ab^2$, los términos semejantes son: $8ab$, $-7ab$ y ninguno más. En cambio en la expresión; $8x^2y-15xy^2$, los dos términos no son semejantes, pues aunque tienen las mismas literales estas no están afectadas por los mismos exponentes, luego no son semejantes.

Una operación mediante la cual se sustituyen dos ó más términos semejantes por un solo término (que es desde luego semejante a aquellos a los cuales sustituye) se llama: <u>Reducción de términos semejantes</u>. Para realizar la reducción de términos semejantes se procederá así:

1º.- Si dos o más términos semejantes tienen el mismo signo, se suman sus coeficientes como aprendimos en la aritmética y delante de la suma se coloca el signo común que tienen y a continuación se pone la parte literal común a todos ellos.

EJEMPLOS:

1) $8a+a+20a+6a=$ $(8+1+20+6)a= 35a$
2) $-4a^2-3a^2-10a^2-40a^2=-(4+3+10+40)a^2= -57a^2$

2º.- Si dos términos semejantes tienen signos contrarios, se restan los coeficientes numéricos; delante de esta diferencia se coloca el signo del mayor de dichos coeficientes y a continuación de este coeficiente numéricos, se escribe la parte literal común a los dos términos.

EJEMPLOS:

1) $8m^2n-5m^2n= (8-5)\,m^2n= 3m^2n$
2) $16a^3b^5c^4-40a^3b^5c^4= (16-40)a^3b^5c^4= -24a^3b^5c^4$

3º) Cuando en un polinomio aparecen varios términos semejantes, algunos con signo positivo y otros con signo negativo, todos los términos positivos se reducen a uno solo, se hace lo mismo con los negativos y finalmente se restan los coeficientes, se pone el signo del mayor y a continuación la parte literal común a todos los términos semejantes.

EJEMPLOS:

1) Reducir términos semejantes en la expresión:

$9ab-5ab-6ab+ab-3ab$

SOLUCIÓN:

$9ab-5ab-6ab+ab-3ab= 9ab+ab-5ab-6ab-3ab$

$= 10ab-14ab$
$= (10-14)ab$
$= -4ab$

2) Reducir términos semejantes en la expresión;

$8x^2+5x-7-20x^2+6x+40+3x^2-10x$

SOLUCIÓN:

$8x^2+3x^2-20x^2+5x+6x-10x-7+40$

$= 11x^2-20x^2+11x-10x+33$
$= -9x^2+x+33$

1.4 SIGNOS DE AGRUPACIÓN:

Cuando en una expresión algebráica hay un grupo de términos que se desea manejar como si fuera uno solo, entonces se asocian (se agrupan) y para esto se utilizan los llamados signos o símbolos de agrupación, estos son:

a) Los paréntesis ( )
b) Los corchetes [ ]
c) Las llaves { }

Estos signos también se utilizaran eficazmente para indicar el orden de ciertas operaciones.

EJEMPLO 1:

$(7x^2-5x+8)+(5x^2-x-7)-(4x^2+3x+16)$

En este caso el empleo de los paréntesis nos indican (nos ordenan) que debemos sumar la expresión encerrada dentro del 1er. par de paréntesis con la encerada dentro del segundo par, y a la suma obtenida debemos restarle la expresión encerrada dentro del tercer paréntesis.

EJEMPLO 2:

$8x+3-[(5x-2)+(4x-15]$

Aquí las órdenes que nos dan los signos de agrupacion son las siguientes:

1º.- A 5x-2 súmale 4x-10

2º La suma obtenida anteriormente réstala de 8x+3 (o lo que es lo mismo: a 8x+3 réstale la suma obtenida).

EJEMPLO 3:

$2x^2+5x-8-[(2x+5)(x-3)-(x^2-6x+1)]$

Las órdenes ahora son:

1º.- <u>Multiplicar</u> (2x+5) (x-3)

2º.- Al producto anterior restar el polinomio x^2-6x+1

3º.- El último resultado anterior réstalo del polinomio; $2x^2+5x-8$.

1.5 ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para sumar dos o más polinomios se aplican las propiedades conmutativa y asociativa para la adición y se reducen términos semejantes.

EJEMPLO 1:

Efectúa la siguiente suma de polinomios:

$(3a^2b+5ab^2-8a+6b-5)+(4a^2b-7ab^2+8a-2b-10)$

Antes de efectuar la suma se pueden situar los términos semejantes en forma vertical y después reducirlos.

$$\begin{array}{l} 3a^2b+5ab^2-8a+6b-5 \\ 4a^2b-7ab^2+8a-2b-10 \\ \hline 7a^2b-2ab^2+0+4b-15 \end{array}$$

Por lo tanto la suma de los polinomios es

$7a^2b-2ab^2+4b-15$

EJEMPLO 2: Suma los siguientes polinomios:

$a^3-2b+3c+d-15$ y $a^2-7b-9c+2d+5$.

SOLUCIÓN:

Ordenamos en forma vertical los terminos semejantes y después reducimos.

$$\begin{array}{l} a^3-2b+3c+d-15 \\ \quad -7b-9c+2d+5+a^2 \\ \hline a^3-9b-6c+3d-10+a^2 \end{array}$$

Por consiguiente la suma propuesta es igual a:

$a^3+a^2-9b-6c+3d-10$

EJERCICIO I

En los siguientes problemas del 1 al 8 simplifica combinando términos semejantes:

1. 3cs-5cs+13cs
2. -6xy+3xy+xy
3. 3a-2a-a+5a
4. 15x-3x+8x
5. 5a+2b-7a-3b+4a+b
6. 9x+3y-5x-y+3x-2y
7. 4p+b+5p-8b-p+7b
8. 3xy-8z+5xy-3z+xy-4z

Suma las siguientes tres expresiones en cada uno de los problemas del 9 al 20

9. 3x+2y-4z
   2x-3y+3z
   4x+5y+2z

10. 5x-2y-3z
    -7x-y+7z
    2x+3y-2z

11. 4a-3b+6c
    2a+8b-11c
    -a+2b+c

12. 3r-2s+5t; -7r-s+7t; 4t-3s+7t

13. 4p-t; 3t-8p; -7p+4t

14. $4ax-5a^2x-8ax^2$; $3ax+7a^2x+6ax^2$; $-6ax+a^2x+3ax^2$

15. 5a-b+3c; -a+3b+11c; 12a-18b-15c

16. 3x-18y+10; 3+7x+10y; 19x+23-8y

17. $\frac{1}{2}a+\frac{5}{3}b-\frac{8}{5}c$; $\frac{3}{2}a-\frac{8}{3}b-\frac{1}{5}c$; $\frac{5}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{2}{5}c$

18. $5x-\frac{1}{3}y$; $\frac{7}{2}x-\frac{3}{5}y$; $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y$

19. 0.2a+0.7b-3.7c; 0.14a-0.32b+7.2c; 3.01a-5.2b-0.1c

20. 1.2x-5.3y; -7.2x+8.3y; 0.5x-3.7y

1.6. SUSTRACCIÓN DE POLINOMIOS

En el lenguaje algebraico la operación de sustraer o restar y de x se simboliza x-y, que es lo mismo que x+(-y), es decir para restar y de x, se suma el inverso aditivo de y al número x.

En la sustracción de polinomios se suma al minuendo el inverso aditivo del sustraendo y se reducen términos semejantes. Recuerda que el inverso aditivo de un polinomio se obtiene cambiando el signo de cada uno de sus términos.

La sustracción de polinomios puede disponerse escribiendo el minuendo en un renglón y el inverso aditivo del sustraendo en el renglón siguiente de manera que los grupos de términos semejantes quedan colocados en una misma columna y se reducen.

El resultado de una sustracción se llama diferencia; desde luego, la suma del sustraendo con la diferencia da el minuendo.

EJEMPLO 1:

Efectúa la siguiente resta de polinomios.

(2x+3y-4Z+8) - (5x+4y+4Z+12)

SOLUCIÓN:

(2x+3y-4Z+8)-(5x+4y+4Z+12)= (2x+3y-4Z+8)+(-5x-4y-4Z-12)

= 2x+3y-4Z+8
  -5x-4y-4Z-12
  ―――――――
  -3x-y-8Z-4

EJEMPLO 2:

Al polinomio; $4x^3-5x^2+7x-6$ réstale $x^3+2x^2+9x-15$.

SOLUCIÓN:

La operación propuesta suele indicarse mediante el empleo de paréntesis en la forma siguiente:

$4x^3-5x^2+7x-6-(x^3+2x^2+9x-15)$

$= 4x^3-5x^2+7x-6-x^3-2x^2-9x+15$. Reduciendo términos semejantes queda: $3x^3-7x^2-2x+9$. También podemos disponer los polinomios de la manera siguiente:

$$
\begin{array}{r}
= 4x^3-5x^2+7x-6 \\
-x^3-2x^2-9x+15 \\
\hline
3x^3-7x^2-2x+9
\end{array}
$$

EJEMPLO 3:

En el siguiente ejercicio sustraiga el primer polinomio del segundo; $6a-10b+8c$; $15a+8b-2c$

SOLUCIÓN

$$15a+8b-2c-(6a-10b+8c)$$

$$
\begin{array}{r}
= 15a+8b-2c \\
-6a+10b-8c \\
\hline
9a+18b-10c
\end{array}
$$

EJEMPLO 4:

Reste el segundo polinomio del primero; $2x-5y+Z+8$; $3y-x-2Z+8$.

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{r}
= 2x-5y+Z+8 \\
x-3y+2Z-8 \\
\hline
3x-8y+3Z
\end{array}
$$

EJEMPLO 5:

Efectúa la siguiente sustracción de polinomios:
$(5n^3-7n^2-10n+6)-(6n^3-8n^2+4n-10)$

SOLUCIÓN

$$
\begin{array}{r}
5n^3-7n^2-10n+6 \\
-6n^3+8n^2-4n+10 \\
\hline
-n^3+n^2-14n+16
\end{array}
$$

EJERCICIO II

Reste el segundo número del primero en los problemas del 1 al 8

1. 5,11
2. 3,-2
3. -7,4
4. 8,-3
5. 7,-2
6. 6,6
7. -2,2
8. -50,-10

Reste la segunda expresión de la primera en los problemas 9 al 15.

9. $7a-3b+4c$; $8a-4b+15c$
10. $2x-8y$; $-5x+3y$
11. $6x-7y+5z$, $-3x+8y-z$
12. $5a-8b+c$; $4a-b+3c$
13. $7s-8r+4t$; $s+r-5t$
14. $\frac{7}{2}a-\frac{3}{4}b$; $\frac{1}{2}a+\frac{5}{4}b$
15. $\frac{1}{4}x-\frac{3}{2}y+\frac{3}{5}z$; $-\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}y-\frac{2}{5}z$

En los problemas 16 al 21, resuelva lo indicado.

16. Sustraiga $2a-3b+5c$ de la suma de $3a+8b-5c$ y $7a-b+3c$
17. Sustraiga $4x-2y+3z$ de la suma de $x-8y+5z$ con $3x-y+6z$
18. Sustraiga la suma de:
    $2a+7b-5c$ y $3a-9b+7c$
    del polinomio $5a-11b-4c$
19. De la suma de
    $2v-3u+5w$ y $v+5u-7w$ sustraiga el polinomio $5v-7u+11w$
20. Sustraiga la suma de $\frac{3}{5}a-\frac{7}{3}b+\frac{3}{7}c$ y $\frac{2}{5}a+\frac{3}{2}b+\frac{4}{7}c$ de $4a-7b+2c$
21. Se designa por A la suma de los polinomios
    $2x^3-5x^2+7x-8$; $12x^2-x+6x^2-1$
    y por B la suma de
    $-3x^3+x^2-20x-3$ con $2x-5x^2+x^3-10$
    Halle A - B

1.7 MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

1.7.1 Multiplicación de potencias.

Supongamos que queremos multiplicar las dos potencias a^m y a^n donde a es un número real cualquiera y m y n son números naturales. O sea, queremos hallar $a^m.a^n$

Tenemos que:

$$a^m.a^n = \underbrace{a.a.a.\ldots\ldots a}_{m\ veces} . \underbrace{a.a.a.\ldots\ldots a}_{n\ veces}$$

El resultado es, pues, un producto de m+n factores iguales a "a" que es, por definición: a^{m+n}.

Tenemos pues, que $a^m.a^n = a^{m+n}$. Es decir que:

"Para multiplicar dos potencias de igual base se eleva la misma base a la suma de los exponentes de los factores.

EJEMPLOS:

$$t^8.t^7 = t^{15}$$
$$y.y^9 = y^{10}$$

Propiedades de la multiplicación de potencias. Teniendo en cuenta la propiedad anterior y la definición de potencias con exponente natural se pueden demostrar fácilmente las siguientes propiedades.

$(a.b)^n = a^n.b^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$

y $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

Tomemos por ejemplo, la segunda propiedad.

Veamos cómo demostrarla

$\left(\frac{a}{b}\right)^n$ significa que se multipliquen n fracciones iguales a $\frac{a}{b}$. Para hacerlo, debemos multiplicar todos los numeradores (son en total n e iguales a "a") luego el numerador del producto es a^n. De manera análoga el denominador del producto es b^n.

Por tanto:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

De manera análoga se pueden demostrar las otras dos propiedades.

EJEMPLOS:

$$14^{10} = (2.7)^{10} = 2^{10}.7^{10}$$
$$3^5.5^5 = (3.5)^5 = 15^5$$
$$(3^5)^{24} = 3^{5.24} = 3^{12}$$
$$\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{7^4}{8^4}$$

1.7.2 Multiplicación de dos Monomios:

Para efectuar la multiplicación de un monomio por otro se siguen los pasos que se mencionan a continuación:

1º) Se multiplican los signos; recuerda que el producto de dos números de igual signo es positivo, mientras que si son de signo contrario el producto es negativo.

2º) Se multiplican los coeficientes.

3º) Se multiplican las partes literales utilizando la siguiente ley de la multiplicación para los exponentes

$a^m.a^n = a^{m+n}$

EJEMPLOS:

Multiplica los siguientes monomios

1) $(6x^2yZ)\ (3xyZ^5) = 18x^{2+1}\ y^{1+1}\ Z^{1+5} = 18x^3y^2Z^6$

2) $(-5a^3bc^4)\ (4abc^2) = -20a^{3+1}\ b^{1+1}\ c^{4+2} = -20a^4b^2c^6$

3) $(-8mn^3w^2)\ (-5m^2nw^5) = 40m^{1+2}\ n^{3+1}\ w^{2+5} = 40m^3\ n^4\ w^7$

4) $(4a^3bc^2)\ (2abc)\ (-a^2b^3c^4) = -8a^6b^5c^7$

5) $(-ab^2c)^3\ (-2^3ab^3c^2)^2 = (-a^3b^6c^3)\ (2^6a^2b^6c^4) = -64a^5b^{12}c^7$

6) $(ab^3c)^2\ (-3bc^2)^3\ (2a^2bc^3)^4 = -324\ a^{10}\ b^{13}\ c^{20}$

1.7.3 Multiplicación de un monomio por un polinomio.

Para multiplicar un monomio por un polinomio se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición la cual establece que:

$a(x_1+x_2+\ldots x_n)= ax_1+ax_2+\ldots\ldots+ax_n$

Es decir, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio y se suman los productos obtenidos.

EJEMPLOS:

Efectúa las siguientes multiplicaciones:

1) $7a^2(a^2-ab+b)$
$= 7a^2(a^2)+7a^2(-ab)+7a^2(b)$
$= 7a^4-7a^3b+7a^2b$

2) $5x(x^3-2x^2-x-1)$
$= 5x(x^3)+5x(-2x^2)+5x(-x)+5x(-1)$
$= 5x^4-10x^3-5x^2-5x$

3) $3b(-b^2+2b-1)$
$= 3b(-b^2)+3b(2b)+3b(-1)$
$= -3b^3+6b^2-3b$

4) $-5y(4y^2-y-2)$
$= -20y^3+5y^2+10y$

5) $-2abc^2(4ab^3c-3a^2b^2c-6a^2bc^4)$
$= -8a^2b^4c^3+6a^3b^3c^3+12a^3b^2c^6$

1.7.4 Multiplicación de dos polinomios

Para multiplicar dos polinomios, también se utiliza la propiedad distributiva de la multiplicación, multiplicando cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo y reduciendo al final términos semejantes.
Así por ejemplo:
$(a+b)(x+y)=$

Si hacemos $x+y=Z$, la expresión nos queda $(a+b)Z= aZ+bZ$
$= a(x+y)+b(x+y) = ax + ay + bx + by =$

EJEMPLO 1:

Multiplica los polinomios: $2x+5$, x^2-4x-1

SOLUCIÓN:

Para indicar la multiplicación de dos polinomios se escriben ambos, uno a continuación del otro encerrados en paréntesis, sin ningún signo intermedio, tal como sigue:

$(2x+5)(x^2-4x-1)$
$= 2x(x^2-4x-1)+5(x^2-4x-1)$
$= 2x^3-8x^2-2x+5x^2-20x-5$
$= 2x^3-8x^2-2x+5x^2-20x-5$
$= 2x^3-3x^2-22x-5$

EJEMPLO 2:

Efectúa la operación que se indica y simplifica.
$(2a-5)(3a^2+6a-4)$
$= 2a(3a^2+6a-4)-5(3a^2+6a-4)$
$= 6a^3+12a^2-8a-15a^2-30a+20$

$$
\begin{array}{l}
6a^3+12a^2-8a+20 \\
\quad\;\; -15a^2-30a \\
\hline
6a^3-3a^2-38a+20
\end{array}
$$

EJEMPLO 3:

Efectúa la operación que se indica y simplifica:
$(2x^2-7x-3)(2x^3-5x^2+x-3)$

SOLUCIÓN:

$2x^2(2x^3-5x^2+x-3) - 7x(2x^3-5x^2+x-3) - 3(2x^3-5x^2+x-3)$
$= 4x^5-10x^4+2x^3-6x^2-14x^4+35x^3-7x^2+21x-6x^3+15x^2-3x+9$

$$\begin{array}{l} 4x^5-10x^4+2x^3-6x^2+21x+9 \\ \quad -14x^4+35x^3-7x^2 \\ \qquad -6x^3+15x^2-3x \\ \hline 4x^5-24x^4+31x^3+2x^2+18x+9 \end{array}$$

EJEMPLO 4:

Eleva el binomio $4x+3y$ al cuadrado y simplifica.

SOLUCIÓN:

Elevar el binomio al cuadrado significa que se multiplica por sí mismo; por consiguiente:

$(4x+3y)^2 = (4x+3y)(4x+3y)$
$= 4x(4x+3y) + 3y(4x+3y)$
$= 16x^2+12xy+12xy+9y^2$
$= 16x^2+24xy+9y^2$

EJEMPLO 5:

Efectúa la operación que se indica y simplifica:
$(5x-2y)(5x+2y)$

SOLUCIÓN:

$5x(5x+2y) - 2y(5x+2y)$
$= 25x^2+10xy-10xy-4y^2$
$= 25x^2-4y^2$

EJEMPLO 6:

Efectúa y simplifica: $(x-3y)(x^2+2xy-4y^2)$

SOLUCIÓN:

$x(x^2+2xy-4y^2) - 3y(x^2+2xy-4y^2)$
$= x^3+2x^2y-4xy^2-3x^2y-6xy^2+12y^3$

$$\begin{array}{l} x^3+2x^2y-4xy^2 \\ \quad -3x^2y-6xy^2+12y^3 \\ \hline x^3-x^2y-10xy^2+12y^3 \end{array}$$

EJEMPLO 7:

Efectúa las operaciones que se indican y simplifica:
$(3a-5)(a+3) - (a+5)(a-1)$.

SOLUCIÓN:

En este ejercicio primeramente tenemos que efectuar las multiplicaciones que se nos indican y después restaremos el polinomio que resulte del segundo producto del que resulte del primero.

$(3a+5)(a+3) - (a-5)(a-1) = 3a(a+3) + 5(a+3) - [a(a-1) + 5(a-1)]$
$= 3a^2+9a+5a+15-[a^2-a+5a-5]$
$= 3a^2+14a+15-[a^2+4a-5]$

$$\begin{array}{l} 3a^2+14a+15 \\ -a^2-4a+5 \\ \hline 2a^2+10a+20 \end{array}$$

EJERCICIO III

Calcula cada uno de los productos siguientes:

1 $(8x^5y^2)(17x^3y^9)$
2 $(-5a^2b^3c)(-8ab^5)(-11b^4c^5)$
3 $(17h^9j^{12})(23k^3)(-10hj^3k^9)$

4 $32a^5bc^7\ (10ab-21b^2c+7a^2b^5c^2)$

5 $11x^4y^6Z^2\ (28xyZ^9-12x^2y-20y^9Z^{12})$

6 $-2a^2b\ (a^3+5a^2b^2-3b^4)$

7 $14x^2y^3\ (5xy-12x^2y^5+23)$

8 $(x+7)\ (x+8)$

9 $(2x-5)\ (4x+9)$

10 $(4x^2+1)\ (3x^2-7)$

11 $(7a+3b)\ (9a-5b)$

12 $(5a^2+7b^2)\ (5a^2-7b^2)$

13 $(9h-11k)\ (9h-11k)$

14 $(3p-2q+5)\ (3p-2q-5)$

15 $(3x^2+x)\ (3x^2+x)\ (3x^2+x)$

16 $(6x-5y)\ (36x^2+30xy+25y^2)$

17 $(3a+7b)\ (9a^2-21ab+49b^2)$

18 $(2m+2n+3)\ (3m+3n+2)$

19 $(10x-5y+1)\ (4x-2y-3)$

20 $(12x-8y+5)\ (9x-6y-2)$

21 $(a^2-2a+3)\ (a^2-2a-3)$

22 $(b^2+3b-4)\ (b^2+3b+4)$

23 $(7a^3+5a^2-8a+9)\ (2a^3-3a^2+2a-3)$

24 $(x^3+x^2+x-1)\ (x^3-x^2+x+1)$

25 $(p^5+3p^3-3p-1)\ (p^5-3p^3-3p+1)$

1.8 DIVISIÓN ALGEBRAICA

1.8.1. División de potencias de igual base

Supongamos que queremos dividir a^m entre a^n con a real no nulo; m y n naturales y m>n.

La operación anterior se indica así $\frac{a^m}{a^n}$. Vamos a simplificar está fracción: en el numerador tenemos el factor a repetido m veces y en el denominador el mismo factor n veces.
Como hemos supuesto que m≥ n todos los factores del denominador se cancelan con n factores del numerador quedando m-n factores iguales "a" en el numerador y 1 en el denominador; por tanto, como resultado de la simplificación queda a^{m-n}

Luego: $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ si $a\neq 0$ y m y n son naturales, m≥ n.

1.8.2. Exponente cero

Sea a real, no nulo y n un número natural distinto de cero.

Vamos a obtener $\frac{a^n}{a^n}$ por dos vías.

1ª. Aplicando la regla de división de potencia que vimos anteriormente obtenemos $\frac{a^n}{a^n}=a^0$.
Es lógico que nos preguntemos ¿qué significado le daremos al exponente cero?
Veamos.

2ª. $\frac{a^n}{a^n}=1$ pues el cociente de dos números iguales diferentes de cero, es igual a 1.

De acuerdo con el carácter transitivo de la igualdad concluimos que para todo $a\neq 0$, $a^0=1$.

Claro está que a^0 no significa que la a se tome cero veces como factor. Lo que precede nos sugiere definir o convenir que, para todo $a\neq 0$, $a^0=1$.

25

$6^0 = 1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

$(234)^0 = 1$

1.8.3 Exponentes negativos

Ya sabemos lo que significa la operación de potenciación a^n con n natural, $n \geq 2$: el producto de *n* factores iguales a a; también les hemos dado interpretación a a^n cuando $n = 0$.
Veamos ahora que significado le damos a a^n con $a \neq 0$ y *n* entero negativo.

$$a^{-3} = a^{-3}(1) = a^{-3}\left(\frac{a^3}{a^3}\right) = \frac{a^{-3+3}}{a^3} = \frac{a^0}{a^3} = \frac{1}{a^3}$$

De manera más general $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ para todo n natural

1.8.4 División de monomios

Para efectuar la división entre dos monomios se siguen los pasos que se mencionan a continuación:

1) Se determina el signo del cociente, utilizando las reglas de los signos.

"Si se dividen números de igual signo el cociente es positivo; si tienen signos contrarios, es negativo".

2) Se divide el coeficiente de el numerador entre el coeficiente del denominador.

3) Se dividen las partes literales, utilizando las siguientes propiedades de los exponentes para la división:

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } n > m \end{cases}$$

Donde $a \in R$ y a es diferente de 0.

EJEMPLOS:

Efectúa las siguientes divisiones entre monomios, escribe las respuestas sin exponentes negativos.

1) $\frac{8a^8b^{12}}{2a^5b^7} = 4a^{8-5}b^{12-7} = 4a^3b^5$

2) $\frac{24a^3b^{12}c^9}{-6ab^8c^9} = -4a^{3-1}b^{12-8}(1) = -4a^2b^4$

3) $\frac{-32x^{12}b^6c^{15}d}{-2x^{10}b^6c^{14}d} = 16x^2(1)c(1) = 16x^2c$

4) $\frac{30x^4y^2c}{-5xyc} = -6x^3y(1) = -6x^3y$

5) $\frac{-20a^{n+2}b^{n+5}}{8a^nb^{n-1}} = -\frac{5}{2}a^2b^6$

6) $\frac{9a^4b^7}{36a^6b^{10}} = \frac{1}{4a^2b^3}$

7) $\frac{-8x^8y^7z^2}{24x^2y^{10}z^3} = \frac{-x^6}{3y^3z}$

8) $\left(\frac{x^3y^2}{xy^5}\right)^4 = \frac{x^{12}y^8}{x^4y^{20}} = \frac{x^8}{y^{12}}$

9) $\left(\frac{2a^2y}{ay^2}\right)^{-6} = \frac{2^{-6}a^{-12}y^{-6}}{a^{-6}y^{-12}} = \frac{y^6}{64a^6}$

1.8.5 División de un polinomio entre un monomio

Dada la expresión; $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a}$,

de acuerdo con la propiedad distributiva de la adición con respecto a la división tenemos que:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a} = \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{a} + \ldots + \frac{x_n}{a}$$

Es decir:

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio por el monomio.

EJEMPLO 1)

Efectuar la división : $\frac{16x^5 - 12x^2 + 4x}{4x}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{16x^5 - 12x^2 + 4x}{4x} = \frac{16x^5}{4x} - \frac{12x^2}{4x} + \frac{4x}{4x}$$
$= 4x^4 - 3x + 1$

1.8.6 División de dos Polinomios:

Como la división es la operación inversa de la multiplicación, deduciremos el método de la división de dos polinomios a partir de la multiplicación.

Si multiplicamos los polinomios (x^2-5x+3) $(x-4)$ su producto es; $x^3-9x^2+23x-12$ (compruébalo).

Por consiguiente si $\frac{x^3-9x^2+23x-12}{}$ se divide por $x-4$, el resultado es $\frac{x^2-5x+3}{}$; es decir el primer factor de la multiplicación. En dicha división el polinomio $\frac{x^3-9x^2+23x-12}{}$ se llama dividendo, $x-4$ es el divisor y x^2-5x+3 es el cociente; el residuo, por supuesto, es cero.

El primer término del dividendo, x^3 se obtiene multiplicando el primer término del divisor x, por el primer término del cociente, x^2, por lo tanto para obtener el primer término del cociente, x^2, se divide el primer término del dividendo por el primer término del divisor. $\frac{x^3}{x}=x^2$. Si se multiplica este primer término del cociente por el divisor, x^2 $(x-4)$ se obtiene x^3-4x^2. Al restar x^3-4x^2 del dividendo, resulta $(x^3-9x^2+23x-12)-(x^3-4x^2)=-5x^2+23x-12$.

El polinomio $-5x^2+23x-12$ es el nuevo dividendo. El primer término, $-5x^2$, del nuevo dividendo resulta de multiplicar el segundo término del cociente, $-5x$, por el primer término del divisor, x, por lo tanto para obtener el segundo término del cociente, se divide el primer término del nuevo dividendo por el primer término del divisor; $\frac{-5x^2}{x}=-5x$. Al multiplicar el segundo término del cociente por el divisor y restando del nuevo dividendo, resulta:

$-5x(x-4)=-5x^2+20x$
$-5x^2+23x-12-(-5x^2+20x)$
$=-5x^2+23x-12+5x^2-20x$
$=3x-12$

El polinomio $3x-12$ es ahora el nuevo dividendo. El primer término de este nuevo dividendo resulta de multiplicar el tercer término del cociente por el primer término del divisor; 3 (x), por consiguiente, para obtener el tercer término del cociente se divide el primer término del nuevo dividendo por el primer término del divisor; $\frac{3x}{x}=3$; al multiplicar el tercer término del cociente por el divisor y restando del nuevo dividendo resulta:

$3(x-4)=3x-12$
$3x-12-(3x-12)$
$=3x-12-3x+12$
$=0$

Por lo tanto, el residuo es: cero.

Efectuemos ahora la división, disponiendo los pasos de forma semejante a como lo hemos hecho en aritmética:

$$x-4\overline{)x^3-9x^2+23x-12}$$

El primer término del cociente es:

$$\frac{\text{Primer término del dividendo}}{\text{Primer término del divisor}}=\frac{x^3}{x}=x^2$$

Este primer paso lo indicamos así:

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-4\overline{)x^3-9x^2+23x-12} \end{array}$$

Multiplicamos ahora el primer término del cociente por el divisor, el producto se resta del dividendo, lo cual se hace cambiando de signo a cada uno de los términos de la expresión que se va a restar y se simplifica como sigue:

$x^2(x-4)=x^3-4x^2$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x-4\overline{)x^3-9x^2+23x-12} \\ -x^3+4x^2 \\ \hline -5x^2+23x-12 \end{array}$$ (nuevo dividendo)

El segundo término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del nuevo dividendo por el primer término del divisor.

$\frac{-5x^2}{x} = -5x$ y escribimos este término en el cociente a continuación de x^2

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x \\
x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\
 & -x^3 + 4x^2 \\ \hline
 & -5x^2 + 23x - 12
\end{array}
$$

Multiplicamos ahora el segundo término del cociente por el divisor, se resta el producto del nuevo dividendo y se simplifica:

$-5x\,(x-4) = -5x^2+20x$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x \\
x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\
 & -x^3 + 4x^2 \\ \hline
 & -5x^2+23x-12 \\
 & +5x^2-20x \\ \hline
 & 3x-12
\end{array}
$$

3x-12 es el nuevo dividendo. Para obtener el tercer término del cociente se divide una vez más el primer término del nuevo dividendo entre el primer término del divisor

$\frac{3x}{x} = 3$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 3 \\
x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\
 & -x^3+4x^2 \\ \hline
 & -5x^2+23x-12 \\
 & +5x^2-20x \\ \hline
 & 3x-12
\end{array}
$$

Multiplicamos el tercer término del cociente por el divisor, el producto se resta del nuevo dividendo y se simplifica

$3\,(x-4) = 3x-12$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 5x + 3 \\
x-4 & x^3 - 9x^2 + 23x - 12 \\
 & -x^3+4x^2 \\ \hline
 & -5x^2+23x-12 \\
 & +5x^2-23x \\ \hline
 & 3x-12 \\
 & -3x+12 \\ \hline
 & 0
\end{array}
$$

El cero es el residuo de la división.

En general, para dividir dos polinomios, se procede siguiendo los pasos que se mencionan a continuación:

1) Se ordenan el dividendo y el divisor de acuerdo a los exponentes decrecientes de una variable que aparezca en ambos, incluyendo términos con coeficiente cero para las potencias faltantes.

2) Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor para obtener el primer término del cociente.

3) Se multiplica el primer término del cociente por el divisor y se resta el producto del dividendo, la diferencia que se obtiene es el nuevo dividendo.

4) Para encontrar el segundo término y todos los consecutivos del cociente se repiten los pasos anteriores hasta que el grado del polinomio diferencia obtenida sea menor que el del divisor.

5) Se comprueba el resultado verificando que:

Cociente x divisor + residuo = dividendo.

Se recomienda al estudiante que, cada vez que efectúe una división compruebe el resultado.

EJEMPLOS:

1) Divide $6x^3+5x^2-9x-7$ entre $2x+1$

SOLUCIÓN:

$$
\begin{array}{r}
3x^2+x-5 \\
2x+1\overline{)\,6x^3+5x^2-9x-7} \\
\underline{-6x^3-3x^2\qquad\qquad} \\
2x^2-9x-7 \\
\underline{-2x^2-x\qquad} \\
-10x-7 \\
\underline{10x+5} \\
2
\end{array}
$$

1er. paso: Divide $6x^3 \div 2x$

2º. paso: Multiplicar $3x^2$ por $2x+1$ y restar el producto del dividendo y simplificar términos semejantes.

3er. paso: Dividir $-2x^2 \div 2x = x$

4o. paso: Multiplicar x por $2x+1$ y restar el producto del nuevo dividendo.

5o. paso: Dividir $-10x \div 2x = -5$

6o. paso: Multiplicar -5 por $2x+1$ y restar del nuevo dividendo.

7o. paso: Como la diferencia (-2) es de menor grado que el divisor pues -2 es constante su grado es cero y $2x+1$ es de grado 1, aquí termina la operación.

Resumiendo el cociente es $3x^2+x-5$ y el residuo, -2

Para comprobar la operación, multiplicamos $(3x^2+x-5)$ por $\underline{2x+1}$ y al producto se le suma el residuo -2.

$(2x+1)(3x^2+x-5) = 2x(3x^2+x-5) + 1(3x^2+x-5)$
$= 6x^3+2x^2-10x+3x^2+x-5$
$= 6x^3+2x^2-10x$
$\underline{\quad +3x^2+x-5}$
$= 6x^3+5x^2-9x-5$

Sumando el residuo -2 al producto anterior, queda:

$6x^3+5x^2-9x-5+(-2)$
$= 6x^3+5x^2-9x-5-2$
$= 6x^3+5x^2-9x-7$
La expresión obtenida es el dividendo por lo tanto el resultado es correcto.

EJEMPLO 2:

Dividir $2y^2+4y+y^3-2$ entre $y+3$
SOLUCIÓN:

En este ejercicio lo primero que debemos hacer es ordenar el dividendo y después efectuar la división siguiendo los pasos correspondientes.

$$
\begin{array}{r}
y^2-y+7 \\
y+3\overline{)\,y^3+2y^2+4y-2} \\
\underline{-y^3-3y^2\qquad\qquad} \\
-y^2+4y-2 \\
\underline{+y^2+3y\quad} \\
7y-2 \\
\underline{-7y-21} \\
-23
\end{array}
$$

cociente: y^2-y+7
Residuo: -23

Comprobación:
$(y+3)(y^2-y+7) + (-23) =$
$y(y^2-y+7) + 3(y^2-y+7) - 23$
$y^3-y^2+7y+3y^2-3y+21-23$
$y^3-y^2+7y+21$
$\underline{+3y^2-3y-23}$
y^3+2y^2+4y-2

Como el polinomio precedente es, precisamente, el dividendo, los resultados de la división han quedado comprobados.

EJEMPLO 3:

Dividir $x^3+4x-29$ entre $x-3$

SOLUCIÓN:

Observa que en este ejercicio no existe termino con la parte literal x^2, por lo tanto en el dividendo agregaremos el término $0x^2$ en el lugar que le corresponde y luego procederemos a efectuar la división.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+13 \\
\hline
x-3 & x^3+0x^2+4x-29 \\
 & -x^3+3x^2 \\
\hline
 & \quad 3x^2+4x-29 \\
 & \quad -3x^2+9x \\
\hline
 & \qquad 13x-29 \\
 & \qquad -13x+39 \\
\hline
 & \qquad\quad 10
\end{array}
$$

Cociente: $x^2+3x+13$
Residuo: 10

Comprobación:
$(x-3)(x^2+3x+13)+10$
$=x(x^2+3x+13)-3(x^2+3x+13)+10$
$=x^3+3x^2+13x-3x^2-9x-39+10$
$=x^3+3x^2+13x-39$
$\quad -3x^2-9x+10$

$x^3+4x-29$

EJEMPLO 4:

Dividir $125x^3-64$ entre $5x-4$.

SOLUCIÓN:

Observa que en este ejercicio no aparecen los términos con las partes literales x^2 ni x por lo que formaremos el dividendo agregando los términos $0x^2$ y $0x$ en el lugar que les corresponde.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 25x^2+20x+16 \\
\hline
5x-4 & 125x^3+0x^2+0x-64 \\
 & -125x^3+100x^2 \\
\hline
 & \qquad 100x^2+0x-64 \\
 & \qquad -100x^2+80x \\
\hline
 & \qquad\qquad 80x-64 \\
 & \qquad\qquad -80x+64 \\
\hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Como ejercicio verifica el resultado

EJEMPLO 5:

Dividir $10a^2-3b^2-13ab$ entre $2a-3b$

SOLUCIÓN:

Antes de efectuar la división, tenemos que ordenar el dividendo con respecto a una variable y después se siguen los pasos ya explicados en los ejemplos precedentes. Efectuemos esta división ordenando el dividendo con respecto a la literal a.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5a+b \\
\hline
2a-3b & 10a^2-13ab-3b^2 \\
 & -10a^2+15ab \\
\hline
 & \qquad 2ab-3b^2 \\
 & \qquad -2ab+3b^2 \\
\hline
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

Por lo tanto el cociente es $5a+b$ y el residuo es cero

Compruébese

EJERCICIO IV

Efectúa las operaciones que se indican y simplifica. Escribe el resultado sin exponentes negativos.

1) $\dfrac{x^4y^3}{x^2y^2}$

2) $\dfrac{36a^6b^{10}}{9a^2b^5}$

3) $\dfrac{-25a^{12}b^9}{-5a^6b^3}$

4) $56x^9y^5Z \div 8x^6y^4Z$

5) $-216a^{32}b^{45} \div 18a^{19}b^{26}$

6) $154x^8y^5Z \div -22x^3y^2Z$

7) $\dfrac{8x^2y^3 - 10x^3}{2x^2y}$

8) $\dfrac{x^3y^2 + x^4y^2 - x^5y^2}{x^3y^2}$

9) $\dfrac{-36x^3y^2 - 24x^2y^3}{-12x^2y^2}$

10) $(6a^3b^3-9a^2b^2+3ab^4) \div (3ab^2)$

11) $(-30x^2y^4-45x^2y^3Z) \div (-15x^2y^3)$

12) $\dfrac{(x+a)^2 + (x+a)}{(x+a)}$

13) $2x^4y^2 - 4x^3y^3 + 6x^2y^4 \div -2x^3y^3$

14) $n^2 - 5n + 4 \div n - 4$

15) $2x^3 - [illegible]x^2 - 10x + 3 \div x - 3$

16) $(6a^2-7a+5) \div (2a-3)$

17) $(2a^3-16) \div (a-2)$

18) $(x^2-9) \div (x+3)$

19) $(x^4-2x^3+x^2-1) \div (-x+1+x^2)$

20 $(6p^2+19pq+6q^2) \div (3p+2q)$

21) $(15x^5-27x^3-7x^4-7x+6) \div (5x^2+x-1)$

22) $(x^4+64) \div (x^2+8-4x)$

23 $(2x^4-11x^3+3x^5+10x+4) \div (x+x^2-2$

24) $(4x^4+x^2y^2-5xy^3-6y^4) \div (2x^2-xy-2y^2)$

25) $(x^4+x^8+1) \div (x+x^2+1)$

EJERCICIO V

Efectúa las operaciones indicadas. Expresa el resultado sin exponentes negativos o nulos.

1) $(4a^3b^2c)(-8ab^3c)$

2) $(-2x^5yz)^3(3x^2yz^2)^3$

3) $(3x^2y)^3(2xy^4)$

4) $(-5a^3b^4c^3)(-3ab^2c)$

5) $\dfrac{8a^5b^2c^4}{-2a^2bc}$

6) $\dfrac{(2a^2bc)^5}{(2ab^3c^2)^2}$

7) $\dfrac{8a^3b^5c^2}{24a^5b^4c^3}$

8) $\left(\dfrac{3x^2y^2z^5}{2xy^5z^5}\right)^3$

9) $\left(\dfrac{2x^3y^2z}{6x^5yz^2}\right)^{-2}$

10) $\left(\dfrac{12x^3y^3z^2}{18xy^4z}\right)^{-4}$

11) $\dfrac{36a^{-4}b^{-1}c^{-6}d^0}{-6a^{-2}b^{-2}c^{-6}}$

2) $\dfrac{7a^{-3}b^4c^{-1}}{21a^{-2}b^{-2}c}$

3) $\left(\dfrac{9x^3y^{-2}z^{-3}}{36x^{-1}y^{-3}z^{-2}}\right)^{-2}$

4) $\left(\dfrac{a^3bc^4d^0}{-a^2b^2c^5d^{-2}}\right)^{-3}$

15) $(3a^{-2}b^3c^4)^{-2}$

16) $(2^a3b^{-4}cd0)^{-3}$

17) $\left(\dfrac{5a^{-7}b^{-2}c}{10a^{-2}b^{-3}c^{-1}}\right)^{-4}$

8) $\left(\dfrac{a^4b^2c^3}{2a^2b^4c}\right)^{-2}\left(\dfrac{a^{-3}b^{-2}c^{-5}}{a^{-1}b^{-3}c^{-6}}\right)^2$

9) $\left(\dfrac{2a^2y^0z}{-ayz^2}\right)^{-6}$

20) $\left(\dfrac{x^{[illegible]}y^2z}{-2x^5yz^{[illegible]}}\right)^3$

1.9 NOTACIÓN CIENTÍFICA

Al estudiar cualquiera de las ciencias, ya sea Física, Química, Biología, Astronomía, etc. nos encontramos con mucha frecuencia con números muy grandes o con números muy pequeños.

Así por ejemplo, si hojeamos un libro de Química, nos encontramos con la llamada constante de Avogadro, la cual se escribe así:

6.023×10^{23}

En otro de Física podemos hallar; carga elemental: 1.6×10^{-19}

El primero de los números es "enormemente grande" pues si lo escribiéramos después de efectuar la multiplicación indicada el resultado sería 6023 seguido de: ¡20 ceros!

En cambio si expresáramos el segundo número en forma de un decimal tendríamos que escribir un cero antes del punto; a continuación, o sea después del punto, dieciocho ceros y por último 16. De modo que:

$1.6 \times 10^{-19} = 0.00000000000000000016.$

El cual es un número muy pequeño. Estamos seguros de que después de los dos ejemplos que acabamos de mostrar, estarás convencido de la importancia que puede tener, el utilizar adecuadamente potencias de 10, con exponentes positivos o negativos en la escritura de números grandes o pequeños.

Esta forma, muy generalizada, de escribir números (grandes o pequeños) en forma de producto donde uno de los factores es un dígito (o sea un número entero y positivo desde el 1 hasta el 9, ambos inclusive) o un decimal que, antes del punto tiene uno de estos dígitos,: el otro factor es una potencia de diez con exponente entero positivo o negativo.

Ejemplo: 3×10^{8}
1.26×10^{-6}
4.09×10^{80}

A continuación veremos como debemos proceder para expresar, con notación científica, un número dado en la forma "usual" (entero o decimal).

Se presentan dos casos:

1° El numero dado es mayor que 1

2° El número dado es menor que 1

1er. Caso Sea por ejemplo: 2450.88 para lograr el primer factor debemos correr el punto decimal tres lugares a la izquierda, lo que equivale a dividir el número por 1,000. Para que el producto que buscamos sea igual al número dado, debemos multiplicar por 1,000, 0 sea por $10.^3$

Por tanto

$$2450.88 = \frac{2450.88}{1000} \times 1000$$

$= 2.45988 \times 10^{3}$ que está expresado en notación científica.

2o. caso 0.0000435. Ahora, para obtener el primer factor, debemos correr el punto cinco lugares a la derecha, lo que equivale a multiplicar por 100000 ó sea, 10^5; para que el producto que buscamos sea igual al número dado debemos dividir por $10.^5$ o lo que es lo mismo, multiplica por 10^{-5}.

Por tanto:

$$0.0000435 = \frac{0.0000435}{10^5} . 10^5$$

$$= \frac{0.0000435 \times 10^5}{100000} = \frac{4.35}{10^5} = 4.35 \times \frac{1}{10^5}$$

$$= 4.35 \times 10^{-5}$$

Nota: En un caso como 6.7348 no será necesario correr el punto decimal (podemos decir que lo corremos "cero" lugares) luego el número dado puede expresarse así en notación científica 6.7348×10^{0}.

En ocasiones el empleo de la notación científica puede facilitar el cálculo con números grandes y/o pequeños.

Ejemplo 1

Calcular:

(752000000)x (0.0000295)

1º Transformamos cada factor a notación decimal e indicamos las multiplicación

$(7.52x10^{8})\ (2.95x10^{-5})$

2º Aplicamos la propiedad asociativa de la multiplicación

$(7.52)\ (2.95\ (10^{8})\ (10^{-5})$

3o Multiplicamos los dos primeros factores cuyo resultado es 22.184 y

$10^{8} x10^{-5}= 10^{3}$

4o El resultado es; pues $22.184x10^{3}$ o, si se prefiere, 22184 o $2.2184\ x10^{4}$.

Ejemplo 2:

Calcular y dar respuesta en notación científica

$$\frac{4.37x10^{13}}{9.26x10^{4}}$$

$$\frac{4.37}{9.26}\ \frac{10^{13}}{10^{4}}$$

$= 0.4719x10^{[illegible]}$

$= 4.719x10^{7}$

EJERCICIO V

Escribe los diferentes números en forma decimal o en notación científica, según sea el caso.

1) 12.3
2) $6x10^{7}$
3) $2.35x10^{-3}$
4) $8.85x10^{6}$
5) $2.95\ x10^{-3}$
6) 0.000527
7) $7.63x10^{-8}$
8) 0.00739
9) $2.2x10^{9}$
10) $4.32x10^{3}$
11) 34600000
12) 7500000000000

EJERCICIO VI

Efectúa las operaciones mentalmente y proporciona el resultado en notación científica.

1) $(2x10^{[illegible]})\ (2x10^{6})$
2) [illegible] $(4x10^{-3})$
3) $(2x10^{-4})\ (5x10^{13})$
4) $(9x10^{8})\ (5x10^{5})$
5) $(6x10^{3})\ (7x10^{-8})$
6) $(4x10^{-5})\ (7x10^{-10})$
7) $(6x10^{-2})\ (4x10^{-8})$
8) $(6x10^{-5})\ (5x10^{5})$
9) $(3x10^{3}\ ((5x10^{-3})$
10) $\frac{6x10^{2}}{3x10^{8}}$
11) $\frac{2x10^{-9}}{5x10^{-2}}$
12) $\frac{4x10^{-6}}{25x10^{-3}}$

EJERCICIO VII

Efectúa en cada caso la multiplicación o división, expresando el resultado en notación científica.

1) $(2.09x10^{5})$ (3.0[illegible]0^{4})
2) $(3.08x10^{-5}\ (2.365x10^{11})$
3) $\frac{7.6x10^{6}}{3.2x10^{4}}$
4) $\frac{1x10^{-15}}{5.39x10^{-11}}$
5) $(3.42x10^{5})^{2}$
6) $(512x10^{-4})^{2}$

1.10 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON SIGNOS DE AGRUPACIÓN.

Recordarás que anteriormente habíamos dicho que los signos de agrupación se utilizan para señalar más de una operación y además nos indican el orden en que se deben efectuar las mismas. Simplificar una expresión con signos de agrupación significa eliminar dichos símbolos efectuando las operaciones indicadas por ellos y a continuación reducir términos semejantes, si los hubiere.

Cuando una expresión algebraica contiene uno o más pares de símbolos de agrupación, encerrados en otro par, se elimina primero el de más adentro. para eliminar los signos de agrupación se procede de la siguiente manera:

En los que estén precedidos de un signo positivo, se quita el símbolo de agrupación y se escriben sus términos con sus mismos signos.

En los que están precedidos de un signo negativo, se quita el símbolo de agrupación y se pone el inverso aditivo de cada término, es decir se cambian los signos de los términos que se encuentran dentro de dicho símbolo.

Ejemplo 1

Elimina los símbolos de agrupación y reduce términos semejantes en la expresión:

5x+[2x-(7x-3)] - [-3x+(10x-6]

Solución:

Eliminaremos los símbolos de agrupación empezando por los paréntesis, después los corchetes y finalmente reduciremos términos semejantes.

5x+ [2x-7x+3] - [-3x+10x-6]

= 5x+2x-7x+3 +3x-10x+6

-7x+9

Ejemplo 2

Elimina los símbolos de agrupación y reduce términos semejantes en la expresión:

-[-(a+3b-14c) - (8c-b+6)-5(a+c-2)]

Solución

Empezaremos quitando los paréntesis:

-[-a-3b+14c-8c+b-6-5a-5c+10]

El signo negativo que precede a los corchetes nos indica que cambiemos los signos de los términos que se encuentran en su interior.

a+3b-14c+8c-b+6+5a+5c-10

Reduzcamos ahora términos semejantes.

a+3b-14c+6
5a-b+8c
+5c-10
____
6a+2b-c-4

Ejemplo 3

Simplifica la siguiente expresión algebraica:

2x-{5-x-[3y-4(2x-3y)]-2[2(x-y-1)-(x-y+6)]}

Solución:

Simplificar la expresión significa eliminar los símbolos de agrupación y reducir términos semejantes. Eliminaremos primero los paréntesis, después los corchetes y por último las llaves.

2x-{5-x-[3y-8x+12y]-2[2x-2y-2-x+y-6]}

Reduciendo términos semejantes en las expresiones que aparecen dentro de los corchetes, queda:

2x-{5-x-[15y-8x]-2[x-y-8]}

Quitemos ahora los corchetes

2x-{5-x-15y+8x-2x+2y+16}

Reduciendo términos semejantes en la expresión que se encuentra dentro de las llaves queda:

2x-{5x-13y+21}

Eliminemos a continuación las llaves y reduzcamos términos semejantes

2x-5x+13y-21
-3x+13y-21

Ejemplo 4

Elimina los signos de agrupación y simplifica la expresión:

$10-3\{a-[5a(a-1)-a(4a+1)]-(a-7)\}$

$= 10-3\{a-[5a^2-5a-4a^2-a]-a+7\}$

$= 10-3\{a-[a^2-6a]-a+7\}$

$= 10-3\{a-a^2+6a-a+7\}$

$= 10-3\{-a^2+6a+7\}$

$= 10+3a^2-18a-21$

$= 3a^2-18a-11$

EJERCICIO VIII

Elimina signos de agrupación y reduce a terminos semejantes.

1) $(5x-y^2+4x)-\{2x-[y^2+6-(2-5x-y)]\}$

2) $(4x^2-5x+6)-(4-x^2+7x)-\{4(x-2)-[(x-3)^2-(x+5)(x-1)]\}$

3) $2(4x-3y)-(2x-5y)-2[(x-y)-(6x-y)]$

4) $4(a-b)-(2b-7a)-\{(a+3b)-[2a-(a-b)-2(4a-2b)]\}$

5) $5x-3[2-(x-5)+(2x+7)]$

6) $2\{-(a-b)+3[(a+b)-2(a-b)-(4b-7a)]\}$

7) $12+\{2x-[4(y-x)-(x-3)-(y-8)]\}$

8) $-(4-9y+7x)+\{-(2y+x-4)-[3+(5x-2y+6)-(5-4x-7y)]\}$

9) $(4x^2-3x+6)-|x^2-2x-1|-[(x+3)^2-(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)]$

10) $5(a-2b)-6(a-3b)-\{4a-[(a-2b)-(7a+b)]\}$

CAPITULO 2

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

En este capítulo aprenderás a factorizar polinomios. Encontrarás también un método rápido para resolver ecuaciones cuadráticas por factorización.

Expresión:
$15x^2-6ax-20cx+8ac$

Forma factorizada de la expresión anterior:
$(5x-2a)(3x-4c)$

Ecuación:
$2x^2-x-3=0$

Forma factorizada de la ecuación anterior:
$(2x-3)(x+1)=0$

Conjunto solución de la ecuación:

$S=\{\frac{3}{2},-1\}$

Ejemplo 4

Elimina los signos de agrupación y simplifica la expresión:

$10-3\{a-[5a(a-1)-a(4a+1)]-(a-7)\}$

$= 10-3\{a-[5a^2-5a-4a^2-a]-a+7\}$

$= 10-3\{a-[a^2-6a]-a+7\}$

$= 10-3\{a-a^2+6a-a+7\}$

$= 10-3\{-a^2+6a+7\}$

$= 10+3a^2-18a-21$

$= 3a^2-18a-11$

EJERCICIO VIII

Elimina signos de agrupación y reduce a terminos semejantes.

1) $(5x-y^2+4x)-\{2x-[y^2+6-(2-5x-y)]\}$

2) $(4x^2-5x+6)-(4-x^2+7x)-\{4(x-2)-[(x-3)^2-(x+5)(x-1)]\}$

3) $2(4x-3y)-(2x-5y)-2[(x-y)-(6x-y)]$

4) $4(a-b)-(2b-7a)-\{(a+3b)-[2a-(a-b)-2(4a-2b)]\}$

5) $5x-3[2-(x-5)+(2x+7)]$

6) $2\{-(a-b)+3[(a+b)-2(a-b)-(4b-7a)]\}$

7) $12+\{2x-[4(y-x)-(x-3)-(y-8)]\}$

8) $-(4-9y+7x)+\{-(2y+x-4)-[3+(5x-2y+6)-(5-4x-7y)]\}$

9) $(4x^2-3x+6)-|x^2-2x-1|-[(x+3)^2-(x+2)(x-2)+(x-1)(x+3)]$

10) $5(a-2b)-6(a-3b)-\{4a-[(a-2b)-(7a+b)]\}$

CAPITULO 2

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

En este capítulo aprenderás a factorizar polinomios. Encontrarás también un método rápido para resolver ecuaciones cuadráticas por factorización.

Expresión:
$15x^2-6ax-20cx+8ac$

Forma factorizada de la expresión anterior:
$(5x-2a)(3x-4c)$

Ecuación:
$2x^2-x-3=0$

Forma factorizada de la ecuación anterior:
$(2x-3)(x+1)=0$

Conjunto solución de la ecuación:

$S=\{\frac{3}{2},-1\}$

2.1 POLINOMIOS, MULTIPLICACIÓN Y FACTORIZACIÓN

Las siguientes expresiones son llamadas polinomios:

$2x^2+4x-7$

$8x^3-11x+6x^5-x^2$

$5x^7+9x^4-3x^2+8$

Este último polinomio está arreglado en orden descendente en las potencias de "x". El siguiente polinomio está arreglado en orden ascendente en las potencias de "y".

$5y-7y^3+y^5$

Definición

Un polinomio es una expresión que no tiene otras operaciones que no sean adición, sustracción y multiplicación entre la(s) variable(s) y constante(s).

Notas:

1) Expresiones tales como:

$\frac{x-2}{3x+4}$ ó $|x-5|$

En las cuales tenemos división entre dos expresiones con la misma variable y el valor absoluto de una expresión ***no son polinomios.***

2) Potencias en las variables tales como x^3 están permitidos en polinomios ya que ellas implican multiplicación $x \cdot x \cdot x$

3) Términos simples como $2x$, $5y^2$, x o una constante como el 5 también son llamados polinomios.

Como resultado de esta definición, los polinomios siempre consisten de uno o más términos.

- En el término $+3x^4$

3	=	Coeficiente del término
x	=	Variable
4	=	Exponente de la variable

- En el término x^4, el coeficiente es 1

- En el término $-3x$, el exponente es 1 y el término es negativo
- Polinomios con uno, dos o tres términos tienen nombres especiales

Número de términos	Ejemplo	Nombre
Uno	$5x$	Monomio
Dos	$12x-3$	Binomio
Tres	$4x^2-8x+10$	Trinomio

- Polinomios con una variable también se clasifican por el grado mayor de los exponentes de la variable.

Grado	Ejemplo	Nombre
Primero	$17x-4$	Lineal
Segundo	$9x^2-2x+11$	Cuadrático
Tercero	x^3	Cúbico

- Juntando los dos nombres grado y cantidad de términos podemos llamarlos así, por ejemplo: x^2+5x+2 es un trinomio cuadrático ya que es de segundo grado y tiene tres términos.

2.1.1 PRODUCTO DE DOS BINOMIOS

Si multiplicas una constante por un binomio lo harías así:

$3(x+2)$

$=3 \times x+3 \times 2$

$=3x+6$

Supongamos que vas a multiplicar dos binomios como $(x+3)(x+5)$, entonces tienes que distribuir el primer paréntesis sobre el segundo.

Técnica de multiplicación de dos binomios:

1. Multiplica cada término del segundo paréntesis por x
   $(x+3)(x+5) = x^2+5x \ldots$

2. Multiplica cada término del segundo paréntesis por 3
   $(x+3)(x+5) = x^2+5x+3x+15$

3. Reduce términos semejantes
   $(x+3)(x+5) = x^2+8x+15$

OBJETIVO

Multiplicarás dos binomios rápidamente, escribiendo sólo el producto indicado y la respuesta

EJEMPLO 1
Multiplica $(x+5)(x+2)$

Solución

$(x+5)(x+2)$	Escribe la expresión dada
$= x^2+2x+5x+10$	Multiplicando cada término
$= x^2+7x+10$	Reduciendo términos semejantes

EJEMPLO 2
Multiplica $(x-3)(x+8)$

Solución

$(x-3)(x+8)$	Escribe la expresión dada
$= x^2+8x-3x-24$	Multiplicando cada término
$= x^2+5x-24$	Reduciendo términos semejantes. (Mentalmente si es posible)

EJEMPLO 3
Multiplica $(x-7)(x-9)$

Solución

$(x-7)(x-9)$	Escribe la expresión dada
$= x^2-9x-7x+63$	Multiplicando cada término
$= x^2-16x+63$	Simplificando términos semejantes

EJEMPLO 4
Multiplica $(3x-5)(4x+1)$

Solución

$(3x-5)(4x+1)$	Escribe la expresión dada
$= 12x^2+3x-20x-5$	Multiplicando cada término
$= 12x^2-17x-5$	Rediciendo términos semejantes. (Mentalmente si es posible)

EJEMPLO 5
Multiplica $(x-5)^2$

Solución

$(x-5)^2$	Escribe la expresión dada
$= (x-5)(x-5)$	Definición de cuadrado
$= x^2-5x-5x+25$	Multiplicando cada término
$= x^2-10x+25$	reduciendo términos semejantes

EJERCICIO 2.1.1

Para los siguientes problemas multiplica los binomios. Si te es posible, haz las operaciones mentalmente.

1) $(x+4)(x+9)$	2) $(x-8)(x+5)$
3) $(x+3)(x-7)$	4) $(y-4)(y+7)$
5) $(r-6)(r+1)$	6) $(s-8)(s-4)$
7) $(a-1)(a-2)$	8) $(2x+5)(x+4)$
9) $(3x+1)(x-2)$	10) $(p-5)(2p-1)$
11) [illegible]	12) $(2x-7)(2x-7)$
13) $(2x-7)(2x+7)$	14) $(x+6)^2$
15) $(x-9)^2$	16) $(3x+5)^2$

2.1.2 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS CUADRÁTICOS

La factorización es el proceso contrario a la multiplicación. Puedes convertir un trinomio cuadrático como $x^2+8x+15$, en un producto de dos binomios, que al factorizarlo quedaria $(x+3)(x+5)$

Definición

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Factorizar un polinomio significa transformarlo en un producto de dos o más factores.

OBJETIVO

Dado un trinomio cuadrático factorizarlo en un producto de dos binomios lineales (si es posible).

Técnica

La manera de factorizar un trinomio tal como $x^2+8x+15$ donde el coeficiente del término x^2 es 1, es la siguiente:

Factoriza $x^2+8x+15$

1. Se necesitan dos factores que multiplicados den 15
   Opciones: 5 x 3
   15 x 1

2. Se necesitan dos factores que sumados den 8, entonces escoges la pareja 5,3
   Así que: a) $x^2+8x+15 = (x+3)(x+5)$

   b) $x^2-8x+15 = (x-5)(x-3)$

Para comprobar sólo tienes que multiplicar los dos binomios.

Cuando el coeficiente del término x^2 es diferente de 1, la técnica es diferente, lo que debes hacer es buscar dos binomios que multiplicados den el trinomio que estás factorizando.

TÉCNICA PARA FACTORIZAR TRINOMIOS CUADRÁTICOS CON EL COEFICIENTE EN x^2 DIFERENTE DE 1

Ejemplo: Factoriza $3x^2-19x-14$

Primero escribe dos paréntesis vacios
$3x^2-19x-14$
$=(\ )(\ )$

Ahora debes encontrar dos términos que multiplicados den $3x^2$, y los colocas al principio de cada paréntesis. Los terminos son 3x y x porque su producto nos da $3x^2$.
$3x^2-19x-14$
$=(3x\ )(x\ )$

Los otros terminos en el binomio deben tener un producto igual a -14.

Asi que las opciones son:

+1, -14	+7, -2
-1, +14	-7, +2
+2, -7	+14, -1
-2, +7	-14, +1

Simplemente prueba con estas posibilidades hasta que encuentres una que funcione. El par correcto es el que dá $-19x$ que es el término de enmedio del trinomio cuando multiplicas los dos binomios. Ese par parece ser +2,-7. Y los colocamos al final de los paréntesis.
$3x^2-19x-14$
$=(3x+2)\ (x-7)$

Para comprobar sólo tienes que multiplicar los dos binomios.

$(3x+2)(x-7) \quad = 3x^2-21x+2x-14$
$\qquad\qquad\qquad\ = 3x^2-19x-14$

Definición

POLINOMIO PRIMO Un polinomio primo es aquel cuyos factores son el 1 y el polinomio mismo (no se puede descomponer en factores)

EJEMPLO 1

Factoriza $x^2+7x+10$

Solución
$x^2+7x+10$
$=(x+5)(x+2)$

Escribe la expresión dada
10 es igual a (2)(5)
y 7 es igual a 2+5

EJEMPLO 2
Factoriza $x^2-12x+20$

Solución

$x^2-12x+20$
$=(x-10)(x-2)$

Escribe la expresión dada
20 es igual a (-10)(-2)
y -12 es igual a (-10)+(-2)

EJEMPLO 3
Factoriza $x^2+3x-10$

Solución

$x^2+3x-10$
$=(x+5)(x-2)$

Escribe la expresión dada
-10 es igual (5)(-2)
y +3 es igual (+5)+(-2)

EJEMPLO 4
Factoriza $x^2-3x-10$

Solución
$x^2-3x+10$
$=(x-5)(x+2)$

Escribe la expresión dada
-10 es igual a (-5)(2)
y - 3 es igual a (-5)+(2)

EJEMPLO 5
Factoriza $2x^2+7x+5$

Solución
$2x^2+7x+5$
$=(2x+5)(x+1)$

Escribe la expresión dada
El término de enmedio es $2x+5x=7x$

EJEMPLO 6

Factoriza x^2+5x+1

Solución: Es primo

Es un polinomio primo, pues no existe una pareja de números enteros que multiplicados den +1 y sumados den +5

EJERCICIO 2.1.2

Factoriza los siguientes trinomios cuadráticos o menciona si son primos.

1) x^2+7x+6 2) $x^2-7x+12$
3) $x^2-8x+12$ 4) $z^2+10z+9$
5) $a^2-13a+40$ 6) $x^2+16x+48$
7) $b^2+14x+48$ 8) $m^2-19m+48$
9) $x^2-20x+48$ 10) $x^2-32x+60$
11) x^2+2x-8 12) $r^2-4r-12$
13) $x^2-5x-50$ 14) $x^2-23x-50$
15) $u^2+20u-72$ 16) u^2+u-72
17) $x^2-13x+42$ 18) $x^2-13x+42$
19) x^2+5x-6 20) $x^2+26x+120$
21) $5x^2-8x+3$ 22) $2x^2+5x+2$
23) $2y^2+7y+3$ 24) $2x^2-9x+4$
25) $3x^2-16x+5$ 26) $3p^2-8p+4$
27) $4u^2-8u-5$ 28) $6-5x+x^2$
29) $x^2+11xy+10y^2$ 30) $a^2-7ab-30b^2$

2.1.3 FACTORIZANDO UNA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

Supongamos que vas a factorizar x^2-36, puedes razonar de la siguiente forma: necesitas dos números que multiplicados den -36 y sumados den 0 (ya que no existe término de enmedio), así que los factores serían 6 y -6. Por lo tanto, $x^2-36=(x+6)(x-6)$.

Dos binomios como $x+6$ y $x-6$ son llamados ***binomios conjugados.***

Definición

BINOMIOS CONJUGADOS

Los binomios conjugados son binomios cuyos primeros términos son iguales y sus segundos términos sólo difieren en signo de en medio de los términos (ejemplo: $3x+5$ y $3x-5$ son binomios conjugados).

Cuando multiplicas dos binomios conjugados, el término de enmedio desaparece, por ejemplo:

$(x+6)(x-6) = x^2-6x+6x-36$
$= x^2-36$

El resultado es una ***diferencia de cuadrados.***

Conclusión

DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS

Los factores de una diferencia de dos cuadrados son binomios conjugados
$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$

OBJETIVO:

Factorizar una diferencia de dos cuadrados como un producto de binomios conjugados.

EJEMPLO 1
x^2-9

Solución
$x^2-9=$ Escribe la expresión dada
$x^2-3^2=$ Ya que $9=3^2$
$(x+3)(x-3)$

EJEMPLO 2
$4x^2-25$
Solución
$4x^2-25 =$ Escribe la expresión dada
$(2x)^2-5^2=$ Ya que $4x^2=(2x)(2x)$ y $25=(5)(5) = 5^2$
$(2x+5)(2x-5)$

EJEMPLO 3
$81b^2-1$

Solución
$81b^2-1=$ Escribe la expresión dada
$(9b)^2-1^2=$ Ya que $81b^2=(9b)^2$ y $1=(1)^2$
$(9b+1)(9b-1)$

EJEMPLO 4
x^2-12

Solución

x^2-12	Escribe la expresión dada
Es polinomio primo	Ya que el 12 no es un cuadrado perfecto

EJEMPLO 5
x^2+16

Solución

x^2+16	Escribe la expresión dada
Es polinomio primo	Ya que x^2 + 16 dos cuadrados

EJERCICIO 2.1.3

Para los siguientes problemas factoriza el polinomio o menciona si es primo.

1) x^2-16
2) a^2-4
3) x^2-1
4) d^2-49
5) $4x^2-25$
6) $9x^2-49$
7) $16x^2-100$
8) $81p^2-1$
9) $4-25x^2$
10) $64-25x^2$
11) $15-x^2$
12) x^2-16
13) $36a^2-b^2$
14) h^2-m^2
15) $49r^2-p^2$
16) $4x^2-9y^2$
17) $(a+b)^2-4$
18) $(x+y)^2-36$
19) $81-64(xy)^2$
20) $(x+3)^2-(y+5)^2$

2.1.4 BINOMIO ELEVADO AL CUADRADO

La expresión $(x-2)^2$ es un binomio elevado al cuadrado ya que $(x-2)^2$ significa $(x-2)(x-2)$ y es el mismo procedimiento que multiplicar dos binomios.

$(x-2)^2$
$= (x-2)(x-2)$
$= x^2-4x+4$

También puedes usar el siguiente modelo
$(x-2)^2=x^2-4x+4$

Primero escribes el primer término elevado al cuadrado, o sea $(x)^2$. Segundo paso, anotas el doble producto del primer término por el segundo, o sea, $2(x)(-2)=-4x$. Por último escribes el segundo término elevado al cuadrado $(-2)^2=4$

OBJETIVO:

Ser capaz de elevar binomios al cuadrado.

EJEMPLO 1
Eleva al cuadrado $(x+5)^2$

Solución

$(x+5)^2$	Escribe la expresión dada
$= (x+5)(x+5)$	Definición de cuadrado
$= x^2+10x+25$	El término de en medio es $5x+5x = 10x$

EJEMPLO 2
Eleva al cuadrado $(3x+5)^2$

Solución

$(3x+5)^2$	Escribe la expresión dada
$= (3x+5)(3x+5)$	Definición de cuadrado
$= 9x^2+30x+25$	El término de en medio es $15x+15x = 30x$

EJEMPLO 3
Eleva al cuadrado $(x+4)$ usando el modelo descrito anteriormente

Solución

$(x+4)$	Escribe la expresión dada
$=x^2+8x+16$	El término de enmedio es $2(x)(4)$

EJERCICIO 2.1.4

Desarrolla, utilizando el modelo adecuado para resolverlo en un paso.

1) $(x+4)^2$
2) $(a+2)^2$
3) $(x-5)^2$
4) $(b-7)^2$
5) $(4x+3)^2$
6) $(5x+4)^2$
7) $(9-4x)^2$
8) $(3-10x)^2$
9) $(x+4y)^2$
10) $(5a-b)^2$

11) **Binomio elevado al cubo.**
$(x+y)^3 = (x+y)(x+y)(x+y)$
Una manera de resolverlo es multiplicar el primero y segundo binomio, luego el resultado multiplicarlo por el tercer binomio.
a) Eleva $(a+b)^3$
b) Eleva $(x-y)^3$

12) Trinomio elevado al **cuadrado**
$(x+y+z)^2 = (x+y+z)(x+y+z)$
Para resolverlo distribuye cada miembro del primer paréntesis por el segundo paréntesis y luego combina términos semejantes.
a) Eleva $(x+2y+3z)^2$
b) Eleva $(4a+5b-3c)^2$

2.1.5 FACTORIZANDO TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS

Los trinomios cuadrados perfectos son el resultado de elevar un binomio al cuadrado como por ejemplo en

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3)$
$= x^2+6x+9$

Por lo tanto x^2+6x+9 es un trinomio cuadrado perfecto y lo puedes factorizar de la siguiente manera:

Factorizar: x^2+6x+9
$=(x+3)(x+3)$
$=(x+3)^2$

La manera de comprobar que sea un trinomio cuadrado perfecto es que el término constante sea un cuadrado perfecto $(9)=(3)^2$ y luego coeficiente del término de enmedio sea el doble de la raíz del término constante, o sea $\sqrt{9}=3$ y $2(3)=6$

OBJETIVO:

Ser capaz de factorizar trinomios cuadrados perfectos.

EJEMPLO:

Menciona si es un trinomio cuadrado perfecto, si es así transfórmalo en un binomio al cuadrado.

a) $x^2+12x+36$
Solución

$x^2+12x+36$	Escribe la expresión dada
$=(x+6)^2$	Ya que $(6)^2=36$ y $2(6)=12$

b) $x^2+10x+64$
Solución

No es un trinomio cuadrado perfecto	Ya que $(8)^2$ si es 64 pero $2(8)=16$ y no 10

c) $x^2-8x+15$

Solución

No es un trinomio cuadrado perfecto	Ya que el 15 no es cuadrado perfecto

EJERCICIO 2.1.5

Escribe los siguientes trinomios como un binomio al cuadrado o menciona si no son trinomios cuadrados perfectos.

1) x^2+6x+9
2) $x^2-10x+25$
3) $x^2+16x+64$
4) x^2-4x+4
5) x^2-2x+1
6) $x^2-8x+20$
7) $x^2-8x+16$
8) $x^2-8x-16$
9) $x^2+20x+81$
10) $x^2+20x+100$
11) $x^2-30x+225$
12) $x^2+62x+961$
13) $x^2-10x+40$
14) $x^2-148x+5476$
15) $x^2+68x+4624$

2.1.6 FACTORIZACIÓN DE SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS

Si multiplicas $(x+5)(x^2-5x+25)$ obtienes lo siguiente:
$(x+5)(x^2-5x+25)$
$=x^3-5x^2+25x+5x^2-25x+125$
$=x^3+125$

Los términos de enmedio se eliminan y la respuesta es una suma de dos cubos ya que $x^3+125=x^3+(5)^3$

Por lo tanto, una suma de dos cubos puede factorizarse de la siguiente forma:
$x^3+5^3 = (x+5)(x^2-5x+25)$

Conclusión

FACTORIZANDO UNA SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS

$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$
$x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

OBJETIVO:

Ser capaz de factorizar la suma o diferencia de dos cubos.

EJEMPLO

Factoriza x^6-343

Solución. Escribe cada término como un cubo perfecto

x^6-343
$=(x^2)^3-7^3$
$=(x^2-7)(x^4+7x^2+49)$

EJERCICIO 2.1.6

En los siguientes problemas factoriza el polinomio completamente.

1) a^3-b^3	2) k^3+n^3
3) y^3+64	4) c^3-729
5) d^6+h^3	6) p^3-w^{12}
7) a^3-27	8) x^3+1
9) x^6-y^6	10) $x^{[illegible]}-y^{12}$

2.2 EL MÁXIMO FACTOR COMÚN

En la sección 5.1 factorizaste los enteros como el producto de números primos. Por ejemplo:
108= (2)(2)(3)(3)(3)
120= (2)(2)(2)(3)(5)

Puesto que el 2 es un factor tanto de 108 como del 120, es llamado ***factor común*** de éstos dos números. El 3 y el 6 son también factores comunes como puedes observar al dividir 108 y 120 por 3 y por 6.

$\frac{108}{3}=36$ $\frac{108}{6}=18$

El coeficiente es un entero.

$\frac{120}{3}=40$ $\frac{120}{6}=20$

Por lo que más adelante necesitarás hacer en álgebra, es importante encontrar el Máximo Factor Común (MFC) de dos números.

MAXIMO FACTOR COMÚN

El máximo factor común de dos números es su máximo común divisor. El máximo factor común (MFC) de dos números enteros positivos *"a"* y *"b"* es el número entero más grande para el cual

$\frac{a}{MFC}=entero$ y $\frac{b}{MFC}=entero$

El MFC de dos enteros puede ser encontrado factorizándolos por números primos. Para 108 y 120 pensarías:
108= (2)(2)(3)(3)(3)
120= (2)(2)(2)(3)(5)
MFC= (2)(2)(3)=12

El MFC es formado multiplicando todos los factores primos comunes con el menor exponente.

Si dos enteros no tienen factores comunes primos su MFC es 1. A tales números se les conoce como ***números primos relativos***.
Por ejemplo:
10=(2)(5)
21=(3)(7)

Tanto el 10 como el 21 están compuestos por números primos. Pero no tienen factores primos comunes. Su MFC es 1.

Las expresiones con variables pueden tener también factores comunes. Por ejemplo:
$x^5= x\times x\times x\times x\times x$
$x^3= x\times x\times x$
Su MFC = $x\times x\times x=x^3$

En esta sección practicarás, encontrando el factor común de parejas dadas de expresiones.

OBJETIVO

Dados dos enteros o dos expresiones con valores variables, determinar su máximo factor común.

EJEMPLO 1
Encuentra el MFC de 12 y 15

MFC = 3 $\quad 12 = 2\times2\times3$ $\quad$ El 3 es factor común en el 12 y 15
$15 = 3\times5$

EJEMPLO 2
Encuentra el MFC de 540 y 2250

$540 = 2\times2\times3\times3\times3\times5$

$2250 = 2\times3\times3\times5\times5\times5$

MFC = $2\times3\times3\times5$

2)	540	2)	2250
2)	270	3)	1125
3)	135	3)	375
3)	45	5)	125
3)	15	5)	25
5)	5	5)	5
	1		1

EJEMPLO 3
Encuentra el MFC de 32 y 45

$32 = 2\times2\times2\times2\times2$
$45 = 3\times3\times5$
MFC = 1 $\quad$ 32 Y 45 son números primos relativos

EJEMPLO 4
Encuentra el MFC de y^7 y y^4

$y^7 = y\times y\times y\times y\times y\times y\times y$

$y^4 = y\times y\times y\times y$

MFC = y^4

NOTA: Puedes hacer éstos problemas más rápidamente observando que el MFC siempre contiene la variable con el exponente más pequeño.

EJEMPLO 5
Encuentra el MFC de x^4y^7 y x^5y^3

MFC = x^4y^3 $\quad$ $x^4y^7 = x\times x\times x\times x\times y\times y\times y\times y\times y\times y\times y$
$x^5y^3 = x\times x\times x\times x\times x\times y\times y\times y$

Hay cuatro factores comunes "*x*" y tres factores comunes "*y*"

EJEMPLO 6
Encuentra el MFC de x^7y^5 y x^2z^4

MFC = X^2 $\quad$ Hay dos factores comunes "*x*"
La "*y*" y la "*z*" no son factores comunes.

EJEMPLO 7
Encuentra el MFC de $24x^3y$ y $36x^4y$

MFC = $12x^3y$ $\quad$ El MFC de 24 y 36 es 12
Hay 3 factores comunes "*x*" y 1 factor común "*y*".

EJEMPLO 8
Encuentra el MFC de los dos términos en $12x^3 - 18xy^2$
MFC = $6x$ $\quad$ El máximo factor común de 12 y 18 es 6. Hay un factor común "*x*". La "*y*" no es factor común.

PRÁCTICA ORAL

Encuentra el MFC de los siguientes números. Si el MFC es 1 también da el número primo relativo.

a) 8 y 12 $\quad$ b) 9 y 15
c) 10 y 15 $\quad$ d) 12 y 15
e) 12 y 16 $\quad$ f) 9 y 16
g) 4 y 10 $\quad$ h) 5 y 10
i) 6 y 10 $\quad$ j) 6 y 12
k) 6 y 15 $\quad$ l) 8 y 15

EJERCICIO 2.2

1) Escribe de memoria la definición de Máximo Factor Común
2) ¿Qué significa para dos números ser números primos relativos? Explica por qué dos números compuestos pueden ser números primos relativos.

Para los problemas del 3 al 20 escribe el MFC de los dos números dados. Haz el trabajo mentalmente hasta donde te sea posible. Si el MFC es igual a 1, también escribe los números primos relativos.

3) 12 y 18
4) 16 y 20
5) 20 y 24
6) 24 y 30
7) 22 y 33
8) 18 y 21
9) 35 y 12
10) 22 y 9
11) 54 y 36
12) 56 y 32
13) 600 y 450
14) 252 y 588
15) 270 y 225
16) 315 y 189
17) 189 y 220
18) 225 y 308
19) 1000 y 1500
20) 2000 y 2100

Para los problemas del 21 al 40, escribe el MFC de las dos expresiones:

21) x^5 y x^3
22) x^6 y x^5
23) a^7 y a^9
24) r^3 y r^7
25) b^6 y b^9
26) c^8 y c^{12}
27) x^2y^3 y x^5y^2
28) x^4y^2 y x^3y^7
29) $r^{10}s^{11}$ y r^9s^{13}
30) $a^{12}h^{13}$ y a^9h^7
31) $10x^6$ y $5x^4$
32) $12x^5$ y $6x^8$
33) $16m^2$ y $20m^3$
34) $20m^4$ y $24m^3$
35) $18a^3b^8$ y $21ab^6$
36) $18c^3d^4$ y $12c^6d$
37) $56c^3d^2$ y $32c^3e^2$
38) $54x^2z^2$ y $36y^2z^3$
39) $24x^2y3z^4$ y $30x^5y^4z^3$
40) $22a^3b^6$ y $18a^5b^2$

Para los problemas del 41 al 50, encuentra el MFC de los dos términos en la expresión dada:

41) $6x^3+9x^2$
42) $10x^2 + 15x^3$
43) $4a^2-8a^5$
44) $7b^5-14b^6$
45) $3c^8-12c^5$
46) $7d^9-21d^4$
47) $10x^2y^4+15x^3y$
48) $8x^5y^2+12xy^3$
49) $x^{12}-x^8$
50) $y^{15}-y^{10}$

Para los problemas del 51 al 60 encuentra el MFC de los 3 números. Para hacer un factor común un número, deberá ser factor de los 3 números dados. Si no hay factor común de los 3 números escribe el número primo relativo

51) 24, 28 y 42
52) 24,32 y 40
53) 50, 75 y 60
54) 36,54 y 60
55) 12, 15 y 35
56) 50, 65 y 39
57) 100, 120 y 150
58) 200, 300 y 250
59) 720, 108, 1800
60) 324, 540 y 1080

2.3 FACTORIZANDO POLINOMIOS QUE TIENEN FACTORES COMUNES.

Supongamos que tuvieras que factorizar $4x^2+40x+84$. El coeficiente x^2 no es igual a 1. De tal forma que podrías empezar escribiendo $(4x+\ )(x+\ )$ ó $(2x+\ )(2x+\ )$ y buscar los factores comunes de 84 para llenar en los espacios de la derecha.

Sin embargo, si razonas antes de empezar a trabajar, verás que cada término de $4x^2+40x+84$ tiene el 4 como factor común.
Usando el axioma distributivo, puedes factorizar el 4 de cada término, como lo hiciste en la sección 3.4.

$4x^2+40x+84$
$=4(x^2+10x+21)$

El trinomio $x^2+10x+21$ es mucho más fácil de factorizar que el polinomio original. Tú tienes
$4(x+3)(x+7)$

En esta forma el polinomio se dice que está ***completamente factorizado***. Las operaciones con fracciones en el siguiente capítulo implican la factorización de polinomios completamente.

Tecnicas
Primer paso en factorización

El primer paso en la factorización de cualquier polinomio es factorizar el MFC de los términos del polinomio.

OBJETIVO

Dado un polinomio cuyos términos tienen factores comunes, serás capaz de factorizar el polinomio completamente.

EJEMPLO 1
Factoriza completamente $3x^2+30x+48$

$3x^2+30x+48$	Escribe la expresión dada
$=3(x^2+10x+16)$	Factoriza el MFC de los tres términos
$=3(x+2)(x+8)$	2 y 8 son los dos factores de 16 cuya suma es 10

EJEMPLO 2
Factoriza completamente $15x^2-5x-10$

$15x^2-5x-10$	Escribe la expresión dada
$=5(3x^2-x-2)$	Factoriza el 5
$=5(3x+2)(x-1)$	$2x-3x$ da $-x$ el término de enmedio

EJEMPLO 3
Factoriza completamente $7x^2-63$

$7x^2-63$	Escribe la expresión dada
$=7(x^2-9)$	Factoriza 7
$=7(x+3)(x-3)$	Factoriza una diferencia de dos cuadrados

EJEMPLO 4

Factoriza completamente $3x^5+6x^4y-45x^3y^2$

$3x^5+6x^4y-45x^3y^2$	Escribe la expresión dada
$=3x^3(x^2+2xy-15y^2)$	$3x^3$ es el MFC y se encuentra afuera (¡El MFC puede tener una variable!)
$=3x^3(x-3y)(x+5y)$	-3 y 5 son dos factores de -15 cuya suma es 2. (No olvides *"y"* en los segundos términos)

EJEMPLO 5

Factoriza completamente

$2x^3+6x^2-8x$

Respuesta

$2x$ es el factor de x^2+3x-4

EJERCICIO 2.3

Factoriza completamente:

1) $3x^2+12x+9$
2) $4x^2+8x+20$
3) $4x^2+10x+20$
4) $6x^2+9x+30$
5) $6x^2+8x+30$
6) $7x^2-14x+28$
7) x^3-4x^2+3x
8) y^3+8y^2-7y
9) $x^5+7x^4+9x^3$
10) $a^8-5a^7-4a^6$
11) x^3y^3-xy
12) x^3y-xy^3
13) $2x^2+16x+30$
14) $3x^2+21x+30$
15) $3x^2+30x+72$
16) $4x^2+28x+48$
17) $4x^2+4x-24$
18) $5x^2+35x-40$
19) $5r^2-10r-175$
20) $10s^2-40s-210$
21) $2x^2+14xy+24y^2$
22) $2x^2+12xy+16y^2$
23) $6x^2-24x+18$
24) $6x^2-54x+120$
25) $10s^2+110s-120$
26) $8p^2+32p-96$
27) $8a^2-16ab-120b^2$
28) $7r^2-42rs-112s^2$
29) $x^4-8x^3+12x^2$
30) $x^6-9x^5+18x^4$
31) $2c^5+6c^4-8c^3$
32) $3a^5+12a^4-15a^3$
33) $4x^2-100$
34) $2x^2-98$
35) $5x^2-180$
36) $10x^2-250$
37) $7x^3-7x$
38) $11a^3-11a$
39) $10x^2-90y^2$
40) $3x^2-27y^2$
41) x^3y-xy^3
42) r^3s-rs^3
43) $6x^2-48x+96$
44) $7x^2-70x+175$
45) $2m^2+20mp+50p^2$
46) $9b^2+72bc+144c^2$
47) $3ax^2+36ax+60a$
48) $5dx^2+50dx+80d$
49) $6c^2x^2-600d^2x^2$
50) $8p^2x^2-392p^2s^2$
51) $2x^4y^3-18x^3y^4-72x^2y^5$
52) $3x^6y^2-15x^5y^3-150x^4y^4$
53) $6x^2+21x+15$
54) $6x^2+44x+14$
55) $15x^2+40x-15$
56) $12x^2+18x-30$
57) $20e^2-28e+8$
58) $15c^2-48c+9$
59) $18x^2-24xy-24y^2$
60) $16x^2-24xy-72y^2$
61) $4y^6-18y^5+8y^4$
62) $15z^5-65z^4+20z^3$

2.4 BINOMIOS COMO FACTOR COMÚN

Has aprendido cómo usar la propiedad distributiva para factorizar factores comunes, por ejemplo:

$3x+12=3(x+4)$

El número 3 es un factor común de cada término. Algunas veces, los términos de una expresión tienen factores comunes que son binomios, tales como en:

$(x-5)x+(x-5)4$

En este caso el binomio $(x-5)$ es un factor común de cada término. Puede ser factorizado de la misma manera que el número 3 lo fue en el primer ejemplo

$(x-5)x+(x-5)4$

$=(x-5)(x+4)$

Factorizando $(x-5)$ del primer término $(x-5)x$ separa *"x"* y factorizando $(x-5)$ del segundo término $(x-5)4$ separa 4. De manera que el otro factor es $(x+4)$, justo como estaba en el primer ejemplo.

OBJETIVO

Ser capaz de factorizar un polinomio que tiene como factor común un binomio.

Contesta las preguntas como en los ejemplos.

EJEMPLO 1

Factoriza $(x+7)x-12(x+7)$

$(x+7)x-(x+7)12$	Escribe la expresión dada
$=(x+7)(x-12)$	Factoriza $(x+7)$ de cada término. La "x" permanece en un término y el "-12" en el otro término

EJEMPLO 2

Factoriza $x(x-2)+6(x-2)$

$x(x-2)+6(x-2)$	Escribe la expresión dada
$=(x-2)(x+6)$	Factoriza $(x-2)$ de cada término; *"x"* permanece en un término y el "6" en el otro término

EJEMPLO 3

Factoriza $2a(3r+5)-7b(3r+5)$

$2a(3r+5)-7b(3r+5)$	Escribe la expresión dada
$=(3r+5)(2a-7b)$	Factoriza $(3r+5)$; "$2a$" permanece en el primer término y "$-7b$" permanece en el otro término

EJEMPLO 4

Factoriza $3x(5x-8)-(5x-8)$

$3x(5x-8)-(5x-8)$	Escribe la expresión dada
$=(5x-8)(3x-1)$	Factoriza $(5x-8)$. "$3x$" permanece en el primer término. "-1" permanece en el otro.

EJEMPLO 5

Factoriza completamente $x^2(2x+5)-36(2x+5)$

$x^2(2x+5)-36(2x+5)$	Escribe la expresión dada
$=(2x+5)(x^2-36)$	Factoriza $(2x+5)$
$=(2x+5)(x+6)(x-6)$	Factoriza x^2-36 como la diferencia de dos cuadrados. Cada factor es ahora primo, de modo que la expresión está factorizada completamente.

PRÁCTICA ORAL

Proporciona el binomio como factor común

Ejemplos	Respuestas
i) $(x+5)x+(x+5)y$	*i)* La cantidad es $(x+5)$
ii) $(x+6)x+(x+5)y$	*ii)* No tiene factor común

Proporciona únicamente el binomio como factor común si es que lo hay.

a) $(x+3)x+(x+3)y$
b) $(x-7)x+(x-7)y$
c) $a(x+2)-b(x+2)$
d) $c(x-4)-d(x-4)$
e) $k(x-6)+(x-6)p$
f) $(x+9)j-k(x+9)$
g) $(x-3)y+(x-4)z$
h) $(x+5)r-(x-5)s$
i) $x(x-1)+(6(x-1)$
j) $x(x+8)-7(x+8)$
k) $(x+2)(x+3)+5(x+2)$
l) $(x-4)(x-1)-6(x-1)$

EJERCICIO 2.4

Para los problemas del 1 al 30, factoriza el polinomio totalmente

1) $(x+2)x+10(x+2)$
2) $(x+3)x+5(x+3)$
3) $(x-5)x-8(x-5)$
4) $(x-7)x+9(x-7)$
5) $x(x+4)-7(x+4)$
6) $x(x+8)-2(x+8)$
7) $3x(x-21)+4(x-21)$
8) $5x(x-6)-3(x-6)$
9) $6r(2r-9)-3(2r-9)$
10) $6b(3s-2)-7(3s-2)$
11) $7a(4a+b)-6(4a+b)$
12) $4p(3p+j)5(3p+j)$

13) $12(3x-1)+x(3x-1)$
14) $13(2x-5)+x(2x-5)$
15) $6x(x+3)+(x+3)$
16) $3x(x-4)+(x-4)$
17) $m(8m-5)-(8m-5)$
18) $k(6k-1)-(6k-1)$
19) $(3x-7)+2x(3x-7)$
20) $(4x-5)+3x(4x-5)$
21) $p(x-j)-k(x-j)$
22) $y(r+c)-k(r+c)$
23) $x^2(x+4)-9(x+4)$
24) $x^2(9x-7)-4(9x-7)$
25) $a^2(r-5)-b^2(r-5)$
26) $c^2(s-2)-d^2(s-2)$
27) $x^2(a^2-4)-y^2(a^2-4)$
28) $x^2(y^2-25)-z^2(y^2-25)$
29) $x^2(16-r^2)-(16-r^2)$
30) $x^2(9-v^2)-(9-v^2)$

Para los problemas del 31 al 50, encuentra el factor común en el polinomio y factoriza el resultado lo más posible.

31) $x(x+3)+(x-5)(x+3)$
32) $x(x+2)+(x-3)(x+2)$
33) $x(2x-7)+(2x-7)(x+6)$
34) $x(3x-5)+(3x-5)(x+4)$
35) $(3a+4)(5x-2)-(3a+4)$
36) $(2r+11)(x-3)-(2r+11)$
37) $x^2(x+7)-(5x+6)(x+7)$
38) $x^2(x-4)+(9x+14)(x-4)$
39) $x^2(2x-1)-(2x-1)(3x+4)$
40) $x^2(5x+1)-(5x+1)(3x-2)$
41. $x^2(5y-z)-(12x-20)(5y-z)$
42. $x^2(a-2b)-(7x-10)(a-2b)$
43. $x(x^2+6x+5)+2(x^2+6x+5)$
44. $x(x^2-3x-28)-3(x^2-3x-28)$
45. $x(x^2-6x+9)-3(x^2-3x-28)$
46. $x(x^2+4x+4)+2(x^2+4x+4)$
47. $x^3(x+3)-25x(x+3)$
48. $x^5(x-7)-9x^3(x-7)$
49. $(x+2)(x^2+x+1)-(x+2)$
50. $(x-3)(x^2+3x+1)-(x-3)$

Para los problemas del 51 al 60, factoriza los polinomios (si es necesario). Después obtén el MFC de los dos polinomios.

Ejemplo:
$(x+4)(x-1)$ y $(x-1)(x+2)$
MFC = $(x-1)$

NOTA:

Si el MFC entre los polinomios es uno entonces son polinomios primos entre sí.

Ejemplo:
x^2-9, x^2+x-20
(polinomios primos entre sí)

51. x^2+3x+2 y $x+1$
52. x^2+5x+6 y $x+3$
53. x^2+2x-8 y x^2-3x+2
54. $x^2-7x+10$ y x^2-x-2
55. x^2-x-6 y x^2+x-6
56. $x^2-7x+12$ y x^2-3x-4
57. x^2-9 y $x^2+2x-15$
58. x^2-25 y $x^2-8x+15$
59. $(x+1)(x-2)(x-7)$ y $(x+1)(x+3)(x-5)$
60. $(x+2)(x-2)(x-7)$ y $(x-7)(x+7)(x-2)$

2.5 FACTORIZACIÓN POR AGRUPAMIENTO (ASOCIACIÓN)

En la última sección aprendiste cómo factorizar polinomios que tienen binomios como factor común, tales como:
2a(3r+5)-7b(3r+5)
=(3r+5)(2a-7b)

Suponiendo que se te pide factorizar:
6ar+10a-21br-35b

Los primeros dos términos tienen *"2a"* como factor común. Los últimos dos términos tienen *"7b"* como factor común. Asociando términos y luego haciendo la factorización tenemos:

$6ar+10a-21br-35b$	Expresión dada
$=(6ar+10a)+(-21br-35b)$	Asocia términos
$=2a(3r+5)-7b(3r+5)$	Factoriza *2a* y *-7b*
$=(3r+5)(2a-7b)$	Factoriza *(3r+5)*

Como puedes ver, esta ultima línea es lo mismo que en el primer ejemplo. Todo lo nuevo es la asociación de pares de términos y factorizar el factor común mayor. Esta técnica es llamada ***"Factorización por Agrupamiento"*** o ***"Factorización por Asociación".***

OBJETIVO

Dado un polinomio con cuatro términos, ser capaz de factorizarlo por agrupamiento (asociación)

EJEMPLO 1

Factoriza completamente $x^2+2x+xy+2y$

$x^2+2x+xy+2y$	Escribe la expresión dada
$=x(x+2)+y(x+2)$	Factoriza "x" de x^2+2x y factoriza "y" de $xy+2y$
$=(x+2)(x+y)$	Factoriza $(x+2)$

EJEMPLO 2

Factoriza completamente $15x^2-6ax-20cx+8ac$

$15x^2-6ax-20cx+8ac$	Escribe la expresión dada
$=3x(5x-2a)-4c(5x-2a)$	Factoriza $3x$ de $15x^2-6ax$ y factoriza $-4c$ de $-20cx+8ac$. (Cuando factorices $-4c$ de $8ac$, obtienes $-2a$, no $+2a$).
$=(5x-2a)(3x-4c)$	Factoriza $(5x-2a)$.

EJEMPLO 3

Factoriza completamente: $ax+3a+x+3$

$ax+3a+x+3$	Escribe la expresión dada
$=a(x+3)+1(x+3)$	Factoriza *a* de $ax+3a$ y factoriza 1 de $x+3$
$=(x+3)(a+1)$	Factoriza $(x+3)$

EJEMPLO 4

Factoriza completamente: $x^3-5x^2-9x+45$

$x^3-5x^2-9x+45$	Escribe la expresión dada
$=x^2(x-5)-9(x-5)$	Factoriza x^2 de x^3-5x^2 y factoriza -9 de $-9x+45$
$=(x-5)(x^2-9)$	Factoriza $(x-5)$
$=(x-5)(x+3)(x-3)$	Para factorizar completamente, factoriza x^2-9 como una diferencia de cuadrados.

EJEMPLO 5

Factoriza completamente: $15x^2-12x+10x-8$

$15x^2-12x+10x-8$	Escribe la expresión dada
$=3x(5x-4)+2(5x-4)$	Factoriza $3x$ de $15x^2-12x$ y factoriza 2 de $10x-8$.
$=(5x-4)(3x+2)$	Factoriza $(5x-4)$

PRÁCTICA ORAL

¿Qué factorizarías de los dos primeros términos y qué factorizarías de los dos últimos términos para factorizar por agrupamiento?

Ejemplos:

i) $3ax+ab-6x-2b$	*i) a, -2*
ii) $3x+6y+bx+2by$	*ii) 3b*

a) $ax+bx+ay+by$	b) $x^2+xy+xz+yz$
c) $ax-2x+ay-2y$	d) $3x-3y-ax+ay$
e) $ac+bc-a^2-ab$	f) $a^2c+a^2d+b^2c+b^2c$
g) x^3+3x^2+2x+6	h) $x^3-5x^2-3x+15$
i) $2a+ax-2x^2-x^3$	j) $x^2-2x+xy-2y$
k) $5ax+10a-x-2$	l) $6a^2+5ab+6a+5b$

EJERCICIO 2.5

En los problemas del 1 al 34, factoriza el polinomio completamente

1) $a^2+3a+ab+3b$
2) $r^2+7r+rc+7c$
3) $8x^2+12xy+10xz+15yz$
4) $15x^2+20xy+18nx+24ny$
5) $bx+3cx-2br-6cr$
6) $ax+4ex-3ad-12de$
7) $6ax-14x+15a-35$
8) $9hx-21x+6h-14$
9) $mc-6cv-5m+30v$
10) $rv-2vx-6r+12x$
11) $x^2+5xy+x+5y$
12) $x^2+8xz+x+8z$
13) $5rz+2sz-5r-2s$
14) $6dt+5ct-6d-5c$
15) $30ab+36a+70b+84$
16) $24mx+36m+30x+45$
17) $2x^3-3x^2-4x+6$
18) $10x^3-15x^2+2x-3$
19) $12x^3+45x^2+32x+120$
20) $2x^3-7x^2-10x+35$
21) $24x^3-18x^2+60x-45$
22) $64x^3-160x^2+24x-60$
23) $2x^3+x^2-18x-9$
24) $3x^3+x^2-75x-25$
25) $5x^3-10x^2-80x+160$
26) $6x^3-6x^2-24x+24$
27) $12x^2+18x+10x+15$
28) $15x^2+21x+25x+35$
29) $2x^2-3x+14x-21$
30) $8x^2-6x+12x-9$
31) $15x^2-6x+5x-2$
32) $16x^2-10x+8x-5$
33) $8x^2-3x-8x+3$
34) $10x^2-7x-10x+7$

Por ejemplo: $x^2+6x+9-y^2=(x+3)^2-y^2$ la cual es una diferencia de 2 cuadrados. Otros polinomios tienen más de cuatro términos. Por ejemplo: $x^2+5x+6-ax-3a=(x+3)(x+2)-a(x+3)$ la cual tiene (x+3) que es un binomio como factor común.

Factoriza cada uno de estos polinomios completamente:

35) $x^2+6x+9-y^2$
36) $x^2+8x+16-c^2$
37) $x^2-10x+25-9a^2$
38) $x^2-14x+49-16y^2$
39) $x^2-(y^2+8y+16)$
40) $x^2-(a^2+10a+25)$
41) $25x^2+a^2+4a-4$
42) $100x^2-y^2+6y-9$
43) $x^2-10x+25-49c^2$
44) $x^2-8x+16-25b^2$
45) $x^2+5x+6-ax-3a$
46) $x^2+9x+20-rx-4r$
47) $x^2+2x-3+rx+3r$
48) $x^2+4x-5+sx+5s$
49) $3sx+15s+x^2+3x-10$
50) $2mx+6m+x^2+x-6$
51) $x^4-2x^3+x^2+3x-10$
52) $x^4-5x^3+x^2+x-30$
53) $cx^2+8cx+15c+dx^2-2dx-35d$
54) $ux^2+9ux+14u+zx^2-3zx-10z$

2.6 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS DE SEGUNDO GRADO

Supongamos que tienes que factorizar $6x^2+31x+35$

!Hay tantos factores posibles para probar, que podrías pasar una tarde completa en un tipo de problemas! Lo que necesitas es una manera sistemática para factorizar estos trinomios cuadrados más difíciles.

En los problemas del 27 al 34 de la sección anterior, factorizaste polinomios como: $6x^2+10x+21x+35$ por agrupamiento. Asociando los primeros dos términos y los 2 últimos, da: $(6x^2+10x)+(21x+35)$.

Sacando el factor "$2x$" de $6x^2+10x$ y "7" de $21x+35$ da: $2x(3x+5)+7(3x+5)$

Ahora $(3x+5)$ es como factor común y se puede factorizar así: $(3x+5)(2x+7)$

Supón ahora que debes factorizar el trinomio cuadrático: $6x^2+31x+35$

Puedes separar el término de enmedio "$31x$" en $10x+21x$ y factorizando por agrupamiento. El polinomio dado observa que (10)(21) es igual a 210, y que (6)(35) es igual a 210. Esto es cierto debido a que cuando multiplicas: $(3x+5)(2x+7)$ obtienes:

$$(3x+5)(2x+7) = (3)(2)x^2+(5)(2)x+(3)(7)x+(5)(7)$$

$(5\cdot 2, 3\cdot 7)$

$(3\cdot 2, 5\cdot 7)$

Los 4 también aparecen en el 10 y en el 21. Así que el 10 y el 21 son dos factores de 210 que se suman al 31.

Ejemplo:
Factorizar $6x^2+31x+35$.

Primero multiplicarías (6)(35), obteniendo 210. Luego buscarías los factores de 210, específicamente, los factores cuya suma sea igual a 31. Una forma sistemática de encontrar estos factores es realizando una tabla.

FACTORES	SUMA	¿31?
(1)(210)	211	No
(2)(105)	107	No
(3)(70)	73	No
(5)(42)	47	No
(6)(35)	37	No
(10)(21)	31	¡Sí!

De manera que separas el término de enmedio *"31x"* en $10x+21x$ y escribes $6x^2+10x+21x+35$ y factorizas por agrupamiento como se demostró arriba.

Técnica
<u>Separando el término de enmedio</u>

Para factorizar un trinomio cuadrático de la forma
ax^2+bx+c

1° Multiplica *"a"* por *"c"*.
2° Observa el producto *"ac"* y encuentra los factores cuya suma es *"b"*.
3° Separa el término de enmedio y factoriza por agrupamiento. (Si no hay factores de *"ac"* cuya suma es *"b"*, entonces ax^2+bx+c es primo).

Debes estar siempre atento a las formas más fáciles de solucionar los problemas. Por ejemplo $3x^2+5x+2$ es fácil factorizar por observación, sin separar el término de enmedio. Sólo escribe los paréntesis vacíos y llena los binomios que dan $3x^2+5x+2$ cuando son nuevamente multiplicados entre sí.

$3x^2+5x+2$
$=(3x+2)(x+1)$

OBJETIVO:

Dado un trinomio de segundo grado, tal como $6x^2+31x+35$ factorizar por observación o por separación del término de enmedio.

EJEMPLO 1
Factorizar $8x^2+26x+15$

(8)(15)=120 — Multiplica el coeficiente de x^2 por el término constante
1+120=121 — Obtén dos factores de 120 cuya suma es 26.

2+60=62
3+40=43
4+30=34
5+24=29
6+20=26

	¡Y eso es todo!
$8x^2+26x+15$	Escribe la expresión dada
$=8x^2+6x+20x+15$	Separa el término de enmedio
$=2x(4x+3)+5(4x+3)$	Saca el factor $2x$ de $8x^2+6x$ y 5 de $20x+15$.
$=(4x+3)(2x+5)$	Saca el factor común $(4x+3)$

EJEMPLO 2
Factoriza $18x^2-23x-6$

(18)(-6)=-108 — Multiplica el coeficiente de x^2 por el término constante
1(-108)=-107
2(-54)=-52
3(-36)=-33
4(-27)=-23

	!Y eso es todo!
$18x^2-23x-6$	Escribe la expresión dada
$=18x^2+4x-27x-6$	Separa el término de enmedio
$=2x(9x+2)-3(9x+2)$	Saca el factor $2x$ de $18x^2+4x$ y -3 de -27x - 3
$=(9x+2)(2x-3)$	Saca el factor común $(9x+2)$

EJEMPLO 3
Factorizar $3x^2-19x+16$

(3)(16)=48 — Multiplica el coeficiente de x^2 por el término constante

-1(-48)=-49
-2(-24)=-26
-3(-16)=-19

	¡Esto es todo!
$3x^2-19x+16$	Escribe la expresión dada
$=3x^2-3x-16x+16$	Separa el término de enmedio
$=3x(x-1)-16(x-1)$	Saca el factor 3x de $3x^2$-3x y -16 de -16x+16
$=(x-1)(3x-16)$	Saca el factor común $(x-1)$

EJEMPLO 4

Factoriza $10x^2+21x+6$

$(10)(6)=60$ — Multiplica el coeficiente de x^2 por el término constante

$1+60=61$ — Obtén dos factores de 60 cuya suma es 21

$2+30=32$ — No hay ninguna pareja de valores que multiplicados den 60 y sumados den 21

$3+20=23$

¡19 es menor que 21!

$4+15=19$

Por lo tanto:
$10x^2+21x+16$ es una expresión prima

EJEMPLO 5

Factoriza $2x^2+9x-5$

$2x^2+9x-5$ — Escribe la expresión dada

$=(2x-1)(x+5)$ — Factoriza por observación. Esto es fácil de hacer sin separar el término de enmedio

EJEMPLO 6

Factoriza $20x^2+30x-200$

$20x^2+30x-200$ — Escribe la expresión dada

$=10(2x^2+3x-20)$ — El factor común es 10, el MFC de los términos. (¡Recuerda que debes sacar primero el factor común!)

$=10(2x-5)(x+4)$ — Factoriza $2x^2+3x-20$ por observación.

PRÁCTICA ORAL

¿Están los términos de enmedio separados correctamente? Explica

Ejemplos

i) $2x^2-5x+3=2x^2-3x-2x+3$

Si: ya que (2)(3)=6, (-3)(-2)=6, y -3-2=-5

ii) $2x^2-5x+3=2x^2-3x+2x+3$

No; (2)(3)=6, pero (-3)(2)=-6 ó -3+2=-1 no es -5

a) $3x^2+7x+2=3x^2+x+6x+2$
b) $3x^2+7x+2=3x^2+6x+x+2$
c) $2x^2+11x+15=2x^2+5x+6x+15$
d) $3x^2-10x-8=3x^2-2x+12x-8$
e) $3x^2-10x-8=3x^2+2x+12x-8$
f) $6x^2+11x+5=6x^2+5x+6x+5$
g) $6x^2+12x+5=6x^2+10x+3x+5$
h) $6x^2+17x+5=6x^2+10x+3x+5$
i) $6x^2+17x+5=6x^2+3x+14x+5$
j) $6x^2+17x+5=6x^2+2x+15x+5$

EJERCICIO 2.6

Para los problemas del 1 al 20 usa la técnica de la separación del término de enmedio, factorizando completamente o demostrando que es primo.

1) $3x^2+16x+16$
2) $2x^2+15x+18$
3) $6x^2+23x+20$
4) $6x^2+25x+25$
5) $2x^2+11x-90$
6) $3x^2+20x+40$
7) $20x^2-43x-12$
8) $30x^2-67x-12$
9) $9x^2-39x+40$
10) $3x^2+37x-70$
11) $4x^2+7x+18$
12) $10x^2-57x+54$
13) $24x^2+19xy+2y^2$
14) $12x^2+145xy+12y^2$
15) $4r^2-9rs+5s^2$
16) $8p^2-17pj+9j^2$
17) $48x^2-40x-48$
18) $24x^2-66x-18$
19) $-12x^2-33x+45$
20) $-80x^2-290x+120$

Para los problemas del 21 al 50, factoriza los polinomios completamente por observación (preferentemente) o por separación del término medio.

21. $2x^2+7x+3$
23. $3x^2+10x+8$
25. $5x^2-21x+4$
27. $6x^2+7x-5$
29. $6x^2-x-5$
31. $6r^2+13rs+6s^2$
33. $15a^2+16ab+4b^2$
35. $6m^2-25m+4$
37. $2m^2+15m-50$
39. $4x^2+36x+32$
41. $7x^2-6xy-y^2$
43. $8x^5+2x^4-3x^3$
45. $2a^3x-13a^2x^2+15ax^3$
47. $27ru^2+36ru+12r$
49. $12(x+3)x^2-2(x+3)x-4(x+3)$

22) $3x^2+7x+2$
24) $3x^2+11x+8$
26) $7x^2-16x+4$
28) $6x^2+5x-4$
30) $6x^2-17x-3$
32) $6a^2+11ab+4b^2$
34) $6x^2+19xy+15y^2$
36) $4r^2-25r+6$
38) $5p^2-8p-4$
40) $6x^2+36x+48$
42) $9c^2-8cd-d^2$
44) $18x^7-9x^6-2x^5$
46) $4u^3v-12u^2v^2+9uv^3$
48) $10sn^2-75sn-135s$
50) $12(x-2)x^2-21(x-2)x-6(x-2)$

CAPITULO 3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Tú sabes cómo sumar, multiplicar y simplificar fracciones numéricas. En este capítulo harás estas operaciones con fracciones que contienen variables. Las evaluarás para valores dados de la variable o resolverás ecuaciones para encontrar el valor o valores de la misma. Un buen ejemplo es un problema que involucra el movimiento de un bote sobre el agua, a favor o en contra de una corriente, donde el tiempo es igual a la distancia dividida por la velocidad suponiendo que ésta es constante.

Variable

x	Es velocidad del bote en el agua.

Expresiones

$x-8$	Velocidad del bote con respecto a la tierra en contra de la corriente.
$x+8$	Velocidad del bote con respecto a la tierra a favor de la corriente.
$\frac{200}{x-8}+\frac{50}{x+8}$	Tiempo total para una distancia de 200 kilómetros en contra de la corriente y 50 kilómetros a favor de la corriente.

Ecuación

$\frac{200}{x-8}+\frac{50}{x+8}=52.2$	Tiempo total es 52,5 horas.

Esta ecuación es un ejemplo de lo que podrás resolver más adelante.

Para los problemas del 21 al 50, factoriza los polinomios completamente por observación (preferentemente) o por separación del término medio.

21. $2x^2+7x+3$	22) $3x^2+7x+2$
23. $3x^2+10x+8$	24) $3x^2+11x+8$
25. $5x^2-21x+4$	26) $7x^2-16x+4$
27. $6x^2+7x-5$	28) $6x^2+5x-4$
29. $6x^2-x-5$	30) $6x^2-17x-3$
31. $6r^2+13rs+6s^2$	32) $6a^2+11ab+4b^2$
33. $15a^2+16ab+4b^2$	34) $6x^2+19xy+15y^2$
35. $6m^2-25m+4$	36) $4r^2-25r+6$
37. $2m^2+15m-50$	38) $5p^2-8p-4$
39. $4x^2+36x+32$	40) $6x^2+36x+48$
41. $7x^2-6xy-y^2$	42) $9c^2-8cd-d^2$
43. $8x^5+2x^4-3x^3$	44) $18x^7-9x^6-2x^5$
45. $2a^3x-13a^2x^2+15ax^3$	46) $4u^3v-12u^2v^2+9uv^3$
47. $27ru^2+36ru+12r$	48) $10sn^2-75sn-135s$
49. $12(x+3)x^2-2(x+3)x-4(x+3)$	50) $12(x-2)x^2-21(x-2)x-6(x-2)$

CAPITULO 3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Tú sabes cómo sumar, multiplicar y simplificar fracciones numéricas. En este capítulo harás estas operaciones con fracciones que contienen variables. Las evaluarás para valores dados de la variable o resolverás ecuaciones para encontrar el valor o valores de la misma. Un buen ejemplo es un problema que involucra el movimiento de un bote sobre el agua, a favor o en contra de una corriente, donde el tiempo es igual a la distancia dividida por la velocidad suponiendo que ésta es constante.

Variable

x	Es velocidad del bote en el agua.

Expresiones

$x-8$	Velocidad del bote con respecto a la tierra en contra de la corriente.
$x+8$	Velocidad del bote con respecto a la tierra a favor de la corriente.
$\frac{200}{x-8}+\frac{50}{x+8}$	Tiempo total para una distancia de 200 kilómetros en contra de la corriente y 50 kilómetros a favor de la corriente.

Ecuación

$\frac{200}{x-8}+\frac{50}{x+8}=52.2$	Tiempo total es 52,5 horas.

Esta ecuación es un ejemplo de lo que podrás resolver más adelante.

3.1 INTRODUCCIÓN A LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Una expresión algebraica racional es una expresión que tiene un polinomio en el numerador y un polinomio en el denominador. Las siguientes son expresiones racionales.

$\frac{x+5}{x-2}$ y $\frac{x^2-3x+5}{x-5}$, $x^3+2x+6=\frac{x^3+2x+6}{1}$ 1 es un polinomio de grado cero.

Definición

EXPRESIÓN ALGEBRAICA RACIONAL
Una expresión algebraica racional es aquella que puede ser escrita como una razón de dos polinomios.

$\frac{polinomio}{polinomio}$

(el polinomio del denominador no debe ser cero).

Es fácil evaluar una expresión racional tal como:

$\frac{x-5}{x+4}$

Lo que necesitas hacer es sustituir x por un valor dado y hacer operaciones aritméticas.

Por ejemplo, si *"x"* es igual a 3, entonces:

$\frac{x-5}{x+4}$

$=\frac{3-5}{3+4}$

$=\frac{-2}{7}$

Además puedes encontrar "x" conociendo el valor de la expresión. Por ejemplo, si la expresión anterior es igual a 9, entonces:

$\frac{x-5}{x+4}=9$

Esta ecuación es llamada ***Ecuación Fraccional***. Ésta, puede simplificarse eliminando el denominador de la fracción; esto se hace multiplicando cada miembro de la ecuación por *x*+4. O lo que es lo mismo, pasando x+4 al segundo término como factor

$(x+4\cdot)\frac{x-5}{x+4}=(x+4)(9)$

El miembro de la izquierda se convierte en *x*-5. El 9 se distribuye sobre *x*+4. El resultado es:
x-5=9*x*+36

Haciendo operaciones y agrupando términos semejantes la expresión resultante es:
-8*x*=41

$x=-\frac{41}{8}$

Si quieres puedes obtener una respuesta que sea un número decimal, haciendo la división indicada. Por lo tanto:
x=-5.125

El resultado se puede comprobar sustituyendo *x* por -5.125 y haciendo operaciones aritméticas.

$\frac{x-5}{x+4}$

$=\frac{-5.125-5}{-5.125+4}$

$=\frac{-10.125}{-1.125}$

= 9

OBJETIVOS

Dada una expresión algebraica racional, encontrar su valor conociendo el valor de *x*, y averiguar a qué es igual *x* cuando conoces el valor de la expresión.

Cubre las respuestas y trabaja en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Evalúa $\dfrac{x+7}{x-2}$ si:

a) x=5 b) x=-7 c) x=2

a) $\dfrac{x+7}{x-2}$	Escribe la expresión dada
$=\dfrac{5+7}{5-2}$	Sustituye x por 5
$=\dfrac{12}{3}$	Realiza operaciones
$=4$	Divide
b) $\dfrac{x+7}{x-2}$	Escribe la expresión dada
$=\dfrac{-7+7}{-7-2}$	Sustituye x por -7
$=\dfrac{0}{-9}$	Realiza operaciones
$=0$	Divide
c) $\dfrac{x+7}{x-2}$	Escribe la expresión dada
$=\dfrac{2+7}{2-2}$	Sustituye x por 2
$=\dfrac{9}{0}$	Realiza operaciones
No existe pues no posible la división por cero	$\dfrac{9}{0}$ No es un número real

EJEMPLO 2

Encuentra x si $\dfrac{x+7}{x-2}$ es igual a 3. Comprueba tu resultado.

$\dfrac{x+7}{x-2}=3$	Escribe la ecuación dada
$x+7=3(x-2)$	Multiplica cada miembro por x-2 o bien pasa x-2 multiplicando al segundo miembro
$x+7=3x-6$	Aplica la ley distributiva
$-2x=-13$	Resta 3x y resta 7 en cada miembro de la ecuación
$x=\dfrac{-13}{-2}$	Divide por -2
$x=6.5$	

Comprobación

$\dfrac{x+7}{x-2}$	
$=\dfrac{6\cdot5+7}{6\cdot5-2}$	Sustituye x por 6.5
$=\dfrac{13.5}{4.5}$	Realiza operaciones
$=3$	Divide. Se comprueba la respuesta

EJERCICIO 3.1

1) Evalúa $\dfrac{x-8}{x+2}$ si:
a) x es igual a 6
b) x es igual a -5
c) x es igual a 8

2) Evalúa $\dfrac{x-9}{x+4}$ si:
a) x es igual a 3
b) x es igual a -5
c) x es igual a -2

3) Evalúa $\frac{2x+7}{x-5}$ si:
a) x es igual a 7
b) x es igual a -2
c) x es igual a 5

4) Evalúa $\frac{3x+9}{x-4}$ si:
a) x es igual a 6
b) x es igual a -3
c) x es igual a 4

5) Evalúa $\frac{x^2+6x+9}{x^2+7x+10}$ si:
a) x es igual a 4
b) x es igual a -3
c) x es igual a 0

6) Evalúa $\frac{x^2+6x+8}{x^2+9x+20}$ si:
a) x es igual a 4
b) x es igual a -5
c) x es igual a 0

7) Para $\frac{x-8}{x+4}$, encuentra x si:
a) La expresión es igual a 3
b) La expresión es igual a -4

8) Para $\frac{x-10}{x+3}$, encuentra x si:
a) La expresión es igual a 5
b) La expresión es igual a -4

9) Para $\frac{2x+7}{x-5}$, encuentra x si:
a) La expresión es igual a 10
b) La expresión es igual a 2
(¿Sorprendido?)

10) Para $\frac{3x+6}{x-4}$, encuentra x si:
a) La expresión es igual a 8
b) La expresión es igual a 3
(¿Sorprendido?)

3.2 SIMPLIFICANDO EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

En secciones anteriores empleaste la propiedad de la multiplicación de fracciones para simplificar.

Ejemplo. Simplifiquemos $\frac{30}{45}$

$\frac{30}{45}=$

$=\frac{15\cdot 2}{15\cdot 3}$ 15 es el máximo factor común (MFC) de 30 y 45

$=\frac{15}{15}\cdot\frac{2}{3}$ Empleando la propiedad de la multiplicación de fracciones.

$=\frac{2}{3}$ Empleando la propiedad de la multiplicación del 1

El mismo procedimiento es usado para simplificar fracciones que contienen variables.

Se factoriza el numerador y el denominador y se cancela el MFC.

Ejemplo

Simplificar $\frac{x^2-4x-21}{x^2+5x+6}$

$\frac{x^2-4x-21}{x^2+5x+6}=$

$=\frac{(x+3)(x-7)}{(x+3)(x+2)}$ Factoriza el numerador y el denominador

$=\frac{x+3}{x+3}\cdot\frac{x+7}{x+2}$ Emplea la propiedad de la multiplicación de fracciones.

$=\frac{x-7}{x+2}$ Emplea la propiedad de la multiplicación del 1.

$\frac{x-3}{x+3}$ Es igual a 1. Si $x\neq -3$

En el último paso de los ejemplos anteriores observa cómo se emplea la multiplicación de una forma apropiada del 1. Esto se puede pensar como: se está multiplicando el numerador y el denominador por el mismo número. Con esto en mente, puedes ir directamente de

$=\frac{(x+3)(x-7)}{(x+3)(x+2)}$ a $\frac{x-7}{x+2}$

Tu razonamiento del proceso debe ser: Divido el numerador y el denominador por la misma expresión.

Este proceso es llamado ***Cancelación***, porque existe el mismo factor en el numerador y el denominador ; entonces éste se puede cancelar.

Definición

CANCELACION

Cancelar en una fracción significa dividir el numerador y el denominador por el mismo factor común. Esto es, para expresiones a, b y c donde $a \neq 0$ y $c \neq 0$

$$\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$$

No puedes aplicar la cancelación de otra forma que no sea la mostrada en la definición anterior, por ejemplo:

$$\frac{x-9}{x+3}$$

No puedes cancelar las *x*'s. Porque la x no hace el papel de factor.
Si $x \neq 0$

La cancelación puede hacerse solamente cuando el numerador y el denominador tienen factores comunes. O que pueden ser escritos de manera que los contengan.

OBJETIVO

Estar preparado para cancelar factores comunes del numerador y el denominador de una expresión algebraica racional.

Cubre la columna de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1
Simplifica

$\frac{15x^8}{25x^2} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{5 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x^6}{5 \cdot 5 \cdot x^2} = \frac{3x^6}{5}$ Cancela 5 y x^2.

EJEMPLO 2
Simplifica $\frac{(x+6)(x-3)}{(x+6)(x+3)}$

$\frac{(x+6)(x-3)}{(x+6)(x+3)} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{(x-3)}{(x+3)}$ Cancela el factor (*x*+6) ; no hay otros factores comunes. ¡No se cancelan los términos de "*x*" ni 3!

EJEMPLO 3
Simplifica $\frac{2x^2-4x-30}{2x^2-7x-15}$

$\frac{2x^2-4x-30}{2x^2-7x-15} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{2(x^2-2x-15)}{(2x^2-7x-15)}$ Primero se obtiene el factor común

$= \frac{2(x-5)(x+3)}{(2x+3)(x-5)}$ Factoriza los trinomios

$= \frac{2(x+3)}{(2x+3)}$ Cancela los factores (*x*-5)

$= \frac{2x+6}{2x+3}$ No se cancelan los términos 2*x*

PRÁCTICA ORAL

¿Se puede hacer la cancelación? Si es así, ¿Qué se puede cancelar?

a) $\frac{7(x+4)}{2(x+4)}$ b) $\frac{6(x+2)}{6(x+3)}$ c) $\frac{4(x+4)}{6(x+3)}$

d) $\frac{5(x+3)}{5(y+3)}$ e) $\frac{4(x+3)}{(4x+3)}$ f) $\frac{8x}{12x}$

g) $\dfrac{(x+2)(4)}{12(x+2)}$ h) $\dfrac{(x+8)}{(x-8)}$ i) $\dfrac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x-5)}$

j) $\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x+3)(x-6)}$ k) $\dfrac{x^2-4}{x+2}$

EJERCICIO 3.2

Para los problemas del 1 al 20, simplifica la expresión.

1) $\dfrac{12x^2}{18x^2}$ 2) $\dfrac{24x^2}{36x^6}$

3) $\dfrac{35x^3y^8}{10x^4y^5}$ 4) $\dfrac{45x^6y^3}{21x^3y^5}$

5) $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+5)(x-3)}$ 6) $\dfrac{(x-3)(x+8)}{(x-4)(x+8)}$

7) $\dfrac{(x-6)(x+2)}{(x+5)(x-6)}$ 8) $\dfrac{(x-12)(x+7)}{(x+7)(x-3)}$

9) $\dfrac{(3x+2)(x+3)}{(3x-2)(x+3)}$ 10) $\dfrac{(2x-9)(x+5)}{(x-5)(2x-9)}$

11) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ 12) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+7x+12}$

13) $\dfrac{x^2-2x-35}{x^2+x-30}$ 14) $\dfrac{x^2-3x-13}{x^2-36}$

15) $\dfrac{3x^3+5x^2}{6x+10}$ 16) $\dfrac{5x^2-20}{x^2+5x+6}$

17) $\dfrac{2x^2-5x-3}{2x^2-3x-2}$ 18) $\dfrac{4x^2-x-3}{3x^2+x-4}$

19) $\dfrac{10x^2-19x+6}{10x^2-21x+9}$ 20) $\dfrac{12x^2-27}{4x^2-2x-12}$

21) Encuentra x si $\dfrac{x+6}{x+9}=4$ 22) Encuentra x si $\dfrac{x+6}{x-3}=2$

23) Para qué valor x es $\dfrac{x-4}{x+6}$

a) ¿Igual a cero?
b) ¿Indefinido?

24) Para qué valor de x es $\dfrac{x-5}{x-6}$

a) ¿Igual a cero?
b) ¿Indefinido?

3.3 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

Debes recordar que para multiplicar dos fracciones se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador. Por ejemplo:

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$$

La división de fracciones se hace multiplicando la primera fracción por el recíproco de la segunda. Por ejemplo:

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{2}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 2}=\frac{21}{10}$$

En esta sección harás lo mismo, pero con fracciones algebraicas (o sea, con expresiones algebraicas racionales).

OBJETIVO

Dadas dos expresiones racionales, multiplícalas, o divídelas, y simplifica la respuesta.

Cubre la columna de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1

Dadas $\frac{12x}{15}$ y $\frac{20x}{18}$

a. Multiplica las fracciones
b. Divide la primera entre la segunda

Solución:

a) Se multiplica numerador por numerador y se divide entre el producto de los denominadores.

$$\frac{12x(20x)}{15(18)} = \frac{240x^2}{270} = \frac{8x^2}{9}$$

b) $\frac{12x}{15} \div \frac{20x}{18}$ Divide la primera fracción por la segunda

$= \frac{12x}{15} \cdot \frac{18}{20x}$ Cambia la división a multiplicación por el recíproco

$= \frac{12 \cdot 18x}{15 \cdot 20x}$ Indica las multiplicaciones

$= \frac{18}{25}$ Efectúa la operación

EJEMPLO 2

Divide y simplifica: $\frac{x^2-2x-15}{4x^2+8x} \div \frac{x+3}{4x-20}$

$\frac{x^2-2x-15}{4x^2+8x} \div \frac{x+3}{4x-20} =$ Escribe la expresión dada

$= \frac{x^2-2x-15}{4x^2+8x} \cdot \frac{4x-20}{x+3}$ Escribe la división como multiplicación por el recíproco.

$= \frac{(x-5)(x+3)}{4x(x+2)} \cdot \frac{4(x-5)}{x+3}$ Factoriza

$= \frac{(x-5)(x+3)4(x-5)}{4x(x+2)(x+3)}$ Multiplica

$\frac{(x-5)(x-5)}{x(x+2)}$ Cancela

$\frac{x^2-10x+25}{x^2+2x}$ Multiplica

PRÁCTICA ORAL

Multiplica o divide, y simplifica.

a) $\frac{2}{3a} \cdot \frac{6}{3a}$ b) $\frac{2}{3a} \div \frac{6}{3a}$ c) $\frac{5}{6x} \cdot \frac{3x}{2}$

d) $\frac{5}{6a} \div \frac{3a}{2}$ e) $\frac{A}{3} \cdot \frac{5}{A}$ f) $\frac{B}{3} \div \frac{5}{B}$

g) $\frac{x^2}{3} \cdot \frac{6}{x}$ h) $\frac{3}{4a} \div \frac{1}{12a^4}$ i) $\frac{4}{3} \cdot \frac{x+2}{12}$

j) $\frac{3}{x+2} \div \frac{5}{x+2}$ k) $\frac{5}{x-7} \cdot \frac{x-7}{10}$ l) $\frac{2}{5} \div \frac{5}{x-2}$

EJERCICIO 3.3

Para los problemas de 1 al 10:

a) Multiplica las dos expresiones
b) Divide la primera expresión por la segunda

1) $\frac{8}{5a}, \frac{7}{9a}$ 2) $\frac{5}{6x}, \frac{2}{7x}$ 3) $\frac{5}{12a}, \frac{11}{18a}$

4) $\frac{8}{9x}, \frac{7}{6x}$ 5) $\frac{x}{16}, \frac{x+3}{4}$ 6) $\frac{x}{15}, \frac{x-2}{5}$

7) $\frac{x-4}{x-1}, \frac{x--5}{x-7}$ 8) $\frac{x+4}{x+7}, \frac{x-3}{x+6x}$ 9) $\frac{2a+3}{3-1}, \frac{4a+5}{ax}$

10) $\frac{3x-4}{2x-1}, \frac{5x-2}{x-6}$

Para los problemas del 11 al 30, realiza la multiplicación o división y simplifica

11) $\frac{6x}{5y} \cdot \frac{10y}{8x}$ 12) $\frac{8a}{3x} \cdot \frac{12x}{16a}$

13) $\frac{5x}{7y} + \frac{25x}{21y}$ 14) $\frac{9x}{14y} + \frac{12x}{21y}$

15) $\frac{20p}{49s} \cdot \frac{42p}{10s}$ 16 $\frac{32x}{33y} \cdot \frac{55x}{8y}$

17) $\frac{30m}{13t} + \frac{15t}{52m}$ 18 $\frac{40a}{17b} + \frac{30b}{51a}$

19) $\frac{6ab2}{35b} \quad \frac{42a}{18ab}$ 20) $\frac{16xy3}{9x} \frac{15x}{4xy}$

21) $\frac{4a+16}{a^2-16} + \frac{4a-16}{a-4}$ 22) $\frac{12-4x}{10+5x} \div \frac{5-x^2}{4-x^2}$

23) $\frac{m^2+2m-35}{6m^3} \quad \frac{2m^2-6m}{m^3+4m-21}$ 24) $\frac{a^2+4a-45}{4a-20} \quad \frac{3a-3}{a^3-81}$

25) $\frac{x^3-9x}{8} + \frac{x-3}{2} \quad \frac{4}{3x-9}$ 26) $\frac{y^2-7y+10}{y^2-6y+5} \div \frac{1}{y-2} \quad \frac{y+1}{y^2-4y+4}$

27) $\frac{m^2+2m-8}{m+4} . (m-2)^{-1}$ 28) $\frac{x^2-2x-3}{x+1} \cdot 5\,(x-3)^{-1}$

29) $\frac{2a+3}{4a+5} + \frac{4a+5}{2a+3} \quad \frac{8a+10}{2a+3}$ 30) $(a^2+4a-12)^{-1} \div \frac{a+6}{a-4}$

31) Encuentra x si $\frac{x+3}{x-2} = 5$

32) Encuentra y si $\frac{2y+5}{y=11} = 2$

33) Para que valor de x es $\frac{x-7}{x-2}$

a) ¿Igual a cero ?
b) ¿Indefinida ?

34) Para qué valor de *y* es $\frac{2y+7}{y-4}$

a) ¿Igual a cero?
b) ¿Indefinida?

3.4 MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Para sumar dos fracciones, sus denominadores deben ser iguales. Por ejemplo:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{41}{28}$$

El 28 es llamado común denominador de las fracciones.

Un ***múltiplo*** de un número dado es un entero multiplicado por ese número.

Por ejemplo 12, 30 y 60 son múltiplos de 6, también 32, 80 y 88 son múltiplos de 8. Hagamos un listado de los múltiplos de 6 y de 8 para mostrar algo interesante:

6: 6 12 18 24 30 36 42 48 54 60 66...
8: 8 16 24 32 40 48 56 64 72 80 88...

Algunos múltiplos de 6 también son múltiplos de 8. Estos son llamados ***Múltiplos Comunes*** de 6 y de 8. El número 24 es el más pequeño de los múltiplos comunes. Es llamado el mínimo común múltiplo. Este número es abreviado M.C.M. cuando sumas dos fracciones, usas el MCM de los denominadores como el común denominador (MCD).

Definición

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

Un común múltiplo de los enteros a y b es un número que es igual a entero x a y entero x b

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los enteros a y b es el número más pequeño positivo que es común múltiplo de a y de b.

El Mínimo Común Múltiplo de dos enteros se encuentra factorizándolos en números primos, por ejemplo:
6=2(3)
8=2(2)(2)
Para ser un múltiplo de 6, un número debe tener al menos un 2 y al menos un 3 como factores. Para ser múltiplo de 8, un número debe tener cuando menos tres 2's como factores. Así que el Mínimo Común Múltiplo de 6 y 8 tiene tres 2's y un 3.

MCM= $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

En esta sección practicarás obteniendo el MCM de dos polinomios y estarás preparado para encontrar denominadores comunes para sumar expresiones racionales.

OBJETIVO

Dados dos polinomios, encontrar su MCM

Cubre la columna de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

	Por las siguientes razones:
Encuentra el MCM de $12a^2b^4$ y $18a^3bc$	
$12a^2b^4 = 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}b{\cdot}b{\cdot}b$	Factoriza
$18a^3bc = 2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}c$	Factoriza
MCM $= 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}3{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}b{\cdot}b{\cdot}b{\cdot}c$	Escoge el número mínimo de factores que son necesarios para cubrir a todos los demás de cada expresión.
MCM = $36a^3b^4c$	Simplifica

Puedes hacer más simple la obtención del MCM. Tomando los factores con el más grande exponente que tenga en ambas expresiones. Si no es común tómalo con el único exponente que tengan.

EJEMPLO 2
Encuentra el MCM de $9x^3$ y $6x(x+5)^3$

MCM = $18x^3(x+5)^3$	El MCM de 9 y 6 es 18. Se toma el más grande exponente de x y el único de $(x+5)$

EJEMPLO 3
Encuentra el MCM de x^2-$2x$-15 y x^2-$4x$-5

$x^2-2x-15 = (x+3)(x-5)$ $x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$	Factoriza las dos expresiones
MCM = $(x+3)(x-5)(x+1)$	Escribe el MCM $(x$-5) es un factor común sí que aparece solamente una vez.

EJEMPLO 4
Encuentra el MCM de x^3-$6x$+$9x$ y $2x^2$+$2x$-24

PRÁCTICA ORAL

Encuentra el MCM del par de enteros dados

A) 6, 8
B) 15, 12
C) 12, 9
D) 8, 18
E) 7, 21
F) 4, 12
G) 5,4
H) 9,10
I) 4,30

EJERCICIO 3.4

Para los problemas del 1 al 20 encuentra el MCM de las dos expresiones.

1) a^2bc, ab^2c
2) ax^2, $9a^2x$
3) $4x^3$, $6x^4$
4) $6xy^2$, $15x^2y$
5) $42a^3b$, $49b^2c$
6) $56a^5b$, $54a^3z^2$
7) $9x$, $9(a-x)$
8) x^2, $x(x-y)$

9) $5(a-x)$, $3(a+x)$
10) $6(x+3)$, $5(x-3)$
11) $3(a+x)$, $7(a+x)$
12) $9(a-3)$, $11(a-3)$
13) $a^2b(a-b)$, $ab^2(a-b)$
14) $p^3f(p+f)$, $p^4f^3(p+1)$
15) $xyz(x-y)$, xy
16) $a^3b^2(a-b)$, a^2b^3
17) $4a-4b$, $2a-2b$
18) ax^2-9, $6x^2-9x$
19) m^2-9, m^2+3m
20) $6x+12y$, $8x+16y$

Para los problemas del 21 al 26, encuentra el MCM de las tres expresiones.

21) x^3, a^2x^2, a^4
22) m^5, m^3n, mn^2
23) $10x^4$, $12x^2y^2$, $4xy^3$
24) $15r^3$, $21r^2s^3$, $35s^4$
25) $6x^3y^2z^4$, $4xy^3z^2$, $9x^2y^4z$
26) $9a^4b$, $12a^3b^2$, $54a^2b^3$

27) Escribe todos los múltiplos enteros de 2 y todos los múltiplos enteros de que están entre 1 y 20. Encierra en un círculo los pares de múltip comunes. Encierra en un cuadro el mínimo común múltiplo.

28) Escribe todos los múltiplos enteros de 12 y todos los múltiplos enteros de que están entre 1 y 100. Encierra en un círculo los pares de múltipl comunes. Encierra en un cuadro el mínimo común múltiplo.

29) Encuentra el MCM de 24 y 36. Encuentra el máximo factor común de 24 36. Comprueba que (MCM) (MFC) = 24x36

30) Encuentra el MCM de 48 y 49. Encuentra el MFC de 48 y 49. ¿Es es posible para dos enteros como 48 y 49 que tienen como factor común el 1? ¿Cuál es el MFC? Si lo tienes escríbelo, si no, di por que no.

Los problemas del 31 al 42 te dan un breve repaso de la suma y resta de fraccion antes de pasar a la sección 6.5. Suma o resta. Simplifica la respuesta, si posible.

31) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$
32) $\frac{2}{7}+\frac{5}{7}$
33) $\frac{8}{9}-\frac{5}{9}$
34) $\frac{4}{10}-\frac{7}{10}$
35) $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}$
36) $\frac{1}{3}+\frac{5}{2}$
37) $\frac{3}{5}-\frac{2}{7}$
38) $\frac{3}{5}-\frac{4}{11}$
39) $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$
40) $\frac{1}{6}+\frac{5}{4}$
41) $\frac{5}{8}-\frac{7}{12}$
42) $\frac{3}{8}-\frac{5}{12}$

3.5 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES

Para sumar dos fracciones, sus denominadores deben ser iguales. En la última sección, el ejemplo dado fué

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{41}{28}$$

En esta sección sumaremos expresiones algebraicas racionales. Las fracciones tendrán variables en el numerador, en el denominador o en ambos. Por ejemplo, suponiendo que vas a sumar

$$\frac{7}{6x}+\frac{3}{4}$$

El común denominador a usar es el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores. Para $6x$ y 4, el MCM es
MCM= $12X$

Multiplicando $\frac{7}{6x}$ por $\frac{2}{2}$ (que es igual a 1) y $\frac{3}{4}$ por $\frac{3x}{3x}$ (que es igual a 1, también) nos da

$$\frac{7}{6x}\cdot\frac{2}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3x}{3x}=$$

$$=\frac{14}{12x}+\frac{9x}{12x}$$

$$=\frac{14+9x}{12x}$$

Como $12x$ es el MCM de dos denominadores es el llamado Mínimo Común Denominador, o MCD.

Definición

MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR (MCD)
El Mínimo Común Denominador (MCD) de dos fracciones es el MCM de los denominadores.

OBJETIVO

Dadas dos expresiones algebraicas racionales, encuentra el MCD y usa el resultado para sumar o restar las dos expresiones.

Cubre las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Suma $\frac{5}{3x}+\frac{9x}{4x}$

$\frac{5}{3x}+\frac{9x}{4x}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{5}{3x}\cdot\frac{4}{4}+\frac{9x}{4x}\cdot\frac{3}{3}$ Escribe cada fracción con el MCD 12*x*

$=\frac{20}{12x}+\frac{27x}{12x}$ Multiplica las fracciones

$=\frac{20+27x}{12x}$ Suma las fracciones

EJEMPLO 2

Resta $\frac{5x}{x-y}-\frac{5y}{x-y}$

$\frac{5x}{x-y}-\frac{5y}{x-y}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{5x-5y}{x-y}$ Efectúa la resta de los numeradores

$=\frac{5(x-y)}{x-y}$ Factoriza el numerador

$=5$ Cancela los factores (*x*-*y*)

EJEMPLO 3

Suma $\frac{x-3}{x-7}+\frac{x-2}{x-1}$

$\frac{x-3}{x-70}\cdot\frac{x-1}{x-1}+\frac{x-2}{x-1}\cdot\frac{x-7}{x-7}$ Multiplica por una forma adecuada de 1

$=\frac{x^2+2x-3}{x^2-8x+7}+\frac{x^2-9x+14}{x^2-8x+7}$ Multiplica los numeradores y los denominadores

$=\frac{x^2+2x-3+x^2-9x+14}{x^2-8x+7}$ Suma los numeradores; se usa el común denominador

$=\frac{2x^2-7x+11}{x^2-8x+7}$ Combina términos semejantes

EJEMPLO 4

Resta $\frac{x+5}{x+6}-\frac{x-2}{x+4}$

$\frac{x+5}{x+6}-\frac{x-2}{x+4}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{x+5}{x+6}\cdot\frac{x+4}{x+4}-\frac{x-2}{x+4}\cdot\frac{x+6}{x+6}$ Escribe la fracción de manera que tengan denominador común

$=\frac{x^2+9x+20}{x^2+10x+24}-\frac{x^2+4x-12}{x^2+10x+24}$ Multiplica los numeradores y los denominadores

$=\frac{(x^2+9x+20)-(x^2+4x-12)}{x^2+10x+24}$ Resta los numeradores; usa el común denominador

$=\frac{x^2+9x+20-x^2-4x+12}{x^2+10x+24}$ Distribuye -1 y elimina los paréntesis

$=\frac{5x+32}{x^2+10x+24}$ Combina los términos semejantes

PRÁCTICA ORAL

Realiza la operación indicada y proporciona la respuesta

a) $\frac{2}{5x}+\frac{6}{5x}$ b) $\frac{2}{5x}-\frac{6}{5x}$ c) $\frac{9}{6}-\frac{9}{3}$ d) $\frac{9}{6}+\frac{9}{3}$

e) $\frac{5}{6x}+\frac{2}{3x}$ f) $\frac{5}{6x}-\frac{2}{3x}$ g) $\frac{1}{6}-\frac{5x+3}{6}$ h) $\frac{3}{7}-\frac{6x-5}{7}$

i) $\frac{4}{9}-\frac{x+2}{9}$ j) $\frac{3}{9}+\frac{5x-3}{9}$ k) $\frac{3}{9}-\frac{5x-3}{9}$

EJERCICIO 3.5

Para los problemas del 1 al 10:
a) Suma las dos expresiones
b) Resta la segunda expresión de la primera

1) $\frac{8}{5x},\frac{7}{9x}$ 2) $\frac{7}{6a},\frac{2}{11a}$ 3) $\frac{5}{12m},\frac{11}{18m}$

4) $\frac{8}{9x},\frac{7}{6x}$ 5) $\frac{x}{12},\frac{x+3}{4}$ 6) $\frac{a}{10},\frac{a-3}{5}$

7) $\frac{x-6}{x+3},\frac{x-5}{x-7}$ 8) $\frac{a+1}{a+7},\frac{a-3}{a+6}$ 9) $\frac{2y+3}{3y-1},\frac{4y+5}{y+2}$

10) $\frac{3x-4}{2x-1},\frac{5x-2}{x-8}$

Para los problemas del 11 al 35, efectúa las operaciones indicadas y simplifica

11) $\frac{7}{x}+\frac{5}{x}$ 12) $\frac{8}{y}+\frac{3}{y}$

13) $\frac{2x}{3y}-\frac{7}{6x}$ 14) $\frac{2a}{4b}-\frac{6a}{4b}$

15) $\frac{x-1}{3}+\frac{x+1}{6}$ 16) $\frac{a+2}{6}+\frac{a-3}{8}$

17) $\frac{2c-3}{4}-\frac{c+2}{6}$ 18) $\frac{3y+4}{8}-\frac{y+2}{3}$

19) $\frac{1}{4m}+\frac{1}{2m}-\frac{2}{3m}$ 20) $\frac{2}{ab}+\frac{4}{ac}-\frac{3}{bc}$

21) $\frac{5}{6x-6y}-\frac{3}{4x-4y}$ 22) $\frac{5}{6x-2y}-\frac{3}{9x-3y}$

23) $\frac{1}{2x-2y}+\frac{1}{4x-4y}$ 24) $\frac{1}{3a+3b}+\frac{1}{12a+12b}$

25) $\frac{a-2}{a+4}+\frac{a+1}{a-2}$ 26) $\frac{m+6}{m+3}+\frac{m+3}{m+6}$

27) $\frac{k-5}{k-10}-\frac{k-4}{k-2}$ 28) $\frac{m-6}{m-1}-\frac{m-9}{m-3}$

29) $\frac{a-3}{a+5}+-\frac{a+5}{a-1}$ 30) $\frac{m+8}{m-1}+\frac{m+8}{m+2}$

31) $\frac{5a}{9}-\frac{3a}{2}+\frac{a}{6}$ 32) $\frac{2a}{a+n}+\frac{2n}{a+n}$

33) $\frac{p}{3p-6}-\frac{2}{3p-6}$ 34) $\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x-3}$

35) $x+\frac{x+2}{x-2}$

3.6 COMBINACIÓN DE OPERACIONES Y CASOS ESPECIALES

Existen algunos casos especiales que debes conocer cuando simplificas expresiones racionales, tal como:

$$\frac{6-x}{x-6}$$

Aquí, el numerador y el denominador son opuestos uno de otro, como puedes ver, factorizando -1 del numerador:

$$\frac{6-x}{x-6}=\frac{-1(-6+++x)}{x-6}=\frac{-1(x-6)}{x-6}=-1$$

Una forma rápida para obtener esta respuesta es razonar:

Cualquier número dividido por su opuesto es igual a -1. Se debe tener cuidado porque algunas expresiones parecen ser opuestas pero en realidad no lo son.

Por ejemplo *x*-6 y *x*+6 estos son conjugados, no son opuestos. Nada especial sucede cuando divides dos conjugados.

Casos especiales

$\frac{x-6}{6-x}=-1$ Un número dividido por su opuesto es igual a -1.

$\frac{x+6}{6+x}=1$ Un número dividido por sí mismo es igual a 1; (*x*+6) y (6+*x*) son iguales

$\frac{x-6}{6+x}=\frac{x-6}{x+6}$ ¡Un número dividido por su conjugado no es nada especial!

Otro caso especial que concierne al opuesto de una fracción es el siguiente

$-\frac{4}{5}, \frac{-4}{5}\ y\ \frac{4}{-5}$

La expresión $\frac{4}{5}$ significa 4 dividido entre 5. Porque negativo dividido por posi es negativo y positivo dividido por negativo es también negativo, las tres fraccion son iguales.

$$-\frac{4}{5}=\frac{-4}{5}=\frac{4}{-5}$$

El signo "-" puede ser asociado con el numerador, el denominador, o la fracc completa. Este hecho es llamado la propiedad del opuesto de una fracción.

Propiedad

EL OPUESTO DE UNA FRACCIÓN

Para cualquier fracción $\frac{a}{b}, b \neq 0,$ $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$

Nota que $\frac{-a}{-b}$ es igual a : $+\frac{a}{b}$, entonces negativo dividido por negativo positivo.

OBJETIVO:

Ya estás preparado para sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraic racionales y simplificar la respuesta

Cubre las respuestas y trabaja estos ejemplos.

EJEMPLO 1

Simplifica: $\frac{(x+2)\ (x-3)\ (x-4)}{(x+3)\ (4-x)\ (x+2)}$

$\frac{(x+2)\ (x-3)\ (x-4)}{(x+3)\ (4-x)\ (x+2)}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{(x-3)\ (x-4)}{(x+3)\ (4-x)}$ Cancela los factores (x+2)

$=-\frac{x-3}{x+3}$ $\frac{x-4}{4-x}$ es igual a -1 ; (x-3) y (x+3) son conjugados y no se cancelan.

EJEMPLO 2

Efectúa las operaciones y simplifica: $\frac{2x}{3x}-\frac{4}{5x}\div\frac{3}{10x}$

$\frac{2x}{3x}-\frac{4}{5x}\div\frac{3}{10x}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{2x}{3x}-\frac{4}{5x}\cdot\frac{10x}{3}$ Multiplica por el recíproco

$=\frac{2x}{3x}-\frac{40x}{15x}$ Multiplica antes de restar

$=\frac{2}{3}-\frac{8}{3}$ Cancela los factores x. Cancela el factor 5

Resta las fracciones

=-2 Simplifica

EJEMPLO 3

Efectúa las operaciones y simplifica: $\frac{2}{x+7}-\frac{1}{x-7}$

$\frac{2}{x+7}-\frac{1}{x-7}$ Escribe la expresión dada

$=\frac{2}{x+7}\cdot\frac{x-7}{x-7}-\frac{1}{x-7}\cdot\frac{x+7}{x+7}$ Escribe las fracciones con denominadores comunes

$=\frac{2(x-7)-(x+7)}{(x+7)(x-7}$ Suma algebraicamente. Usa el común denominador

$=\frac{2x-14-x-7}{(x+7)(x-7)}$ Distribuye el 2 y el -1 en el numerador

$=\frac{x-21}{(x+7)(x-7)}$ Combina los términos semejantes en el numerador

$= \dfrac{x-21}{x^2-49}$ Multiplica los factores del denominado

(Este paso es opcional)

EJEMPLO 4

Multiplica y simplifica: $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+x-6} \cdot \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$

$\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+x-6} \cdot \dfrac{x^2-4}{1-x^2}$ Escribe la expresión dada

$= \dfrac{(x-9)(x-1)}{(x+3)(x-2)} \cdot \dfrac{(x+2)(x-2)}{(1-x)(1+x)}$ ¡Factoriza el numerador y el denominado primero! (si multiplicas primero, te meter en un lío)

$= \dfrac{(x-9)(x-1)(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)(1-x)(1+x)}$ Utiliza la propiedad de la multiplicación d fracciones

$= -\dfrac{(x-9)(x+2)}{(x+3)(1+x)}$ Cancela los factores (x-2)

$\dfrac{x-1}{1-x}$ Es igual a -1

$= -\dfrac{x^2-7x-18}{x^2+4x+3}$ Efectúa la multiplicación indicada

EJEMPLO 5

Resta y simplifica: $\dfrac{3x-1}{x^2+2x-15} - \dfrac{2}{x+5}$

$\dfrac{3x-1}{x^2+2x-15} - \dfrac{2}{x+5} =$ Escribe la expresión dada

$= \dfrac{3x-1}{(x+5)(x-3)} - \dfrac{2}{x+5}$ Factoriza el denominador

$= \dfrac{3x-1}{(x+5)(x-3)} - \dfrac{2}{x+5} \cdot \dfrac{x-3}{x-3}$ Escribe las fracciones con denominadores comunes.(Necesitas transformar solamente la segunda fracción)

$= \dfrac{3x-1-2(x-3)}{(x+5)(x-3)}$ Suma algebraicamente los numeradores. Usa el común denominador

$= \dfrac{3x-1-2x+6}{(x+5)(x-3)}$ Distribuye el -2. (¡ Ten cuidado de no perder el signo - !)

$= \dfrac{x+5}{(x+5)(x-3)}$ Combina los términos semejantes.

$= \dfrac{1}{x-3}$ Respuesta

PRÁCTICA ORAL

Di a qué son iguales las siguientes fracciones

Ejemplos	Respuestas
i. $\dfrac{x-5}{5-x}$	*i.* -1
ii. $\dfrac{x-5}{x+5}$	*ii.* $\dfrac{x-5}{x+5}$
iii. $\dfrac{3}{-x}$	*iii.* $-\dfrac{3}{x}$

a) $\dfrac{x-5}{x-5}$ b) $\dfrac{x-5}{x+5}$ c) $\dfrac{x-5}{5-x}$

d) $\dfrac{x+7}{7+x}$ e) $\dfrac{4x+3}{4x-3}$ f) $\dfrac{3+4x}{4x+3}$

g) $\dfrac{4x-3}{3-4x}$ h) $\dfrac{4x+3}{3x+4}$ i) $\dfrac{-4}{x}$

j) $\dfrac{-x}{7}$ k) $\dfrac{x}{-y}$ l) $\dfrac{-x}{-y}$

m) $\dfrac{-(x+6)}{x+6}$ n) $\dfrac{-(x+9)}{x+6}$ o) $\dfrac{x-8}{-(-x-8)}$

p) $\dfrac{-(x+4)}{-(x+4)}$ q) $\dfrac{-(x+4)}{-(4+x)}$ r) $\dfrac{-(6-x)}{x-6)}$

s) $\dfrac{-x+5}{5-x}$ t) $\dfrac{-(x-7)}{-(x-7)}$

EJERCICIO 3.6

Para los problemas del 1 al 10 simplifica la expresión

1) $\dfrac{(x+7)(x-3)}{(x-7)(x-3)}$ 2) $\dfrac{(x-6)(x+3)}{(x+6)(3+x)}$

3) $\dfrac{(x+5)(x-6)}{(x+5)(6-x)}$ 4) $\dfrac{(x+5)(x-9)}{(x-5)(9-x)}$

5) $\dfrac{(a+3)(a-3)(4a-1)}{(3+a)(1-4a)(a+3)}$ 6) $\dfrac{(m+6)(m-2)(2m+5)}{(6+m)(2m+5)(2-m)}$

7) $\dfrac{4-y^2}{y^2-4y+4}$ 8) $\dfrac{x^2-6x+9}{9-x^2}$

9) $\dfrac{a^2-a-12}{6-a-a^2}$ 10) $\dfrac{10+3x-x^2}{x2+3x+2}$

Para los problemas del 11 al 40, realiza las operaciones indicadas y simplifica la respuesta.

11) $\dfrac{5}{9x}+\dfrac{4}{9x}-\dfrac{2}{9x}$ 12) $\dfrac{4}{3x}-\dfrac{2}{3x}+\dfrac{7}{3x}$

12)

13) $\dfrac{a}{5a}+\dfrac{2}{3a}\cdot\dfrac{6a}{5}$ 14) $\dfrac{4y}{3y}-\dfrac{14}{9y}\cdot\dfrac{3y}{7}$

15) $\dfrac{3m}{m+n}+\dfrac{3n}{m+n}$ 16) $\dfrac{5y}{x+y}+\dfrac{5x}{x+y}$

17) $\dfrac{x^2}{x-y}-\dfrac{y^2}{x-y}$ 18) $\dfrac{h^2}{h-5}-\dfrac{25}{h-5}$

19) $\dfrac{25}{x-5}-\dfrac{x^2}{x-5}$ 20) $\dfrac{36}{x-6}-\dfrac{x^2}{x-6}$

21) $\dfrac{2}{a}-\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{4}{a^3}$ 22) $\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{7}{x}$

23) $\dfrac{6}{x^2}\cdot\dfrac{5}{2x^3}\div\dfrac{3x^4}{-4}$ 24) $\dfrac{10}{a^5}\div\dfrac{5a^4}{6}\cdot\dfrac{1}{3a^2}$

25) $\dfrac{6m+12}{5}\cdot\dfrac{15m}{11m+22}$

26) $\dfrac{6v-15}{9v}\cdot\dfrac{v}{6v-30}$

27) $\dfrac{3a}{a-2}\cdot\dfrac{26}{a-2}$

28) $\dfrac{7m}{m+5}+\dfrac{35}{m+5}$

29) $\dfrac{25-p^2}{12}\cdot\dfrac{6}{p-5}$

30) $\dfrac{4}{1-s^2}\cdot\dfrac{s+1}{4}$

31) $\dfrac{3}{x+4}+\dfrac{3}{x-4}$

32) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{4}{3-x}$

33) $\dfrac{a}{a+3}\cdot\dfrac{3+a}{a^2+2a}$

34) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-x-30}\cdot\dfrac{x^2-36}{9-x^2}$

35) $\dfrac{x^2+5x-14}{x^2-49}\div\dfrac{4-x^2}{x^2+9x+14}$

36) $\dfrac{2x-11}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x+5}$

37) $\dfrac{5x+17}{x^2+8x+7}-\dfrac{3}{x+7}$

38) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{x+9}{x^2+3x-4}$

39) $\dfrac{2x-36}{x^2-4x-12}+\dfrac{3}{x-6}$

40) $\dfrac{5x-27}{x^2-9}+\dfrac{2}{x-3}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN SECRETARÍA ACADÉMICA

CAPÍTULO 4

ECUACIONES LINEALES

En este capítulo trabajarás con cantidades que pueden tomar diferentes valores. Por ejemplo, si un jardinero cobra \$35.00 por arreglar el jardín de cada casa, el ingreso diario que obtendrá por este trabajo será una cantidad variable, dependiendo de cuántos jardines arregle por día.

El nombre de ÁLGEBRA proviene de la palabra arábiga AL-JABR, que significa "ciencia de la reducción y comparación". Un tipo de problema en álgebra es: si el jardinero anterior arregla 3 jardines diarios, ¿cuánto dinero ganará? Otro problema es: si quiere ganar \$280.00 diarios, ¿cuántos jardines deberá arreglar diariamente? Las respuestas, por supuesto, son \$ 105.00 y 8 jardines respectivamente. En álgebra aprenderás a reducir problemas complicados a sencillos, utilizando letras para representar cantidades cuyo valor cambia y a establecer expresiones y ecuaciones en términos de estas variables.

En este capítulo resolverás ecuaciones que tienen expresiones en uno o ambos miembros. Estas expresiones pueden representar casos del mundo real tales como la cantidad de trabajo realizado por obreros que empiezan en distintos tiempos. La variable *x* representa el número de días que el primer grupo de trabajadores ha laborado.

La expresión *x-2* representa el número de días que el segundo grupo ha trabajado.

Las expresiones *9x* y *12(x-2)* representan la cantidad de trabajo realizado por cada grupo.

La ecuación *9x=12(x-2)* quiere decir que cada grupo de trabajadores ha hecho el mismo trabajo.

CAPÍTULO 4

ECUACIONES LINEALES

En este capítulo trabajarás con cantidades que pueden tomar diferentes valores. Por ejemplo, si un jardinero cobra $35.00 por arreglar el jardín de cada casa, el ingreso diario que obtendrá por este trabajo será una cantidad variable, dependiendo de cuántos jardines arregle por día.

El nombre de ÁLGEBRA proviene de la palabra arábiga AL-JABR, que significa "ciencia de la reducción y comparación". Un tipo de problema en álgebra es: si el jardinero anterior arregla 3 jardines diarios, ¿cuánto dinero ganará? Otro problema es: si quiere ganar $280.00 diarios, ¿cuántos jardines deberá arreglar diariamente? Las respuestas, por supuesto, son $ 105.00 y 8 jardines respectivamente. En álgebra aprenderás a reducir problemas complicados a sencillos, utilizando letras para representar cantidades cuyo valor cambia y a establecer expresiones y ecuaciones en términos de estas variables.

En este capítulo resolverás ecuaciones que tienen expresiones en uno o ambos miembros. Estas expresiones pueden representar casos del mundo real tales como la cantidad de trabajo realizado por obreros que empiezan en distintos tiempos. La variable *x* representa el número de días que el primer grupo de trabajadores ha laborado.

La expresión *x-2* representa el número de días que el segundo grupo ha trabajado.

Las expresiones *9x* y *12(x-2)* representan la cantidad de trabajo realizado por cada grupo.

La ecuación *9x=12(x-2)* quiere decir que cada grupo de trabajadores ha hecho el mismo trabajo.

4.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES

Una colección de números, signos de operación, y símbolos de agrupación (paréntesis, corchetes, vínculos) es llamada una ***expresión***. Encontrar el valor de una expresión es llamado ***evaluación*** de la expresión, así por ejemplo, en la expresión:

3+(7x9)

su valor es 66. Consideremos el caso que no se te dice un número en esta expresión.

3+(__x9)

Se acostumbra usar una letra tal como *x*, *y* o *z* para simbolizar un número que puede tomar diferentes valores en diferentes ocasiones. En lugar de usar un espacio en blanco, la expresión arriba citada se escribiría:

3+(*x* x 9)

Una letra tal como *x* es llamada variable.

Definición

VARIABLE:
Una variable es una letra que representa un conjunto de números. (Puede representar diferentes números en diferentes ocasiones, pero representa el mismo número en cada lugar en que aparezca en la expresión).

Para evaluar una expresión conteniendo una variable, debe decirse qué valor usar para la variable. Después, sustituir la variable por ese numero y evaluar la expresión. Los símbolos tales como 14, 7.8 ó ¾ que simbolizan al mismo número todo el tiempo son llamados ***constantes.***

Definición

SUSTITUIR:
Sustituir significa reemplazar una variable por una constante (tal como 3, 158, 1001, etc.).

CAPÍTULO 4

ECUACIONES LINEALES

En este capítulo trabajarás con cantidades que pueden tomar diferentes valores. Por ejemplo, si un jardinero cobra $35.00 por arreglar el jardín de cada casa, el ingreso diario que obtendrá por este trabajo será una cantidad variable, dependiendo de cuántos jardines arregle por día.

El nombre de ÁLGEBRA proviene de la palabra arábiga AL-JABR, que significa "ciencia de la reducción y comparación". Un tipo de problema en álgebra es: si el jardinero anterior arregla 3 jardines diarios, ¿cuánto dinero ganará? Otro problema es: si quiere ganar $280.00 diarios, ¿cuántos jardines deberá arreglar diariamente? Las respuestas, por supuesto, son $ 105.00 y 8 jardines respectivamente. En álgebra aprenderás a reducir problemas complicados a sencillos, utilizando letras para representar cantidades cuyo valor cambia y a establecer expresiones y ecuaciones en términos de estas variables.

En este capítulo resolverás ecuaciones que tienen expresiones en uno o ambos miembros. Estas expresiones pueden representar casos del mundo real tales como la cantidad de trabajo realizado por obreros que empiezan en distintos tiempos. La variable *x* representa el número de días que el primer grupo de trabajadores ha laborado.

La expresión *x-2* representa el número de días que el segundo grupo ha trabajado.

Las expresiones *9x* y *12(x-2)* representan la cantidad de trabajo realizado por cada grupo.

La ecuación *9x=12(x-2)* quiere decir que cada grupo de trabajadores ha hecho el mismo trabajo.

4.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES

Una colección de números, signos de operación, y símbolos de agrupación (paréntesis, corchetes, vínculos) es llamada una ***expresión***. Encontrar el valor de una expresión es llamado ***evaluación*** de la expresión, así por ejemplo, en la expresión:

3+(7x9)

su valor es 66. Consideremos el caso que no se te dice un número en esta expresión.

3+(__x9)

Se acostumbra usar una letra tal como *x, y* o *z* para simbolizar un número que puede tomar diferentes valores en diferentes ocasiones. En lugar de usar un espacio en blanco, la expresión arriba citada se escribiría:

3+(*x* x 9)

Una letra tal como *x* es llamada variable.

Definición

VARIABLE:
Una variable es una letra que representa un conjunto de números. (Puede representar diferentes números en diferentes ocasiones, pero representa el mismo número en cada lugar en que aparezca en la expresión).

Para evaluar una expresión conteniendo una variable, debe decirse qué valor usar para la variable. Después, sustituir la variable por ese numero y evaluar la expresión. Los símbolos tales como 14, 7.8 ó ¾ que simbolizan al mismo número todo el tiempo son llamados ***constantes.***

Definición

SUSTITUIR:
Sustituir significa reemplazar una variable por una constante (tal como 3, 158, 1001, etc.).

4.1 INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES

Una colección de números, signos de operación, y símbolos de agrupación (paréntesis, corchetes, vínculos) es llamada una ***expresión***. Encontrar el valor de una expresión es llamado ***evaluación*** de la expresión, así por ejemplo, en la expresión:

3+(7x9)

su valor es 66. Consideremos el caso que no se te dice un número en esta expresión.

3+(__x9)

Se acostumbra usar una letra tal como *x, y* o *z* para simbolizar un número que puede tomar diferentes valores en diferentes ocasiones. En lugar de usar un espacio en blanco, la expresión arriba citada se escribiría:

3+(*x* x 9)

Una letra tal como *x* es llamada variable.

Definición

VARIABLE:
Una variable es una letra que representa un conjunto de números. (Puede representar diferentes números en diferentes ocasiones, pero representa el mismo número en cada lugar en que aparezca en la expresión).

Para evaluar una expresión conteniendo una variable, debe decirse qué valor usar para la variable. Después, sustituir la variable por ese numero y evaluar la expresión. Los símbolos tales como 14, 7.8 ó ¾ que simbolizan al mismo número todo el tiempo son llamados ***constantes.***

Definición

SUSTITUIR
Sustituir significa reemplazar una variable por una constante (tal como 3, 158, 1001, etc.).

EJEMPLO 1
Sustituye *x* por 4 y después evalúa (15-*x*)x3

Solución

(15-*x*)x3	Escribe la expresión dada
=(15-4)x3	Sustituye 4 en lugar de *x*
=11x3	Efectúa las operaciones
=33	Da la respuesta

NOTA: Asegúrate de usar signos de = para señalar que la primera expresión es igual a la siguiente, y así sucesivamente.

EJEMPLO 2
Sustituye x por *9* y evalúa (15-*x*)x3

Solución

(15-*x*)x3	Escribe la expresión dada
=(15-9)x3	Sustituye x por 9
=6x3	Efectúa las operaciones
=<u>18</u>	Da la respuesta.

NOTA: La misma expresión tiene diferentes valores cuando diferentes números son sustituidos en lugar de la variable.

Ya que has aprendido cómo encontrar el valor de una expresión cuando se conoce el valor de *x*, ahora encontrarás el valor de *x* cuando se conoce a qué es igual la expresión. Por ejemplo, si la expresión es *x*+5, y se sabe que es igual a 17, entonces se puede escribir

x+5=17

Esto es llamado una ecuación. La expresión del lado izquierdo es llamada el miembro izquierdo y la expresión en el lado derecho es llamada el miembro derecho.

Para encontrar el valor de *x*, debes tener a *x* sola en un lado de la ecuación. Para hacer esto debes deshacerte del 5 en el miembro izquierdo. Puedes restar 5 de cada miembro, obteniendo:

x+5-5=17-5

simplificando:
x=12

como puedes ver, 12+5 realmente es igual a 17.

OBJETIVO:

Dado el valor de una expresión, ser capaz de encontrar el valor de la variable.

EJEMPLO 3
Para la expresión x-7, encuentra x cuando la expresión es igual a 15

1º Escribe una ecuación
$x-7=15$

2º Piensa cómo deshacerte del 7 en el miembro izquierdo de manera que la x quede sola. Sumando 7 a cada miembro dejarás sola la x.
$x-7+7=15+7$

3º Realiza las operaciones
$x=22$

O también como el 7 está restando en el primer miembro, pasa restando al segundo miembro quedando : $x = 15 + 7$
$x = 22$

EJEMPLO 4

Para la expresión $\frac{1}{3}x$, encuentra x si la expresión es igual a 13.

Tu proceso de razonamiento puede ser: ***Quiero dejar la x sola. Así que debo deshacerme de*** $\frac{1}{3}$. ***Para hacer esto puedo multiplicar cada miembro por 3.***

$\frac{1}{3}x=13$ Escribe la ecuación
Multiplica cada miembro por 3
Haz las operaciones para que la x quede sola.
$3(\frac{1}{3}x)=3(13)$ Da la respuesta.
$x=39$

Nota : También podemos pasar el 3 ; que esta como divisor en el primer miembro ; como factor al segundo miembro.

EJEMPLO 5
Para la expresión $7x$, encuentra x cuando su valor es igual a 42.

$7x=42$ Escribe la ecuación

$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$ Divide cada miembro entre 7 para deshacernos del 7 que está multiplicando a la x. Haz las operaciones para que la x quede sola.
O también como el 7 es factor en el primer miembro lo pasamos como divisor al segundo miembro.

En la exposición anterior aprendiste cómo encontrar el valor de x si se te daba el valor de una expresión conteniendo x. Por ejemplo, restando 5 de cada miembro de la ecuación

$x+5=17$

encuentras

$x=12$

si sustituyes el número 12 en lugar de x en la ecuación original, obtienes

$12+5=17$

El número 12 en este ejemplo se llama la solución de la ecuación. El proceso de encontrar todos los valores de la variable que hagan la ecuación verdadera es llamado resolución de la ecuación. Llevar a cabo un paso tal como restar 5 de cada miembro de la ecuación es llamado transformación de la ecuación. Así que para resolver una ecuación, todo lo que necesitas hacer es transformarla hasta que quede:

x = algún número

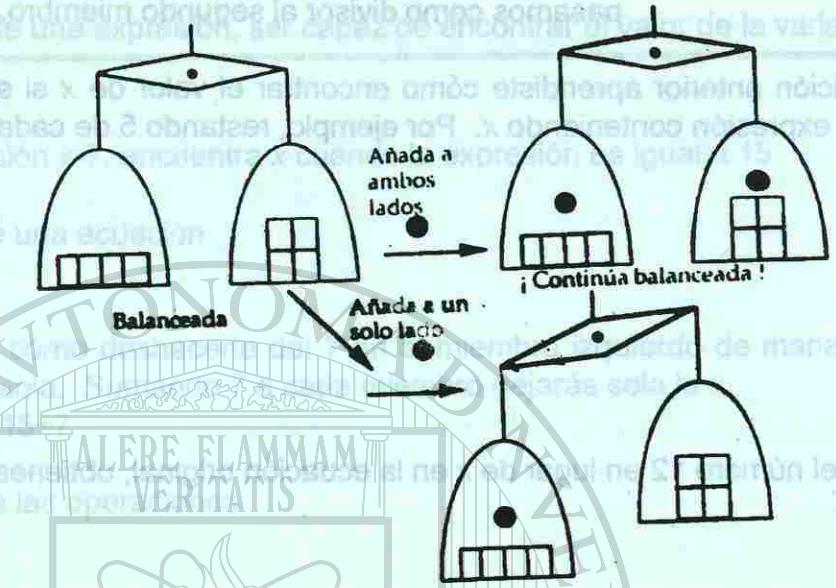
La transformación particular que selecciones es la que deja la variable sola deshaciéndote de los números no deseados que acompañan a la variable.

$x-2=7$	Sumar 2 a cada miembro para deshacerse del 2
$x+3=8$	Restar 3 a cada miembro para deshacerse del 3
$\frac{1}{5}x=9$	Multiplicar cada miembro por 5 para deshacerse del 5
$6x=2$	Dividir cada miembro entre 6 para deshacerse del 6

EJEMPLO 6
Resuelve x-3=5. Muestra la transformación:

$x-3=5$	Escribe la ecuación
$x-3+3=5+3$	Suma 3 a cada miembro
$x=8$	Realiza las operaciones

Una transformación como añadir 3 a cada miembro puede ser pensada como si se añadieran pesos iguales a ambos lados de una balanza. Si estaba balanceada antes, debe balancearse después de hacer transformaciones. Pero si añades peso solamente a un lado, ¡Nunca se balancea!



Nota: Siempre hay que mantener el "equilibrio" en una ecuación ; es decir ; las operaciones que efectúes en el miembro izquierdo de la ecuación las debes realizar también en el derecho.

Tienes que aprender la diferencia entre las palabras ecuación, solución y transformación. Enseguida aparecen las definiciones formales para estos conceptos.

Definiciones:

ECUACIÓN
Una ecuación es una proposición (tal como $x+3=5$) que nos dice que dos expresiones son iguales.

SOLUCIÓN
Una solución de una ecuación es un número que si se sustituye en lugar de la variable hace que la proposición sea verdadera (por ejemplo, 2 es una solución de $x+3=5$ porque $2+3=5$

TRANSFORMAR UNA ECUACIÓN
Transformar una ecuación significa hacer la misma operación a cada miembro de la ecuación.

Las expresiones algebraicas pueden ser usadas para representar cosas tales como el perímetro y el área de un rectángulo u otro tipo de cantidades. Con respecto a la expresión, puedes evaluarla o resolver una ecuación para obtener respuestas a problemas de la vida real.

EJEMPLO 7

Un cocinero gana $16.00 por día más que un mesero. Si x es el número de pesos por día que gana el mesero. Contesta las siguientes preguntas.

a. Escribe una expresión para los pesos por día que gana el cocinero.
b. Si el mesero gana $35.00 por día, ¿cuánto gana el cocinero?
c. Si el mesero obtiene un aumento de $40.00 por día, ¿cuánto ganará el cocinero?
d. Si el cocinero gana $65.00 por día, ¿cuánto gana el mesero?

Solución

a.	Mesero: x pesos por día	Escribe la variable dada
	Cocinero: $x+16$ pesos por día	El cocinero gana $16.00 más. Así que debe añadirse 16 a x.
b.	$x+16$	Escribe la expresión de (a)
	$= 35+16$	Sustituye 35 en lugar de x
	$=51$	Ejecuta la operación aritmética
	El cocinero gana $51.00 por día	Responde la pregunta
c.	$x+16$	Escribe la expresión de (a)
	$=40+16$	Sustituye 40 en lugar de x
	$=56$	Ejecuta la operación aritmética
	El cocinero ganará $56.00 por día	Responde la pregunta
d.	$x+16=65$	Iguala la expresión del cocinero a 65.
	$x+16-16=65-16$	Resta 16 a cada miembro
	$x=49$	Efectúa las operaciones
	El mesero gana $49.00 por día	Responde la pregunta

EJEMPLO 8
Problema de genes

Si los padres tienen cierta combinación de genes, entonces cerca de $\frac{1}{4}$ de sus hijos tendrá cabello claro. Permite que x sea el número de niños nacido de un grupo de parejas con estos genes.

a. Escribe una expresión para el número de niños con cabello castaño claro.
b. Si éstas parejas tuvieran un total de 532 niños, ¿cuántos de ellos serían castaños claros?
c. ¿Cuántos niños necesitarían las parejas tener para que hubiera 240 niños con cabello castaño claro?

Solución

a.	Número total: x castaño claro: $\frac{1}{4}x$	Escribe la expresión de (a)
b.	$\frac{1}{4}x$	Escribe la expresión de (a)
	$=\frac{1}{4}(532)$	Sustituye 532 por x
	$=133$	Efectúa las operaciones
	133 niños	Responde la pregunta
c.	$\frac{1}{4}x=240$	Escribe la ecuación
	$=4(\frac{1}{4}x)=4(240)$	Multiplica cada miembro por 4
	$x=960$	Efectúa las operaciones
	960 niños	Responde la pregunta

EJERCICIO 4.1

Calcular las siguientes expresiones:

1. 5+(7x8)
2. (8x7)-13
3. 36 ÷ (2x6)
4. 16-[(3x2)-4]

Para los problemas del 5 al 8, evalúa las expresiones sustituyendo los valores dados de la variable:

5. $5+x$, si:
   a) x es 4;
   b) x es 17.

6. (z-19)x2, si:
   a) z es 100;
   b) z es 37;
   c) z es 19.

7. $\frac{30}{x}$, si:
   a) x es 6;
   b) x es 90.

8. $7x$, si:
   a) x es 8;
   b) x es 11.

9. Para la expresión x-3, encuentra x cuando la expresión es igual a:
   a) 7 b) 1 c) 20
   d) 100 e) 1998

10. Para la expresión x+8, encuentra x cuando la expresión es igual a:
   a) 10 b)17 c) 35
   d) 107 e) 1776

11. Para la expresión ½x, encuentra x cuando la expresión es igual a:
   a) 5 b) 13 c) 50
   d) 111 e) 65

12. Para la expresión 5x, encuentra x cuando la expresión es igual a:
   a) 10 b) 75 c)1000
   d)15 e) 27

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. Muestra los pasos de cada transformación.

13. $x-10=17$
14. $x-8=13$
15. $x+4=13$
16. $x+9=21$
17. $5x=90$
18. $6x=22$
19. $\frac{1}{3}x=29$
20. $\frac{1}{5}x=23$
21. $x-16=7$
22. $x-17=8$
23. $x-32=95$
24. $x-45=89$
25. $x+58=74$
26. $x+43=91$
27. $x+91=247$
28. $x+79=422$
29. $12x=132$
30. $15x=210$
31. $8x=1000$
32. $4x=100$
33. $\frac{1}{7}x=68$
34. $\frac{1}{9}x=58$

35. Supongamos que $\frac{3}{4}$ de los estudiantes en una escuela son de primer año.
   Si x representa al número total de estudiantes:
   a) Escribe una expresión representando el número de estudiantes de primer año.
   b) Escribe una ecuación donde especifique que el número de estudiantes de primer año es 312.
   c) Encuentra el número de estudiantes de la escuela.

36. Carlos es 4 años más joven que su hermano Rogelio. Si *x* es la edad de Rogelio:
   a) Escribe una expresión para la edad de Carlos.
   b) Escribe una ecuación especificando que la edad de Carlos es 76.
   c) Encuentra la edad de Rogelio resolviendo la ecuación.

37. Ricardo recibe $3.00 menos por semana que su hermana mayor Martha. Si *x* representa la cantidad que Martha obtiene por semana.
   a) Escribe una expresión para la cantidad que Ricardo obtiene por semana.
   b) Escribe una ecuación especificando que Ricardo obtiene $11.00 por semana.
   c) Encuentra la cantidad de dinero que recibe Martha resolviendo la ecuación.

38. Jaime maneja una tienda de venta de menudeo. En cada artículo vendido, él obtiene un beneficio del 20%, lo cual significa que lo vende a 1.2 veces de lo que pagó por el artículo. Si *x* es la cantidad de dinero que él pagó por un artículo:
   a) Escribe una expresión que represente el precio de venta de un artículo.
   b) ¿Cuál es el precio de venta de:
      i) Una bandera por la cual pagó $5.00;
      ii) Un sartén por el cual pagó $9.00;
      iii) Un escritorio por el cual pagó $140.00?
   c) Encuentra cuánto pagó Jaime por:
      i) Un maletín que vende a $84.00;
      ii) Un reloj que vende a $13.20

39. Las reglas de una compañía constructora dicen que un supervisor gana 1.5 veces más que un jornalero. Si *x* es el salario por hora que gana un jornalero:
   a) Escribe una expresión para el salario por hora que gana un supervisor.
   b) Rodrigo es un jornalero que gana $6.00 por hora, ¿cuánto ganará el supervisor?
   c) Si el pago de Rodrigo es incrementado a $8.00 por hora, ¿cuánto ganará el supervisor?
   d) Supongamos que un supervisor gana $9.60 por hora, ¿cuánto gana un jornalero bajo estas condiciones?

40. El número de segundos que tarda el sonido de un trueno para escucharlo es 3 veces la distancia en kilómetros a que cayó el rayo. Si *x* es la distancia en kilómetros a que cayó el rayo:
   a) Escribe una expresión para el número de segundos que toma para escuchar el sonido de un trueno.

   b.) ¿Cuánto tiempo tarda en escuchar el sonido de un trueno si el rayo cayó a:
      i) 5 km
      ii) 2.8 km
   c) Escribe una ecuación especificando que el sonido se tarda 12 segundos en escucharse. Después resuélvela para encontrar su distancia al lugar donde cayó el rayo.

4.2 ECUACIONES QUE NECESITAN DOS TRANSFORMACIONES

Has resuelto ecuaciones sumando (o restando) un número a(o de) cada miembro. También has resuelto ecuaciones multiplicando (o dividiendo) cada miembro por un número. Algunas ecuaciones requieren ambas transformaciones. Por ejemplo, para resolver

$\frac{1}{5}x+4=13$

primero debes restar 4 de cada miembro y obtenemos

$\frac{1}{5}x+4-4=13-4$

$\frac{1}{5}x=9$

De aquí, la ecuación es similar a las que has resuelto antes. Multiplicando cada miembro por 5 nos da:

$5(\frac{1}{5}x)=5(9)$

$x=45$

Para estar seguro que la respuesta es correcta, debes comprobar la solución sustituyendo el valor de *x* en el lado izquierdo de la ecuación original y mostrando que obtienes la respuesta del lado derecho.

Comprobación:

$\frac{1}{5}x+4$

$=\frac{1}{5}(45)+4$

= 9+4
= 13 la respuesta es correcta

El secreto para resolver estas ecuaciones es hacer todo lo necesario para tener la variable en un solo lado de la ecuación.

OBJETIVO

Tener habilidad de resolver ecuaciones que requieran más de una transformación.

EJEMPLO 1
Resuelve y comprueba: $2x+3=19$

$2x+3=19$	Escribe la ecuación
$2x+3-3=19-3$	Resta 3 de cada miembro
$2x=16$	Asocia y haz las operaciones
$\frac{2x}{2}=\frac{16}{2}$	Divide cada miembro entre 2
$x=8$	Haz las operaciones

Comprobación

$2x+3$	
$=2(8)+3$	Sustituye 8 en lugar de x
$=16+3$	Haz las operaciónes
$=19^{*}$	El "*" muestra que haz visto que la respuesta que obtuviste es la misma que el lado derecho de la ecuación original.

EJEMPLO 2

Resuelve y comprueba: $13=9-\frac{1}{3}x$

$13=9-\frac{1}{3}x$	Escribe la ecuación
$13-9=9-\frac{1}{3}x-9$	Resta 9 de cada miembro
$4=-\frac{1}{3}x$	Haz la operación en el lado izquierdo. Cancela 9 con - 9 en el lado derecho.
$(-3)(4)=(-3)(-\frac{1}{3}x)$	Multiplica cada miembro por -3
$-12=x$	Haz la operación en el lado izquierdo. Asocia -3 con $-\frac{1}{3}$ en el lado derecho. Para cancelar -3

$9-\frac{1}{3}(-12)$	Sustituye x por - 12 en el lado derecho
$=9+4$	Haz las operaciones
$=13^{*}$	Muestra que obtuviste el valor igual al miembro del lado izquierdo.

Ahora que sabes cómo resolver ecuaciones más difíciles, puedes utilizar los procedimientos vistos para resolver problemas algo más complicados.
Supongamos que toma 4 minutos cocinar una tanda de pan cakes. Cocinando 3 tandas tomará 4×3 minutos ó sea 12 minutos. Cocinando x tandas tomaría $4x$ minutos. En cada caso, multiplicas el número de tandas por 4. Sin embargo se toma algún tiempo de antemano para batir la mezcla y calentar el comal. Si se requiere 10 minutos para hacer todas estas cosas, entonces el tiempo total debería ser:
$4x+10$ min.

En esta expresión x es el número de tandas. Para encontrar el tiempo para 7 tandas, deberás sustituir 7 en lugar de x
$4x+10$
$=4\times7+10$
$=28+10$
$=38$
38 minutos

Para encontrar cuántas tandas cocinarás en 30 minutos, iguala $4x+10$ a 30 y resuelve la ecuación para x.
$4x+10=30$
$4x+10-10=30-10$
$4x=20$

$\frac{4x}{4}=\frac{20}{4}$
$x=5$

5 tandas.
La clave para resolver problemas parecidos a éste es establecer una variable para una cantidad, tal como el número de tandas ; entonces escribes una expresión en términos de la variable escogida, tal como el número de minutos. El problema puede entonces ser resuelto ya sea evaluando la expresión o resolviendo la ecuación.

EJEMPLO 3

Problema del bote

Raúl conduce un bote en el lago. El inicia el regreso al embarcadero desde una distancia de 800 metros. El viaja a razón de 50 m. por minuto hacia el embarcadero.

a) Haz un dibujo mostrando el lugar desde donde Raúl inició su regreso, la distancia total 800 m y Raúl en algún lugar enmedio.

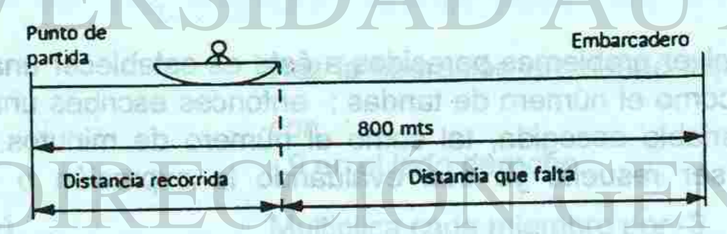
b) ¿Cuánto ha recorrido Raúl después de:
i) 1 min.
ii) 2 min.
iii) 5 min.?

c) ¿A qué distancia se encuentra Raúl del embarcadero después de:
i) 1 min.
ii) 2 min.
iii) 5 min.?

d) Sea x el número de minutos desde que Raúl inicia su regreso hacia el embarcadero, escribe una expresión en términos de x para:
i) La distancia que Raúl ha recorrido
ii) A qué distancia se encuentra del embarcadero
Escribe estas expresiones en el dibujo.

e) Escribe una ecuación que establezca que Raúl ha alcanzado un punto a 150 m. del embarcadero. Entonces resuelve la ecuación para encontrar el número de minutos cuando él está a 150m del embarcadero.

Solución



b) *i)* 50m — El viaja a 50m por minuto

ii) 50(2)=100 — El recorre 50(2)m en 2 minutos
100 — Escribe la respuesta
iii) 50(5)=250 — El recorre 50(5)m. en 5 min.
250 — Escribe la respuesta

c) *i)* 800-50=750 — Había 800 m de distancia y él ha recorrido 50m. Así que le falta aún 800-50 por recorrer.
750m — Escribe la respuesta
ii) 800-100=700
700m
iii) 800-250=550
550m.

d) *i)* x = número de minutos — Escribe lo que representa x
$50x$=número de mts. recorridos — El recorre $50(x)$m en x min.
ii) $800-50x$=número de mts. al embarcadero — El ha recorrido $50x$ de los 800 mts. Así que $800-5x$ es lo que le falta

e) $800-50x=150$ — Escribe la ecuación
$800-50x-800=150-800$ — Resta 800 de cada miembro
$-50x=-650$ — Conmuta, asocia y haz las operaciones
$$\frac{-50x}{-50}=\frac{-650}{-50}$$ Divide cada miembro entre -50
$x=13$ — Haz la operación
Después de 13 min. — Contesta la pregunta

Nota que la distancia que Raúl recorre es su rapidez multiplicada por el tiempo. Este es un ejemplo de la fórmula distancia-rapidez-tiempo.

FÓRMULA

FÓRMULA: DISTANCIA-RAPIDEZ-TIEMPO

Distancia = (rapidez)(tiempo)
o
d=rt

Donde
d es distancia
r es rapidez
t es tiempo

EJERCICIO 4.2

Resuelve las siguientes ecuaciones :

1. $\frac{1}{3}x+5=7$
2. $\frac{1}{5}x+3=9$
3. $\frac{1}{2}x-8=3$
4. $\frac{1}{4}x-7=2$
5. $5x+4=39$
6. $6x+5=53$
7. $3a-7=26$
8. $2r-13=95$
9. $-\frac{1}{6}x+5=8$
10. $-\frac{1}{3}x+6=10$
11. $-\frac{1}{4}x-9=17$
12. $-\frac{1}{2}x-7=23$
13. $13-4y=25$
14. $5-3t=56$
15. $8-\frac{1}{7}v=-19$

16. **Problema de donas**

Donas García vende donas a $2.00 cada una más $1.50 por el empaque. Así que el total de dinero que pagas es 2 veces el número de donas más 1.5. Supongamos que *x* es el número de donas:

a) Escribe lo que representa *x* . Luego escribe una expresión para la cantidad que pagas por *x* donas.

b) ¿Cuánto pagarás en total por:
   i. 12 donas ?
   ii. 100 donas?

c) Escribe una ecuación donde se establece que la cantidad que pagas en total es de $35.50. Luego resuelve la ecuación para saber cuántas donas adquieres por $35.50?

17. **Problema sobre trabajo de plomería**

Plomería Ruíz cobra a razón de $42.00 por hora, más $35.00 por el servicio. Suponiendo *x* como el número de horas de trabajo.

a) Escribe lo que representa *x*. Entonces escribe una expresión para la cantidad de dinero que hay que pagar por *x* horas de trabajo.

b) Cuánto pagarías por:
   i. 3 h
   ii. 4½h

c) Escribe una ecuación que establezca que la cantidad que pagas es de $140. Entonces resuelve la ecuación para saber cuánto tiempo trabajaron

d) ¿Cuánto trabajaron si la nota fue de $56.00?

18. **Problema de un taxi**

Cuando inicia la carrera un taxi, su taxímetro marca $3.00 . Una vez que el taxi empieza a viajar esta cantidad aumenta a razón de $1.60 por kilómetro recorrido. Suponiendo que *x* es el número de kilómetros recorridos:

a. Escribe lo que representa *x*. Luego escribe una expresión para la cantidad a pagar después de *x* kilómetros.

b. ¿Cuánto pagarías después de:
   i) 5 km?
   ii) 13 km?

c. Escribe una ecuación donde se diga que pagaste $20.60. Luego resuelve la ecuación para saber cuántos kilómetros recorriste.

d. ¿Cuánto recorrerías por $35.00?

19. **Problema de la temperatura dentro de la tierra**

La temperatura dentro de la tierra se supone que aumenta alrededor de 10° Celsius por cada kilómetro debajo de la superficie. Suponiendo que la temperatura en la superficie es de 24°C. Si *x* es el número de kilómetros por debajo de la superficie.

a) Escribe una expresión para el número de grados a una profundidad de x kilómetros.

b) Encuentra la temperatura en el fondo de una mina de carbón de 1.3 km. de profundidad.

c) Encuentra la temperatura en el fondo de un pozo de petróleo a 5 km. de profundidad.

d) Escribe una ecuación que establezca que la temperatura en el fondo de una mina de diamantes es de 61°C. Entonces resuelve la ecuación y encuentra la profundidad de la mina.

e) ¿A qué profundidad herviría el agua (100°C)?

20. **Problema del pollo frito**

Un comerciante de pollo frito lo vende en cajas con varias piezas. El cobra $4.00 por cada pieza de pollo más un costo adicional de $5.50 por caja, los bollos y el servicio.

a) Escribe una ecuación para el número de pesos que hay que pagar por cada caja con *x* piezas de pollo

b.) Escribe una ecuación que establezca que una caja que contiene *x* piezas de pollo cuesta $33.50. Entonces resuelve la ecuación y encuentra el número de piezas en la caja.

c.) ¿Cuánto pagarías por:
   i) Una caja con 5 piezas?
   ii) Una caja con una docena?

4.3 ECUACIONES CON TÉRMINOS SEMEJANTES

Esta sección está hecha para que leas y trabajes solo, sin necesidad de una clase o una explicación.

Puedes resolver ecuaciones como: $4x+2=10$ o simplificar expresiones tales como: $2x-4+3x$ la cual tiene términos semejantes. Ahora estás listo para trabajar estas dos técnicas juntas y resolver ecuaciones como: $2x-5+7x=14$

En tales ecuaciones la variable aparece más de una vez.

OBJETIVO

Ser capaces de resolver ecuaciones que tienen términos semejantes en un miembro.

La ecuación $3x-7+5x=25$ puede ser transformada combinando términos semejantes en el miembro izquierdo.

Obtienes:

$8x-7=25$

Entonces:

$8x-7+7=25+7$	Agrega 7 a cada miembro
$8x=32$	Haz las operaciones
$\frac{8x}{8}=\frac{32}{8}$	Divide por 8 cada miembro.
$x=4$	Respuesta.

Comentario:
Puedes hacer uno de éstos pasos mentalmente, o sea:

$8x-7=25$	
$8x=32$	Agregar 7 a cada miembro
$x=4$	Dividir entre 8 cada miembro

EJEMPLO:
Resuelve y comprueba: $2x-8+7x=19$

$2x-8+7x=19$	Escribe la ecuación dada
$9x-8=19$	Combina los términos semejantes
$9x-8+8=19+8$	Suma 8 a cada miembro y efectúa
$9x=27$	las operaciones.
$\frac{9x}{9}=\frac{27}{9}$	Divide cada miembro por 9

$x=3$	Realiza las operaciones
	Respuesta.

Comprobación:

$2x-8+7x$	Escribe el miembro izquierdo
$=2(3)-8+7(3)$	Sustituye 3 en lugar de x
$=6-8+21$	Haz operaciones aritméticas y comprueba las respuestas
$=19$	

Comentario: También puedes hacer los pasos algebraicos mentalmente.

EJERCICIO 4.3

En los siguientes problemas resuelve la ecuación y comprueba la respuesta.

1) $3x+5x=16$
2) $5x+2x=20$
3) $6x-4x=8$
4) $8x-3x=35$
5) $2x+7x+8=26$
6) $6x+2x+7=31$
7) $10x-7x+18=6$
8) $7x-4x+21=15$
9) $11x-8x+10=13$
10) $6x-5x+7=11$
11) $2x+4+5x=39$
12) $x+6+7x=62$
13) $9x-14-5x=-10$
14) $8x-4-2x=-10$
15) $10x-x=90$
16) $7x-6+5x=42$
17) $9x-6+2x=27$
18) $4x-6+x=24$
19) $2x+3x+4+5x=42$
20) $3x+4+5x+6x=32$
21) $x-4+2x-6=20$

Del problema 22 al 31 da respuesta a:

22) Simplifica: $3x-4+5x$
23) Evalúa: $0.3+4.7(2)$
24) Evalúa: $3x+4.9$ si x es 5
25) Simplifica: $4-(2x-11)$
26) Evalúa: $4-13+9$
27) Evalúa: $\frac{2}{3}x-10$ si x es 24
28) Escribe una expresión para 12 menos x.
29) Escribe una expresión para el producto de 6 y x, con un incremento en 5

4.4 APLICANDO LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA EN ECUACIONES CON TÉRMINOS SEMEJANTES

En la sección anterior resolviste ecuaciones con términos semejantes en el miembro izquierdo como $8x-1+5x=25$ transformándola en una ecuación agrupando términos semejantes, o sea:

$8x-1+5x=25$	Ecuación original
$13x-1=25$	Agrupando términos semejantes

Ahora resolverás ecuaciones tales como $7(x-3)+2x=6$ en donde primero aplicarás la propiedad distributiva y luego agruparás términos semejantes.

OBJETIVO

Deberás ser capaz de resolver ecuaciones con términos semejantes en un miembro, requiriendo algunas veces aplicar la propiedad distributiva y luego agrupar términos semejantes.

EJEMPLO 1

Resuelve la siguiente ecuación: $7(x-3)+2x=6$

$7(x-3)+2x=6$	Ecuación dada
$7x-21+2x=6$	Aplique la propiedad distributiva
$9x - 21 + 21 = 6 + 21$	
$9x-21=6$	Agrupa términos semejantes
$9x=27$	Suma 21 a los dos miembros
$x=3$	Divide por 9 los dos miembros

Comprobación

$7(x-3)+2x =$	Ecuación dada
$= 7(3-3)+2(3)$	Sustituye x por 3
$= 21-21+6$	Realiza operaciones
$= 0+6$	Realiza operaciones
$= 6$	Respuesta comprobada

Algunas ecuaciones requerirán aplicar la propiedad distributiva más de una vez o pueden tener la variable en el miembro derecho en lugar del izquierdo.

EJEMPLO 2

Resolver y comprobar la ecuación: $6=2(x-6)+4(2-3x)$

$6=2(x-6)+4(2-3x)$	Ecuación dada
$6=2x-12+8-12x$	Distribuye 2 con x y -6 y 4 con 2 y $-3x$

$6=-10x-4$	Agrupa términos semejantes
$10=-10x$	Agrega 4 a los dos miembros
$-1=x$	Divide ambos miembros por -10.
$x=-1$	*Respuesta en forma habitual*

Comprobación

$?=2(x-6)+4(2-3x)$	Miembro derecho de la ecuación
$?=2(-1-6)+4(2-3(-1))$	Sustituye x por -1
$?=2(-7)+4(5)$	Efectúa operaciones
$?=-14+20$	Más operaciones
$6=6$	Respuesta comprobada.

PRÁCTICA ORAL

¿Qué ecuación se obtiene después de aplicar la propiedad distributiva?

Ejemplos:

	Respuesta
a) $5(4-3x)+4x=15$	a) $20-15x+4x=15$
b) $6x-4(3x+1)=10$	b) $6x-12x-4=10$

Resuelva los siguientes ejercicios como en los ejemplos anteriores.

1) $2(5-3x)+2x=8$
2) $5(2x-4)+2x=11$
3) $4(3w+5)-2w=6$
4) $6(3z-2)-5z=1$
5) $-2(4l+3)+5l=7$
6) $-4(m-1)+2m=4$
7) $6(2y-3)+5=5$
8) $7(x+2)-7x=9$
9) $-3(w+5)-6w=8$
10) $6(z-2)+8z=13$

EJERCICIO 4.4

Resuelve y comprueba

1) $7x+3x=20$
2) $8x-5x=6$
3) $5x-8x=-6$
4) $4x+5+3x=23$
5) $7w-8-4w=25$
6) $18z+7+7z=107$
7) $-5m+17-8m=56$
8) $58=6-14y+12y$
9) $65=5-8v+2v$
10) $8w+5-7w=22$
11) $20x+84-84=0$
12) $13b+105-8b=0$
13) $9s+33+s=-93$
16) $6(w+2)-4w=48$
17) $2(3l-7)+4l=26$
18) $5n+3(n+4)=28$
19) $6x+3(x+7)=3$
20) $5x-2(3x+1)=-12$
21) $7x-4(2-3x)=-27$
22) $4x-(5x+8)=0$
23) $15-5(x+1)=10$
24) $2x-4(3x+1)+4-3x=6$
25) $2(2x+1)-3(2x-3)=15$
26) $55=3(2x-1)+(2(x+5)$
27) $49=4(5x+2)-2(2x+1)-8$
28) $3(b+2)-(b-1)=17$
29) $4(w+3)-(w-1)=64$

14) $2x+5-3x+8x=19$
15) $3w-7w+15+6w=41$
29) $4(w+3)-(w-1)=64$
30) $5(y+1)-4(2y-1)=15$

En los problemas siguientes se requiere de transformaciones inteligentes teniendo algunas respuestas sorpresivas.

31) $18x+70=18x$
32) $24x+84=24x$
33) $6(4w+5)-4(6w-1)=34$
34) $5(2x+3)-2(5x-1)=15$

4.5 ECUACIONES QUE CONTIENEN VARIABLES EN AMBOS MIEMBROS

Has resuelto ecuaciones con la variable en el miembro izquierdo o miembro derecho; ahora verás ecuaciones tales como $9x+5=5x+9$ que tienen términos variables en ambos miembros. Estas ecuaciones pueden ser transformadas de modo que todos los términos variables se coloquen en un miembro o sea:

$9x+5=5x+9$	Ecuación dada
$9x+5-5x=5x+9-5x$	Resta *5x* en cada miembro
$4x+5=9$	Conmuta, asocia, agrupa términos semejantes
$4x+5-5=9-5$	Resta 5 en ambos miembros
$4x=4$	Divide por 4 ambos miembros
$x=1$	

Comprobación

$9x+5=5x+9$	Ecuación dada
$9(1)+5=5(1)+9$	Sustituye 1 por *x*
$14=14$	Efectúa operaciones
$14=14$	Respuesta comprobada

OBJETIVO:

Ser capaces de resolver ecuaciones con variables en ambos miembros.

EJEMPLO:
Resolver y comprobar

$6x+100=16x$	Ecuación dada
$6x+100-6x=16x-6x$	Resta *6x* en ambos miembros
$100=10x$	Conmuta, asocia y agrupa términos semejantes
$10=x$	Divide por 10 ambos miembros
$x=10$	Respuesta en forma habitual.

NOTA: como se resta el menor de los términos con x o sea 6x para evitar obtener una expresión negativo con x, esto facilita el cálculo, pero no es determinante en la resolución de una ecuación.

Comprobación

$6x+100=16x$	Ecuación dada
$6(10)+100=16(10)$	Sustituye 10 por *x*
$60 + 100 = (16)(10)$	Haz operaciones
$160=160$	Respuesta comprobada

En ocasiones hay sorpresas al resolver ecuaciones de este tipo. Por ejemplo la ecuación $x=x+8$ no tiene solución. Esto quiere decir que el número *x* es 8 más que sí mismo. Si tratas de resolver tal ecuación, obtendrás el siguiente resultado:

$x=x+8$	Ecuación dada
$x-x=x+8-x$	Restando *x* en ambos miembros
$0=8$	Combinando términos
(FALSO)	

Conclusión
La relación 0=8 es imposible por lo que no hay solución.

Otros resultados sorpresivos se nos dan al resolver ecuaciones como:

$4x+6x+14=10x+2+12$

$10x+14=10x+14$ Agrupando términos semejantes

Las dos expresiones son idénticas. La expresión es verdadera para todo valor de *x*. Así si *x* toma el valor de 2 nos queda 10(2)+14=10(2)+14 o sea 34=34 y así para todo valor de x.

Tal ecuación es llamada ***"identidad"***. Las ecuaciones que has resuelto son llamadas ecuaciones condicionales, porque ellas son ciertas sólo para algún valor de la variable.

Definiciones:

Identidad: Es una igualdad que es cierta para todo valor que tome la variable.

Ecuación Condicional: Es una ecuación que es cierta para algún(os) valor(es) de la variable y no es cierta para otros valores de la variable.

Así si resuelves la identidad $\left[\frac{10x+14}{2}\right]^2 = 25x^2+70x+49$ obtendrás el siguiente **resultado:**

$\left[\frac{10x+14}{2}\right]^2 = 25x^2+70x+49$ Ecuación dada

$$\left[\frac{10x+14}{2}\right]^2 = (5x+7)^2$$ Escribiendo el miembro derecho como un binomio al cuadrado

$$\frac{10x+14}{2} = 5x+7$$ Sacando raíz cuadrada a ambos miembros

5x + 7 = 5x + 7 Dividiendo por 2

0 = 0 Trasponiendo términos

(IDENTIDAD)

Conclusión

0 = 0 es verdadero independientemente del valor de x, por lo que la ecuación es una identidad.

Ilustremos de nuevo estas ideas con los ejemplos siguientes:

EJEMPLO:

Resuelve

6-3x=-3x	Ecuación dada
6-3x+3x=-3x+3x	Suma *3x* a los dos miembros
6=0	Agrupa términos semejantes
No hay solución	Da la conclusión

EJEMPLO:

Resuelve

8(x+3)=6x+24+2x	Ecuación dada
8x+24=8x+24	Distribuyendo 8 y agrupando términos semejantes
(IDENTIDAD)	Da la conclusión

PRÁCTICA ORAL

¿Qué harías para deshacerte de la variable en el miembro derecho?

Ejemplos	Respuestas
i) 5x+7=2x	*i)* Resta *2x* a cada miembro
ii) 9x=3-6x	*ii)* Suma *6x* a cada miembro
iii) x=8x-16	*iii)* Resta *8x* a cada miembro

Resolver las ecuaciones de acuerdo a los ejemplos anteriores.

1) *9x-2=4x*
2) *8-4x=14x*
3) *3x=9-11x*
4) *-3x=2-2x*
5) *8+3x=5-2x*
8) *6x+5=-3x*
9) *10x=4+16x*
10) *-4x=-2x+3*
11) *2x+1=3x-7*
12) *3-2y=-11y+4*

6) Define identidad
7) Define ecuación condicional

El último paso en la solución de una ecuación se da a continuación. Menciona si la ecuación es condicional, si es una identidad, o si no tiene solución.

Ejemplos	Respuesta
i) $\sqrt{x}=-8$	*i)* No hay solución
ii) $(5x+3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$	*ii)* Identidad
iii) 2x + 6 = 8	*iii)* Condicional

13) $x^2 = -1$
14) $4x^2 = (2x)(2x)$
15) $2x^2 = -3$
16) *20x + 2= 2(10x +1)*
17) $x+1=\dfrac{2x+2}{2}$
18) *x*=3
19) 8=*x*
20) 8=8
21) *w*=0

EJERCICIO 4.5

Resuelve y comprueba los ejercicios siguientes

1) *10x+54=4x*
2) *12x-56=16x*
3) *9w=4w-65*
4) *55-3v=8v*
5) *54-5n=4n*
6) *9x=120-3x*
7) *-16a=10a-70*
8) *14c+30=16c*
9) *7n=-16-9n*
10) *58y=54y-56*
11) *40x=1-x-300*
12) *28x+264=16x*

En los problemas siguientes resuelve y comprueba. Si la ecuación es una identidad o no tiene solución, escribe la conclusión apropiada.

13) *8y=74+8y*
15) *5l+8=7l+8*
17) *4-3x=5-6x-7*
19) *7y=5(y-12)*
21) *3z+3(1-z)=z-17*
23) *x+2(x+4)=1+3(x+2)*
25) *2[1-3(w+2)+2(w+3)]=5w*
27) *6(x+4)-(x+3)=x-1*
29) *9(y-4)-3y=6(y-6)*
14) *10a+14=8a+14*
16) *4w-3=5-6w-7*
18) *8(x+3)=12x*
20) *5(9-x)=4(x+18)*
22) *4(w+1)=6-2(1-2w)*
24) *2[1-3(x+2)]=-x*
26) *3(1+x)=2[3(x+2)-(x+1)]*
28) *3(6x+2)-(2x-2)=12(x+10)*
30) *-2[-2(y+1)-3(y-2)]=8*

4.6 ECUACIONES QUE INVOLUCRAN DECIMALES

Hasta ahora las ecuaciones que has resuelto satisfactoriamente tienen soluciones enteras, pero en la mayoría de los problemas de la vida diaria no ocurre así.

Por ejemplo, si manejas recorriendo 260 km con un tanque de gasolina lleno de una capacidad de 55.2 litros, entonces tu rendimiento es:

$$\frac{260}{55.2}\text{ km/l}=4.71014492\text{ km/l}$$

redondeando a una decimal es aproximadamente 4.7 km/l.

En esta sección resolverás ecuaciones cuyos resultados serán decimales.

OBJETIVO:

Ser capaces de encontrar soluciones aproximadas para ecuaciones que involucran decimales.

Cubre las respuestas al trabajar los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1
Resuelve *15x+31=-22* redondeando la parte decimal a dos dígitos. Comprueba la respuesta.

15x+31=-22	Ecuación dada
15x=-53	Restando 31 en ambos miembros
x=-53/15	Dividiendo por 15 ambos miembros
x»-3.5333	Haciendo operaciones
x»-3.53	Redondeando a dos decimales

Comprobación

15(-3.5333...)+31=-22	Sustituyendo *x* por su valor
-22=-22	Haciendo operaciones; la respuesta está comprobada

Observaciones:
El símbolo » significa aproximadamente igual a.

Para redondear un número con decimales a dos dígitos se pone una marca después del segundo dígito a la derecha del punto decimal, por ejemplo, sea el número 6.1574315. Ahora pregúntate "57 esta más cercano a 50 ó 60", como está más cerca de 60, lo redondeas hacia arriba, obteniendo 6.16.

Si el número fuere 6.1554315 redondearíamos hacia arriba, o sea 6.16

EJEMPLO 2
Resuelve *1.2x-22.3=0.43x-4* redondea a dos decimales, comprueba la respuesta

1.2x-22.3=0.43x-4	Ecuación dada
1.2x-0.43x=-4+22.3	Suma 22.3 y resta 0.43*x* a los dos miembros.
0.77x=18.3	Agrupa términos semejantes
x=18.3/0.7	Divide por .77 los dos miembros
x=23.76623	Haciendo operaciones
x»23.77	Redondeando a dos decimales

Comprobación:

1.2(23.76623...)-22.3=0.43(23.76623...)-4
6.2194=6.2194

EJEMPLO 3

Resuelve *5.3x+11.82=4.2(3.1x-7.5)* redondea a dos decimales, comprueba la respuesta.

5.3x+11.82=4.2(3.1x-7.5)	Ecuación dada
5.3x+11.82=13.02x-31.50	Aplicando la propiedad distributiva
5.3x-13.02x=-31.50-11.82	Restando 11.82 y 13.02*x* en ambos miembros
-7.72x=-43.32	Agrupando términos semejantes
$x=\frac{-43.32}{-7.72}$	Dividiendo ambos miembros por -7.72
x=5.61139	Haciendo operaciones
x»5.61	Redondeando a dos decimales

Comprobación
5.3(5.61139...)+11.82=4.2(3.1(5.61139...)-7.5)
41.5604=41.5604

PRÁCTICA ORAL

Redondea a dos decimales
a) 5.1674
b) -0.4178
c) 3.798251

Respuestas
a) 5.17
b) -0.42
c) 3.80

Redondea como en los ejemplos anteriores
1) 6.227

5) 96.582
6) 15.773

2) 0.1641
3) 3.52891
4) -5.7102
7) 18.487
8) 20.936

Realiza las divisiones para encontrar el cociente y aproxima las respuestas a dos decimales.

9) $\frac{3.9}{1.5}$ 13) $\frac{5.12}{1.7}$

10) $\frac{4.3}{9.7}$ 14) $\frac{3.76}{2.11}$

11) $\frac{-5.4}{0.7}$ 15) $\frac{0}{5.9}$

12) $\frac{4.013}{0.67}$ 16) $\frac{3.9}{0}$

EJERCICIO 4.6

Resuelve las siguientes ecuaciones y aproxima la respuesta a dos decimales. Comprueba la respuesta.

7) *3(4.8x+10)=2x+5.4*
8) *11.8-3.4v=6(4.1-v)*
9) *2.4(3.1x+4.9)=75.9+0.87x*
10) *0.72x-19.7=0.3(.2x+1.8)*
11) *0.5(2.1x-3)=0.6(3.1x+8)*
12) *5(1.3-6.5x)-6(8.1x-4)=7.1x-12.3*
13) *5[1.5(x-1)-6.8]-0.31x=3.7*

4.7 ECUACIONES LITERALES Y FÓRMULAS

Has estado resolviendo ecuaciones en las que hay una variable y varias constantes, tales como: 6x+182=88

Si una letra es usada en lugar de una o más constantes, como en *6x+b=88* la ecuación es una ecuación literal, donde la letra b representa una constante no especificada y x es la incógnita.

Si resuelves una ecuación literal, el valor de la *x* estaría en términos de otras letras. En la ecuación *6x+b=88* restando *"b"* a cada miembro da:

6x=88-b

$x = \frac{88 - b}{6}$ Dividiendo por 6 cada miembro

$x = \frac{1}{6}(88 - b)$ El resultado es llamado "una fórmula de *x* en terminus de *b*".

En esta sección resolverás algunas ecuaciones literales y evaluarás fórmulas para valores dados de las constantes literales.

OBJETIVO:

a) Dada una ecuación literal, resolver para la variable.
b) Dada la fórmula, evaluar para varias de las constantes.

EJEMPLO 1

Resuelve *10w+3b=34* para *w* en términos de *b*.

10w+3b=34 Ecuación dada
10w=34-3b Resta *3b* en ambos miembros

$w = \frac{34 - 3b}{10}$ Divide por 10 ambos miembros.

EJEMPLO 2

Resuelve la ecuación *R=L(A)* para *L* en términos de *A*.

R=L(A) Ecuación dada
R/A=L Divide ambos miembros por *A*
L=R/A Propiedad simétrica de la igualdad.

EJEMPLO 3

El largo de un rectángulo es dado en términos del área *A* y el ancho *W* por la fórmula *L=A/W*.
Encontrar el largo si:
a) *A*=600 cm^2
W=16 cm
L=*A/W* Fórmula dada
L=600/16 Sustituye *A* y *W*
L=37.5 cm Haz operaciones.
El largo es 37.5 cm

Encontrar el largo si:

b) A=0.8 cm^2

W=0.05 cm

$L=A/W$ Fórmula dada

$L = \frac{.8}{.05}$ Sustituye A y W

L=16 cm Haz operaciones

El largo es 16 cm

EJEMPLO 4

La definición de la velocidad es distancia dividida por tiempo. Sea V la velocidad, d la distancia y t el tiempo.

a) Escribe la fórmula para V en términos de d y de t.
b) Resuelve para d en términos de V y de t.
c) Evalúa d cuando la velocidad es 110 km/hora y el tiempo es de 8.4 horas.

a) $V = \frac{d}{t}$ Fórmula dada

b) $Vt=d$ Multiplica ambos miembros por t.

$d=Vt$ Propiedad simétrica de la igualdad

c) d=(110)(8.4)

d=924 Km

PRÁCTICA ORAL

Evalúa la fórmula para el valor dado de la constante literal.

1) $w=5v$ si $v=6$
   $w=5v$ si $v=7$
   $w=5v$ si $v=8$

2) $x=7y$ para $y=8$
   $x=7y$ para $y=9$
   $x=7y$ para $y=10$

3) $b=3a+4$ para $a=2$
   $b=3a+4$ para $a=3$
   $b=3a+4$ para $a=4$

Resuelve la ecuación literal para x:

4) $6x=4$
5) $wx=82$, donde $w \neq 0$
6) $fx = t$, donde $f \neq 0$
7) $x+v=1$
8) $x-7=v$
9) $w+x=M$
10) $x/6=v$
11) $6x=5$
12) $xv = s/t$, si $v \neq 0$
13) $vx = \frac{gt^2}{2}$, si $v \neq 0$

EJERCICIO 4.7

Para los problemas del 1 al 15, resuelve la ecuación literal para x.

1) $10x+2t=34$
2) $14x-2k=16$
3) $8-4x=2g$
4) $30+6x=2u$
5) $2hx+2j=2v$
6) $2x=4a+2b$
7) $pcx=2p$, si $p \neq 0$ y $c \neq 0$
8) $.55x=3ab$
9) $\frac{4ax}{24} = 8b$
10) $\frac{42w}{2x} = 6$
11) $\frac{pc}{x} = \frac{c}{p}$
12) $13(x+2g)-3(4x+5g)=0$ 13) $vx-2gt=6$
14) $\frac{vx}{d} = t$
15) $8(x-b)=2(2b-x)$

En los problemas del 16 al 26 evalúa la fórmula para los valores dados de la constantes literales

16) $S=VM$, $V=7$ y $M=4$
17) $F=M(A)$, $M=100$ y $A=9.8$
18) $C= 2pv$, $p=3.14$ y $v=2$
19) $A= pr^2$, $p=3.1416$ y $r=20$
20) $V = \frac{3}{4}$ pr^3, $p=3.14$ y $r=2$
21) $V = \frac{gt^2}{2}$, $g = 9.8$ y $t = 10$
22) $S=Vt$, $V=100$ y $t=5$
23) $V= pr^2h$, $p=3.14$, $r=5$, $h=4$
24) $A=0.55bh$, $b=22$ y $h=5$
25) $P = \frac{50T}{V}$, $T = 200$ y $V = 10$
26) $V = \frac{(V_0+V_1)}{2}$, $V_0 = 10$ y $V_1 = 50$

4.8 LAS ECUACIONES LINEALES COMO MODELOS MATEMÁTICOS

Supongamos que María empieza a pelar pepinos. Cuatro minutos después su hermana Rosa se une a ella y ambas pelan pepinos. Existen varias cantidades variables en esta situación.
- El número de minutos que María ha estado pelando pepinos.
- El número de minutos que Rosa ha estado pelando pepinos.
- El número de pepinos que María ha pelado.
- El número de pepinos que Rosa ha pelado.
- El número total de pepinos que María y Rosa han pelado.

Si se te da una información de qué tan rápido pela pepinos cada una y tu escoges una variable para representar una de las cantidades que varían puedes escribir expresiones para las otras cantidades. En esta sección trabajarás problemas en los cuales hay más de una expresión que involucra a la variable.

OBJETIVO:

Podrás resolver problemas en los cuales existen dos o más expresiones con la variable.

EJEMPLO 1
María empieza a pelar pepinos a una velocidad de 6 pepinos por minuto. Cuatro minutos después Rosa se une a ella y pela pepinos a una velocidad de 10 pepinos por minuto.

1) Define una variable para el número de minutos que María ha estado pelando pepinos.

2) Escribe expresiones para
   a. El número de minutos que Rosa ha estado pelando pepinos.
   b. El número de pepinos que María ha pelado.
   c. El número de pepinos que Rosa ha pelado.
   d. El total de pepinos que han sido pelados.

3) Escribe una ecuación expresando que ellas han pelado un total de 72 pepinos. Después resuelve la ecuación para saber cuánto tiempo ha estado pelando pepinos María.

4) ¿Cuántos pepinos peló cada una?

Respuestas

1) x= el número de minutos que María ha estado pelando pepinos.
2) a. x-4 = el número de minutos que Rosa ha pelando pepinos.

   b. $6x$ = el número de pepinos que ha pelado María.
   c. $10(x-4)$-= el número de pepinos que ha pelado Rosa.
   d. $6x+10(x-4)$=total de pepinos pelados.

3) $6x+10(x-4)=72$ ecuación que expresa que han sido pelados 72 pepinos por María y Rosa.

$6x+10(x-4)=72$	Ecuación deducida
$6x+10x-40=72$	Distribuyendo el 10 con x y -4
$16x-40=72$	Reduciendo términos semejantes
$16x=112$	Sumando 40 a los dos miembros
$x=7$	Dividiendo por 16 ambos miembros

María peló pepinos por 7 minutos es la respuesta a la pregunta.

4) $6x=6(7)=42$ — María peló 42 pepinos
$10(x-4)=10(3)=30$ — Rosa peló 30 pepinos

Observación

Para que adquieras habilidades, ingenio y prontitud en la solución de problemas con enunciado ten presente el siguiente procedimiento:

a) Leer el problema con cuidado y estudiarlo hasta lograr entenderlo.
b) Identificar las cantidades conocidas y las desconocidas del problema
c) Seleccionar una de las incógnitas y representarla con la letra "x" expresando las otras cantidades en términos de "x".
d) Encontrar qué cantidades se pueden combinar para formar una igualdad
e) A partir de la combinación establecida, formar una ecuación.
f) Resolver la ecuación obtenida y comprobar la solución.

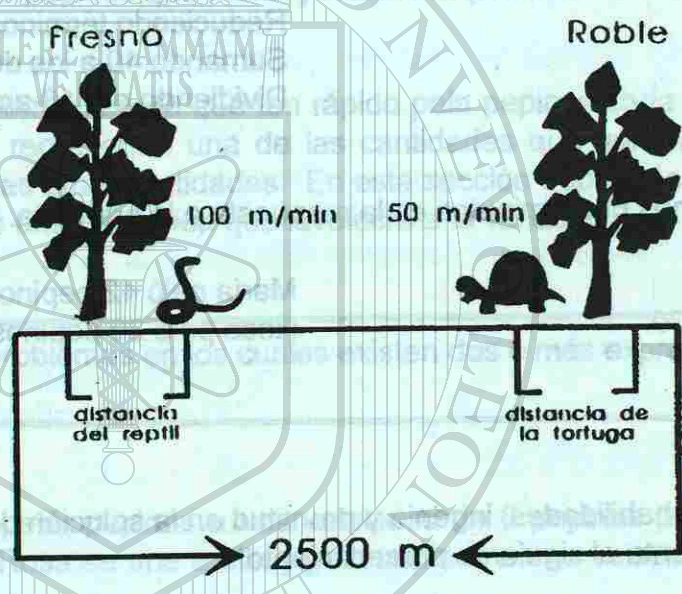
Algunos problemas involucran distancias. Para estos problemas es útil dibujar un diagrama para mostrar distancias. Puedes marcar las expresiones representando las distancias en el diagrama.

EJEMPLO 2
El problema del reptil y la tortuga.
Un reptil inicia su movimiento partiendo de un fresno hacia un roble a una velocidad constante de 100 m/min. Al mismo tiempo, del roble parte una tortuga hacia el fresno a una velocidad de 50 m/min. La distancia entre los dos árboles es de 2500 m. La variable x representa el número de minutos que han avanzado el reptil y la tortuga.

a) Dibuja un diagrama mostrando los árboles separados 2500 m., así como al reptil y la tortuga en algún lugar de esta distancia.
b) Escribe lo que representa x. Después escribe una expresión para la distancia de cada uno de ellos al roble.
c) ¿Quién está más cerca del roble después de 10 minutos?
d) ¿Quién está más cerca del roble después de 15 minutos?
e) ¿Cuándo se pasan? o mejor dicho ¿En qué momento se encuentran?
f) ¿Qué tan lejos del roble se encuentran, en el momento en que se cruzan?

Respuestas

a)



b) x= número de minutos que se han movido
$2500-100x$ = número de metros que el reptil está del roble
$50x$ = número de metros que la tortuga está del roble.

c) Reptil	Tortuga
2500-100(10)	50(10)
1500 m	500 m

La tortuga está más cerca del roble por 1000 m.

d) Reptil	Tortuga
2500-100(15)	50(15)
1000 m	750 m

La tortuga está más cerca del roble por 250 m.

e)

$2500 = 50x + 100x$	Agrupa términos semejantes
$2500 = 150x$	Divide por 150 ambos miembros
$\frac{2500}{150} = x$	Haz operaciones
$\frac{50}{3} = x$	Aplica la propiedad simétrica de igualdad
$x = \frac{50}{3}$	Contesta la pregunta
$x=16\frac{2}{3}$ min.	

f) Reptil	Tortuga
$2500 - (\frac{50}{3})\ (100)$	$50\ (\frac{50}{3})$
$2500 - \frac{5000}{3}$	$\frac{2500}{3}$ m
$\frac{7500-5000}{3}$	
$\frac{2500}{3}$ m	

NOTA: Te sirve como comprobación de la ecuación.

EJERCICIO 4.8

1. **Problema del paleo de arena.**
Raúl palea arena a una velocidad de 20 toneladas por día. Roberto palea a una velocidad de 15 toneladas por día.
   a) Expresa mediante una variable, por el número de días que Raúl ha estado paleando. Después escribe una expresión para el número de toneladas que Raúl ha paleado.
   b) Cuatro días más tarde se unen Roberto y Raúl y ambos palean juntos. Escribe una expresión por el número de días que Roberto ha estado paleando. Después escribe una expresión por el número de toneladas que ha paleado.
   c) Escribe una ecuación expresando el número total de toneladas que Raúl y Roberto han paleado si estas son 200. Después resuelve la ecuación para saber el número de días que Raúl ha paleado.
   d) ¿Cuántas de las 200 toneladas paleó Roberto?

2. **Problema del lavado de ropa.**
Patricia empieza lavando ropa en el negocio de su hermana. Treinta minutos después, Guadalupe se une a Patricia y ambas lavan ropa hasta terminar.
   a) Expresa mediante una variable por el número de minutos que Patricia ha estado lavando ropa. En seguida escribe una expresión en términos de esa variable que exprese el número de minutos que ha estado lavando ropa Guadalupe.
   b) Patricia lava ropa a una velocidad de 0.25 kg por minuto. Escribe una expresión representando el peso en kilogramos de la ropa lavada por Patricia y otra expresión semejante para Guadalupe si ésta lava ropa a una velocidad de 0.5 kg por minuto.
   c) Escribe una ecuación que exprese, que el número total de ropa lavada es de 80 kg. A continuación resuelve la ecuación para saber cuánto tiempo trabajó Patricia.
   d) ¿Cuántos kilogramos de ropa lavó cada una?

3. **Problema de trenes.**
Dos trenes distantes entre sí 600 km van al encuentro uno del otro por vías paralelas. El primero a 70 km/h y el segundo a 130 km/h. ¿En qué tiempo y lugar se cruzarán?

4. Una persona A puede pintar una casa en 10 días mientras que otra persona B lo puede hacer en 12 días ¿Cuánto tardarán las dos personas trabajando juntas en pintar la casa?

5. Un granjero utilizó 1960 m de malla para construir una cerca en un terreno rectangular. Si el ancho del terreno es $\frac{3}{4}$ partes del largo ¿Cuáles son sus dimensiones?

6. **Problema de dinero.**
Jorge tiene $1000 pesos y gasta $40 por día. Ernesto tiene solamente $60 pero está ahorrando $20 por día. Si *x* es el número de días que han transcurrido:
   a) Escribe la definición de *x*. Después escribe dos expresiones, una representando cuánto dinero tiene Jorge después de *x* días y la otra representando cuánto tiene Ernesto después de *x* días.
   b) ¿Quién tiene más dinero, y cuánto más después de:
      i) Una semana *ii*) Dos semanas

7. Luis Miguel tiene $300 pesos y ahorra $8 pesos por semana. Sergio tiene $900 pesos pero gasta $10 pesos por semana. Si *x* es el número de semanas que han pasado.
   a) Escribe qué representa *x*. Después escribe expresiones para el número de pesos que tiene cada uno después de *x* semanas.

   b) Escribe una ecuación expresando que cada uno tiene el mismo número de pesos. Resuelve la ecuación para saber cuándo tienen el mismo número de pesos.
   c) ¿Cuántos pesos serán?

8. **Problema de la temperatura.**
La temperatura en Monterrey es de 42ºC y está descendiendo con una rapidez de 1.8º C por hora. La temperatura en Saltillo es de 18ºC y está ascendiendo con una rapidez de 2.4ºC por hora.
   a) Escribe una expresión que represente la temperatura en cada lugar después de *x* horas.
   b) Escribe una ecuación expresando que ambos lugares tienen la misma temperatura.
   c) ¿Cuántos ºC son, cuando ambos tienen la misma temperatura?

9. **Problema de cambio de peso.**
Diego pesa 260 libras pero está con una dieta que le permite perder 3 libras por semana. Jaime pesa solamente 110 libras pero está con otra que le permite aumentar 4 libras por semana.
   a) Escribe una expresión representando el peso de Diego después de *x* semanas y otra expresión similar para Jaime.
   b) ¿Cuál es el peso de cada uno después de:
      i) 1 semana *ii*) 1 año
   c) ¿Después de cuántas semanas tendrán el mismo peso?

10. **Problema de la mesera y el cocinero.**
La mesera del café Rubio gana un salario de 25 pesos diarios y el cocinero 40 pesos por día. Además se dividen las propinas obtenidas de tal forma que la mesera se queda con el 60% y el 40% restante es para el cocinero. (*x* es la cantidad de dinero recibido en propinas).
   a) Escribe una expresión que represente la cantidad total de dinero (salario+propinas) que la mesera obtiene y la cantidad total que recibe el cocinero.
   b) ¿Cuánto dinero gana cada uno al día si hay:
      i) $50 pesos de propina *ii*) $80 pesos de propina
   c) Si el total de salario y propinas del cocinero y la mesera recibido en un día es de $230 pesos, encuentra la cantidad correspondiente a propinas que recibe cada uno.

15. **Problema de la bañera.**
Suponiendo que abres la llave del agua caliente la cual fluye a 8.7 litros por minuto en la bañera. Dos minutos más tarde abres la válvula del agua fría que fluye a 13.2 litros por minuto. Si *x* es el número de minutos desde que abriste la llave del agua fría :
   a) Escribe expresiones en términos de *x* por el número de minutos que el agua caliente ha estado fluyendo, el número de litros que ha fluido por la llave de agua caliente y el número de litros que ha descargado la llave del agua fría.

b) Escribe una ecuación que exprese que las llaves de agua caliente y fría han descargado el mismo número de litros.
c) La bañera contiene 100 litros. ¿Se desbordará para el tiempo que las llaves de agua caliente y fría han descargado la misma cantidad de agua?

16. **Problema del carro patrulla.**
Un camión pasa por una estación de patrullas a una velocidad de 70 millas por hora. Cuando el camión está a 10 millas de la estación un carro patrullero sale a seguirlo a una velocidad de 100 millas por hora. La variable *T* es el número de horas que el carro patrullero se ha desplazado.
a) Escribe lo que representa *T*. Después escribe dos expresiones, una representando la distancia recorrida por la patrulla y la otra la del camión después de *T* horas.
b) Si ellos continúan a la misma velocidad, ¿Quién estará más lejos de la estación?
i) A los10 minutos de salir la patrulla
ii) A los 30 minutos de salir la patrulla
c) ¿En qué tiempo alcanza la patrulla al camión?
d) Demuestra que las dos distancias son iguales en el tiempo que calculaste en la parte c.

17. **El puma y el ciervo.**
Un puma descubre a un ciervo a 132 metros de distancia. El puma avanza hacia el ciervo a una velocidad de 18 metros por segundo (m/seg). En el mismo instante el ciervo empieza a correr alejándose a 11 m/seg. Representa por x el número de segundos que el puma y el ciervo han estado corriendo
a) Escribe lo que representa *x*. En seguida escribe expresiones para las distancias que el puma y el ciervo han corrido desde el punto de partida después de *x* segundo.
b) ¿Qué tan lejos está el puma del ciervo después de 8 segundos?
c) Escribe una ecuación expresando que la distancia entre el puma y el ciervo (la distancia del ciervo menos la distancia del puma) es igual a 60 metros. Resuelve la ecuación para saber cuándo están separados 60 metros.
d) El puma tiene suficiente energía para correr 17 segundos. ¿Alcanzará al ciervo antes que se termine su energía? Justifica tu respuesta.

18. **Problema de persecución.**
Rubén roba un banco y se aleja en su carro con una rapidez de 1.7 km por minuto (km/min); 5 minutos más tarde la policía persigue a Rubén con una rapidez de 2.9 km/m. Usa *T* para representar el número de minutos que Rubén ha estado manejando su carro.
a) Escribe lo que representa *T*. Enseguida escribe una expresión representando la distancia recorrida por Rubén.
b) En términos de *T* ¿cuánto tiempo ha estado la policía conduciendo la patrulla ?. Escribe una expresión representando la distancia recorrida por la policía.

c) Cuando la policía alcanza a Rubén las distancias recorridas son iguales. Escribe una expresión expresando este hecho y resuelve para saber cuándo alcanzará la policía a Rubén.

19. **Apagado de motores de un avión.**
Un avión inicia un vuelo nocturno con todos sus motores encendidos. Su velocidad es de 900km/hora. Después de estar volando por *x* horas el piloto apaga un motor para conservar combustible. La velocidad es reducida a 700 km/hora. El avión vuela un total de 3 horas.
a) Dibuja un diagrama mostrando el punto de partida y terminación del viaje. En algún lugar del recorrido marca el punto donde el motor fue apagado. Muestra la distancia en que voló a 900km/hora y la distancia que voló a 700 km/hora.
b) Escribe una expresión para el tiempo en que se voló a 700 km/hora y la distancia recorrida a esa velocidad, así como cuando se voló a 900 km/hora.
c) Si el avión vuela 1.3 horas antes de apagar una máquina, ¿Cuántos km cubre en un total de tres horas?
d) ¿Cuánto tiempo debe volar el piloto antes de apagar el motor para recorrer una distancia total de 2352 km en tres horas?
e) ¿Cuánto tiempo debe volar el piloto antes de apagar el motor para recorrer una distancia total de 2970 km en tres horas?

4.9 ECUACIONES FRACCIONALES Y SOLUCIONES EXTRAÑAS

En esta sección aprenderás a resolver ecuaciones en las que la incógnita aparece en el denominador de una fracción algebráica.

EJEMPLO

$$\frac{x-5}{x+4}=9$$

Ecuaciones semejantes a éstas que tienen una variable en el denominador son llamadas ecuaciones fraccionales.

Definición

ECUACION FRACCIONAL

Una ecuación fraccional es una ecuación que tiene como mínimo una variable en algún denominador.

Ahora que conoces cómo trabajar con expresiones racionales, estas preparado para resolver ecuaciones fraccionales tal como:

$$\frac{3}{x}+\frac{6}{5}=\frac{1}{4x}$$

El camino a resolver un nuevo problema es transformarlo en un viejo problema. Para las ecuaciones fraccionarias, esto significa procurar eliminar los denominadores de las fracciones. La técnica es multiplicar cada miembro de la ecuación por el MCM de todos los denominadores. El MCM de x, 6 y 4 es $12x$. Así que escribe

$$12x\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{6}\right)=12x\left(\frac{1}{4x}\right)$$

En el lado derecho, $4x$ divide a $12x$ y es 3 ; en el lado izquierdo, se distribuye *12x* en cada término.

$$12x\left(\frac{3}{x}\right)+12x\left(\frac{5}{6}\right)=3(1)$$

La cancelación ahora puede hacerse en cada término de la izquierda, dando
$12(3) + 2x(5) = 3(1)$

Multiplicando da:

$36 + 10x = 3$
$10x = -33$
$x = -3.3$
Por lo tanto S = {-3.3}
Comprobación:

$$\frac{3}{-3.3}+\frac{5}{6}=\frac{1}{4(-3.3)}$$

-.90909.... + .83333... = -.07575....
- .07575... = -.07575....

Algunas veces hay sorpresas cuando resuelves ecuaciones fraccionales. Como en

$$\frac{3}{x-2}-\frac{6}{x^2-2x}=1$$

El MCM de los denominadores (el MCD) se encuentra por factorización

$$\frac{3}{x-2}-\frac{6}{x(x-2)}=1$$

Así que el MCD es x(x-2). Multiplicando cada miembro por este número da:

$$x(x-2)\left(\frac{3}{x-2}-\frac{6}{x(x-2)}\right)=x(x-2)(1)$$

Distribuyendo en el lado izquierdo y en el lado derecho da:

$$x(x-2)\cdot\left(\frac{3}{x-2}\right)-x(x-2)\cdot\frac{6}{x(x-2)}=x^2-2x$$

Cancelando en el lado izquierdo resulta:
$3x\text{-}6 = x^2\text{-}2x$

Restando $3x$ y sumando 6 en cada miembro de la ecuación da:
$0 = x^2\text{-}5x\text{+}6$

Esta es una ecuación cuadrática conocida. En este caso el miembro de la derecha se factoriza y nos da:
$0 = (x\text{-}2)(x\text{-}3)$
Igualando cada factor a 0 se tiene:

x-2=0	ó	x-3=0
x=2	ó	x=3

La sorpresa viene cuando haces la comprobación:

x=2:	x=3:
$\frac{3}{2-2}-\frac{6}{4-4}=1$	$\frac{3}{3-2}-\frac{6}{9-4}=1$
$\frac{3}{0}-\frac{6}{0}=1$ ¡No es cierto!	1=1

En este ejemplo, el 2 satisface la ecuación transformada $0=x^2\text{-}5x\text{+}6$. Pero no satisface la ecuación original. A tal número se le llama una ***solución extraña***.

Definición

SOLUCIONES EXTRAÑAS
Una solución extraña es un valor de la variable que satisface la ecuación transformada, pero no la ecuación original.

La dificultad surge porque x no puede ser igual a 2 en la ecuación original.

Las fracciones son indefinidas si sus denominadores son cero. Tan pronto como encontraste que el MCD es $x(x-2)$, debes enunciar que $x \neq 0$ y $x \neq 2$.

Se dice que éstos números no pertenecen al dominio de la variable.

Definición

DOMINIO
El dominio de una variable es el conjunto de números que pueden ser valores de la variable.

NOTA: El dominio de la variable debe excluir todos los números que hagan algún denominador igual a cero.

Cuando encuentras el MCD para la ecuación anterior, debes escribir:
MCD= $x(x-2)$

Exclusiones del dominio: $x=0$ y $x=2$.

Al final del problema deberás eliminar cualquier solución extraña antes de que escribas el conjunto solución

Por lo tanto: S={3}

OBJETIVO

Estás apto para resolver ecuaciones racionales, descartando cualquier solución extraña.

Cubre las columnas de las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

Resuelve: $\frac{7}{2x}-\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$

$\frac{7}{2x}-\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$ Escribe la ecuación dada

MCD: $10x$ — Escribe el MCD y la exclusión del dominio

Exclusiones del dominio
$x=0$

$10x\left(\frac{7}{2x}-\frac{3}{5}\right)=10x\left(\frac{1}{10}\right)$ — Multiplica cada miembro por el MCD

$5(7)-2x(3)=x(1)$ — Distribuye $10x$ y cancela
$35 - 6x = x$ — Multiplica
$-7x=-35$ — Resta 35 y resta x
$x=5$ — Divide por -7
$\therefore$ S= {5} — Escribe el conjunto solución (5 no es excluido del dominio. Así que ésta es la solución).

EJEMPLO 2

Resuelve $\frac{3}{x-5}+\frac{3}{x-5}=7$

$\frac{3}{x-5}+\frac{3}{x-5}=7$ — Escribe la ecuación dada

MCD $(x-5)(x+5)$ — Escribe el MCD y las exclusiones del dominio
exclusiones del dominio
$x=5$, $x=-5$

$\left(\frac{3}{x-5}+\frac{3}{x+5}\right)(x-5)(x+5)=7(x-5)(x+5)$ — Multiplica cada miembro por el MCD

$3(x+5) + 3(x-5)=7(x^2-25)$ — Distribuye y cancela en el lado izquierdo. Multiplica en el lado derecho.

$3x+15+3x-15=7x^2-175$ — Distribuye
$6x=7x^2-175$ — Combina términos semejantes
$0=7x^2-6x-175$ — Haz un miembro igual a cero

$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4(7)(-175)}}{2(7)}$ — Usa la fórmula cuadrática

$x=\frac{6\pm\sqrt{4936}}{14}$ — Efectúa operaciones

$x \approx 5.45$ ó $x \approx -4.59$ — Redondea el número a decimales

$\therefore$ S={5.45, -4.59} — Escribe el conjunto solución. (Ningún valor de *x* está excluido del dominio. Así que ambos valores son soluciones).

EJEMPLO 3

Resuelve $\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = 9$

$\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3} = 9$ — Escribe la ecuación dada

MCD: *x*-3 exclusión del dominio *x*=3 — Escribe el MCD y la exclusión del dominio

$\left(\frac{2x}{x-3} - \frac{6}{x-3}\right)(x-3) = 9(x-3)$ — Multiplica cada miembro por el MCD

2*x*-6=9*x*-27 — Distribuye y cancela

-7*x*=-21 — Suma 6, resta 9x

x=3 (extraña) — Divide por -7, descarta la solución extraña

$\therefore S = \varnothing$ — Escribe el conjunto solución (como la única solución posible está fuera del dominio, el conjunto solución es vacío)

PRÁCTICA ORAL

Proporciona el MCD y las restricciones del dominio

Ejemplo

$\frac{3}{x+5} = \frac{7}{x+2}$

Respuesta

MCD= (*x*+5)(*x*+2)

Dominio: *x*=-5, *x*=-2

a) $\frac{x-4}{x} = \frac{5}{2x}$ b) $\frac{x}{x-2} = \frac{x}{3}$

c) $\frac{x-6}{2x} = \frac{9}{2x}$ d) $\frac{2x}{x-7} = \frac{2x}{9}$

e) $\frac{x+5}{x+4} = 5$ f) $\frac{x-6}{x+4} = \frac{x-5}{x-4}$

g) $\frac{x+7}{x} = \frac{6}{x-2}$ h) $\frac{x+3}{5} = \frac{6}{x-2}$

i) $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{4}$

EJERCICIO 4.9

Para los problemas del 1 al 24, resuelve la ecuación ; descarta cualquier solución extraña.

1) $\frac{4x-3}{x} = \frac{17}{x}$ 2) $\frac{3x-8}{x} = \frac{13}{x}$

3) $\frac{11}{x} = \frac{7x+5}{3x}$ 4) $\frac{7x}{x} = \frac{4x-1}{5x}$

5) $\frac{a-2}{a} - \frac{7}{3a} = \frac{3}{4a}$ 6) $\frac{x-3}{x} - \frac{6}{5x} = \frac{7}{2x}$

7) $\frac{1}{7} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ 8) $\frac{1}{50} + \frac{1}{m} = \frac{1}{30}$

9) $\frac{1}{5} - \frac{1}{20} = \frac{1}{a}$ 10) $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{x}$

11) $\frac{x}{x+2} = \frac{3}{7}$ 12) $\frac{x}{x+4} = \frac{8}{3}$

13) $\frac{3}{2a} = \frac{5}{a-7}$ 14) $\frac{7}{3x} = \frac{4}{y-2}$

15) $\frac{x}{x-3} - \frac{3}{x-3} = 8$ 16) $\frac{8}{x-2} - \frac{x}{x-2} = 5$

17) $\frac{4}{a+2} - \frac{a}{a+2} = 3$ 18) $\frac{y}{y+6} - \frac{y}{y+6} = 11$

19) $\frac{8}{m+6} - \frac{8}{m-6} = 1$ 20) $\frac{3}{x-4} - \frac{3}{x+4} = 1$

21) $\dfrac{2}{x+5}-\dfrac{1}{x-3}=3$

22) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x+4}=5$

23) $\dfrac{x}{x+2}-\dfrac{7}{x+4}=2$

24) $\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{5}{x+3}=2$

Para los problemas del 25 al 34, suma o resta las fracciones y simplifica la respuesta. Recuerda que éstas son expresiones, no ecuaciones. No puedes quitar denominadores multiplicando por el MCD.

25) $\dfrac{8}{5x}+\dfrac{7}{10x}$

26) $\dfrac{7}{6y}+\dfrac{5}{3y}$

27) $\dfrac{2}{y+1}+\dfrac{3}{y+4}$

28) $\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{2}{x+1}$

29) $\dfrac{5}{x+3}+\dfrac{5}{x-3}$

30) $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{7}{x+3}$

31) $\dfrac{a^2}{x-6}-\dfrac{36}{x-6}$

32) $\dfrac{x^2}{x-3}-\dfrac{9}{x-3}$

33) $\dfrac{5}{x-2}-\dfrac{4}{2-x}$

34) $\dfrac{8}{x-4}-\dfrac{3}{4-x}$

4.10 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN RAZÓN Y PROPORCIÓN

Si alguien dice que los hombres y mujeres en un grupo están en una razón de 3 a 8, esto significa que:

$$\frac{No.Hombres}{No.Mujeres}=\frac{3}{8}$$

Existen varias maneras para que esta igualdad sea verdadera por ejemplo habrá 3 hombres y 8 mujeres o habrá 6 hombres y 16 mujeres porque:

$$\frac{6}{16}=\frac{(3)(2)}{(8)(2)}=\frac{3}{8}$$

El número de hombres debe ser un múltiplo de 3 y el número de mujeres debe ser el mismo múltiplo de 8. Esto significa que hay un número natural no nulo x tal que:
$3x$ = Número de hombres
$8x$ = Número de mujeres

El número x es un factor común del número de hombres y el número de mujeres. Suponiendo que además de conocer la razón 3:8 (forma abreviada para escribir la razón 3 a 8), también conoces que hay un total de 407 personas en el grupo. ¿Cuántos habrá de cada uno?

Entonces $3x$ es el número de hombres y $8x$ es el número de mujeres, luego puedes escribir:
$3x+8x=407$
$11x=407$
$x=37$

Así que hay 3(37)=111 hombres y 8(37)=296 mujeres. En esta sección trabajarás más problemas incluyendo razones de dos enteros.

OBJETIVO

Dadas dos cantidades hallar la razón entre ellas en forma de fracción irreducible.

Dada la razón entre dos mangnitudes e información adicional necesaria hallar las magnitudes.

Cubre las respuestas y trabaja sobre los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1

El problema de los peces.

Los naturalistas estiman que hay 3000 peces en el Lago de Chapala, algunos son carpas y el resto son lobinas. Rastrean el lago y pescan 24 carpas y 21 lobinas.

a) ¿Cuál es la razón de carpas y lobinas pescados? Expresa la respuesta en términos mínimos.

b) Asumiendo que el lago entero tiene esta razón, ¿Cuántos peces de cada tipo hay (incluyendo éstos capturados)?

a) $\dfrac{\textit{No.Carpas}}{\textit{No.Lobinas}} = \dfrac{24}{21}$

La razón es 8:7

b) Sea x = factor común — Define una variable

$\therefore$ 3x, 5x y 7x

3x+5x+7x=90

$8x$=Número de carpas — Escribe expresiones para el número de peces

$7x$=Número de lobinas

Escribe una ecuación

$15x$=3000

x=200 — Resuelve la ecuación

$8x$=1600, $7x$=1400 — Evalúa las expresiones

1600 carpas, 1400 lobinas — Anota el resultado

Comprobación

1600 + 1400 = 3000 y $\dfrac{1600}{1400} = \dfrac{8}{7}$ que es cierto.

EJEMPLO 2

Problema del triángulo.

Los lados de un triángulo tienen longitudes en la razón 3:5:7. El perímetro del triángulo es 90cm. Encuentra la longitud de los lados.

Nota: Los números 3:5:7 significa que los lados 1 y 2 están en la razón 3:5 y los lados 2 y 3 están en la razón 5:7, y los lados 1 y 3 están en la razón 3:7.

Sea x = Factor común

$\therefore$ $3x$, $5x$ y $7x$ — Son las longitudes de los lados

3x+5x+7x =90

$15x$=90

x=6

$3x$=18, $5x$=30, $7x$=42

$\therefore$ Los lados son 18 cm, 30 cm y 42 cm.

Comprobación

18+30+42=90; 18:30=3:5, 30:42=5:7, 18:42=3:7

EJEMPLO 3

Problema de los alumnos de primero y segundo año.

En una escuela la cantidad de alumnos de primer año con respecto a los de segundo año es 7:5. Si hay 231 en primero, ¿Cuántos hay en segundo?

Sea x = Número de alumnos de segundo año — Define una variable

$\dfrac{231}{x} = \dfrac{7}{5}$ — Escribe una ecuación

$5x\left(\dfrac{231}{x}\right) = 5x\left(\dfrac{7}{5}\right)$ — Multiplica cada miembro por el MCD

5(231)=7x — Cancela

1155=7x — Multiplica

165=x — Divide cada miembro por 7

165 alumnos de segundo año

Comprobación

$\dfrac{231}{165} = 1.4$ Que es igual a $\dfrac{7}{5}$

Nota: En este problema ya conoces uno de los dos enteros. Así que es más fácil definir la variable y obtener el otro entero que el factor común.

La ecuación del ejemplo 3 : $\dfrac{231}{x} = \dfrac{7}{5}$ es llamada una ***proporción***. Esto dice que dos razones son iguales. Hay una manera fácil de resolver una proporción. Si observas el tercer paso en el ejemplo puedes ver que 5(231)=7x este paso puede hacerse por ***multiplicación cruzada***

Técnica de Multiplicación Cruzada

Para encontrar una forma para describir la multiplicación cruzada, escribe la ecuación en forma de proporción

231:x = 7:5

Esta ecuación se lee "231 es a x como 7 es a 5". El 231 y el 5 son llamados ***extremos*** pues están en los dos extremos de la proporción. La x y el 7 son llamados ***medios***, pues están a la mitad de la proporción.

Como ésta ecuación es equivalente a 7x=(231)(5), puedes decir que el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Definición

MULTIPLICACIÓN CRUZADA

En una proporción tal como a:b=c:d, el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

Esto es, si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Entonces ad = bc

PRÁCTICA ORAL

¿Cuál deberá ser la razón?, en términos mínimos

EJEMPLOS

	Respuesta
i) 15:25	*i)* 3 a 5
ii) 15:22	*ii)* Ya está en términos mínimos

a) 14:35 b) 24:36 c) 12:4 d) 8:48

e) 9:48 f) 10:48 g) 28:21 h) 21:14

i) 21:12 j) 21:10

¿Cuál es el resultado de la multiplicación cruzada?

Ejemplo	Respuesta
$\frac{2}{3}=\frac{10}{x}$	2x = 30

k) $\frac{5}{7}=\frac{9}{x}$ l) $\frac{3}{8}=\frac{4}{x}$

m) $\frac{5}{x}=\frac{10}{27}$ n) $\frac{7}{x}=\frac{1}{2}$

o) $\frac{x}{5}=\frac{2}{x}$

EJERCICIO 4.10

1) **Problema de razón 1**
La razón de dos enteros es 13:6. El entero más pequeño es 54. Encuentra el entero más grande.

2) **Problema de razón 2**
La razón de dos enteros es 7:11. El entero más grande es 187. Encuentra el entero más pequeño.

3) **Problema de razón 3**
La razón de dos enteros es 9:7. Su suma es 1024. Encuentra los dos enteros.

4) **Problema de razón 4**
La razón de dos enteros es 17:13. Su suma es 390. Encuentra los dos enteros.

5) **Problema de nietos**
La Sra. Pérez tiene 18 nietos por parte de sus hijos y 12 nietos por parte de sus hijas.
a) ¿Cuál es la razón de éstos números en términos mínimos?
b) El hijo mayor Pedro, divide 7200 acres de tierra en 2 terrenos cuyas áreas están en ésta razón. ¿Cuántos acres hay en cada terreno?

6) **Problema del testamento A**
El Sr. González regularmente da $300.00 al mes para caridades y $800.00 al mes a sus nietos.
a) ¿Cuál es la razón de éstos dos números en su mínima expresión?
b) El testamento del Sr. González especifica que su herencia será dividida en la misma razón. Si su herencia tiene $104,500.00, ¿cuánto será para la caridad y cuánto para sus nietos?

7) **Problema de razón de precio-ganancia**

Las existencias de una cierta compañía se valúan a $18.20 por acción. Las ganancias de la compañía de un año llegan a $2.80 por acción.

a) Encuentra la razón de precio-ganancia. Exprésalo tanto como razón de dos enteros en su mínima expresión y como una (razón) _______:1 (como aparece en los periódicos), donde el segundo número es 1 y el primer número no es necesariamente un entero).

b) Si la compañía ganó $3;360,000.00 este año, ¿Cuál fue el valor total de sus existencias?

8) **Problema de razón de comisión de venta**

Un agente de bienes raíces vendió una casa en $84,000.00. La comisión del agente fue $5,040.00

a) ¿Cuál fue la razón de la comisión del precio de venta? Expresa la respuesta tanto como una razón de 2 enteros en su mínima expresión y como un porciento.

b) ¿Cuál sería la comisión por una casa que se vende en $278,000.00 si el porcentaje de comisión de ventas es el mismo?

9) **Problema de los boletos de baloncesto**

Se te ha pedido que estimes cuántas personas de las 12,000 que asisten a un juego de basquetbol profesional son mujeres. De una pequeña muestra, determina que la proporción de hombres a mujeres es cerca de 3:2. Aproximadamente ¿Cuántas de esas personas que asisten son mujeres?

10) **Problema del concurso de cacahuates**

Una gran jarra tiene 8,400 cacahuates y nueces ; tú recibirás un premio si adivinas el número de cacahuates que contiene la jarra lo más cerca posible al número real. De una muestra pequeña, encuentras que la proporción de cacahuates a las nueces es cerca de 3:4. Basado en esta afirmación, aproximadamente ¿Cuántos cacahuates hay en la jarra?

11) **Problemas de existencia de leche**

Supongamos que trabajas en un supermercado. El exhibidor de leche puede contener un total de 160 recipientes de un galón de leche. Las estadísticas de ventas muestran que la leche más barata excede la marca nacional de leche por 7:3. ¿Cuántos recipientes (galones de leche) de cada clase debes poner en el exhibidor para que obtengas esta proporción?

12) **Problema de dos clases de gasolina**

Una estación de gasolina de la localidad encuentra que la gasolina tipo MAGNA excede la tipo NOVA en la proporción 9:4. La cuota mensual de la estación es un total de 26,000 litros. ¿Cuántos litros de cada tipo de gasolina deben ser ordenados para que la cuota tenga esta razón?

13) **Problema de tres clases de gasolina**

Una estación de gasolina de la localidad vende gasolina NOVA, MAGNA y SUPER en la razón 5:7:2. Su cuota total mensual es 28,000 litros de gasolina. ¿Cuántos litros de cada clase deben ser ordenados de tal manera que la cuota tenga ésta razón ?

14) **Problema de existencias de cereal**

Los estantes de cereal de un supermercado tienen espacio para 510 cajas de cereal. Las gráficas de venta muestran que los cereales de maíz, de trigo y otros se venden en la razón 5:3:9. ¿Cuántas cajas de cada cereal deben ser puestas en los estantes para que cuando éstas estén llenas el número de cajas esté en ésta razón?

15) **Problema # 1 del triángulo**

Los lados de un triángulo están en la razón 7:10:11, su perímetro es 112 metros. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

16) **Problema # 2 del triángulo**

Los lados de un triángulo están en la razón 6:7:10. El perímetro es 184 cm. ¿Cuál es la longitud de cada lado?

17) **Problema # 1 de rectángulo**

El largo y el ancho de un rectángulo están en la razón 3:2. El perímetro es 73 cm. Encuentra el largo y el ancho.

18) **Problema # 2 del rectángulo**

El largo y el ancho de un rectángulo están en la razón 5:3, el perímetro es 56 pies. Encuentra el largo y el ancho.

19) **Problema del pez en el lago**

Los ecologistas están tratando de determinar cuántos peces hay en un determinado lago. Pescan 100 peces del lago, les ponen pequeñas etiquetas en sus colas y los regresan al lago. Algunos días después atrapan 15 peces. Encuentran que dos están etiquetados y los otros 13 no. Suponiendo que de los etiquetados a los no etiquetados están en la razón 2:13, ¿Cuántos peces hay en el lago (contando los 15)?

20) **Problema de la sangre radioactiva**

Los investigadores están tratando de determinar cuánta sangre tiene en su cuerpo un animal. Considerando que sacarle la sangre para medirla mataría al animal, los investigadores retiran 100 mililitros (ml) de sangre y la reemplazan con 100 ml de sangre ligeramente radioactiva. Después toman una muestra y encuentran que la razón de la sangre radioactiva y no radioactiva es 2:34. ¿Cuántos mililitros de sangre tiene el animal aproximadamente?

21) **Problema #1 de edad**
Clara tiene 31 años, su hermana Elena tiene 47. ¿Cuándo estarán sus edades en la razón 4:5?

22) **Problema # 2 de edad**
Juan tiene 23 años, su hermana Ana tiene 20. ¿Cuándo estarán sus edades a la razón 3:2? ¿Sorprendido?

23) **Problema de carátula de reloj**
Un reloj marca las 5:00 en su carátula circular
a) ¿Cuál es la razón del área en la carátula del reloj entre las dos manecillas del resto del área?
b) Si el área total es 132 cm^2 ¿Cuál es el área entre las manecillas?

24) **El problema de rectángulos similares**
La razón de la longitud al ancho es 3:2 para cada uno de los dos rectángulos. El perímetro del rectángulo más grande está a razón de 7:5 a la del rectángulo menor. ¿Cuál es la razón de las áreas de los dos rectángulos?

CAPITULO 5

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

En muchas situaciones del mundo real se tienen dos cantidades variables. Por ejemplo, si *x* es el ancho de un campo rectangular y *y* es su longitud, entonces la expresión para su área es *xy*. La longitud de una cerca que se necesita para cerrar dicho campo es igual a su perímetro (2*x*+2*y*).

En este capítulo trabajarás con expresiones con dos variables, las cuales evaluarás; además resolverás sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres variables.

En el caso del rectángulo citado tenemos:

Variables:
x Número de metros de anchura
y Número de metros de largo

Expresiones:
2*x*+2*y* Perímetro
xy Área

Por otro lado, tenemos un ejemplo de un sistema de ecuaciones:
$x+y=4$
$2x+y=10$

21) **Problema #1 de edad**
Clara tiene 31 años, su hermana Elena tiene 47. ¿Cuándo estarán sus edades en la razón 4:5?

22) **Problema # 2 de edad**
Juan tiene 23 años, su hermana Ana tiene 20. ¿Cuándo estarán sus edades a la razón 3:2? ¿Sorprendido?

23) **Problema de carátula de reloj**
Un reloj marca las 5:00 en su carátula circular
a) ¿Cuál es la razón del área en la carátula del reloj entre las dos manecillas del resto del área?
b) Si el área total es 132 cm^2 ¿Cuál es el área entre las manecillas?

24) **El problema de rectángulos similares**
La razón de la longitud al ancho es 3:2 para cada uno de los dos rectángulos. El perímetro del rectángulo más grande está a razón de 7:5 a la del rectángulo menor. ¿Cuál es la razón de las <u>áreas</u> de los dos rectángulos?

CAPITULO 5

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS VARIABLES

En muchas situaciones del mundo real se tienen dos cantidades variables. Por ejemplo, si *x* es el ancho de un campo rectangular y *y* es su longitud, entonces la expresión para su área es *xy*. La longitud de una cerca que se necesita para cerrar dicho campo es igual a su perímetro (2*x*+2*y*).

En este capítulo trabajarás con expresiones con dos variables, las cuales evaluarás; además resolverás sistemas de ecuaciones lineales con dos o tres variables.

En el caso del rectángulo citado tenemos:

Variables:

x Número de metros de anchura
y Número de metros de largo

Expresiones:

2*x*+2*y* Perímetro
xy Área

Por otro lado, tenemos un ejemplo de un sistema de ecuaciones:

$x+y=4$
$2x+y=10$

5.1 EVALUANDO EXPRESIONES Y ECUACIONES QUE CONTIENEN DOS VARIABLES.

Esta sección está destinada para que la leas y la trabajes por tu cuenta, sin ayuda de tu maestro. Si tienes éxito, habrás obtenido un buen panorama del contenido de este capítulo.

El diagrama muestra un rectángulo de *x* unidades por *y*, que está dividido en dos partes. Si este fuera el plano para un corral de vacas, el total de las longitudes de los lados sería la longitud de cerca necesaria para construir el corral.

Esta longitud sería:
x+x+x+y+y

o más simple:
3x+2y

Si *x* es 50, *y* es 70, la longitud sería:
3(50)+2(70)
=150+140
=290

Si *x* es 70 y *y* es 50, la longitud sería
3(70) + 2(50)
= 210 + 100
=310

Obviamente hay diferencia en los resultados de la evaluación al intercambiar los valores de *x* y *y*

OBJETIVO:

Dada una expresión con dos variables, evaluarla para diferentes valores de éstas.

Cubre las respuestas mientras trabajas con los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1
Para la expresión *5x+9y*
a) Evalúala si *x=3, y=-2*
b) Encuentra *x*, si *y=10* y la expresión vale 120
c) Encuentra *y*, si *x=-1* y la expresión vale 1.

a)	*5x+9y*	Escribe la expresión dada
	=5(3)+9(-2)	Sustituye *x*, y, *y*
	=-3	Da la respuesta
b)	*5x+9(10)=120*	Escribe la expresión dada
		Sustituye *y* por 10.
	5x=30	Resta 90 a ambos miembros
	x=6	Divide entre 5
c)	*5(-7)+9y=1*	Escribe la expresión dada
		Sustituye *x* por -7
	9y=36	Suma 35 a ambos miembros
	y=4	Divide entre 9

EJEMPLO 2
Evalúa $3x^2-5y^2$ si *x=-9, y=20*

$3x^2-5y^2$	Escribe la expresión dada
$=3(-9)^2-5(20)^2$	Sustituye
=243-2000	Eleva al cuadrado y multiplica
=-1757	Da la respuesta

EJERCICIO 5.1

1) Para la expresión *8x+5y:*
   a) Evalúa para *x=2, y=3*
   b) Evalúa para *x=7, y=-3*
   c) Encuentra *x*, si la expresión es igual a 61, *y=-9*
   d) Encuentra *y*, si la expresión es igual a -50, *x=0*

2) Para la expresión $6x+10y$:
   a) Evalúa para $x=4$, $y=3$
   b) Evalúa para $x=-9$, $y=13$
   c) Encuentra x, si la expresión es igual a -38 y $y=-8$
   d) Encuentra y, si la expresión es igual a 12, $x=2$

3) Para la expresión $10x-7y$:
   a) Evalúa para $x=3$, $y=2$
   b) Evalúa para $x=2$, $y=3$
   c) Encuentra x, si la expresión es igual a 67.7, $y=-3.1$
   d) Encuentra y, si la expresión es igual a 96.9, $x=-0.55$

4) Para la expresión $-3.8x+10y$:
   a) Evalúa para $x=3$, $y=7$
   b) Evalúa para $x=7$, $y=3$
   c) Encuentra x, si la expresión es igual a -6, $y=-2.5$
   d) Encuentra y, si la expresión es igual a 18.6, $x=-0.3$

5) Evalúa $7-3(x+2y)$ para:
   a) $x=9$, $y=7$
   b) $x=18$, $y=-9$
   c) $x=-4$, $y=-11$

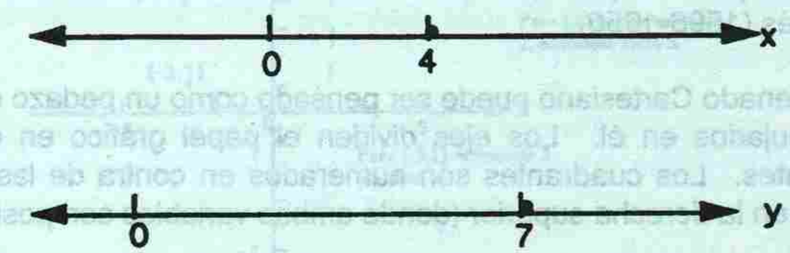
6) Evalúa $8-5(4x-y)$ para:
   a) $x=3$, $y=5$
   b) $x=2$, $y=8$
   c) $x=-5$, $y=3$

7) Evalúa x^2+6y^2 para:
   a) $x=5$, $y=3$
   b) $x=-7$, $y=10$
   c) $x=100$, $y=-20$
   d) $x=-8$, $y=-1$

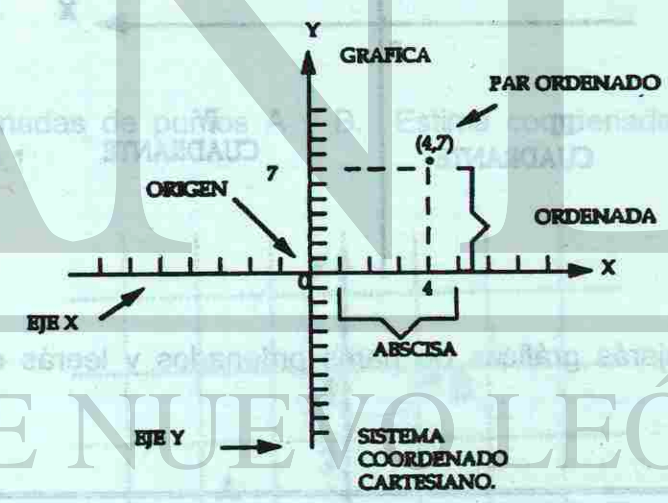
8) Evalúa $4x^2+y^2$ para:
   a) $x=6$, $y=8$
   b) $x=-3$, $y=30$
   c) $x=50$, $y=-100$
   d) $x=-6$, $y=-12$

5.2 EL SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO

Una recta numérica se usa para representar valores de una variable. Si una expresión de dos variables, tal como $3x+2y$, lleva dos líneas de números, una para las x, la otra para las y. Los valores de $x=4$, $y=7$ pueden ser mostrados como sigue:



La manera de mostrar ambos valores en el mismo diagrama es cruzar las dos líneas de números en sus orígenes (ver gráfica). Para dibujar un punto, comienzas en el origen y te mueves a través de cuatro unidades en la dirección x. Entonces te mueves 7 unidades en la dirección y. El punto en el plano es llamado la gráfica de $x=4$, $y=7$. Las dos líneas de números son llamadas el eje de x, el eje de y.

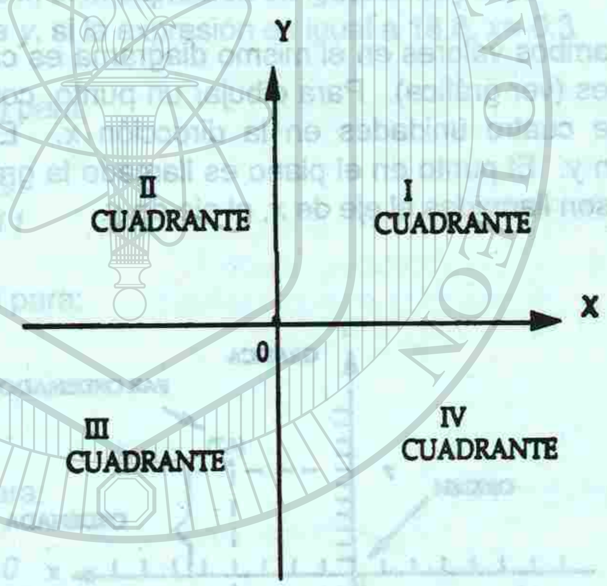


Para representar el punto $x=4$, $y=7$ se escribe (4,7). Este símbolo se llama un par ordenado de números. El orden en el cual aparecen los números nos dice cual número corresponde a cada variable.

El 1er número en un par ordenado se llama abscisa. La palabra viene de la misma raíz latina que la palabra tijeras. Este número nos dice dónde debes "cortar" mientras tú recorres el eje *x*. El 2do número en un par ordenado se llama ordenada. Esta palabra viene de orden. Juntos los dos números (4,7) son llamadas las coordenadas de un punto en un plano.

El sistema completo -eje *x*, eje *y*, puntos en el plano- se llama Sistema Coordenado Cartesiano : es mayúscula por que viene del nombre propio René Descartes, un matemático francés (1596-1650).

Un sistema coordenado Cartesiano puede ser pensado como un pedazo de papel gráfico con dos ejes dibujados en él. Los ejes dividen el papel gráfico en cuatro regiones llamadas cuadrantes. Los cuadrantes son numerados en contra de las manecillas del reloj, empezando en la derecha superior (donde ambas variables son positivas).



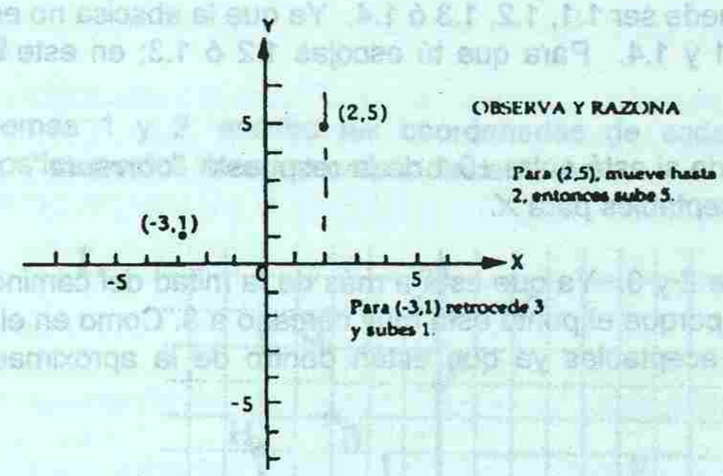
En esta sección dibujarás gráficas de pares ordenados y leerás coordenadas de un punto dado.

OBJETIVO

Dado un par ordenado, representa gráficamente; o dado un punto en el sistema coordenado Cartesiano, lda sus coordenadas correctas con precisión de una décima.

Cubre la respuesta con papel hasta que hayas trabajado en el ejemplo.

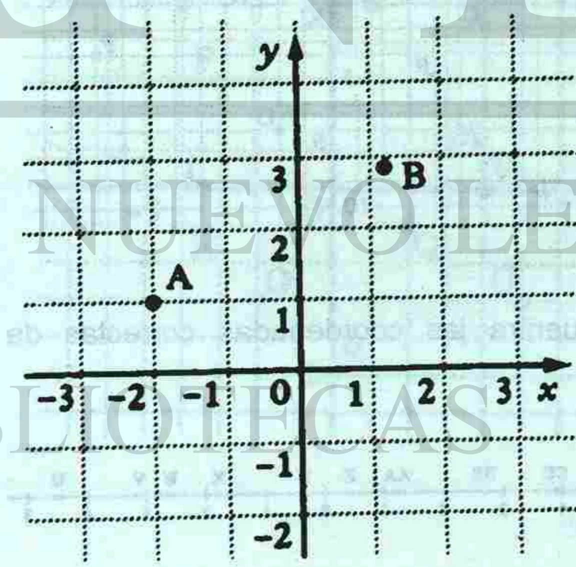
EJEMPLO 1
Representa (2,5),(-3,1) en el sistema coordenado Cartesiano



NOTA: Asegúrate de etiquetar el eje *X* y el eje *Y* como se muestra, con cabezas de flecha y las letras *x*, *y*. También muestra la misma escala en los dos ejes.

Por ejemplo, puedes colocar un número cada 5 unidades, como se muestra arriba.

EJEMPLO 2
Escribe las coordenadas de puntos A y B. Estima coordenadas completas con una aproximación de ±0.1



a) (-2.1) Mueve -2 en la dirección *X* y mueve 1 en la dirección *Y* para obtener el punto.

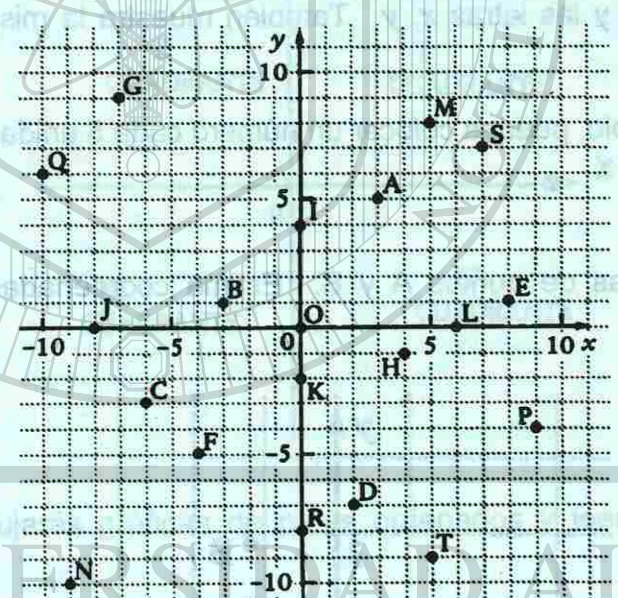
b) (1.2,2.9) La abscisa está entre 1 y 2. Ya que está a menos de la mitad del camino, ésta puede ser 1.1, 1.2, 1.3 ó 1.4. Ya que la abscisa no está cerca de 1 ó 1.5, excluye 1.1 y 1.4. Para que tú escojas 1.2 ó 1.3; en este caso, 1.2 se ve mejor.

Tu respuesta será valida si está entre ±0.1 de la respuesta ***"correcta"***. Así que 1.1, 1.2 ó 1.3 serían valores aceptables para *X*.

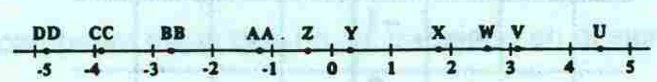
La ordenada está entre 2 y 3. Ya que está a más de la mitad del camino, debe ser 2.6, 2.8 ó 2.9. Escoge 2.9 porque el punto está muy cercano a 3. Como en el caso anterior, 2.8, 2.9 ó 3.0 serían aceptables ya que están dentro de la aproximación ±0.1 de la respuesta "correcta".

PRÁCTICA ORAL

De los puntos A hasta T, proporciona las coordenadas del punto



Desde U hasta D, encuentra las coordenadas correctas de los puntos ±0.1 de aproximación.



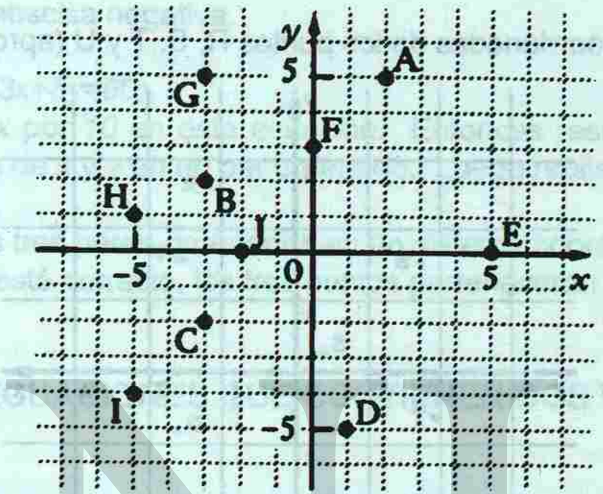
¿Cuál es el cuadrante en el cual los siguientes puntos se encuentran?:

E (5,3) F (6,-2)
G (-7.2,1) H (-3.4,-2.8)

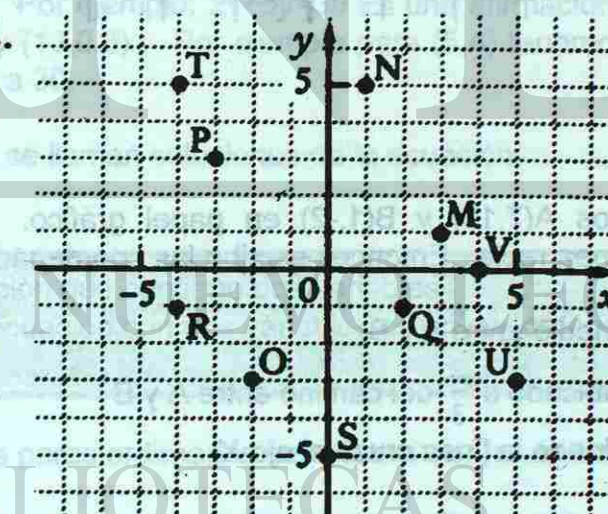
EJERCICIO 5.2

Para los problemas 1 y 2, escribe las coordenadas de cada punto como un par ordenado. Todos los puntos tienen coordenadas enteras.

1.



2.



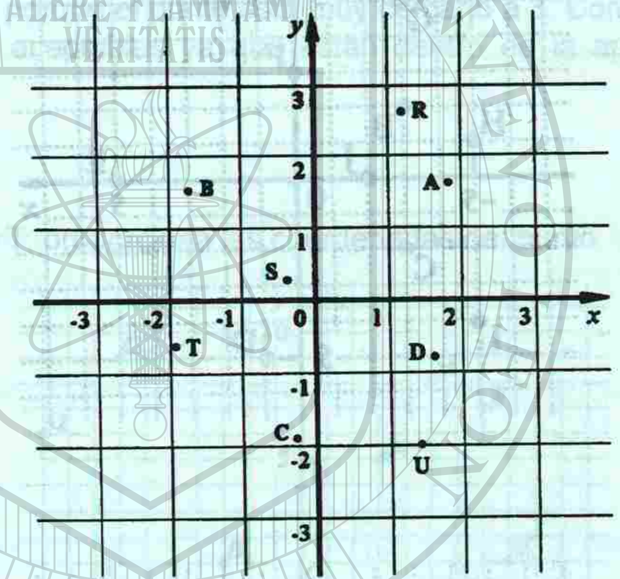
Para los problemas 3 y 4, dibuja un sistema coordenado Cartesiano en papel gráfico. Entonces sitúa los puntos correspondientes a los pares ordenados dados.

3)
a) (4,2)
b) (-3,8)
c) (3,-6)
d) (-2,-3)
e) (0,4)

4)
a) (2,3)
b) (-2,6)
c) (-4,-7)
d) (3,-8)
e) (4,0)

5) Encuentra las coordenadas de los puntos A, B, C y D (aproximación ± 0.1)

6) Encuentra las coordenadas de los puntos R, S, T y U (aproximación ± 0.1)



7) Dibuja los puntos A(7,10) y B(1,-2) en papel gráfico. Usa una regla para conectarlos en línea recta. Entonces escribe las coordenadas de cada uno de los siguientes puntos
a) El punto medio entre A y B
b) El punto ubicado a $\frac{2}{3}$ del camino entre A y B
c) El punto donde la línea cruza el eje X

...ne los puntos A(-3,1) y B(5,4) con una línea recta. Une los puntos C(1,5) y D(3,- ...on otra línea recta. Luego encuentra las coordenadas del punto donde las dos ... se intersectan (aproximación ±0.1)

9) Une los puntos E(-4,-2) y F(1,1) con una línea recta. Une los puntos G(-3,1) y H(2,4) con otra línea recta. ¿Qué relación especial tienen las dos líneas una de la otra?

10) Escribe un ejemplo de par ordenado con coordenadas enteras para cada punto descrito.
a) En cuadrante I; la abscisa es dos veces su ordenada.
b) En cuadrante II; la ordenada es 3 más que su abscisa.
c) En cuadrante III; la ordenada es 5 veces su abscisa.
d) En cuadrante IV; la abscisa es 4 más que su ordenada.
e) En eje X; abscisa negativa.

11) Suponiendo que $3x+5y=60$:
a) Sustituye x por 10 en esta ecuación. Entonces resuelve para y. Escribe los valores de x y y en un par ordenado. Luego repite el proceso para $x=15$ y por $x=-5$.
b) Grafica los tres pares ordenados en un sistema coordenado Cartesiano. Si tu trabajo está correcto, los tres puntos pertenecerán a una línea recta.

5.3 GRÁFICA DE ECUACIONES QUE CONTIENEN DOS VARIABLES.

Álgebra es el estudio de expresiones con variables. Algo que haces con tales expresiones es igualarlas a con algún número y encontrar el valor o valores de las variables. Si la expresión tiene dos variables hay infinidad de pares ordenados que satisfacen la ecuación. Por ejemplo: $2x+5y=30$ Es una afirmación verdadera para pares ordenados (0,6), (5,4) y (13,0.8) . Por ejemplo para (5,4) tenemos: 2(5)+5(4) es igual a 10+20, lo cual equivale a 30.

Tales pares ordenados se llaman soluciones de la ecuación.

Definición

Solución de una ecuación que contiene dos variables
Una solución de una ecuación con dos variables es un par ordenado que satisface la ecuación.

Al conjunto de todos los pares ordenados se le llama ***conjunto solución***.

Ya que el conjunto solución contiene una infinidad de pares ordenados, generalmente se dibuja la gráfica de ésta, en lugar de escribir los pares. Para hacer la gráfica de una ecuación tal como: $2x+5y=30$, debes encontrar algunos pares ordenados que la satisfagan. Una manera es asignar un valor a una variable, sustituirlo en la ecuación y entonces calcular el valor de la otra variable, por ejemplo escoge $x=7$.

$2(7)+5y=30$	Sustituye x por 7
$14+5y=30$	Multiplica 2 por 7
$5y=16$	Resta 14 a 30
$y=3.2$	Divide 16 entre 5

Así que el par ordenado sería (7,3.2)

Una manera eficiente de calcular muchos pares ordenados es despejar una variable en el lado izquierdo y todo lo demás en la derecha.

A partir de $2x+5y=30$, despejando y, la ecuación queda como sigue:

$2x+5y=30$

$5y=-2x+30$ Agrega $-2x$ a cada miembro

$$y = -\frac{2}{5}x + 6$$

Divide cada miembro entre 5.

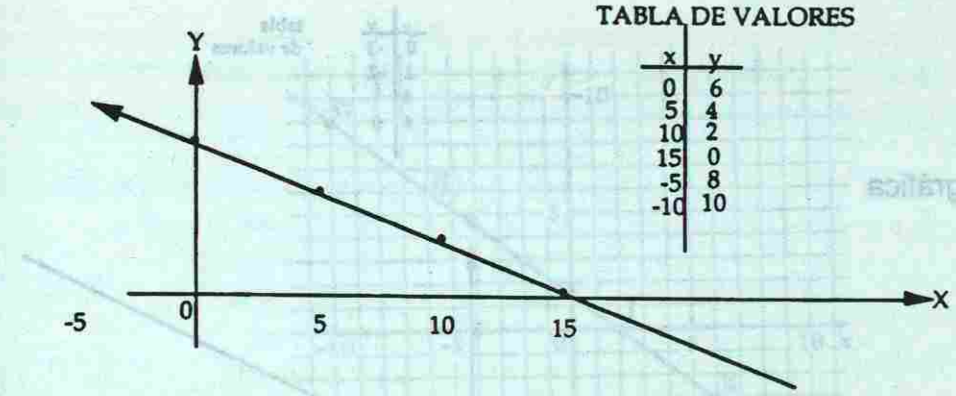
En la última ecuación y es escrita en términos de x; este procedimiento es igual al usado para resolver las ecuaciones en secciones anteriores.

Encontrar los valores de y es el proceso ya familiar de evaluar una expresión. Por ejemplo:

Si $x=10$ entonces $y = -\frac{2}{5}(10) + 6 = -4 + 6 = 2$

Si $x=-5$ entonces $y = -\frac{2}{5}(-5) + 6 = 2 + 6 = 8$

Para graficar una ecuación lineal es conveniente construir una tabla de pares ordenados (x , y) como se muestra a continuación.



x	y
0	6
5	4
10	2
15	0
-5	8
-10	10

Una forma de mostrarlo es graficando los pares ordenados de esta tabla. Los puntos están en línea recta. Más tarde en este capítulo aprenderás por qué todas las ecuaciones lineales resultan una línea recta al graficarlas. Para completar esta gráfica, puedes simplemente unir los puntos.

OBJETIVO:

Dada una ecuación lineal con dos variables (tal como $2x+5y=30$), transformarla para que y sea escrita en términos de x.

Entonces evalúa y para varios valores de x y usa los pares ordenados resultantes para graficar. Cubre las respuestas mientras trabajas con este ejemplo.

EJEMPLO:

Para la ecuación $x-2y=6$:

a) Transforma la ecuación para que y sea dada en términos de x.
b) Para valores de x, evalúa y.
c) Grafica.

a) $x-2y=6$ Escribe la ecuación dada

$-2y=-x+6$ Agrega $-x$ a cada miembro

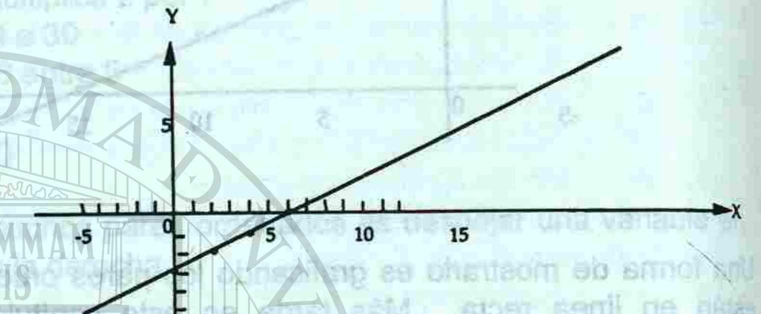
$y=\frac{1}{2}x-3$ Multiplica cada miembro por $-\frac{1}{2}$

b)

x	y
0	-3
2	-2
4	1
6	0

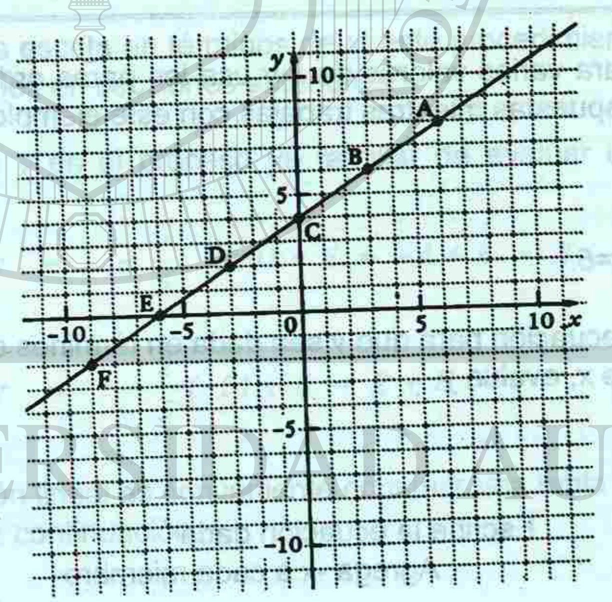
tabla de valores

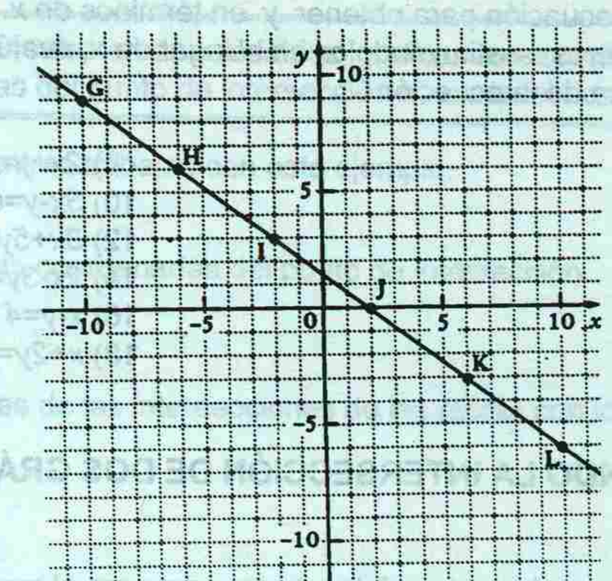
c) Dibuja la gráfica



PRÁCTICA ORAL

Desde A hasta L, proporciona las coordenadas de los puntos.





Transforma la ecuación para obtener *y* en términos de *x*.

m) $4x+y=9$	q) $7x+10y=-10$	u) $8x-y=6$
n) $5x-y=-7$	r) $3x+2y=5$	v) $6x+2y=-10$
o) $7x-3y=4$	s) $12x-3y=-15$	w) $x+4y=-11$
p) $x-5y=20$	t) $x+y=6$	x) $x-y=-9$

EJERCICIO 5.3

Para los problemas del 1 al 6, dibuja una gráfica del conjunto indicado de puntos. Une los puntos con una línea recta.

1) (x,y) (5,8) (3,5) (1,2) (-1,-1)

2) (x,y) (7,5) (4,3) (1,1) (-2,-1)

3) (x,y) (-3,7) (0,4) (3,1) (6,-2)

4) (x,y) (-2,7) (0,3) (2,-1) (4,5)

5) (x,y) (-5,3) (-1,1) (3,-1) (7,-3)

6) (x,y) (-5,7) (-2,2) (1,-3) (4,-8)

Para los problemas del 7 al 18.

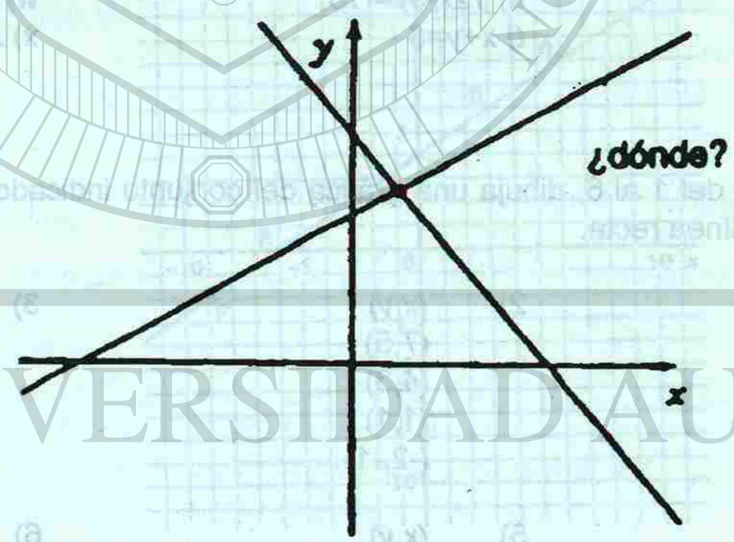
a) Transforma la ecuación para obtener *y* en términos de *x*.
b) Escoge 4 números, sustituyéndolos en el lugar de *x*, evalúa *y*.
c) Dibuja la gráfica de la ecuación

7) $3x+y=12$	8) $2x+y=10$
9) $2x-y=6$	10) $3x-y=6$
11) $4x+5y=40$	12) $3x+5y=30$
13) $3x-2y=-18$	14) $2x-3y=-12$
15) $x+y=7$	16) $x-y=4$
17) $x-3y=0$	18) $x+2y=0$

5.4 ENCONTRANDO LA INTERSECCIÓN DE DOS GRÁFICAS

Esta sección reúne lo que has aprendido y te prepara para el resto del capítulo. Deberás ser capaz de leer y trabajar los problemas sin ayuda de tu profesor.

Si dibujas las gráficas de dos ecuaciones lineales en el mismo sistema coordenado, probablemente puede que se intersecten en algún punto. En las próximas secciones aprenderás cómo calcular las coordenadas de este punto de intersección. Por ahora sólo harás las gráficas y verás dónde se intersectan.



OBJETIVO:

Dadas dos ecuaciones lineales en dos variables, graficar con exactitud suficiente para leer las coordenadas del punto de intersección con una tolerancia de ±0.1

Cubre las respuestas mientras trabajas con este ejemplo.

EJEMPLO

Dibuja las gráficas y lee las coordenadas del punto de intersección.

$x+2y=4$
$4x-5y=-20$

Encuentra las coordenadas de las interceciones de las rectas con los ejes.

Para $x+2y=4$

Intercección *x*
$x+0=4$
$x=4$

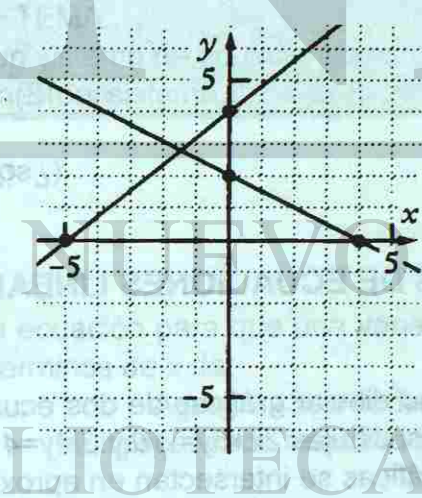
Intercección *y*
$0+2y=4$
$y=2$

Para $4x-5y=-20$

Intercección *x*
$4x-0=-20$
$x=-5$

Intercección *y*
$0-5y=-20$
$y=4$

Dibuja la gráfica



Lee las coordenadas del punto de intersección
(-1.5,2.8)

Nota: Para obtener respuestas precisas, debes dibujar gráficas bien hechas. Así que afila el lápiz, usa una buena regla y ten cuidado. Tus respuestas serán consideradas correctas si están a ±0.1 unidades de la respuesta correcta. Por ejemplo, la coordenada *Y* pudiera ser 2.7,2.8 ó 2.9 y seguiría siendo correcta.

EJERCICIO 5.4

Para cada par de ecuaciones, encuentra las intercepciones y dibuja ambas gráficas en el mismo conjunto de ejes. Entonces lee las coordenadas del punto donde las dos gráficas se intersectan. Tu respuesta será considerada correcta si no está a más de ±0.1 unidades de la respuesta correcta.

1) $2x+3y=18$
$x-y=5$

2) $x-2y=-10$
$4x+3y=24$

3) $2x+y=8$
$5x-3y=15$

4) $3x+4y=12$
$2x-3y=-6$

5) $8x-5y=-40$
$2x+y=-6$

6) $2x-y=-6$
$x+2y=4$

7) $3x+2y=-12$
$x-y=-2$

8) $5x+7y=-35$
$3x-2y=6$

9) $2x+3y=-12$
$8x-5y=40$

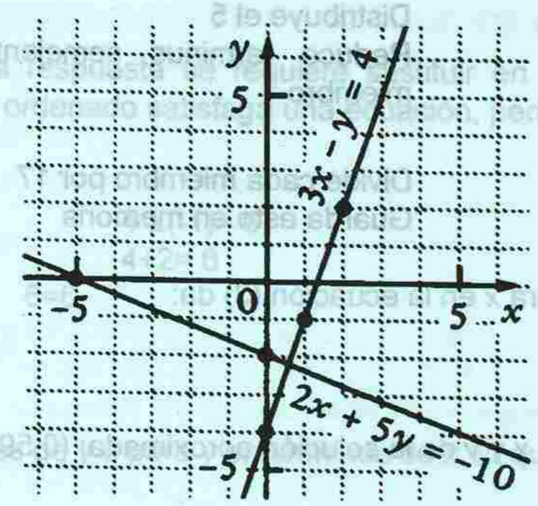
10) $5x+2y=20$
$3x-7y=21$

11) $3x-5y=10$
$3x+5y=30$
(¿sorprendido?)

12) $x-3y=6$
$x-3y=3$
(¿sorprendido?)

5.5 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR SUSTITUCIÓN

En la última sección aprendiste cómo dibujar gráficas de dos ecuaciones y encontrar su punto de intersección. Por ejemplo, si dibujas $2x+5y=-10$ y $3x-y=4$ en el mismo plano cartesiano, las gráficas se intersectan en aproximadamente (0.6,-2.2), como se muestra en la figura.



Encontrando el punto de intersección por medio de la graficación actual tiene dos desventajas. Es tedioso y de exactitud limitada. En esta sección aprenderás a calcular las coordenadas de los puntos de intersección.

Un par de ecuaciones con las mismas dos variables se llama un ***"sistema de ecuaciones"***. El par ordenado donde las gráficas se intersectan una con la otra hace a ambas proposiciones verdaderas, ésta es llamada la solución del sistema. Para futuras referencias definiremos lo siguiente:

SISTEMA DE ECUACIONES:
Un sistema de ecuaciones son dos o más ecuaciones con las mismas variables.
SOLUCIÓN DE UN SISTEMA:
La solución de un sistema de ecuaciones es un par ordenado que satisface las dos ecuaciones del sistema

Para resolver el sistema:
$2x+5y=-10$ (1)
$3x-y=4$ (2)

puedes transformar una ecuación para que una variable sea despejada. Resolviendo la ecuación (2) para *y* en términos de *x* da:

$-y=-3x+4$ Agregar $-3x$ a cada miembro
$y=3x-4$ Multiplicar cada miembro por -1 (3)

Donde las gráficas se intersectan, la *y* en una ecuación tiene el mismo valor que la *y* en la otra. Así que puedes sustituir *(3x-4)* en lugar de *y* en la ecuación (1).
$2x+5(3x-4)=-10$
El resultado es una ecuación con solamente una variable.

$2x+15x-20=-10$	Distribuye el 5
$17x=10$	Reduce terminus semejantes; suma 20 a cada miembro
$x = \frac{10}{17}$	Divide cada miembro por 17
$x=0.5882$	Guarda esto en memoria

Sustituyendo 0.5882... para x en la ecuación (3) da:
$y=3(0.5882...)-4$
$y=-2.2359...$

Redondeando los valores x y y da la solución aproximada: (0.59,-2:24)

Como puedes ver, el (0.6,-2.2) de la gráfica está cercano a este valor más exacto.

El procedimiento precedente se llama método de ***"sustitución"***. Algunas veces las ecuaciones de un sistema son llamadas ***"ecuaciones simultáneas"*** porque resuelves ambas ecuaciones al mismo tiempo.

OBJETIVO:

Ser capaz de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables por método de "sustitución"

Cubre las respuestas mientras trabajas en este ejemplo.

EJEMPLO
Resuelve: $5x+3y=17$
$x-2y=6$

$5x+3y=17$	(1)	Escribe el sistema dado. Enumera
$x-2y=6$	(2)	cada ecuación para una futura referencia
$x=6+2y$	(3)	Resuelve (2) para x en términos de y. Esta es la forma más fácil ya que x tiene un coeficiente de 1.
$5(2y+6)+3y=17$		Sustituye $2y+6$ en lugar de x en (1). No la sustituyas de nuevo en (2)
$10y+30+3y=17$		Distribuye 5
$13y=-13$		Reduce términos semejantes ; agrega -30
$y=-1$		Divide cada miembro por 13
$x=2(-1)+6$		Sustituye -1 en lugar de y en (3)
$x=4$		Efectúa la operación
Solución: (4,-1)		Escribe la respuesta

Nota: Para comprobar la respuesta se requiere sustituir en ambas ecuaciones. Es posible que un par ordenado satisfaga una ecuación, pero no la otra.

Comprobación:

5(4)+3(-1)= 17	4-2(-1)= 6
20-3= 17	4+2= 6
17=17	6=6

PRÁCTICA ORAL

Despeja para x en términos de y o para y en términos de x, lo que sea más fácil.

Ejemplos	Respuestas
i) $x+3y=7$	*i)* $x=7-3y$
ii) $4x-y=9$	*ii)* $y=4x-9$

a) $x+2y=5$	g) $x-6y=18$
b) $2x+y=10$	h) $6x-y=12$
c) $x-5y=-15$	i) $6x+y=-24$
d) $x-3y=30$	j) $10x-y=70$
e) $x-y=8$	k) $x+y=6$
f) $x-2y=0$	l) $x+3(y+2)=10$

EJERCICIO 5.5

Para los problemas 1 al 26, resuelve el sistema por ***"sustitución"***

1)	$y=2x$ $3x+y=10$	2)	$y=3x$ $2x-y=2$
3)	$y=3x$ $5x-2y=1$	4)	$y=2x$ $4x+3y=30$
5)	$y=x+4$ $3x+y=16$	6)	$y=x-3$ $4x+y=32$
7)	$x=y-5$ $3x+2y=3$	8)	$x=y+8$ $5x+3y=12$
9)	$4x+3y=31$ $y=2x+7$	10)	$4x+5y=48$ $y=3x+2$

11) $x+2y=2$
$5x-3y=-29$

12) $3x+y=13$
$2x-4y=18$

13) $6x-y=31$
$4x+3y=17$

14) $x-7y=-22$
$5x+2y=1$

15) $7x-6y=-30$
$x-4y=-20$

16) $2x-9y=14$
$6x-y=42$

17) $x+y=23$
$9x-8y=27$

18) $x-y=6$
$10x+11y=149$

19) $x-3y=13$
$5x+3y=2$

20) $7x-3y=-23$
$x+5y=32$

21) $3(x-2)+y=-4$
$4x-7y=36$

22) $4(x-3)+y=-11$
$6x-2y=-16$

23) $x+y=19$
$5(x-7)+2y=-24$

24) $x+5y=22$
$3(x-9)+4y=-5$

25) $2(x+3)-y=7$
$7x-3(y-1)=9$

26) $6(x+2)-y=31$
$5x-2(y-3)=23$

Para los problemas del 27 al 30, encuentra la solución correcta con dos decimales para cada coordenada.

27) $x=0.6(300+y)$
$y=0.2(300+x)$

28) $x=0.8(500+y)$
$y=0.7(500+x)$

29) $x=0.9(1000-y)$
$y=0.7(1000-x)$

30) $x=0.3(200-y)$
$y=0.2(200-x)$

Para los problemas del 31 al 34, resuelve por el método de ***"sustitución"***. Traza después las gráficas de las dos ecuaciones, usando la técnica de la sección anterior. Demuestra que las dos gráficas se intersectan en el punto calculado.

31) $2x-y=-3$
$x+y=9$

32) $3x+y=1$
$x-y=7$

33) $x-3y=-18$
$2x+3y=9$

34) $2x-y=-6$
$5x+3y=-15$

5.6 SOLUCIÓN DE SISTEMAS POR EL MÉTODO DE COMBINACIÓN LINEAL

Supongamos que debes resolver el siguiente sistema:

$$5x+3y=25$$
$$7x-3y=-1$$

Hay otro método que funciona muy eficazmente, además del de sustitución . Observa que los coeficientes de *y* en las dos ecuaciones son opuestos uno del otro. Si agregas *7x-3y* al miembro de la izquierda de la ecuación (1) y agregas -1 al miembro de la derecha, los términos de *y* suman cero. (Se cancelan)

$$(5x+3y)+(7x-3y)=25+(-1)$$
$$12x=24$$

Un modo eficiente de efectuar esta adición es simplemente dibujar una línea debajo de las dos ecuaciones y sumar como términos

$5x+3y=25$	
$\underline{7x-3y=-1}$	
$12x=24$	Suma las dos ecuaciones
$x=2$	Divide cada miembro por 12

Sustituyendo *x* por 2 en cualquiera de las dos ecuaciones se encuentra el valor de *y*. Usando la primera, se obtiene el siguiente valor:

$5(2)+3y = 25$	Sustituir *x* por 2
$3y=15$	Restar 10 de cada miembro
$y=5$	Dividir cada miembro por 3
Solución: (2,5)	Escribe la respuesta

Si ninguna variable tiene coeficientes opuestos en ambas ecuaciones, puedes transformar cada ecuación para que lo tengan. Aquí se muestra cómo podrías resolver el siguiente sistema

$$5x+3y=9$$
$$2x-4y=40$$

Multiplicando cada miembro de la primera ecuación por 2 logramos que el coeficiente de *x* sea 10. Multiplicando cada miembro de la segunda por -5, logramos que el coeficiente de *x* sea -10. Los términos *10x* y *-10x* son opuestos uno del otro. La solución completa sería como ésta:

$5x+3y=9$	$10x+6y=18$	Multiplica por 2
$2x-4y=40$	$\underline{-10x+20y=-200}$	Multiplica por -5
	$26y=-182$	Suma las ecuaciones
	$y=-7$	Divide por 26

$5x+3(-7)=9$ — Sustituye y por -7 en la primera
$5x=30$ — Agrega 21 a cada miembro
$x=6$ — Divide por 5
Solución: (6,-7) — Escribe la respuesta

Para comprobar la solución, debes sustituir (6,-7) en cada ecuación. Es posible que un par ordenado satisfaga una de las ecuaciones, pero no la otra. Por tanto es muy importante comprobar en las dos.

Comprueba:

$5(6)+3(-7)=9$	$2(6)-4(-7)=40$
$30-21=9$	$12+28=40$
$9=9$	$40=40$

Observa que pudiste haber eliminado la y primero, en lugar de la x si multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3, obteniendo lo siguiente:

$5x+3y=9$ → $20x+12y=36$
$2x-4y=40$ → $\underline{6x-12y=120}$
$26x=156$
$x=6$

Después podría ser calculada sustituyendo x por 6 en la primera o en la segunda ecuación.

Este método se llama de ***combinación lineal*** o sumas y restas para resolver un sistema de ecuaciones. Una combinación lineal de dos cantidades es lo que obtienes multiplicando cada cantidad por una constante, sumando entonces los resultados. El método es también llamado por ***suma y resta***.

OBJETIVO:

> Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, resuélvelo por el método de combinación lineal, transformando las ecuaciones cuando sea necesario.

Cubre las respuestas mientras trabajas los ejemplos.

EJEMPLO 1
Resuelve:
$4x+9y=75$
$4x+3y=33$

$4x+9y=75$ / $4x+3y=33$

$4x+9y=75$ — Pasa igual la ecuación
$\underline{-4x-3y=-33}$ — Multiplica por -1
$6y=42$ — Suma las 2 ecuaciones
$y=7$ — Divide entre 6

$4x+3(7)=33$ — Sustituye 7 por y en la segunda ecuación

$4x=12$ — Resta 21 de cada miembro
$x=3$ — Divide cada miembro por 4
Solución: (3,7) — Escribe la solución.

EJEMPLO 2

Resuelve
$2x-3y=-8$ → $10x-15y=-40$ — Multiplica por 5
$11x+5y=1$ → $\underline{33x-15y=-3}$ — Multiplica por 3
$43x=-43$ — Suma ecuaciones
$x=-1$ — Divide por 43
$2(-1)-3y=-8$ — Sustituye -1 en lugar de x en la primera ecuación
$-3y=-6$ — Suma 2 a cada miembro
$y=+2$ — Divide cada miembro por -3
Solución: (-1,2) — Escribe la solución

Nota: Hay otras maneras de empezar. Para eliminar x en vez de y, puedes multiplicar la primera ecuación por 11 y la segunda por -2 haciendo que los coeficientes de x sean 22 y -22. En seguida puedes eliminar x, sumando las ecuaciones.

PRÁCTICA ORAL

Proporciona la ecuación resultante después de sumar, para eliminar una variable.

Ejemplo — Respuesta
$3x+2y=2$
$5x-2y=9$ — $8x=11$

a) $2x+3y=2$, $4x-3y=5$ — d) $7x-4y=9$, $2x+4y=3$

b) $2x+8y=-3$, $2x+5y=10$ — e) $3x+4y=8$, $-3x+5y=1$

c) $4x-5y=9$, $-3x+5y=-7$ — f) $-4x-3y=-1$, $4x+8y=5$

¿Cuál es el número por el que hay que multiplicar cada ecuación para eliminar x por ***"combinación lineal"***?

Ejemplo — Respuesta
$5x+3y=9$ — Multiplica por -2
$2x-8y=4$ — Multiplica por 5

g) $2x+5y=7$, $3x+4y=9$ — h) $4x-3y=2$, $5x+8y=1$ — i) $2x+10y=9$, $8x+5y=7$

¿Cuál es el número por el que hay que multiplicar cada ecuación para eliminar *y* por ***"combinación lineal"***?

j) $2x+5y=7$, $3x+4y=9$ k) $4x-3y=2$, $-5x+8y=1$ l) $2x+10y=9$, $8x+5y=7$

EJERCICIO 5.6

Para los problemas del 1 al 10, resuelve el sistema por el método de ***"combinación lineal"***

1) $3x+5y=5$, $-x+7y=38$
2) $x+4y=17$, $2x+y=15$
3) $8x+y=21$, $x+5y=4$
4) $x-4y=23$, $3x+y=13$
5) $5x+3y=27$, $7x-3y=45$
6) $-2x+7y=8.7$, $2x+3y=18.3$
7) $10x+7y=-30$, $5x+4y=-63$
8) $5x-y=22$, $8x+7y=-24$
9) $2.3x-1.7y=3.5$, $3x+4y=35$
10) $10x+4y=35$, $4.7x-1.7y=10.7$

Para los problemas del 11 al 20, primero transforma las ecuaciones de manera que cualquiera de los coeficientes de *x* o de *y* sean opuestos. Después resuelve por el método de ***"combinación lineal"***

11) $3x+5y=17$, $2x+3y=11$
12) $4x-5y=-19$, $3x+7y=18$
13) $6a-7b=12$, $5a-4b=10$
14) $2x+9y=12.5$, $6x+5y=8.9$
15) $7u+8v=23$, $3u-2v=-1$
16) $4x-3y=2.7$, $8x+5y=13.1$
17) $3x-5y=-29$, $6x-5y=50$
18) $4x+y=42$, $2x-10y=-42$
19) $x+12y=-8$, $2x-3y=-8.1$
20) $5x+7y=18.9$, $8x-5y=37$

5.7 PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN DOS VARIABLES

Suponiendo que las hamburguesas cuestan \$2.00 y los hot-dogs \$1.50 cada uno. La cantidad de dinero que vas a gastar en hamburguesas y hot-dogs depende de cuántos compres de cada uno.

Sea x = número de hamburguesas
Sea y = número de hot-dogs

La cantidad de dinero a gastar es: $2x+1.5y$

Esta expresión de dos variables representa una cantidad de dinero. Si se conocen los valores de x y y, puedes fácilmente encontrar el costo. Por ejemplo, si $x=5$, y $y=3$, tendremos:

$2x+1.5y$
$=2(5)+1.5(3)$
$=14.50$

Pero el problema inverso no es tan simple. Si sabes que el gasto total es \$ 14.50, puedes escribir la ecuación:
$2x+1.5y=14.50$

Pero no sabes con certeza que x valga 5 y y valga 3. Es posible que x sea 2 y y sea 7, porque
$2(2)+1.5(7)$ (1)
$=14.50$

Por lo tanto, requieres de una segunda ecuación para formar un sistema que pueda resolverse para ambas variables. Por ejemplo, si sabes que el número total de hamburguesas y hot-dogs es 8, la segunda ecuación puede ser:
$x+y=8$ (2)

El sistema se resolvería de la siguiente forma:

$2x+1.5y=14.$ $2x+1.5y=14.50$
$x+y=8$ $\underline{-2x-2y=-16}$ Multiplicando por -2
$-0.5y=-1.5$ Dividiendo por -0.5
$x+3=8$ $y=3$ Sustituyendo 3 por y en la segunda ecuación
$x=5$

5 hamburguesas y 3 hot-dogs

En esta sección resolverás problemas similares involucrando expresiones con dos variables.

OBJETIVO

Dado un problema involucrando dos variables, escribir y resolver un sistema de dos ecuaciones y responder las preguntas.

Cubre las respuestas al trabajar con los ejemplos.

EJEMPLO 1

Problema del queso suizo y burgués.
El queso suizo y el queso burgués tienen diferente precio por kilogramo, pero no sabes cuánto. Una caja que contiene 3 kg de suizo y 2 kg de burgués cuesta \$24.40. Otra caja que contiene 4 kg de suizo y 5 kg de burgués cuesta \$47.70. Supón que estos precios son solamente para el queso (no la caja) ¿Cuánto cuesta cada clase de queso por kg?

Define las variables

Sea x = precio por kg de suizo

Sea y = precio por kg de burgués

Escribe primero dos ecuaciones involucrando x y y. Después resuelve el sistema.

$3x+2y=24.40$	$15x+10y=122.00$	Multiplica por 5
$4x+5y=47.70$	$-8x-10y=-95.40$	Multiplica por -2
	$7x=26.60$	Suma
	$x=3.80$	Divide por 7
$3.(3.80)+2y=24.40$		Sustituyendo x por 3.80 en la primera ecuación
$11.40+2y=24.40$		Efectúa las operaciones
$2y=13.00$		Reste 11.40
$y=6.50$		Dividiendo por 2

\$ 3.80/kg para el suizo
\$ 6.50/kg para el burgués

EJEMPLO 2

Problema del cereal de azúcar.
De acuerdo a las etiquetas, el cereal A, contiene cerca del 38% de azúcar. El cereal B, aproximadamente 46%.

a) ¿Qué porcentaje de azúcar tendría una mezcla de 100gr de cereal A con 200gr de cereal B?

b) ¿Cuántos gr de cada uno se requerirían para hacer una mezcla de 1 kg que contenga 40% de azúcar?

a) Sea x el número de gr de cereal A

Sea y el número de gr de cereal B	Define las variables
$0.38x+0.46y$= número de gr de azúcar	Escribe la expresión
Si $x=100$ y $y=200$, entonces:	Evalúa la expresión
$0.38x+0.46y$	
$=38+92$	
$=130$ gr de azúcar	
Masa total es 100+200, o sea 300 gr	
El porciento de azúcar es 130/300x100	%=número/total x 100
$=43.3$	
43.3% de azúcar	Responde la pregunta

b) Primero escribe las dos ecuaciones

$x+y=1000$	El total es 1000 gr (1kg)
$0.38x+0.46y=0.4(1000)$	Azúcar 40% de 1000 gr

Enseguida simplifica y combina linealmente.

$x+y=1000$	$-0.38x-0.38y=-380$
$0.38x+0.46y=400$	$\underline{0.38x+0.46y=400}$
	$0.08y=20$
	$y=250$
$x+250=1000$	Sustituye 250 en lugar de y en a primera ecuación
$x=750$	Resta 250
Cereal A:750 gr	
Cereal B:250 gr	Respuesta a la pregunta

EJEMPLO 3

Problema del submarino.
Un submarino navega contra la corriente una distancia de 150 millas náuticas a una velocidad desconocida, en un tiempo total de 10 horas. Luego regresa al punto de partida, a favor de la corriente en un tiempo de 6 horas.

Para ambos viajes se mueve a la misma velocidad a través del agua. ¿A cuántos nudos (millas náuticas por hora) viaja el submarino, y a cuántos nudos la corriente?

Sea x=velocidad del submarino Sea y=velocidad de la corriente	Define las variables
$x - y$= velocidad neta en contra de la corriente	Resta las velocidades cuando los movimientos se oponen

$x + y$= velocidad neta a favor de la corriente — Suma las velocidades cuando los movimientos son en el mismo sentido

$(x-y)(10)=150$	Velocidad por tiempo =distancia
$(x+y)(6)=150$	
$x-y=15$	Divide cada miembro por 10
$\underline{x+y=25}$	Divide cada miembro por 6
$2x=40$	Suma las dos ecuaciones
$x=20$	Divide cada miembro por 2
$20+y=25$	Sustituye x por 20 en $x+y=25$
$y=5$	Resta 20 de cada miembro
El submarino viaja a 20 nudos La corriente es de 5 nudos	Respuesta a la pregunta

EJEMPLO 4

Problema de seguros.

La familia García tiene dos pólizas de seguro. La primera paga 80% de los gastos no cubiertos por la segunda. La segunda paga 70% de los gastos no cubiertos por la primera. La Sra. García necesita una operación quirúrgica que cuesta $3000 y es cubierta por ambas pólizas. ¿Cuánto van a obtener los García de cada póliza? ¿Es el total, más que el 100% de los $ 3000?

x=cantidad de pagados por la primera póliza
y=cantidad de pagados por la segunda póliza
3000-x= no pagados por la primera póliza
3000-y= no pagados por la segunda póliza

$x=0.8(3000-y)$	(1)	Pesos no pagados por la primera póliza
$y=0.7(3000-x)$	(2)	Pesos no pagados por la segunda póliza
$x=2400-0.8[0.7(3000-x)]$		Sustituye $0.7(3000-x)$ en lugar de y
$x=2400-1680+0.56x$		Distribuye $(0.8x0.7)$ por 0.56
$0.44x=720$		Resta $0.56x$ a ambos miembros
$x=1636.3636$		Divide entre 0.44
$y=0.7(3000-1636.37...)$		Sustituye 1636.36 en lugar de x
$y=954.5454$		Resultado
Primera póliza paga $1,636.36 Segunda póliza paga $954.55		Contesta la pregunta

El total pagado es $2,590.91, que es menos del 100% de $3000.

NOTA: La técnica de sustitución es mejor para este problema ya que tienes x en términos de y, y y en términos de x.

EJERCICIO 5.7

Los problemas 1 al 10 involucran el encontrar precios y porcentajes desconocidos. Los primeros dos problemas te conducen paso a paso hacia la solución del problema. Para los otros, debes pensar en los pasos.

1) **Problema de comida mexicana**

Supongamos que estás ayudando a establecer los precios para el menú de un restaurant mexicano. La comida regular contiene dos tacos y tres enchiladas. La comida especial contiene 4 tacos y 5 enchiladas.

a) Dejemos que x sea el número de centavos cargados a cada taco y dejemos que y sea el número de centavos cargados a cada enchilada. Escribe dos expresiones, una para el precio de una comida regular y la otra para el precio de una comida especial.

b) Cuánto costaría cada comida si:

i) Los tacos cuestan $3.5 y las enchiladas $6 cada una.

ii) Los tacos cuestan $4.5 y las enchiladas $5 cada una.

c) El jefe establece un precio de $23.90 para la comida regular y $42.30 para la comida especial. ¿Cuánto calcula él por taco y cuánto por enchilada?

Regular	$ ____
Especial	$ ____

2) **Problema del hotel y buceo.**

El hotel Maya ofrece a los buceadores dos planes. El plan A de 3 noches de alojamiento y 4 buceos. El plan B de 5 noches de alojamiento y 8 buceos.

Plan A	$ ____
Plan B	$ ____

a) Sea x el número de pesos que cargan por noche y y el número de pesos por buceo. Escribe dos expresiones, una por la cantidad que pagaría por el plan A y la otra por el plan B.

b) Evalúa las expresiones si el hospedaje cuesta $50 por noche y los buceos $40 cada uno.

c) Si el hospedaje es incrementado a $80 por noche y los buceos se reducen a $20 cada uno, ¿se incrementan o se reducen en costo en los dos planes?

d) Llega una nueva lista de precios en la que el plan A cuesta $440 y el plan B cuesta $780. ¿Qué precios son ahora asumidos por noche y por buceo?

3) **Problema de huevos y salchichones.**
Un menú de almuerzos enlista 2 huevos y un salchichón por $10.20 y 3 huevos y 2 salchichones por $13.65
a) Suponiendo que en estas cantidades pagas solamente los huevos y los salchichones. ¿Cuánto pagas por un huevo y cuánto por un salchichón?
b) ¿Cuánto pagarías por el desayuno de glotones consistente en 5 huevos y 7 salchichones?

4) **Problema del estuche de artista.**
Un estuche para artista principiante cuesta $6.35 y contiene 2 brochas y 5 frascos de pintura. El estuche estandar contiene 4 brochas y 12 frascos de pintura y cuesta $13.20.
a) Suponiendo que todas las brochas cuestan lo mismo y todas las pinturas cuestan lo mismo. ¿Cuál es el precio de una brocha y de un frasco de pintura?
b) ¿Cuánto pagarías por un estuche de lujo que contiene 7 brochas y 20 frascos de pintura?

5) **Problema de gasolina regular y sin plomo.**
La gasolina sin plomo tenía diferentes precios por litro. Supongamos que 2 litros de gasolina regular y 3 litros de gasolina sin plomo costaban un total de 252 pesos; 5 litros de regular y 4 litros sin plomo costaban un total de 448 pesos. ¿Cuál era el precio por litro de cada tipo de gasolina?

6) **Problema del gusano y el caracol.**
Un gusano y un caracol entran a una carrera de relevos. Si el gusano avanza 5 horas y el caracol 4, cubren un total de 448 pulgadas. Si el gusano avanza durante 2 horas y el caracol por 3 horas, ellos cubren una distancia de 252 pulgadas, ¿qué tan rápido avanza cada uno?

7) **Problema del cono de nieve.**
Una conocida cadena de tiendas vende un cono de 3 bolas de nieve por $12.80 y un cono con 2 bolas de nieve por $8.7.
Suponiendo que estas cantidades se pagan por el cono y la nieve.
a) ¿Cuánto gastas por cada bola de nieve y cuánto por el cono?
b) ¿Cuánto pagarías por un cono con 4 bolas de nieve?

8) **Problema de leña.**
Cuesta $140 recibir una entrega de un paquete de leña en tu casa y $80 por la entrega de medio paquete. Supongamos que pagas un cierto número de pesos por un paquete, más una cantidad fija por el servicio.
a) ¿Cuánto pagas por paquete y cuánto por el servicio de entrega?
b) ¿Cuánto pagarías para tener 1.5 paquetes de entrega?
(La respuesta no es 220)

9) **Problema de gasolina regular y sin plomo # 2.**
Una estación de gasolina acaba de aumentar sus precios. El empleado coloca los nuevos precios en la bomba pero olvida anotar los precios anteriores. En lugar de revelar el olvido y preguntarle al jefe, él consulta el reporte de ventas de ayer. El encuentra que se vendieron 450 litros de gasolina regular y 320 litros de gasolina sin plomo, para un total de $384.83. La regular estaba a 10 centavos menos que la sin plomo. ¿Cuáles eran los precios de ambas gasolinas por litro el día anterior?

10) **Problema de gasolina regular y sin plomo # 3.**
La gasolina sin plomo cuesta 5 centavos más que la gasolina regular. Un cliente compró 1000 litros de gasolina sin plomo y 3000 litros de regular, por un total de $1,870. ¿Cuántos centavos por litro cuesta cada clase de gasolina?

Los problemas de 11 al 16 consisten en encontrar varios números de artículos cuyos precios son desconocidos. Los primeros dos te conducen paso a paso a través del problema. Para los siguientes, tú debes pensar los pasos.

11) **Problema de lavado de coches.**
El Club Mate ahorró dinero para su viaje de verano lavando automóviles. Ellos cobraron $3.00 por coche y $ 5.00 por camioneta.

Coche $ ______
Camioneta $ ______

a) Define variables para el número de coches lavados y para el número de camionetas lavadas. Entonces escribe una expresión para el total de dinero recibido.
b) Evalúa la expresión en la parte a para:
i) 27 coches y 13 camionetas.
ii) 41 carros y 8 camionetas
iii) 16 coches y 23 camionetas
c) Supongamos que el club ganó un total de $181 por lavar un total de 49 vehículos. Escribe un sistema de dos ecuaciones expresando estos hechos, y resuelve el sistema para averiguar cuántos de cada tipo de vehículos se lavaron.

12) **Problema de yogurt.**
Juan vendía medio galón de yogurt congelado por $4.00 cada uno y los galones a $7.00 cada uno.

	Precio	No.	$
$\frac{1}{2}$ galón	$4.00	___	___
1 galón	$7.00	___	___
Total		___	___

a) Define las variables para el número de medios galones y para el número de galones vendidos. Entonces escribe una expresión para el número total de pesos obtenidos por la venta.
b) Evalúa la expresión de la parte a para:
i) 33 medios galones y 19 galones
ii) 57 medios galones y 30 galones
iii) 36 medios galones y 42 galones
c) Un día Abel vende un total de 50 contenedores de yogurt, para un total de $287. Escribe un sistema de ecuaciones expresando estos hechos. Entonces resuelve el sistema para averiguar cuántos de cada clase de contenedores vendió.

13) **Problema de boletos de fútbol.**
Supongamos que estás recogiendo boletos en un juego de fútbol. Los boletos para asientos reservados cuestan $40 cada uno y los de admisión $30 cada uno. Después que el juego termina, la máquina de conteo muestra que 1787 personas pagaron entrada. Tú cuentas un total de $57,920 de la venta de boletos. Tú estas a punto de salir cuando tu jefe pregunta: "Por cierto, ¿cuántos de cada clase de boletos se recogieron?" En lugar de pasar media hora contando los boletos recogidos, tú decides usar el álgebra, ¿qué le dices a tu jefe?

14) **Problema de boletos de baloncesto.**
En un juego profesional de baloncesto, la máquina contadora mostró que 17,406 personas pagaron entrada. El efectivo total recibido por los boletos fue $133,371. Sin contar los boletos, averigua cuántos pagaron boletos por asientos reservados. ($10 cada uno). Y cuántos pagaron admisión general ($7).

15) **Problema de autos y camionetas.**
Un cargamento de autos y camionetas está en ruta hacia un lote de autos donde trabajas. Antes de que lleguen, el negocio de autos recibe una factura que muestra un total de 160 vehículos. Pero la parte de la factura que muestra la cantidad de cada tipo de vehículo ha sido extraviada. Tu jefe necesita desesperadamente saber cuántos de cada tipo hay antes de que lleguen. Ya que tú sabes álgebra, él acude a ti por ayuda. La factura muestra un peso total de 182,800 kg de vehículos, y cada camioneta pesa 1400 kg y cada auto 1000 kg. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay?

16) **Problema de petróleo nuevo y viejo.**
En los años 70's el gobierno bajó el precio del petróleo de los pozos viejos, pero permitió un precio más alto en el petróleo proveniente de pozos nuevos. Un mes la compañía de petróleo que estaba produciendo de un campo particular pagó $28,840.10 por un total de 3200 barriles de petróleo. Pero no había indicación de cuántos de estos barriles eran de petróleo nuevo y cuántos de petróleo viejo. Averigua estos números tomando en cuenta que el barril nuevo se vendió a $12.30, y el barril viejo a $7.04

Los problemas del 17 al 20 incluyen mezclas de varias cantidades de sustancias con compuestos conocidos. Los primeros dos problemas te conducen paso a paso hacia la solución. Para los otros, tú debes pensar qué hacer.

17) **Problema de escape de gas.**
El monóxido de carbono es un gas que tiene 43% de carbón. El dióxido de carbono tiene solamente 27% de carbón. Supongamos que la Agencia de Protección Ambiental (APA) analiza el escape de los carros, una mezcla de monóxido de carbono y dióxido de carbono.

Gas	%C	mg gas	mg C
CO	43%	___	___
CO_2	27%	___	___
Porcentaje C =		___ x 100=	___

a) Define las variables para el número de miligramos (mg) de cada gas en la prueba.
b) Evalúa la expresión de la parte a) si alguien mezcla 2000 mg de monóxido de carbono y 3000 mg de dióxido de carbono.
c) ¿Cuál es el porcentaje de carbón en la mezcla de la parte b)?
d) Si la APA encuentra que una muestra de 1600 mg de escape de gas tiene 32% de carbón. ¿Cuántos mg de la muestra fueron de monóxido de carbono, y cuántos fueron de dióxido de carbono?

18) **Problema de octanaje de gasolina.**
El número de octanaje de la gasolina se puede definir como el porcentaje de octano mezclado en la gasolina. Por ejemplo, gasolina con 89 de octanaje sería 89% de octano y 11% de algo más. Supongamos que una bomba tiene gasolina con 84% de octano y gasolina con 91% de octano.
a) La bomba mezcla *x* galones de gasolina con octano 84 y *y* galones de gasolina con 91 de octano. Escribe una expresión para el número de galones de octano en la mezcla.

b) Evalúa la expresión de la parte a si 1000 galones de gasolina con octano 84 se mezclan con 2000 galones de gasolina de octano 91.

c) ¿Cuál sería el número de octanaje de la mezcla de la parte b)?

d) Si la bomba recibe una orden de 15000 galones de gasolina de octano 89.7. ¿Qué cantidad de cada tipo de gasolina debe ser mezclada para surtir la orden?

19) **Problema de aleación de plata.**
Las monedas antiguas de plata contienen 90% de plata. La soldadura de plata contiene 63% de plata. Si quieres hacer 200 kg de una aleación que contenga 82% de plata. ¿Cuántos kg de monedas antiguas y cuántos kg de soldadura de plata tendrías que fundir para lograr esto?

20) **Problema de aleación de bronce.**
Supongamos que tienes un lote de chatarra. Tú tienes vastas cantidades de bronce amarillo (67% cobre, 33% zinc) y bronce rojo (85% cobre, 15% zinc) a la mano. La compañía Al Oye envía un pedido por 55 toneladas de bronce que contenga 80% de cobre y 20% de zinc. ¿Cuántas toneladas de cada clase de bronce tendrías que fundir juntas para surtir el pedido?

CAPÍTULO 6

ECUACIONES CUADRÁTICAS

En este capítulo aprenderán cómo resolver ecuaciones cuadráticas, es decir ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ con a, b y c constantes y $a\neq 0$, las cuales la variable está elevada al cuadrado. Reducir una ecuación de este tipo a una sin variable al cuadrado requiere tomar la raíz cuadrada de cada miembro. Una vez que aprendieron cómo resolver ecuaciones cuadráticas pueden usar las técnicas para algunas cosas tales como predecir la altura de un balón de fútbol varios segundos después de haber sido pateado.

Variable:	
t	Número de segundos desde que el balón fue pateado.
Expresión:	
$25t-5t^2$	Número de metros sobre el suelo.
Ecuación:	
$25t-5t^2=20$	Dice que el balón esta 20 metros arriba.

b) Evalúa la expresión de la parte a si 1000 galones de gasolina con octano 84 se mezclan con 2000 galones de gasolina de octano 91.

c) ¿Cuál sería el número de octanaje de la mezcla de la parte b)?

d) Si la bomba recibe una orden de 15000 galones de gasolina de octano 89.7. ¿Qué cantidad de cada tipo de gasolina debe ser mezclada para surtir la orden?

19) **Problema de aleación de plata.**
Las monedas antiguas de plata contienen 90% de plata. La soldadura de plata contiene 63% de plata. Si quieres hacer 200 kg de una aleación que contenga 82% de plata. ¿Cuántos kg de monedas antiguas y cuántos kg de soldadura de plata tendrías que fundir para lograr esto?

20) **Problema de aleación de bronce.**
Supongamos que tienes un lote de chatarra. Tú tienes vastas cantidades de bronce amarillo (67% cobre, 33% zinc) y bronce rojo (85% cobre, 15% zinc) a la mano. La compañía Al Oye envía un pedido por 55 toneladas de bronce que contenga 80% de cobre y 20% de zinc. ¿Cuántas toneladas de cada clase de bronce tendrías que fundir juntas para surtir el pedido?

CAPÍTULO 6

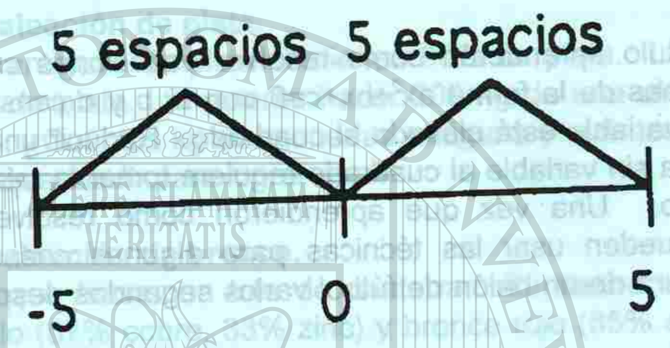
ECUACIONES CUADRÁTICAS

En este capítulo aprenderán cómo resolver ecuaciones cuadráticas, es decir ecuaciones de la forma $ax^2+bx+c=0$ con a, b y c constantes y $a \neq 0$, las cuales la variable está elevada al cuadrado. Reducir una ecuación de este tipo a una sin variable al cuadrado requiere tomar la raíz cuadrada de cada miembro. Una vez que aprendieron cómo resolver ecuaciones cuadráticas pueden usar las técnicas para algunas cosas tales como predecir la altura de un balón de fútbol varios segundos después de haber sido pateado.

Variable:	
t	Número de segundos desde que el balón fue pateado.
Expresión:	
$25t-5t^2$	Número de metros sobre el suelo.
Ecuación:	
$25t-5t^2=20$	Dice que el balón esta 20 metros arriba.

6-1 ECUACIONES QUE CONTIENEN VALOR ABSOLUTO Y ECUACIONES CON CUADRADOS

El valor absoluto de un número es la distancia entre ese número y el origen en una recta numérica.



Si el número dentro del valor absoluto tiene signo positivo, como en $|3|$ entonces su valor absoluto es el número mismo $|3| = 3$ (es el opuesto de -3).

Si el número dentro del valor absoluto es el 0, entonces su valor absoluto es 0 (ya que no tiene signo).

Ahora estás listo para aprender una definición formal de valor absoluto.

Definición

> VALOR ABSOLUTO
> El valor absoluto de un número es el número mismo o el opuesto del número, cualquiera que sea: positivo (o cero).
> Esto es:
> $|n| = n$, si n es positivo (ó 0)
> $|n| = -n$, si n es negativo

Observa que n es el opuesto de -n. Por ejemplo el opuesto de -7, escrito -(-7), es 7 el cual es un número positivo.

Un número positivo como el 9, tiene dos diferentes números como su valor absoluto, estos son:

$|-9| = 9 \quad |+9| = 9$

Si la variable apareciera dentro del valor absoluto $|x| = 9$, significaría que la *"x"* puede tomar dos valores: $x=9$ ó $x=-9$.

Así que la ecuación tiene dos soluciones, 9 y -9. Por lo tanto, la solución puede ser escrita en la forma de un conjunto solución.

Para $|x| = 9$ el conjunto solución es S={9,-9}.

Nota: La letra "S" se utiliza como conjunto solución.
Las llaves son símbolos usados para el conjunto solución.
Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución.

Así que ya puedes resolver ecuaciones del tipo $|x-3| = 5$.

Solución:

$\lvert x-3\rvert=5$	Escribe la ecuación dada
$x-3=5$ ó $x-3=-5$	La expresión x-3 necesariamente puede ser 5 ó -5.
$x=5+3 \quad x=-5+3$	Sumando 3 a cada miembro
$x=8 \quad x=-2$	
S={8,-2}	

De una manera semejante puedes resolver ecuaciones con cuadrados tal como : $(x-3)^2=25$, ya que ésta ecuación puede ser transformada en la anterior tomando la raíz cuadrada de cada miembro.

> PROPIEDAD DE LA IGUALDAD DE LA RAÍZ CUADRADA
> Si dos números positivos son iguales, entonces sus raíces cuadradas positivas son iguales.
> Así que si a=b, entonces $\sqrt{a} = \sqrt{b}$

Para que comprendas porqué la transformación puede ser realizada, veamos la siguiente operación:

$\sqrt{(-7)^2}$

Primero eleva al cuadrado

$\sqrt{49}$

Ya que $(-7)^2=49$, segundo, toma la raíz cuadrada, la cual es 7.

El número con el que empezaste era el -7 y la respuesta es +7, el cual es el valor absoluto de -7, escrito ½-7½. Así que:

$\sqrt{(-7)^2}=|-7|=7$

Por lo tanto

Conclusión

> La raíz cuadrada de un cuadrado perfecto es:
> $\sqrt{(\text{numero})^2}=|\text{numero}|$

Así que también puedes resolver ecuaciones como la siguiente:

$(x-3)^2=25$

Solución:

$(x-3)^2=25$	Escribe la ecuación dada
$\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{25}$	Tomando raíz cuadrada en ambos miembros
½x-3½=5	ya que $\sqrt{(\text{numero})^2}=|\text{numero}|$ y $\sqrt{25}=5$
$x-3=\pm5$	Definición de valor absoluto
$x=3\pm5$	Sumando 3 a ambos lados
S={8,-2}	Escribe el conjunto solución

OBJETIVO

> - Dada una ecuación que involucre el valor absoluto de una expresión con variable, encuentra el conjunto solución.
> - Puedes resolver ecuaciones del tipo $(x-3)^2=25$, en la cual el cuadrado de un binomio es igual a una constante.

EJEMPLO 1

Encuentra el conjunto solución de: $|3x-2|=32$

$|3x-2|$ 32	Escribe la ecuación dada
$3x-2=\pm32$	La expresión 3x-2 necesariamente debe ser 32 o -32
$3x=\pm32+2$	Sumando 2 a ambos lados
$x=\frac{34}{3}$ ó $x=\frac{-30}{3}$	Dividiendo entre 3 y 32+2=34, 32+2=-30
S={$\frac{34}{3}$,-10}	Escribir el conjunto solución.

EJEMPLO 2

Encuentra el conjunto solución de $|x+3|=-5$

No hay soluciones. Un valor absoluto son siempre positivos o cero. Por lo tanto el conjunto solución no tiene números en él. Este es llamado conjunto vacío. Hay dos maneras de escribir el conjunto vacío:

S=∅ o S={ }

En ambos casos la S es igual a conjunto vacío o S es igual a conjunto nulo.

EJEMPLO 3

Encuentra el conjunto solución de $30-|x+5|=17$

$30-|x+5|=17$	Escribe la ecuación dada
$-|x+5|=-13$	Resta 30 en cada miembro
$|x+5|=13$	Multiplica cada miembro por -1. (De ahora en adelante el problema es exactamente igual al anterior)
$x+5=\pm13$	La expresión dentro del valor absoluto debe de ser 13 ó -13.
$x=-5\pm13$	Agrega -5 a cada miembro
$x=8$ ó -18	Efectúa las operaciones
∴S={8,18}	Escribe el conjunto solución

EJEMPLO 4

Resuelve $(x-2)^2=49$

$(x-2)^2=49$	Escribe la ecuación dada
$\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{49}$	Toma la raíz cuadrada positiva de cada miembro

$\lvert x-2\rvert = 7$	$\sqrt{(\text{numero})^2} = \lvert\text{numero}\rvert$ y $\sqrt{49} = 7$ (de aquí en adelante esto es igual a los problemas anteriores. Has transformado un problema nuevo a un problema viejo)
$x-2=\pm 7$	Definición de valor absoluto
$x=2\pm 7$	Agrega 2 a cada miembro
$x=9$ ó -5	Efectúa las operaciones
$S=\{9,-5\}$	Escribe el conjunto solución

NOTA: Recuerda que resolver significa escribir el conjunto solución.

EJEMPLO 5

Resuelve $(3x+2)^2=-25$

$(3x+2)^2=-25$	Escribe la ecuación dada
	Esta ecuación no tiene solución ya que el cuadrado de todo número real es no negativo.
$S=\varnothing$	

EJEMPLO 6

Resuelve $(0.2x+1.3)^2=14.2$

$(0.2x+1.3)^2=14.2$	Escribe la ecuación dada
$\sqrt{(0.2x+1.3)^2} = \sqrt{14.2}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro
$\lvert 0.2x+1.3\rvert = \sqrt{14.2}$	$\sqrt{n^2} = \lvert n\rvert$
$0.2x+1.3 = \pm\sqrt{14.2}$	Definición de valor absoluto
$0.2x = -1.3 \pm \sqrt{14.2}$	Agrega -1.3 a cada miembro
$x = \dfrac{-1.3 \pm \sqrt{14.2}}{0.2}$	Divide cada miembro por 0.2
$x \approx 12.34$ ó -25.34	Realiza la operación aritmética auxiliándote con la calculadora
$S=\{12.34,-25.34\}$	Escribe el conjunto solución

PRÁCTICA ORAL

Para los siguientes problemas proporciona el resultado después del primer paso en la solución de la ecuación.

Ejemplo	Respuesta
$\lvert x-7\rvert\ 13$	$x-7=\pm 13$
$(x+5)^2=81$	$\frac{1}{2}x+5\frac{1}{2}=9$

a) $\lvert x-9\rvert = 15$ b) $\lvert x+1\rvert = 9$
c) $\lvert 16x-9\rvert\ 7$ d) $\lvert 5x+2\rvert = 6$
e) $\lvert 8-2x\rvert =$ f) $\lvert x+4\rvert = 3$
g) $(x+9)^2=121$ h) $(x-4)^2=0$
i) $(x+12)^2=4$ j) $(0.5x+6.4)^2=3.5$
k) $(x+6)^2=23$ l) $(x-5.7)^2=12.3$
i) $(x-7)^2=34$ i) $\lvert x+7\rvert = \sqrt{34}$
m) $(x-2)^2=16$ n) $(x-7)^2=25$
o) $(x-3)^2=83$ p) $(x+8)^2=53.6$
q) $(2x-8)^2=53.6$ r) $(2x-8)^2=49$

EJERCICIO 6.1

Para los problemas del 1 al 24, encuentra el conjunto solución de la ecuación.

1) $\lvert x\rvert = 21$ 2) $\lvert x\rvert = 53$
3) $\lvert x\rvert == 925$ 4) $\lvert x\rvert = 321$
5) $\lvert x-3\rvert = 5$ 6) $\lvert x+4\rvert\ 13$
7) $\lvert x+6\rvert = 9$ 8) $\lvert x-9\rvert = 13$
9) $\lvert x-9\rvert = -12$ 10) $\lvert x+7\rvert = -12$
11) $\lvert 6-x\rvert = 26$ 12) $\lvert 6-x\rvert = 23$
13) $\lvert 3x-6\rvert = 12$ 14) $\lvert 6x-3\rvert = 33$
15) $\lvert x-9\rvert = 0$ 16) $\lvert 9x+20\rvert = 38$
17) $\lvert 7x-2\rvert = 41$ 18) $\lvert 3x-12\rvert = 17$
19) $\lvert 18x-12\rvert = 25$ 20) $\lvert 12-7x\rvert = 121$
21) $\lvert 11-3x\rvert = 16$ 22) $\lvert 9-6x\rvert = -12$
23) $\lvert 44-5x\rvert = -24$ 24) $\lvert x-16\rvert = 0$

Para los problemas del 25 al 66, resuelve la ecuación. Necesitas hacer una transformación preliminar antes de quitar los signos de valor absoluto.

25) $|x|-6=14$
26) $|x|-9=26$
27) $42-|x|=17$
28) $69-|x|=24$
29) $|3x+4|-6=22$
30) $|3x+9|-3=36$
31) $7-|x-2|=-11$
32) $6-|x-4|=3$
33) $(x-7)^2=4$
34) $(x-9)^2=9$
35) $(x+8)^2=64$
36) $(x+6)^2=121$
37) $(x+1)^2=56$
38) $(x+3)^2=82$
39) $(x-2)^2=41$
40) $(x-8)^2=47$
41) $(x-5)^2=79.4$
42) $(x-1)^2=64.6$
43) $(3x-4)^2=25$
44) $(2x+9)^2=32$
45) $(4x-8)^2=16$
46) $(7x+12)^2=10$
47) $(6x-9)^2=12$
48) $(3x+8)^2=10$
49) $(5x-9)^2=0$
50) $(6x+4)^2=0$
51) $(x+2.5)^2=12$
52) $(7-x)^2=15$
53) $(x+7.9)^2=13.6$
54) $(x+5.4)^2=8.6$
55) $(5x-2.6)^2=61.9$
56) $(6x-3.9)^2=43.5$
57) $(0.9x+6.5)^2=321.6$
58) $(0.8x+14.6)^2=39.2$
59) $(x-9)^2=81$
60) $(x+11)^2=-121$
61) $(x+4)^2=100$
62) $(x-7)^2=49$

63) Resuelve una ecuación como $|5x+2|=7$ transformándola en formas más simples.

64) Evalúa los siguientes radicales. Recuerda que $\sqrt{n^2}=|n|$.

a. $\sqrt{(-4)^2}$ b. $\sqrt{(-3)^2}$

b. c. $\sqrt{5^2}$ d. $\sqrt{9^2}$

e. $\sqrt{n^2}$ es positiva, no importa si n es positiva o negativa. Explica por qué $\sqrt{n^2}$ puede ser escrita como $|n|$

6.2 ECUACIONES CON TRINOMIOS CUADRÁTICOS PERFECTOS

Este capítulo está relacionado con la solución de ciertas ecuaciones cuadráticas. En algunos casos especiales como $x^2-12x+36=50$ el miembro izquierdo puede ser un trinomio cuadrado perfecto. Debes recordar cómo transformar $x^2-12x+36$ en un binomio al cuadrado.

¿Esto es $2x\sqrt{36}$? Si es, entonces 1/2(-12) = -6

$$\mathbf{x^2-12x+36=(x-6)^2=50}$$

Entonces la ecuación de arriba puede ser escrita como $(x-6)^2=50$. De aquí en adelante este será un problema semejante a los ejemplos 4, 5 y 6 del punto anterior.

$\sqrt{(x-6)^2}=\sqrt{50}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro $\sqrt{n^2}=\vert n\vert$
$\vert x-6\vert=\sqrt{50}$	Definición de valor absoluto
$x-6=\pm\sqrt{50}$	Agrega 6 a cada miembro
$x=6\pm\sqrt{50}$	Realiza las operaciones
$x\approx 13.07$ ó -1.07	
$\therefore S=\{13.07,-1.07\}$	Escribe el conjunto solución

OBJETIVO

Ser capaz de resolver ecuaciones cuadráticas en las cuales el miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.

Compara las respuestas de acuerdo a los ejemplos de abajo.

EJEMPLO 1

Resuelve $x^2+4x+4=93$ — Escribe la ecuación dada

$x^2+4x+4=93$ — La mitad de 4 es 2, y 2^2 es 4. Por lo tanto, el miembro del lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.

$(x+2)^2=93$ — Toma la raíz cuadrada de cada miembro

$\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{93}$ — $\sqrt{(\text{numero})^2}=|\text{numero}|$

$|x+2|=\sqrt{93}$ — Definición de valor absoluto

$x+2=\pm\sqrt{93}$ — Agrega -2 a cada miembro

$x=-2\pm\sqrt{93}$ — Efectúa las operaciones y escribe el conjunto solución

$\therefore S=\{7.64,-11.64\}$

NOTA Es mejor no usar calculadora hasta que llegues al paso $x=$...., luego escribe las respuestas en el conjunto solución como las encuentres en la calculadora. Puedes verificar las respuestas antes de borrar el resultado en la calculadora. Sólo almacena las respuestas, por ejemplo 11.64 ... en memoria y llámala cuando la necesites para la verificación.

Verificar:

$(-11.64...)^2+4(-11.64...)+4=93$ — Sustituye x por -11.64...

$93=93$ — Evalúa la expresión. (La calculadora puede mostrar un número ligeramente diferente de 93).

EJEMPLO 2

Resuelve $x^2-4.6x+5.29=6.2$

$x^2-4.6x+5.29=6.2$	Escribe la ecuación dada
$(x-2.3)^2=6.2$	½ (-4.6) es -2.3 y $(-2.3)^2$ es 5.29
	Por lo tanto, el miembro del lado izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto
$\sqrt{(x-2.3)^2} = \sqrt{6.2}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro
$\lvert x-2.3 \rvert = \sqrt{6.2}$	$\sqrt{n^2} = \lvert n \rvert$
$x-2.3 = \pm\sqrt{6.2}$	Definición de valor absoluto
$x = 2.3 \pm \sqrt{6.2}$	Agrega 2.3 a cada miembro
S={4.79,-3.9}	Realízala y escribe el conjunto solución

Verificación de (4.79):

$(4.79...)^2-4.6(4.79...)+5.29=6.2$	Sustituye 4.79....por x
6.2=6.2	Verifica las respuestas. (Tu calculadora puede mostrar un valor ligeramente diferente)

PRÁCTICA ORAL

Proporciona el resultado después del primer paso de la solución de la ecuación.

Ejemplo	Respuesta
$x^2-10x+25=41$	$(x-5)^2=41$

a) $x^2-12x+36=21$
b) $x^2+16x+64=25$
c) $x^2-4x+4=12$
d) $x^2+10x+25=17$
e) $x^2+18x+81=42$
f) $x^2-6x+9=0$
g) $x^2+9x+20.25=19$
h) $x^2-11+30.25=0$
i) $x^2-4.2x+4.41=3.5$
j) $x^2+8.6x+18.49=5$

EJERCICIO 6.2

Para los problemas del 1 al 30, resuelve la ecuación escribiendo el miembro izquierdo como el cuadrado de un binomio. Si la solución es irracional aproxima a dos décimas.

1) $x^2+124x+49=1000$
2) $x^2+12x+36=169$
3) $x^2+2x+1=4$
4) $x^2+10x+25=16$
5) $x^2+6x+9=23$
6) $x^2+16x+64=54$
7) $x^2-22x+121=90$
8) $x^2+24x+144=29$

9) $x^2-18x+81=2526$
10) $x^2-6x+9=62.7$
11) $x^2-10x+25=93.5$
12) $x^2-22x+121=2259$
13) $x^2-14x+49=5.6$
14) $x^2-16x+64=39.6$
15) $x^2-12x+36=-5$
16) $x^2-20x+100=0$
17) $x^2-24x+144=144$
18) $x^2+18x+81=-36$
19) $x^2+8x+16=0$
20) $x^2+30x+225=225$
21) $x^2+1.6x+0.64=25$
22) $x^2-2.8x+1.96=36$
23) $x^2-11x+30.25=4$
24) $x^2-0.6x+0.09=25$
25) $x^2+8.84x+19.6=65$
26) $x^2-2.4x+1.44=15$
27) $x^2+2.8x+1.96=3.9$
28) $x^2+11x+30.25=5.4$
29) $x^2+0.6x+0.09=0.21$
30) $x^2-1.6x+0.64=0.92$

En los problemas del 31 al 40, resuelve la ecuación como lo hiciste en la sección anterior.

31) $\lvert x-9 \rvert=25$
32) $\lvert x-12 \rvert=82$
33) $\lvert x+26 \rvert=256$
34) $\lvert x+0.06 \rvert=0.09$
35) $\lvert 4x+2 \rvert=12$
36) $\lvert 9x-5 \rvert=62$
37) $(x+5)^2=121$
38) $(x+2)^2=16$
39) $(x-0.07)^2=0.09$
40) $(x-10)^2=500$

En los problemas del 41 al 48 utiliza el recurso de que la raíz cuadrada de un cociente es igual el cociente de las raíces cuadradas.

42) $x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}=\frac{9}{25}$
42) $x^2+\frac{2}{7}x+\frac{1}{49}=\frac{16}{49}$
43) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$
44) $x^2-\frac{10}{9}x+\frac{25}{81}=\frac{4}{81}$
45) $x^2+\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}=\frac{16}{36}$
46) $x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}=\frac{1}{36}$
47) $x^2-\frac{11}{4}x+\frac{121}{64}=\frac{144}{64}$
48) $x^2-\frac{12}{5}x+\frac{144}{100}=\frac{36}{100}$

49) En la ecuación $x^2+12x+17=32$, el miembro izquierdo no es un trinomio cuadrado perfecto debido a que el término constante 17, no es cuadrado perfecto.
   a. ¿Cómo debe ser el término constante para que el miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto?
   b. Agrega un número a cada miembro de la ecuación para hacer el miembro izquierdo un trinomio cuadrado perfecto.
   c. Resuelve la ecuación.

6.3 COMPLETANDO AL CUADRADO

Ya conoces cómo elevar un binomio al cuadrado. Por ejemplo $(x+3)^2$

$= (x+3)(x+3)$	Definición de un cuadrado
$=x^2+3x+3x+9$	Multiplica cada término de un binomio por cada término del otro.
$=x^2+6x+9$	Agrupa términos semejantes

Recuerda que la fórmula rápida de hacer esto, es la siguiente:

1. Eleva al cuadrado el primer término de $(x+3)$
2. Agrega dos veces el producto de los dos términos en $(x+3)$
3. Agrega el cuadrado del último término en $(x+3)$
   $(x+3)^2=x^2+6x+9$

Para asegurarte que puedes hacer esto, trabaja el ejemplo siguiente, cubriendo la respuesta hasta que hayas terminado cada parte.

EJEMPLO 1
Efectúa el cuadrado

a) $(x+6)^2$

$(x+6)^2$ $=x^2+12x+36$	Escribe la expresión dada $12x$ es $2(x)(6)$ y 36 es 6^2

b) $(x-8)^2$

$(x-8)^2$ $=x^2-16x+64$	Escribe la expresión dada $-16x$ es 2 $(x)(-8)x$ y 64 es $(-8)^2$. No olvides el signo negativo (-).

Si conoces este modelo, puedes invertir el proceso y encontrar el término constante necesario para obtener de un trinomio, un trinomio cuadrado perfecto. Por ejemplo, ¿qué número puedes agregar a x^2+8x para obtener un trinomio cuadrado perfecto? El proceso es como sigue:

1) Escribe x^2+8x y parte de un binomio cuadrado. Deja un espacio en blanco en el binomio
x^2+8x
$(x\ \ )^2$

2) Llena el número en el binomio
x^2+8x
$(x+4)^2$
4 es $\frac{1}{2}$ (8)

3) Llena el número en el trinomio
$x^2+8x+16$
$(x+4)^2$ porque 16 es 4^2

El proceso de agregar 16 a x^2+8x es llamado completando al cuadrado. Una vez visto el modelo es fácil hacerlo mentalmente. La técnica es dada a continuación.

Técnica
Completando al cuadrado
Si el coeficiente de x^2 es igual a 1 (como es en x^2+8x), entonces para completar al cuadrado, realizar lo siguiente:

1) Toma la mitad del coeficiente de x
(½ de 8, o sea 4, en este caso)
2) Elévalo al cuadrado
(4^2 es igual a 16, en este caso)
3) Agrega el resultado
$(x^2+8x+16,)$

OBJETIVO

Ser capaz de agregar una constante a un binomial cuadrático, como x^2+8x, para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

EJEMPLO 2
Completa al cuadrado

a) x^2+10x

$x^2+10x+25$ — $\frac{1}{2}$ de 10 es 5, y 5^2 es 25 (no escribas un signo de igualdad (=), puesto que la expresión dada no iguala la respuesta). Luego sumamos 25 .

b) x^2-12x

$x^2-12x+36$ — $\frac{1}{2}$ de (-12) es -6, y $(-6)^2$ es 36. Luego sumamos 36

c) x^2-9x

d) x^2-9x+20.25 — $\frac{1}{2}$ de 9 es 4.5, y 4.5^2 es 20.25 . Luego sumamos 20.25

d) x^2-3.5x

x^2-3.5x+3.0625 — $\frac{1}{2}$ de -3.5 es -1.75, y $(-1.75)^2$ es 3.0625. Luego sumamos 3.0625

EJERCICIO 6.3

Para los problemas del 1 al 10, eleva al cuadrado el binomio en solo un paso.

1) $(x+3)^2$	2) $(x+2)^2$
3) $(x-6)^2$	4) $(x-2)^2$
5) $(x+8)^2$	6) $(x+7)^2$
7) $(x-4)^2$	8) $(x+1)^2$
9) $(x-1)^2$	10) $(x-3)^2$

Para los problemas del 11 al 30, copia la expresión y agrega una constante para completar un trinomio cuadrado perfecto.

11) x^2+12x...	12) x^2+18x...
13) x^2-8x...	14) x^2-22x...
15) x^2+14x...	16) x^2+7x...
17) x^2+26x...	18) x^2-100x...
19) x^2-15x...	20) x^2-9x...
21) x^2-20x...	22) x^2+x...
23) x^2-17x...	24) x^2-11x...
25) $x^2+2.4x$...	26) $x^2-4.2x$...
27) $x^2+3.1x$...	28) $x^2+5.3x$...
29) $x^2+0.5x$...	30) $x^2+0.9x$...

31) La ecuación $x^2+14x+21=33$ tal como está no puede ser resuelta por el método de la sección anterior ya que el miembro izquierdo no es un trinomio cuadrado perfecto. Ahora que ya sabes cómo completar al cuadrado, serás capaz de imaginarte una forma para resolver esta ecuación. Puedes hacerlo en la forma siguiente :

Primero sustrae 21 de cada miembro, luego determina qué número se debe agregar a x^2+14x para completar el cuadrado. Agrega este número a cada miembro de la ecuación y luego efectúa esto en la forma que aprendiste en la sección anterior.

6.4 RESOLVIENDO ECUACIONES CUADRÁTICAS POR EL MÉTODO DE COMPLETANDO AL CUADRADO

Una vez entendido el proceso de completando al cuadrado, puedes usar la técnica para resolver ecuaciones cuadráticas tales como $x^2-10x+7=0$

Si el miembro izquierdo fuera un trinomio cuadrado perfecto, podrías resolver la ecuación como en la sección anterior. Por lo tanto, haz esto un trinomio cuadrado por el método de completar al cuadrado.

OBJETIVO

Ser capaz de resolver ecuaciones cuadráticas tales como $x^2-12x+9=0$, completando al cuadrado y agregando el mismo número al otro miembro.

Cubre las respuestas a medida que desarrolles estos ejemplos.

EJEMPLO 1

Resuelve $x^2-12x+9=0$ — Completando al cuadrado

$x^2-12x+9=0$	Escribe la ecuación dada
$x^2-12x \quad =-9$	Agrega -9 a cada miembro, dejando un espacio en el cual se completa al cuadrado
$x^2-12x+36=-9+36$	Agrega 36 a cada miembro de la ecuación para completar al cuadrado en el miembro izquierdo.
$(x-6)^2=27$	Escribe el miembro izquierdo como un cuadrado; -6 es la mitad de -12. Haz la aritmética en la derecha

A partir de aquí, el problema es como los de secciones anteriores.

$\sqrt{(x-6)^2}=\sqrt{27}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro. $\sqrt{(\text{numero})^2}=\lvert \text{numero} \rvert$
$\lvert x-6\rvert =\sqrt{27}$	Definición de valor absoluto
$x-6=\pm\sqrt{27}$	Agrega 6 a cada miembro y emplea la calculadora para obtener que $\sqrt{27}$ = 5.2
$x=6\pm\sqrt{27}$	Efectúe operaciones y escribe el conjunto solución.
S={11.20, 0.8}	

El checar la respuesta puede dar una pequeña sorpresa

$(11.20...)^2$-12(11.20...)+9=0

0=0

El número del miembro izquierdo probablemente sea cercano, pero no igual a cero. Lo cual podrá comprobar empleando la calculadora.

El método anterior para completar al cuadrado no funciona si el coeficiente de x^2 no es igual a 1. Para resolver una ecuación como $3x^2+5x+3=0$ simplemente divide cada miembro por 2, obteniendo:

$$\frac{2x^2+5x+3}{2}=\frac{0}{2}$$

En el lado izquierdo, la división se distribuye sobre la adición. En el lado derecho 0/3 es 0. Así la ecuación llega a ser: $x^2+2.5x+1.5=0$

Desde aquí resolverás las ecuaciones como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2

Resuelve $2x^2+10x-9=0$, completando al cuadrado.

$2x+10x-9=0$	Escribe la ecuación dada
$x^2+5x-4.5=0$	Divide cada miembro por 2
$x^2+5x=4.5$	Agrega 4.5 a cada miembro
$x^2+5x+6.25=4.5+6.25$	Completa al cuadrado
$(x+2.5)^2=10.75$	Escribe el miembro izquierdo como un cuadrado
	Suma en el lado derecho
$x+2.5=\pm\sqrt{10.25}$	Toma la raíz cuadrada de cada miembro.
$x=\_2.5\pm\sqrt{10.75}$	Agrega -2.5 a cada miembro y emplea la calculadora para obtener que $\sqrt{10.75}\approx 3.28$
S{0.78,-5.78}	Escribe el conjunto solución

Verificación de (-5.78):

$2(-5.78)^2+10(-5.78)-9=0$	Sustituye $x=5.78$
$0=0$	

PRÁCTICA ORAL

Para los problemas siguientes, proporciona el número que debe ser sumado para completar un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo	Respuesta
i. $x^2-14x...$	*i.* 49
ii. $x^2+5x...$	*ii.* 6.25

a) $x^2+18x...$
b) $x^2+6x...$
c) $x^2-3x...$
d) $x^2-13x...$
e) $x^2+3.7...$
f) $x^2-0.4...$
g) $x^2-22x...$
h) $x^2-18x...$
i) $x^2+5x...$
j) $x^2-11x...$
k) $x^2-x...$
l) $x^2-6.2x...$

EJERCICIO 6.4

Para los problemas del 1 al 10, resuelve la ecuación completando al cuadrado. Escribe cualquier respuesta irracional, redondeando a dos decimales.

1) $x^2+6x+7=0$
2) $x^2-6x+1=0$
3) $x^2+4x+6=0$
4) $x^2+10x+23=0$
5) $x_2-18x+10=0$
6) $x^2-8x-25=0$
7) $x^2-12x+7=0$
8) $x^2-22x-14=0$
9) $x^2-2x-3=0$
10) $x^2+24x+10=0$

Problemas del 11 hasta el 20 tienen decimales en la ecuación !u otras sorpresas!

11) $x^2+24x-1.6=0$
12) $x^2+8x-6.5=0$
13) $x^2-2x-22.4=0$
14) $x^2-10x-17.5=0$
15) $x^2+6x+17x=0$
16) $x^2-22x+80=0$
17) $x^2-10x+25=0$
18) $x^2-4x+25=0$
19) $x^2+20x=0$
20) $X^2-10x=0$

En los problemas del 21 al 30, el coeficiente de x no es un número par entero.

21) $x^2+3x+1=0$
22) $x^2+5x+3=0$
23) $x^2-9x-6=0$
24) $x^2-3x-5=0$
25) $x^2-5x-18=0$
26) $x^2-7x-18=0$
27) $x^2-13x+40=0$
28) $x^2-x+1=0$
29) $x^2+2.4x-5=0$
30) $x^2+6.4x-7=0$

Los problemas del 31 al 50 requieren otras transformaciones antes de completar al cuadrado.

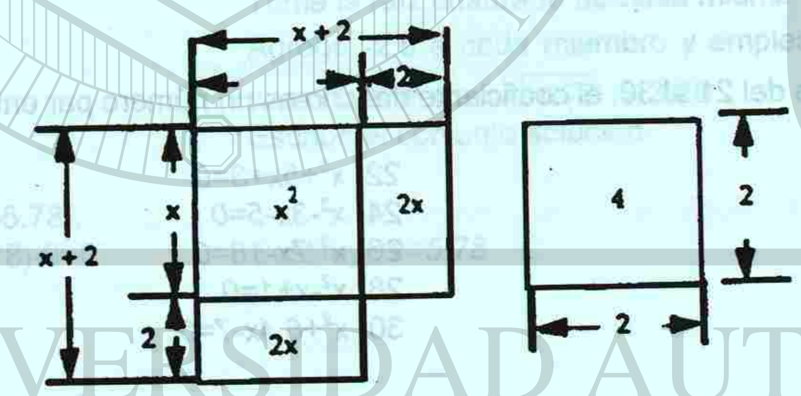
31) $x^2-x-2=0$
32) $3x^2+10x+7=-2$
33) $x^2=-9x+8$
34) $x^2=-8x-16$
35) $2x^2-x-3=0$
36) $x^2+1.32=-1.4x$
37) $9x^2+10=12x$
38) $6.2x=32-x^2$
39) $x^2+0.7=2.4x$
40) $x^2-5x=-x-8$

41) $4.6x=4-x^2$
42) $2x^2+5x+3=0$
43) $4x^2-9x+3=0$
44) $42x^2-x-1=0$
45) $2x^2-2x+5=0$
46) $0.4x^2+1.5x-1.3=0$
47) $-6x^2+18x+29=0$
48) $-3x^2-10x+4=0$
49) $0.6x^2+2.3x-20=0$
50) $6x^2-5x+1=0$

Para los problemas del 51 al 60, resuelve la ecuación. Estos son similares a las ecuaciones que resolviste antes de esta sección. !Piensa cuidadosamente acerca de lo que estás haciendo!

51) $|x-6|=36$
52) $|x+11|=9$
53) $|2x-17|=16$
54) $|5x-3|=25$
55) $(x-5)^2=100$
56) $(x+6)^2=4$
57) $(x+6.9)^2$
58) $(x-1.2)^2=16$
59) $(x-1)^2=36$
60) $(x+10)^2=1$

61) La frase completando al cuadrado puede ser ilustrada con el concepto de área. Por ejemplo el diagrama muestra un cuadrado con lado *x*, flanqueado por dos rectángulos de dimensión 2 por x. El área es $x^2+2x+2x$, o x^2+4x. Como puedes ver, agregando un cuadrado de 2 por 2 (área igual a 4) "completa" el cuadrado grande.



Dibuja las figuras que completen el cuadrado para las siguientes expresiones:
a. x^2+12x b. x^2+20x c. x^2-14x

62) Es posible completar al cuadrado agregando un término intermedio. Por ejemplo, si x^2+4 fuera a ser convertido en un trinomio cuadrado, el término intermedio tendría que ser $4x$. ¿Cuál tendría que ser el término intermedio para hacer estas expresiones trinomios cuadrados?
a. x^2+_16 b. x^2+_+100 c. x^2-_+81
d. x^2-_+49 e. x^2+_+53

6.5 LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Toda ecuación cuadrática en una variable es de la forma :

1) $ax^2 + bx + c = 0$

donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$.

Usamos el método de completamiento cuadrático para obtener una fórmula que nos servirá para obtener las soluciones de cualquier ecuación de la forma 1)

Comenzaremos dividiendo ambos miembros por a. Obtenemos :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumamos $-\frac{c}{a}$ en ambos lados de la igualdad :

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

Completamos un trinomio (cuadrado de un binomio) para lo cual nos falta el término $\frac{b^2}{4a^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Hallamos la raíz cuadrada en ambos miembros de la igualdad

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Sumando $-\frac{b}{2a}$ para despejar x

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Luego $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ que es la fórmula buscada.

Veamos como podemos aplicarla para resolver ;

Ejemplo 1.

$2x^2-9x-5=0$

Aquí $a=2$ $b=-9$ y $c=-5$

$b^2-4ac=81-4(2)(-5)=121;\ \sqrt{121}=11$

Luego

$$x=\frac{-(-9)\pm 11}{4}=\frac{9\pm 11}{4}$$

Tomando el "+ "(mas) del doble signo

$$x=\frac{20}{4}=5$$

Tomando el "- "(menos)

$$x=\frac{9-11}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Las soluciones son pues:

$x=5$ y $x=-\frac{1}{2}$

Ejemplo 2.

$4x^2+20x+25=0$

$a=4$ $b=20$ $c=25$

$b^2-4ac=400-400=0$; $\sqrt{0}=0$

$$x=\frac{-20\pm 0}{8}=-\frac{5}{2}$$

En este caso obtenemos una sola solución; $x=-\frac{5}{2}$

Si admitimos que toda ecuación de 2° grado admite o sea, posee dos soluciones en este caso diremos que las dos son iguales a $x=-\frac{5}{2}$

OBJETIVO

Ser capaz de resolver una ecuación cuadrática dada usando la fórmula cuadrática.

Cubre las respuestas conforme vayas resolviendo los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.

Resuelve usando la fórmula cuadrática: $2x^2+8x+5=0$

$2x^2+8x+5=0$	Escribe la ecuación dada
$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4(2)(5)}}{2(2)}$	Usa la fórmula cuadrática: $a=2$, $b=8$, $c=5$
S+{-0.78,-3.22}	El radical es $\sqrt{24}$, el cual es aproximadamente 4,898979486

Ejemplo 4.
Resuelve usando la fórmula cuadrática: $5x^2-7x-11=0$

$5x^2-7x-11=0$ Escribe la ecuación dada

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-4(5)(-11)}}{2(5)}$$ Usa la fórmula cuadrática: $a=5$, $b=-7$, $c=-11$

S{2.34, -0.94} Escribe el conjunto solución. El radical es $\sqrt{269}$, el cual es aproximadamente 16.40121947

Ejemplo 5
Resuelve usando la fórmula cuadrática: $2x^2+5x+2=0$

$2x^2+5x+2=0$ Escribe la ecuación dada

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-4(2)(2)}}{2(2)}$$ Usa la fórmula cuadrática: $a=2$, $b=5$, $c=2$

S{-0.5,-2} El radical es $\sqrt{9}$ = 3. Entonces las soluciones son números racionales. (Esto pasa siempre que b^2-4ac es un cuadrado perfecto)

Ejemplo 6.
Resuelve usando la fórmula cuadrática: $3x^2-x+8=0$

$3x^2-x+8=0$ Escribe la ecuación dada

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(3)(8)}}{2(3)}$$ Usa la fórmula cuadrática: $a=3$, $b=-1$, $c=8$

$S=\varnothing$ El radical es $\sqrt{-95}$ el cual no es un número real (esto pasa siempre que b^2-4ac es negativo)

Ejemplo 7
Resuelve usando la fórmula cuadrática: $(2x+3)(x-7)=3$

$(2x+3)(x-7)=3$ Escribe la ecuación dada
$2x^2-11x-21=3$ Multiplica los binomios
$2x^2-11x-24=0$ Has el miembro izquierdo igual a cero puesto que la fórmula cuadrática empieza: Si $ax^2+bx+c=0$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-4(2)(-24)}}{2(2)}$$ Usa la fórmula cuadrática: $a=2$, $b=-11$, $c=-24$

S{7.17,-1.67} El radical es $\sqrt{313}$ el cual es aproximadamente 17.69180601

PRÁCTICA ORAL
Proporciona los valores de *a*, *b* y *c* para utilizarlos en la fórmula cuadrática.

Ejemplo
$8x^2-9x+1=0$

Respuesta
$a=8$, $b=-9$, $c=1$

a) $5x^2-3x+2=0$
b) $6x^2+4x+10=0$
c) $x^2-x+3=0$
d) $9x^2-11x-15=0$
e) $6x^2+3x+2=0$
f) $5x^2-3x+2=0$
g) $x^2-2x=0$
h) $-3x^2-2x-6=0$
i) $x^2+x+1=0$
j) $6x^2-9=0$
k) $-x^2-x+1=0$
l) $5-3x+7x^2=0$

EJERCICIO 6.5

Para los problemas del 1 al 20, resuelve la ecuación usando la fórmula cuadrática. Escribe las soluciones irracionales, redondeándolas a dos decimales. Verifica cada respuesta almacenándola en la memoria de la calculadora. Después evalúa la(s) expresión(es) en la ecuación usando el valor almacenado.

1) $2x^2-x-3=0$
2) $7x^2+10x+3=0$
3) $4x^2-11x-3=0$
4) $x^2+8x+25=0$
5) $x^2-x-30=0$
6) $5x^2-17x+6=0$
7) $2x^2-4x+1=0$
8) $x^2-6x+13=0$
9) $6x^2+5x+1=0$
10) $x^2-x-20=0$
11) $9x^2+3x-2=0$
12) $8x^2+10x+1=0$
13) $3x^2-x-2=0$
14) $-x^2-x+1=0$
15) $x^2+7x+12=0$
16) $0.2x^2-0.4x-2.1=0$
17) $0.5x^2+11x+3.5=0$
18) $x^2-5x+3=0$
19) $0.8x^2+5x+3.1=0$
20) $-x^2+x+1=0$

Para los problemas del 21 al 30, resuelve la ecuación como lo hiciste arriba. Observa que falta un término.

Ejemplos
i) $3x^2+7=0$ puede ser escrita como $3x^2+0x+7=0$; entonces $a=3, b=0, c=7$
ii) $8x^2-5x=0$ puede ser escrita como $8x^2-5x+0=0$; entonces $a=8, b=-5, c=0$

21) $3x^2+7=0$
22) $4x^2-16=0$
23) $4x^2+9=0$
24) $2x^2+4=0$
25) $x^2-2x=0$
26) $3x^2+2x=0$
27) $2x^2+x=0$
28) $x^2+x=0$
29) $5x+1=0$
30) $3x-13=0$

Para los problemas del 31 al 50 resuelve la ecuación como hiciste arriba. Deberás transformarlas a: $ax^2+bx+c=0$, para que puedas usar la fórmula cuadrática.

31) $5x^2+2x=-3$	32) $3x^2-5x=-2$
33) $2x^2-5x-3=2x-4x^2$	34) $x^2+3x-1=x-2x^2$
35) $x(x-2)=5$	36) $x(x-6)=2$
37) $x(x+1)=30$	38) $n(n+2)=35$
39) $x^2=-2x+2$	40) $(x+3)^2-x=20$
41) $(x+3)(x-2)=2$	42) $(x+2)(x-5)=6$
43) $(2x+2)(3x+1)=24$	44) $(3x+2)(2x-1)=13$
45) $(x+2)^2+36=0$	46) $(x+3)^2+36=0$
47) $0.2(x-4)=x^2-1.2$	48) $0.3(3-x)=x^2+0.6$
49) $(x+8)^2+x=(x+6)^2+4$	50) $(x-3)^2+3x=(x+1)^2-10$

Has notado que algunas veces no hay soluciones reales a ciertas ecuaciones cuadráticas. Esto sucede cuando el número bajo el signo radical es negativo. De la fórmula cuadrática, sabes que este número es b^2-4ac. Sin que hayas resuelto las siguientes ecuaciones, encuentra el valor de b^2-4ac y usa el resultado para decir si la ecuación tiene o no soluciones reales.

a) $3x^2+2x+5=0$	b) $x^2+7x-3=0$
c) $5x^2+x-20=0$	d) $2x^2-3x+7=0$

6.6 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR FACTORIZACIÓN

En el capítulo 2 aprendiste a usar la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones de este tipo:
$x^2-x-2=0$

También aprendiste cómo factorizar trinomios de segundo grado como:
x^2-x-2

Es tiempo de poner estas dos ideas juntas y desarrollar un método para resolver ciertos tipos de ecuaciones cuadráticas.

Empezaremos con:
$x^2-x-2=0$

Puedes factorizar el miembro de la izquierda, quedando:
$(x-2)(x+1)=0$

En esta forma, la ecuación nos dice que un ***producto*** de dos números es igual a CERO. Pero la única manera de que un producto pueda ser cero es que uno de los factores sea cero. Entonces la ecuación puede ser transformada a:
$x-2=0$ ó $x+1=0$

Esta transformación cambia un problema difícil en dos problemas fáciles. Añadiendo 2 en la primera expresión y restando 1 en la segunda, nos dá:
$x=2$ ó $x=-1$

Por lo tanto, el conjunto solución es:
S={2,-1}

> PROPIEDAD MULTIPLICATIVA DEL CERO
> (Cero por cualquier número es cero)
> Si un factor de un producto es 0, entonces el producto es igual a 0.
>
> Esto es, para todo número real n
> $n(0)=0$ ó $(0)n=0$

El hecho de que el producto pueda ser cero ***únicamente*** si uno de sus factores es cero, es el recíproco de la ***propiedad multiplicativa del cero.***

> RECIPROCO DE LA PROPIEDAD MULTIPLICATIVA DEL CERO.
>
> Si un producto de números reales es igual a cero, entonces uno de los factores es igual a cero. Esto es, para todo número real n y p, si $np=0$, entonces $n=0$ ó $p=0$

Desafortunadamente, esto no funciona si el trinomio no puede ser factorizado. Recuerda que para la ecuación $ax^2+bx+c=0$, la fórmula cuadrática dice que:

También recuerda que b^2-4ac recibe el nombre de ***discriminante***. Para x^2-x-2, el discriminante es $(-1)^2-(4)(1)(-2)=9$

Da la casualidad que el número 9 es un ***cuadrado perfecto***, 3^2. Así
Install Equation Editor and double-click here to view equation. y la solución para x no involucra ningún radical. Este es también el caso cuando un trinomio ax^2+bx+c puede ser factorizado.

Conclusión

PRUEBA DEL DISCRIMINANTE PARA FACTORIZAR

Un trinomio cuadrático ax^2+bx+c puede ser factorizado si y sólo si el discriminante b^2-4ac es un cuadrado perfecto.

OBJETIVO

Dada una ecuación cuadrática, resolver por factorización, si resulta práctico, de otra manera resolver esto por la fórmula cuadrática.

EJEMPLO 1

Resolver $(7x-3)(2x+5)=0$

$(7x-3)(2x+5)=0$	Escribir la ecuación dada Un producto es cero, solo si un factor es cero.
$7x=3$ ó $2x=-5$	Agregar 3 y agregar -5
$x=\frac{3}{7}$ ó $x=\frac{-5}{2}$	Dividir por 7 y dividir por 2

Por lo tanto:

$S=\{\frac{3}{7},\frac{-5}{2}\}$	Escribir el conjunto solución

EJEMPLO 2

Resolver $2x^2-x-3=0$

$2x^2-x-3=0$	Escribir la ecuación dada
$(2x-3)(x+1)=0$	Factorizar (si puedes, por inspección)
$2x-3=0$ ó $x+1=0$	Un producto es cero sólo si un factor es cero
$2x=3$ ó $x=-1$	Agregar 3 y agregar -1
$x=\frac{3}{2}$ ó $x=-1$	Dividir por 2

Por lo tanto:

$S=\{\frac{3}{2},-1\}$	Escribir el conjunto solución

EJEMPLO 3

Resolver $2x^2+15x+12=0$

$2x^2+15x+12=0$	Escribir la ecuación dada
$b^2-4ac=15^2-4(2)(12)$	Calcular el discriminante
$=129$	129 no es cuadrado perfecto, así que no puede haber factorización
$x=\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2(2)}$	Usar la fórmula cuadrática
$x\approx-0.91$ ó -6.59	Calcular

Por lo tanto:

$S=\{-0.91,-6.59\}$	Escribe la solución

EJEMPLO 4

Resolver $10x^2-83x+24=0$

$10x^2-83x+24=0$	Escribe la ecuación dada
$x=\frac{83\pm\sqrt{6889-4(10)(24)}}{2(10)}$	Se resuelve por fórmula cuadrática puesto que sería impráctico factorizar con coeficientes tan grandes
$x=\frac{83\pm\sqrt{5929}}{20}$	Hacer los cálculos
$x=\frac{83\pm77}{20}$	Obtener la raíz cuadrada. (El trinomio podría haberse factorizado ya que 5929 es cuadrado perfecto)
$x=8$ ó $x=\frac{3}{10}$	Terminar cálculos

Por lo tanto:

$S=\{8,\frac{3}{10}\}$	Escribiendo el conjunto solución.

PRÁCTICA ORAL

¿Pueden las siguientes ecuaciones ser resueltas factorizando? Explica.

Ejemplos	Respuestas
i) $3x^2-10x-8=0$	*i)* Sí; $b^2-4ac=196$ es cuadrado perfecto
ii) $5x^2-11x+3=0$	*ii)* No; $b^2-4ac=61$ no es cuadrado perfecto

a) $x^2+8x+15=0$
b) $x^2-x-6=0$
c) $x^2+5x+3=0$
d) $x^2+3x+10=0$
e) $x^2+3x-10=0$
f) $x^2+3x+10=0$
g) $2x^2+7x+6=0$
h) $3x^2-8x+5=0$
i) $3x^2+10x-8=0$
j) $2x^2+5x-10=0$
k) $x^2+6x+10=0$
l) $4x^2-12x+9=0$

EJERCICIO 6.6

1) Enuncia la propiedad de multiplicación del cero (ver texto).

2) Enuncia la conversión de la propiedad de multiplicación por cero (ver texto)

Para problemas del 3 al 15, resuelve la ecuación

3) $(x-3)(x-7)=0$
4) $(x-9)(x-2)=0$
5) $(3x-5)(x+4)=0$
6) $(4x-7)(x+3)=0$
7) $(7x+8)(2x-11)=0$
8) $(11x+17)(2x-13)=0$
9) $(x-3)(x+4)(x-5)=0$
10) $(5x+24)(4x+37)=0$
11) $(6x-5)(x+7)(2x-9)=0$
12) $(x-6)(x-5)(x+1)=0$
13) $(x-1)(x+2)(x+3)(x-4)=0$
14) $(2x-9)(x+8)(6x-7)=0$
15) $(x+6)(x-7)(x-8)(x+9)=0$

Para los problemas del 16 al 39 resolver por factorización si es práctico. De otro modo resuelve usando la fórmula cuadrática. Redondea las soluciones irracionales a dos cifras decimales.

16) $x^2+7x+10=0$
17) $x^2+10x+21=0$
18) $x^2-x-12=0$
19) $x^2-3x-10=0$
20) $x^2+4x-5=0$
21) $x^2+5x-6=0$
22) $x^2-5x+6=0$
23) $x^2-6x+8=0$
24) $x^2+6x+5=0$
25) $x^2+9x+7=0$
26) $2x^2+5x+3=0$
27) $2x^2+11x+5=0$
28) $3x^2+2x-8=0$
29) $3x^2+7x-20=0$
30) $5x^2-7x-6=0$
31) $5x^2-8x-4=0$
32) $6x^2-11x+5=0$
33) $5x^2-24x+16=0$
34) $5x^2-13x-6=0$
35) $2x^2-15x-5=0$

36) $6x^2-5x-6=0$
37) $6x^2-7x-20=0$
38) $16x^2-46x+15=0$
39) $12x^2-20x+7=0$

Para los problemas del 40 al 45 el miembro izquierdo se puede factorizar como producto de tres binomios lineales. Resuelve las ecuaciones, cada una tiene tres soluciones.

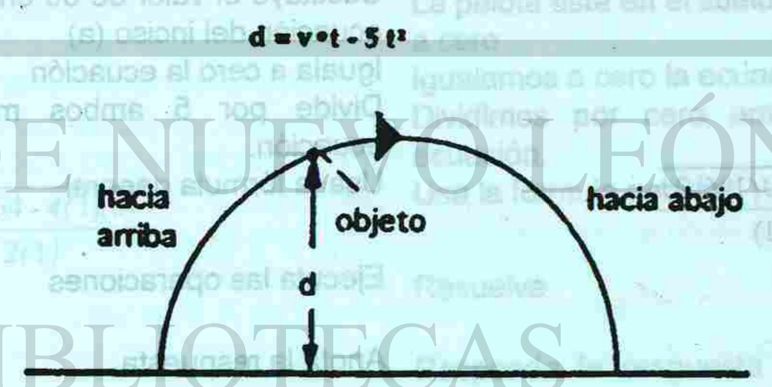
40) $x^3-3x^2-4x+12=0$
41) $x^3-2x^2-9x+18=0$
42) $x^3+4x^2-25x-100=0$
43) $x^3+5x^2-36x-180=0$
44) $3x^3+4x^2-3x-4=0$
45) $4x^3-24x^2-x-6=0$

Para los problemas del 46 al 49 cada ecuación tiene 3 soluciones. Sin embargo necesitarás habilidad para hallar las tres soluciones. Trata primero factorizando.

46) $x^3+6x^2-5x-30=0$
47) $x^3+2x^2-7x-14=0$
48) $6x^3-3x^2-8x+4=0$
49) $5x^3-20x^2-3x+12=0$

6.7 PROBLEMAS CON MOVIMIENTO VERTICAL

Como recordarás, en un movimiento uniforme, la distancia es igual a la velocidad multiplicada por el tiempo
$d=v\times t$
Insistimos en que esta fórmula trabaja sólo si la velocidad permanece constante. Cuando un objeto es lanzado en forma vertical hacia arriba, la velocidad varía. La velocidad va disminuyendo según el objeto va subiendo, hasta llegar a su punto más alto; luego de iniciar su movimiento de regreso, su velocidad se vuelve negativa. En Física aprenderás que la distancia no es igual a la velocidad por el tiempo, en su lugar la distancia es dada por: $d=v\times t-5t^2$



Donde t es el número de segundos desde que el objeto fue lanzado hacia arriba, d es la distancia en metros sobre el punto donde fue lanzado y v es la velocidad con que fue lanzado el objeto (velocidad inicial) en metros por segundo.

Como la variable t esta elevada al cuadrado, esta fórmula se convierte en una ecuación cuadrática, si se dan valores de d y v. En esta sección utilizaremos esta fórmula para resolver problemas con movimiento vertical.

OBJETIVO:

> Para un valor conocido de v, encontrar d cuando nos dan t o encontrar t cuando nos dan d.

EJEMPLO 1

Una pelota es lanzada hacia arriba con una velocidad inicial de 40 metros por segundo (m/seg)

a) Escribe una ecuación en función de d y t
b) ¿A qué altura estará la pelota después de 3 segundos?
c) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota para llegar a 60 metros de altura?
d) ¿Cuánto tiempo tarda para llegar a una altura de 70 metros?
e) ¿Cuánto tiempo para llegar a 90 metros?
f) ¿Después de cuánto tiempo estará la pelota en el suelo?

Solución

a) $d=40t-5t^2$ — Sustituye el valor de la velocidad (40) en la ecuación $d=vt-5t^2$

b) $d=40(3)-5(3)^2$, $d=75\ m$ — Sustituye el valor de 3 en lugar de t tomando la ecuación del inciso (a)

c) $60=40t-5t^2$ — Sustituye el valor de 60 en lugar de d en la ecuación del inciso (a)

$t^2-8t+12=0$ — Iguala a cero la ecuación. Divide por 5 ambos miembros de la ecuación.

$$t=\frac{8\pm\sqrt{64-4(1)(12)}}{2(1)}$$ Usa la fórmula general

$$t=\frac{8\pm4}{2}$$ Ejecuta las operaciones

$t=6$ o $t=2$ — Anota la respuesta

A los dos segundos la pelota alcanza la altura de 60 metros y al regresar vuelve a llegar a la misma altura a los 6 segundos.

d) $70=40t-5t^2$ — Sustituye el valor de 70 metros en el lugar de la d

$t^2-8t+12=0$ — Iguala a cero la ecuación. Divide por 5 ambos miembros de la ecuación

$$t\pm\frac{8+_{-}\sqrt{64-4(1)(14)}}{2(1)}$$ Utiliza la fórmula general para encontrar los valores de t

$$t=\frac{8\pm\sqrt{8}}{2}$$ Ejecuta las operaciones

$t=5.41t,\ t=2.58$ — Anota la respuesta

A los 2.58 segundos la pelota alcanza la altura de 70 metros y al regresar 5.41 segundos para llegar a la misma altura.

e) $90=40t-5t^2$ — Sustituye el valor de 90 metros en el lugar de la d

$t^2-8t+18=0$ — Iguala a cero la ecuación. Divide por 5 ambos miembros de la ecuación

$$t=\frac{8\pm\sqrt{64-4(1)(18)}}{2(1)}$$ Sustituye en la fórmula general para encontrar los valores de t

$$t=\frac{8\pm\sqrt{-8}}{2}$$

$t=\varnothing$ — Responde la pregunta

La pelota nunca alcanza la altura de 90 metros. Como el discriminante $b^2-4ac=-8$, los valores de t, no son números reales. No existen valores de t para los cuales la pelota llegue a 90 metros.

f) $0=t-5t^2$ — La pelota está en el suelo cuando d es igual a cero

$t^2-8t=0$ — Igualamos a cero la ecuación. Dividimos por cero ambos lados de la ecuación.

$$t=\frac{8\pm\sqrt{64-4(1)(0)}}{2(1)}$$ Usa la fórmula general

$$t=\frac{8\pm8}{2}$$ Resuelve

$t=8,\ t=0$ — Responde la respuesta (el valor de cero representa el tiempo en el cual la pelota fue lanzada)

A los 8 segundos después de lanzada la pelota, esta toca el suelo.

La fórmula de movimiento vertical es la siguiente:

Si un objeto es lanzado hacia arriba en forma vertical con una velocidad inicial de v mts. por segundo, entonces su distancia en metros sobre su punto de partida en un tiempo de t segundos, después de que fué lanzada es aproximadamente: $d=v\times t-5t^2$

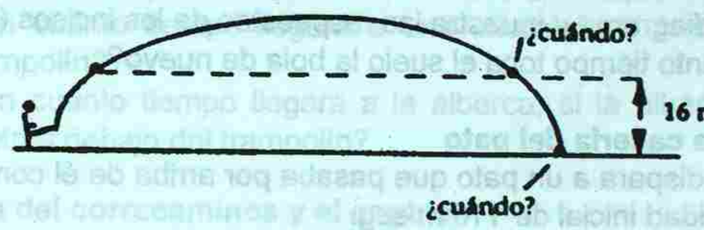
PRÁCTICA ORAL

Para los siguientes problemas, plantea una ecuación para la distancia sobre el punto de partida, si el objeto ha sido lanzado con la velocidad inicial indicada.

Ejemplo	Respuesta
Se lanza a 30 m/seg	$d=30t-5t^2$
a) Una pera a 7 m/seg	f) Una roca a 10 m/seg
b) Una lanza a 4 m/seg	g) Una flecha a 12 m/seg
c) Una bala a 1200 m/seg	h) Una canica a 1 m/seg
d) Un frijol a 3 m/seg	i) Una lenteja a 0.2 m/seg
e) Un pedal a 2.6 m/seg	j) Una lechuga a 5.2 m/seg

EJERCICIO 6.7

1. **Problema del balón**
   Un balón es pateado hacia arriba en forma vertical con una velocidad inicial de 20 m/seg. Calcula:
   a) Su altura después de:
      i) 2 seg
      ii) 4 seg
   b) ¿En qué tiempo alcanza una altura de 16 metros?
   c) Copia el diagrama y muestra la respuesta para la parte (a) en relación a los 16 metros de la parte (b)
   d) ¿Cuánto tiempo dura el balón en vuelo?



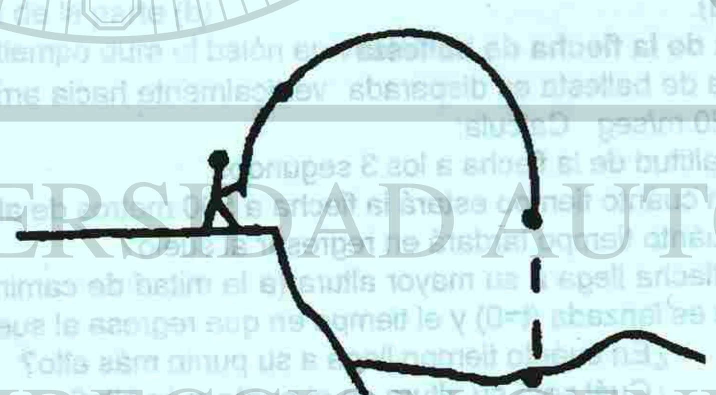
2. **Problema de un elevado de beisbol**
   Fernando Valenzuela batea un elevado hacia el jardín central. La bola sale con una velocidad inicial de 40 m/seg.
   a) ¿Cuál será la altura de la bola después de 2 segundos?
   b) ¿En cuánto tiempo estará la bola a 30 metros de altura de donde fue bateada?
   c) ¿Cuánto tiempo tarda la bola en tocar el suelo?
   d) La bola está en su punto más alto (a mitad de camino) entre el tiempo en que es bateada *(t=0)* hasta que toca el suelo.
      i. ¿En qué tiempo estará en su punto más alto?
      ii. ¿Cuál es la distancia que alcanza la bola?
   e) Dibuja un diagrama mostrando la posición de la pelota en las partes (a), (b) y (d).

3. **Problema de la flecha de ballesta**
   Una flecha de ballesta es disparada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/seg. Calcula:
   a) La altitud de la flecha a los 3 segundos
   b) ¿En cuánto tiempo estará la flecha a 500 metros de altura?
   c) ¿Cuánto tiempo tardará en regresar al suelo?
   d) La flecha llega a su mayor altura (a la mitad de camino) entre el tiempo en que es lanzada (t=0) y el tiempo en que regresa al suelo.
      i. ¿En cuánto tiempo llega a su punto más alto?
      ii. ¿Cuál será su altura en el punto más alto?
   e) Dibuja un diagrama mostrando la posición de la flecha en las partes (a),(b) y (d).

4. **Problema de la bola de tenis**
Una bola de tenis es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 26 m/seg. Calcula:
   a) Su altura después de 4 segundos de altura
   b) ¿En qué tiempo estará a 20 metros sobre el nivel del piso?
   c) Haz un diagrama y muestra las respuestas de los incisos (a) y (b)
   d) ¿En cuánto tiempo toca el suelo la bola de nuevo?

5. **Problema de la cacería del pato**
Un lanzador le dispara a un pato que pasaba por arriba de él con un rifle. La bala tiene una velocidad inicial de 110 m/seg.
   a) Si el pato está a 350 metros arriba del cazador ¿En cuánto tiempo le llegará la bala?
   b) Si la bala pasara de largo ¿Cuánto tiempo tardaría la bala en volver a estar a la misma altura que el pato?
   c) Si la bala no le pegara de regreso ¿En cuánto tiempo estaría de regreso la bala?

6. **Problema de la roca en el acantilado**
Supongamos que en la cima de un acantilado lanzas una piedra hacia arriba, con una velocidad de 20 m/seg.
   a) ¿A qué altura por la cima del acantilado se encontrará la piedra después de 3 segundos?
   b) ¿A qué altura se encontraría a los 4 segundos?
   c) ¿Cuánto tiempo tardaría para llegar al nivel de donde fue tirada?
   d) ¿Cuánto tiempo tardaría en caer en un estanque que se encuentra a 60 metros debajo del punto donde fue lanzada la piedra?

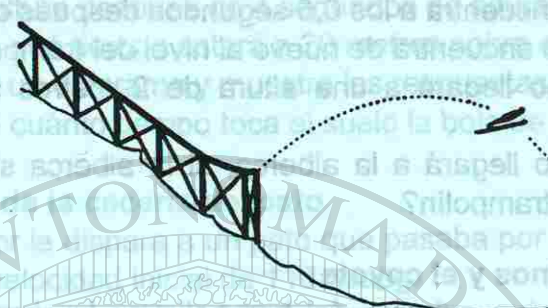


7. **Problema del clavadista**
El Sr. Saltarín salta desde un trampolín de 3 metros de altura hacia arriba con una velocidad inicial de 6 m/seg.
   a) ¿A qué altura se encuentra a los 0.5 segundos después del brinco?
   b) ¿En qué tiempo se encuentra de nuevo al nivel del trampolín?
   c) ¿En cuánto tiempo llegará a una altura de 2 metros sobre el nivel del trampolín?
   d) ¿En cuánto tiempo llegará a la alberca, si la alberca se encuentra a 20 metros debajo del trampolín?

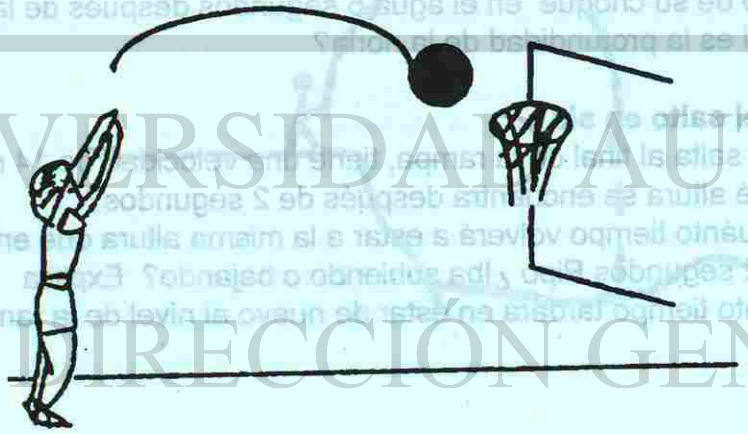
8. **Problema del correcaminos y el coyote**
El coyote esta parado en un extremo del trampolín en la cima de un cañón; el correcaminos deja caer una gran roca en el otro extremo del trampolín mandando al coyote hacia arriba con una velocidad de 40 m/seg.
   a) ¿A qué altura estará el coyote después de 3 segundos?
   b) ¿Cuánto tiempo transcurre para que el coyote llegue a la misma altura de donde salió?
   c) Transcurridos 4 segundos, ¿hacia dónde iba el coyote ? ¿Hacia arriba o hacia abajo?
   d) En su trayectoria de regreso el coyote no cae en la cima del cañón, sino en un río que está a 90 metros debajo de la cima. ¿Cuál es el tiempo total de vuelo del coyote?

9. **Problema de la piedra del pastor**
El pastor lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 12 metros por segundo (m/seg)
   a) ¿A qué altura llega la piedra en 2 segundos?
   b) ¿Cuánto tiempo tarda para llegar a una altura de 7.2 metros?
   c) En el inciso (b) ¿La piedra va hacia arriba o hacia abajo? Explica
   d) Al caer la piedra ésta cae directamente en una noria, escuchándose el sonido de su choque en el agua 5 segundos después de lanzada la piedra. ¿Cuál es la profundidad de la noria?

10. **Problema del salto en ski**
Cuando Pipo salta al final de la rampa, tiene una velocidad de 14 m/seg.
   a) ¿A qué altura se encuentra después de 2 segundos?
   b) ¿En cuánto tiempo volverá a estar a la misma altura que en el inciso (a)?
   c) A los 2 segundos Pipo ¿Iba subiendo o bajando? Explica
   d) ¿Cuánto tiempo tardará en estar de nuevo al nivel de la rampa?



11. **Problema del basquetbol**
Un jugador hace un tiro largo de media cancha, la bola lleva una velocidad inicial de 16 m/seg. Cuando la bola es lanzada está a la misma altura que la canasta.
a) Después de 0.3 segundos ¿A qué altura está sobre la canasta?
b) Si la canasta está a 3 metros sobre el piso ¿A qué altura se encuentra la bola sobre el nivel del piso en 0.3 segundos?
c) Suponiendo que el tiro es correcto ¿En cuánto tiempo pasará la bola por el arco?
d) La máxima altura que alcanza la bola es a la mitad del tiempo desde que fue soltado hasta que llega al arco.
I) ¿Cuál es ese tiempo?
II) ¿A qué altura está sobre el piso?



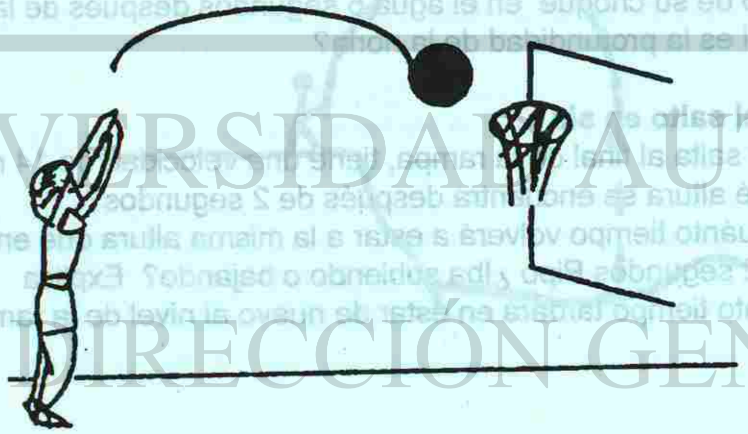
CAPITULO 7

EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON RADICALES

En éste capítulo aprenderás a operar con la raíz cuadrada de expresiones que contienen variables. Evaluarás éstas expresiones para valores dados de la variable y resolverás ecuaciones que contengan radicales para encontrar el valor de la variable.

También aprenderás acerca de otras raíces tales como raíz cúbica, raíz cuarta, etc. Además del cálculo de medidas de los lados de un triángulo rectángulo y algunas otras aplicaciones.

11. **Problema del basquetbol**
Un jugador hace un tiro largo de media cancha, la bola lleva una velocidad inicial de 16 m/seg. Cuando la bola es lanzada está a la misma altura que la canasta.
a) Después de 0.3 segundos ¿A qué altura está sobre la canasta?
b) Si la canasta está a 3 metros sobre el piso ¿A qué altura se encuentra la bola sobre el nivel del piso en 0.3 segundos?
c) Suponiendo que el tiro es correcto ¿En cuánto tiempo pasará la bola por el arco?
d) La máxima altura que alcanza la bola es a la mitad del tiempo desde que fue soltado hasta que llega al arco.
I) ¿Cuál es ese tiempo?
II) ¿A qué altura está sobre el piso?



CAPITULO 7

EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON RADICALES

En éste capítulo aprenderás a operar con la raíz cuadrada de expresiones que contienen variables. Evaluarás éstas expresiones para valores dados de la variable y resolverás ecuaciones que contengan radicales para encontrar el valor de la variable.

También aprenderás acerca de otras raíces tales como raíz cúbica, raíz cuarta, etc. Además del cálculo de medidas de los lados de un triángulo rectángulo y algunas otras aplicaciones.

7.1 INTRODUCCIÓN A LAS EXPRESIONES CON RADICALES

Una expresión como $\sqrt{x-25}$, es llamada una ***"expresión algebraica con radical"***.

Una expresión como $\sqrt{y}$, o como $\sqrt{\frac{1}{x}}$, también son expresiones algebraicas con radical.

OBJETIVO

Para expresiones algebraicas con radical tal como $\sqrt{x-25}$, evaluarlas cuando se dan valores de *x* o hallar x cuando se dá el valor de la expresión con radical.

EJEMPLOS

1. Evalúa $\sqrt{x-25}$, si *x* es igual a 34.

Solución

Escribe la expresión dada	: $\sqrt{x-25}$
Sustituye x por 34	$=\sqrt{34-25}$
Efectúa la operación aritmética	$=\sqrt{9}$
Encuentra la raíz cuadrada	= 3

2. Evalúa $\sqrt{x-25}$, si *x* es igual a 9

Solución

Escribe la expresión dada	: $\sqrt{x-25}$
Sustituye x por 9	$=\sqrt{9-25}$
Simplifica la operación aritmética	$=\sqrt{-16}$

No existe número real que sea la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto la evaluación propuesta no es posible.

3. Encuentra el valor de *x* si $\sqrt{x-25}$, es igual a 4

Solución

Escribe la ecuación	: $\sqrt{x-25}=4$
Obtén el cuadrado de cada miembro	$(\sqrt{x-25})^2=(4)^2$
Cancela el signo radical. Recuerda que	$(\sqrt{x})^2=x; si\, x\geq 0$
Agrega 25 a cada miembro	$x=41$

Comprueba la respuesta sustituyendo x por 41 en la ecuación <u>original:</u> $\sqrt{41-25}=4$

En el siguiente ejercicio trabaja resolviendo problemas semejantes a los ejemplos resueltos.

EJERCICIO 7.1

1) Evaluar $\sqrt{5x}$; a) si x=3, b) si x=20

2) Evaluar $\sqrt{5x+1}$; a) si x=3, b) si x=16

3) Evaluar $\sqrt{x-2}$; a) si x=10, b) si x=38

4) Evaluar $\sqrt{\frac{1}{x}}$; a) si x=10, b) si x=16

5) Evaluar $\sqrt{x-6}$; a) si x=7, b) si x=6

6) Evaluar $\sqrt{x-8}$; a) si x=9, b) si x=5

7) Evaluar $\frac{4}{\sqrt{x+7}}$; a) si x=-3, b) si x=-7 c) si x=-23, d) si x=2

8) Encuentra el valor de *x*, si $\sqrt{10x}$ es igual a 8
Comprueba la respuesta

9) Encuentra el valor de *x*, si $\sqrt{x-25}$ es igual a 3
Comprueba la respuesta

10) Encuentra el valor de *x*, si $\sqrt{x+6}$ es igual a

Comprueba la respuesta

a) 14
b) -8
c) 1

7.2 SUMAS, DIFERENCIAS Y PRODUCTOS DE RADICALES

En esta sección aprenderás a operar con radicales y utilizarás propiedades o leyes que te serán fáciles de manejar.

PROPIEDAD 1
RAÍZ CUADRADA DE UN PRODUCTO
La raíz cuadrada de un producto de cantidades no negativas es igual al producto de sus raíces cuadradas. Para dos cantidades no negativas *x* y *y*:

$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$

Y análogamente para tres o más factores no negativos

EJEMPLOS

1. Simplifica $\sqrt{2}\sqrt{8}$

Solución

Escribe la expresión	$= \sqrt{2}\sqrt{8}$
Aplica la propiedad 1 y la reflexiva de la igualdad.	$= \sqrt{2 \cdot 8}$
	$= \sqrt{16}$
Obtén la raíz cuadrada	$= 4$

2. Simplifica $\sqrt{50}$

Solución

Escribe la expresión	$= \sqrt{50}$
Factoriza el radicando de tal manera que uno de los factores tenga raíz cuadrada exacta	$= \sqrt{25 \cdot 2}$
Aplica la propiedad 1	$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{2}$
Obtén la raíz cuadrada de 25	$= 5\sqrt{2}$

OBJETIVO

Simplificarás expresiones que involucren suma y producto de raíces cuadradas.

En la solución de los siguientes ejemplos razona sobre cada uno de los pasos algebraicos que se te van indicando.

EJEMPLOS

1. Simplifica $\sqrt{75}$

Solución

Escribe la expresión dada	$= \sqrt{75}$
Factoriza 75 de tal forma que uno de los factores tenga raíz cuadrada exacta	$= \sqrt{25 \cdot 3}$
Aplica la propiedad 1	$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{3}$
Simplifica $\sqrt{25}$	$= 5\sqrt{3}$

Comprueba con tu calculadora que $\sqrt{75}$ y $5\sqrt{3}$ dan el mismo resultado:8.66025

2. Simplifica $\sqrt{30} \cdot \sqrt{15}$

Solución

Escribe la expresión dada	$= \sqrt{30} \cdot \sqrt{15}$
Aplica la propiedad 1	$= \sqrt{30 \cdot 15}$
Factoriza cada número	$= \sqrt{(6 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 3)}$
Vuelve a factorizar , ahora el número 6	$= \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3}$
Aplica la propiedad 1	$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2}$
Simplifica	$= 15\sqrt{2}$

Observación:
En el caso de suma de radicales, la operación se realiza con radicales semejantes (de igual índice y mismo radicando).

Así	$= 2\sqrt{x} + 8\sqrt{x} = 10\sqrt{x}$
También	$: 2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

Simplificar:

a) $7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{75}$

Solución

a) Escribe la expresión dada	$: 7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
Saca como factor común $\sqrt{5}$	$= (7 - 3 + 2)\sqrt{5}$
Simplifica	$= 6\sqrt{5}$

b) En este caso se dan dos radicales cuyos radicandos pueden factorizarse de tal forma que en cada uno se obtiene un mismo factor:

Escribe la expresión	$: \sqrt{48} + \sqrt{75}$
Factoriza cada radicando	$= \sqrt{16 \cdot 3} + \sqrt{25 \cdot 3}$
Simplifica cada radicando aplicando la propiedad 1	$= 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$
Simplifica	$= 9\sqrt{3}$

EJERCICIO 7.2

1) En cada una de las siguientes expresiones da la respuesta mediante un solo radical irreducible.

a) $\sqrt{27}$

b) $\sqrt{500}$

c) $\sqrt{20}$

d) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$

e) $2\sqrt{7}-4\sqrt{7}$

f) $\sqrt{32}+5\sqrt{2}$

g) $6\sqrt{x}-10\sqrt{x}$

h) $5\sqrt{3}-4\sqrt{3}$

i) $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{2}$

j) $4\sqrt{11}\cdot 9\sqrt{11}$

2) Proporciona una expresión más simple en cada una de las expresiones siguientes, primero en forma radical y luego en forma decimal.

a) $\sqrt{32}$

b) $\sqrt{200}$

c) $\sqrt{135}$

d) $\sqrt{252}$

e) $\sqrt{27}$

3) Simplifica cada expresión aplicando la propiedad 1.

a) $\sqrt{19}\cdot\sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{10}$

c) $2\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{3}$

d) $-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$

e) $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{7}$

f) $4\sqrt{8}\cdot\sqrt{5}$

g) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{10}$

h) $12\sqrt{18}\cdot\sqrt{18}$

i) $-\left(4\sqrt{5}\cdot 9\sqrt{5}\right)$

j) $\left(-2\sqrt{5}\right)\left(-3\sqrt{20}\right)\left(-\sqrt{1}\right)$

4) Simplifica las siguientes expresiones. Deja el resultado en forma radical

a) $2\sqrt{13}+5\sqrt{13}$

b) $-2\sqrt{11}-4\sqrt{11}$

c) $4\sqrt{17}+\sqrt{17}$

f) $\sqrt{175}-3\sqrt{7}$

g) $\sqrt{24}+\sqrt{150}-\sqrt{3}$

h) $2\sqrt{6}+3\sqrt{27}+\sqrt{3}$

d) $\sqrt{50}-\sqrt{18}$

e) $\sqrt{100}+\sqrt{1000}$

i) $\sqrt{2x}+7\sqrt{2x}+\sqrt{8x}$

j) $\sqrt{x^3}+5\sqrt{x^3}-2\sqrt{x^3}$

Cuando obtengas la respuesta del inciso j) en el ejercicio anterior, podrás simplificar aún más la expresión si consideras que $\sqrt{x^3}=\sqrt{x^2\cdot x}=x\sqrt{x}$ y que $x\geq 0$

También se tiene $\sqrt{x^5}=\sqrt{x^4\cdot x}=x^2\sqrt{x}$ y $\sqrt{x^7}=\sqrt{x^6\cdot x}=x^3\sqrt{x}$ si $x\geq 0$. Este mecanismo de solución se basa en transformar uno de los factores a una expresión transformada que tenga raíz cuadrada exacta como se verá en la sección 7.5.

7.3 COCIENTES DE RADICALES

En esta sección se tratará la división de expresiones con radicales tales como:

$\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{3}},\sqrt{\dfrac{9}{2}},\dfrac{x}{y},$ etc.

El resultado de la expresión $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{3}}$ es el mismo que $\sqrt{\dfrac{17}{3}}$ puedes comprobarlo utilizando la calculadora. Esto es:

$$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{17}{3}}$$

La Ley Distributiva es válida en la división de radicales.

PROPIEDAD 2.
RAIZ CUADRADA DE UN COCIENTE
La raíz cuadrada de un cociente de dos cantidades positivas, es igual al cociente de las raíces cuadradas de las cantidades y viceversa.
Sean x y y, dos cantidades positivas.
Entonces: $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

En los siguientes ejemplos se muestra la aplicación de esta propiedad.

1. Simplificar $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Solución

Se escribe la expresión dada $: \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

Aplicación de la propiedad 2 $= \sqrt{\frac{3}{5}}$

Se obtiene el cociente $= \sqrt{0.6}$

2. Simplificar $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

Solución

Escribir la expresión dada $: \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

Se aplica la propiedad 2 $= \sqrt{\frac{2}{7}}$

Se obtiene el cociente $= \sqrt{0..285714...}$

¿Es una respuesta simplificada?

En el ejemplo anterior la respuesta dada $\sqrt{0..285714...}$ no se considera como respuesta simplificada.

En este caso conviene otro tipo de expresión como respuesta simplificada.

Nuevamente:

Solución:

Escribir la expresión dada $: \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

Multiplicar la expresión por $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

Aplicar la propiedad 1 en los numeradores y

denominadores, para simplificar $= \frac{\sqrt{14}}{\left(\sqrt{7}\right)^2}$

Como $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$ $\quad \frac{\sqrt{14}}{7}$

El ejemplo queda concluido con la respuesta

obtenida por lo que $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$

Esta expresión $\frac{\sqrt{14}}{7}$ sí se considera una respuesta simplificada por el hecho de quedar un solo radical y únicamente en el numerador.

¿La respuesta dada en el ejemplo 1 es una respuesta simplificada?

3. Simplificar $\frac{\sqrt{33}}{11}$

Solución:

Escribe la expresión dada $: \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}}$

Se aplica la propiedad 2 $= \sqrt{\frac{33}{11}}$

Se obtiene el cociente del radicando $= \sqrt{3}$

La respuesta obtenida está simplificada

Una expresión de la forma $\frac{\sqrt{x}}{y}$ estará simplificada cuando:

No contenga radical en el denominador

OBJETIVO

Dada una expresión cociente con radicales, transformarla a una forma radical simple.

El proceso para racionalizar el denominador cuando este en forma radical en una fracción, se denomina ***racionalización del denominador.***

En los siguientes ejemplos es fundamental considerar los pasos que se siguen durante el proceso de solución.

EJEMPLOS

1. Escribe la siguiente expresión en forma simplificada $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$

Solución

Escribe la expresión dada $: \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}}$

Multiplica la expresión por $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$ $= \frac{\sqrt{13}}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar $= \frac{\sqrt{91}}{(\sqrt{7})^2}$

Simplifica el denominador $= \frac{\sqrt{91}}{7}$

Comprueba con la ayuda de la calculadora que $\frac{\sqrt{13}}{7} \approx \frac{\sqrt{91}}{7}$

2. Simplifica $\frac{6}{2\sqrt{5}}$

Solución

Escribe la expresión dada $: \frac{6}{2\sqrt{5}}$

Multiplica la expresión por $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ $= \frac{6}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar $= \frac{6\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Obtén la raíz cuadrada de 25 y simplifica. $\frac{6\sqrt{5}}{10} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

Es prudente señalar que una fracción está simplificada cuando el radical del denominador de la fracción ya no se conserva. Recuerda que este hecho es conocido como "racionalización del denominador"

3. Escribe en forma simplificada la expresión: $\sqrt{\frac{72}{11}}$

Solución

Escribe la expresión dada $: \sqrt{\frac{72}{11}}$

Aplica la propiedad 2 $= \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{11}}$

Factoriza 72 $= \frac{\sqrt{36 \cdot 2}}{\sqrt{11}}$

Simplifica el numerador aplicando propiedad 1 $= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

A partir de aquí se repite el procedimiento aplicado en los ejemplos anteriores.

Multiplica la expresión por $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$: $\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \cdot \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar en el numerador y ten en cuenta que $\sqrt{11} \cdot \sqrt{11} = (\sqrt{11})^2$ $\frac{6\sqrt{22}}{(\sqrt{11})^2}$

Como $= (\sqrt{11})^2 = 11$ $\frac{6\sqrt{22}}{11}$

El mecanismo de solución para la división de radicales de expresiones de la misma forma que las anteriores, no tiene mayor dificultad. Expresiones indicadas tales como:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{50}} \div \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$$

siguen el mecanismo de solución siguiente.

Solución

Escribir la expresión dada : $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{50}} \div \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}}$

Cambiar la operación a la equivalente de multiplicar $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{50}}\cdot\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{27}}$

Aplica la propiedad 1 al multiplicar $\dfrac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

Cancela $\sqrt{2}$ $\dfrac{4\sqrt{2}\ \sqrt{2}}{15\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{15\sqrt{3}}$

Cancela $\sqrt{3}$ $\dfrac{4\sqrt{2}}{15}$

EJERCICIO 7.3

Simplifica cada uno de los siguientes problemas, racionalizando el denominador de la expresión.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{30}}$ 2) $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 4) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$

5) $\dfrac{6\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ 6) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$

7) $\sqrt{\dfrac{1}{4}}$ 8) $\dfrac{45\sqrt{2}}{5\sqrt{15}}$

9) $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}$ 10) $\dfrac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{25}}{4\sqrt{2}}$

En cada uno de los siguientes problemas transformar a una expresión simple indicando los pasos operativos a seguir.

11) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ 16) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}+\dfrac{9}{\sqrt{19}}$

12) $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}}\cdot\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$ 17) $\sqrt{22}-\dfrac{5}{\sqrt{6}}$

13) $\sqrt{\dfrac{75}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{5}}$ 18) $3+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

14) $\sqrt{\dfrac{8}{9}}+\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 19) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{13}}$

15) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 20) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{11}}+4\sqrt{3}$

Racionaliza el denominador en cada uno de los siguientes problemas:

21) $\dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{6}}$ 22) $\dfrac{14}{\sqrt{28}}$

23) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ 24) $\dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{71}}$

25) $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{20}}$

7.4 BINOMIOS CON RADICALES

La expresión $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$ representa el producto de dos binomios con radicales. Si x≥0 y≥0

Tenemos que:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\ \left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2 = x - y$$

PROPIEDAD 3
BINOMIOS CONJUGADOS CON RADICALES
Para dos números racionales no negativos *x* y *y*:
$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right) = x - y = x - y$

Anteriormente se trató acerca del producto de la suma de dos cantidades por su diferencia expresado como:
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

En ésta sección se presentaran diversos problemas en los cuales los términos de los binomios formados, no todos, necesariamente estarán expresados en forma radical.

En el caso particular en el cual la suma y diferencia de binomios contenga todos sus términos con radical se utilizará la propiedad 3 como mecanismo de solución. En el caso en el cual la suma y diferencia de binomios no contenga todos sus términos con radical, convendrá utilizar la forma *(a+b)(a-b)=a²-b²*.

Ver los siguientes factores de binomios.

PRODUCTO DE BINOMIOS	**FORMAS DE SOLUCIÓN**
a) $(\sqrt{14}+\sqrt{13})(\sqrt{14}-\sqrt{13})$	$(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}) = x - y$
b) $(12-\sqrt{3})(12+\sqrt{3})$	*(a+b)(a-b)=a²-b²*
c) $(4\sqrt{3}-2\sqrt{7})(4\sqrt{3}+2\sqrt{7})$	*(a+b)(a-b)=a²-b²* Desarrollo binomial
d) $(\sqrt{2}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{7})$	Multiplicar término con término de cada binomio

La propiedad 3 es de mucha utilidad en la racionalización de fracciones con radicales donde el denominador generalmente se expresará como una suma o diferencia de radicales.

OBJETIVO

Utilizar las diferentes formas de solución de productos de binomios con o sin radical.

EJEMPLO

Simplifica : $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Solución

Escribe la expresión : $\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Multiplica la expresión por $\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)$ $\dfrac{2}{\sqrt{3}+5}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)$

Multiplica numeradores $\dfrac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$

Multiplica denominadores aplicando la propiedad 3 $\dfrac{2\sqrt{3}-2\sqrt{5}}{-2}$

Simplifica la fracción $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

También es de mucha utilidad aplicar la forma *(a+b) (a-b)=a²-b²*, en el procedimiento de solución de algunos problemas.

En los ejemplos dados a continuación trata de razonar sobre el procedimiento de solución.

EJEMPLOS

1. Simplificar la expresión $(\sqrt{14}+\sqrt{3})(\sqrt{14}-\sqrt{3})$

Solución

Escribe la expresión dada	:	$(\sqrt{14}+\sqrt{3})(\sqrt{14}-\sqrt{3})$
Aplica la propiedad 3	=	14-3
Simplifica	=	11

2. Simplifica la expresión: $(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)$
(Observa que en éste caso los segundos términos de cada binomio no son radicales)

Solución

Escribe la expresión dada	:	$(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}-1)$
Aplica la forma *(a+b)(a-b)=a²-b²*:		$(\sqrt{13})^2-(1)^2$
Simplifica		12

3. Simplifica $(20\sqrt{3}-\sqrt{2})(20\sqrt{3}+\sqrt{2})$

Solución

Escribe la expresión dada	: $(20\sqrt{3}-\sqrt{2})\ (20\sqrt{3}+\sqrt{2})$
Aplica la forma *(a+b)(a-b)=a²-b²*	$(20\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2$
Simplifica	1,200-2 1,198

4. Multiplica y simplifica la expresión: $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)$
(En éste caso los términos de cada binomio son todos distintos por lo que se procede a multiplicar entre sí término con término de ambos binomios).

Solución

Escribe la expresión dada	: $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)$
Multiplica término con término	$\sqrt{18}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}=$
Factoriza 18 y simplifica	$\sqrt{9\cdot 2}-\sqrt{2}$
Aplica la propiedad 1	$3\sqrt{2}-\sqrt{2}$
Simplifica	$2\sqrt{2}$

5. Racionaliza el denominador de la siguiente expresión y simplifica $\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Solución

Escribe la expresión dada : $\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

Multiplica la expresión por $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$ $\left(\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}\right)$

Multiplica numeradores y denominadores respectivamente $\frac{\sqrt{21}+\sqrt{35}-2\sqrt{15}-10}{3-5}$

Simplifica $-\frac{\sqrt{21}+\sqrt{35}-2\sqrt{15}-10}{2}$

EJERCICIO 7.4

Multiplicar y simplificar cada problema

1) $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}-\sqrt{5})$
2) $(\sqrt{12}-\sqrt{3})(\sqrt{12}+\sqrt{3})$
3) $(3\sqrt{2}+\sqrt{17})(3\sqrt{2}-\sqrt{17})$
4) $(\sqrt{19}+\sqrt{2})^2$
5) $(\sqrt{13}-2)^2$
6) $\sqrt{5}(1-\sqrt{6})$
7) $(\sqrt{23}+2)(\sqrt{3}-5)$
8) $(4\sqrt{3}+2\sqrt{7})(3-\sqrt{2})$
9) $(7\sqrt{2}-3\sqrt{5})(7\sqrt{2}+3\sqrt{5})$
10) $(\sqrt{6}-1)(\sqrt{6}+1)$
11) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$
12) $(3\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}-1)$
13) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{14})$
14) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$
15) $\sqrt{3}(\sqrt{10}+4)$
16) $(-\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+1)$
17) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
18) $(\sqrt{2}-4\sqrt{3})^2$
19) $(\sqrt{35}+\sqrt{102})(\sqrt{35}-\sqrt{102})$
20) $(\sqrt{3}+\sqrt{13})(\sqrt{3}-\sqrt{13})$

Racionalizar el denominador y simplificar cada uno de los siguientes problemas.

21) $\frac{50}{\sqrt{6}-1}$
22) $\frac{100}{1-\sqrt{5}}$
25) $\frac{\sqrt{2}+8}{8-\sqrt{11}}$
26) $\frac{\sqrt{20}-\sqrt{30}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

23) $\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{13}}$
24) $\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$
27) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{13}}{\sqrt{7}-\sqrt{13}}$
28) $\frac{\sqrt{81}}{9+\sqrt{14}}$

7.5 RAÍCES CUADRADAS DE EXPRESIONES

En esta sección, se tratará con expresiones con radicales conteniendo variables. Se utilizarán mecanismos de solución sencillos y procedimientos semejantes a los anteriores.

OBJETIVO

Dada una expresión radical con variables, simplificarla.

El mecanismo de solución para simplificar $\sqrt{(-5)^2}$ consiste en expresar la solución como el valor absoluto de -5, esto es:

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$$

En general, para obtener la solución de $\sqrt{(x)^2}$, se escribe:

$$\sqrt{(x)^2} = |x|$$

EJEMPLOS

1. Simplifica $\sqrt{y^7}$, donde y es un número positivo.

Solución

Escribe la expresión dada : $\sqrt{y^7}$

Factoriza y^7 $\sqrt{y^6 \cdot y}$

Aplica la propiedad 1 $\sqrt{y^6}\cdot\sqrt{y}$

Transforma= $\sqrt{y^6}$ a la forma $\sqrt{(x)^2}$ $\sqrt{(y^3)^2}\cdot\sqrt{y}$

Simplifica $y^3\sqrt{y}$

2. Simplifica la expresión $\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{y}}$

2. Simplifica la expresión $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{y}}$

Solución

Escribe la expresión dada : $\dfrac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{y}}$

Factoriza x^5 $\dfrac{\sqrt{x^4\cdot x}}{\sqrt{y}}$

Aplica la propiedad 1 $=\dfrac{\sqrt{x^4}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Transforma $\sqrt{x^4}$ a la forma $\sqrt{(x)^2}$ $=\dfrac{\sqrt{(x^2)^2}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

Simplifica $=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

De aquí en adelante, se utiliza el mismo mecanismo de solución aplicado anteriormente, en la racionalización del denominador.

Multiplica por $=\dfrac{x^2\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\cdot\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}$

Simplifica $=\dfrac{x^2\sqrt{xy}}{y}$

3. Simplifica $\sqrt{y^2+14y+49}$

Solución

Escribe la expresión dada : $\sqrt{y^2+14y+49}$

Factoriza el radicando $=\sqrt{(y+7)^2}$

Obtén la raíz cuadrada aplicando la forma $\sqrt{(x)^2}=|x|$ $=|y+7|$

Observación: Conviene dejar así la respuesta porque "y+7" podría ser negativo.

EJERCICIO 7.5

Obtén una expresión más simple en cada uno de los siguientes ejercicios.

1) $\sqrt{x^9}$

2) $\sqrt{x^{10}}$, con $x\geq 0$

3) $\sqrt{x^3\cdot x^8}$

4) $\sqrt{y^5\cdot y^5}$

5) $\sqrt{x^2y^4}$

6) $\sqrt{\dfrac{x^{20}}{2}}$

7) $\sqrt{\dfrac{x^{100}}{4}}$

8) $\sqrt{y^7w^5z^2}, y\geq 0, z\geq 0$

9) $\sqrt{y^{50}}$

10) $\sqrt{x^{44}}$

Simplifica cada uno de los siguientes problemas

11) $\sqrt{x^8}$

12) $\dfrac{\sqrt{x^{13}}}{4}$

13) $\sqrt{6x^2}\cdot\sqrt{6x^8}$

14) $\sqrt{(x+3)^2}$

15) $x\sqrt{x^{10}}$

16) $\sqrt{16y^{10}}, y\geq 0$

17) $\dfrac{12\sqrt{100x^4}}{2\sqrt{36x^4}}$

18) $\sqrt{y+1}\cdot\sqrt{y+1}$

19) $\sqrt{(x-5)^4}$

20) $\sqrt{(y-5)^3}$

7.6 ECUACIONES CON RADICALES

En ésta sección se trataran ecuaciones con radicales de las cuales se podrá obtener el valor de la variable involucrada.

Para solucionar expresiones tales como como $\sqrt{x-6}=3$, se seguirá el siguiente mecanismo de solución.

Solución

Escribe la expresión dada : $\sqrt{x-6}=3$

Obtén el cuadrado de ambos miembros de la igualdad $(\sqrt{x-6})^2=(3)^2$

Simplifica la expresión x-6=9

Nota: En éste tipo de problemas siempre se debe sustituir el valor obtenido de la variable en la ecuación original, pues a veces aparecen soluciones extrañas

$\sqrt{x-6}=3$

Esto es:

sustituye por la variable x por 15

$\sqrt{15-6}=3$

Simplifica el radical

3=3

En el siguiente ejemplo se verá lo importante que es sustituir el valor de la variable obtenida en la ecuación original.

EJEMPLO

Simplifica $\sqrt{2x}+4=x$

Solución

Escribe la expresión dada	: $\sqrt{2x}+4=x$
Agrega (-4) a cada miembro	$\sqrt{2x}+4-4=x-4$
Obtén el cuadrado en ambos miembros de la igualdad	$(\sqrt{2x})^2=(x-4)^2$
Efectúa operaciones en ambos miembros	$2x=x^2-8x+16$
Agrega "-2x", a cada miembro	$x^2-10x+16=0$
Factoriza la expresión	$(x-8)(x-2)=0$
Resuelve para x, igualando a cero cada factor	$x=8;\ x=2$

Sustituye cada valor obtenido en la ecuación original

<u>Con $x=8$</u>

Obtén la raíz cuadrada de 16 $\quad$ 4+4=8

8=8

<u>Con $x=2$</u>

Obtén la raíz cuadrada de 4 $\quad$ $2+4\neq 2$

Observa como para x=2, la respuesta obtenida no satisface la ecuación original.

El valor x=2 es una raíz extraña por no satisfacer la en la ecuación original

$\sqrt{2x}+4=x$

Luego la única solución es x=8

OBJETIVO

Resolverás ecuaciones con radical y comprobarás la(s) respuestas obtenidas de la variable para determinar si son soluciones extrañas o no.

EJEMPLOS

1. Resuelve y comprueba la solución de la siguiente ecuación $\sqrt{x-9}=1$

Solución

Escribe la ecuación dada	: $\sqrt{x-9}=1$
Obtén el cuadrado en ambos miembros	x-9=1
Agrega 9 en ambos miembros	x=10
Ahora, sustituye el valor x=10 en la ecuación original.	
Entonces	$\sqrt{10-9}=1$
Simplificando el radical	1=1

2. Resuelve y comprueba la solución de la ecuación $32+\sqrt{y}=7$

Solución

Escribe la ecuación dada	: $32+\sqrt{y}=7$
Agrega (-32) en ambos miembros	$\sqrt{y}=-25$
Obtén el cuadrado en ambos miembros	y=625
Ahora, checa el valor y=625 en la ecuación original.	
Entonces	$32+\sqrt{625}=7$
Simplificando el radicando	32+25=7
De donde	$57\neq 7$
Por lo tanto y=625, es una raíz extraña	

NOTA: Desde la igualdad $\sqrt{y}=-25$ podemos afirmar que la ecuación $32+\sqrt{y}=7$ no tiene solución.

EJERCICIO 7.6

Resolver las siguientes ecuaciones y comprobar la solución obtenida.

1) $2\sqrt{x+3}=14$
2) $\sqrt{x}+17=-1$
3) $3-\sqrt{2x}=x$
4) $11-\sqrt{y+4}=17$
5) $\sqrt{y-7}-3=5$
6) $\sqrt{x}+5=3$
7) $\sqrt{5x+11}=9$
8) $11-\sqrt{x+4}=17$
9) $\sqrt{x}-x=5$
10) $\sqrt{x+2}+4=5$
11) $-\sqrt{3x}+4=x$
12) $1-\sqrt{x-1}=2x$
13) $\sqrt{x}+2\sqrt{x}=0$
14) $\sqrt{x}+7=16$
15) $\sqrt{x-7}-3=5$

7.7 NÚMEROS RACIONALES E IRRACIONALES

Recordemos que un número racional es todo número que tiende a escribirse como el cociente de dos enteros. Es decir, dado un número n podemos afirmar que es racional si existen enteros a, b $(b \neq 0)$ tales que :

$n = \frac{a}{b}$. Así, por ejemplo: $\frac{3}{8}$ y $-\frac{5}{12}$ son, por definición racionales.

Sin embargo, otras veces el carácter racional de un número no es tan evidente, como por ejemplo : si tenemos n=0.84, que no está expresado como el cociente de dos enteros ; pero esto puede hacerse muy fácilmente pues:

$$0.84 = \frac{84}{100} = \frac{21}{25}$$

No tan inmediato es el caso de n=0.5555.... donde el 5 se repite indefinidamente.

Este número es racional pues:

$10n$=5.555... lo que puede escribirse así:

$10n$=5 + 0.5555...
= 5 + n. De aquí:

$9n = 5$, de donde obtenemos:

$n = \frac{5}{9}$, que es el cociente de dos enteros, luego n es racional

Procediendo de manera similar se puede comprobar que:

Si m =0.8888...

Este número es racional y la fracción que lo "genera" es $\frac{8}{9}$.

Esto es muy fácil de verificar, para lo cual basta dividir 8 entre 9.

Otro ejemplo:

Tenemos ahora:
0.5333...
En el cual los puntos suspensivos indican que el 3 se repite indefinidamente.
Pongamos:
p=0.5333...

Podemos escribir :
p= 0.5 + .333...

El primer sumando 0.5 es igual a, $\frac{5}{10}$, que es igual a $\frac{1}{2}$.

Veamos ahora que fracción "genera" 0.333...

g= 0.0333...
$100g$=3.333...
pero $10g$=0.333...

Restando queda:

$90g$=3
$g=\frac{1}{30}$

Por tanto, p= $\frac{1}{2}+\frac{1}{30}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15}$

Conclusión:

La fracción decimal 0.5333... es un número racional, pues puede expresarse como el cociente de los dos enteros 8 y 15.

Importante

Los números:
0.555... y 0.888...
Son decimales periódicos y, como ya hemos visto, son racionales : en el primero el período es 5 ; en el segundo, es 8. Como en ninguno de ellos aparace otro dígito disitinto al 5 o al 8 , ambos se dicen : periódicos puros. En cambio, 0.5333... es periódico mixto pues hay un número que no forma parte del período, el 5 (el período es 3)

También son periódicos:
0.434343...
0.152152152...
0.72939393...

Los dos primeros son periódicos puros, el tercero es periódico mixto y, desde luego, todos son números racionales.

Se puede establecer, se puede demostrar que todo decimal, periódico puro o mixto, es igual a un número racional : es un número racional.

Número Irracional

Un número real no racional, o sea que no puede expresarse como el cociente de dos enteros se llama : Irracional.

Supongamos que tenemos:
$a = 0.1234567892345678934567 8...$

En este caso no podemos afirmar ni negar que este número sea racional pues el período pudiera estar formado por 25 dígitos que aquí aparecen y entonces *a* sería periódico. Pero también pudiera ocurrir que el período tuviera un número de dígitos mayor que 25 y en tal caso, como solamente tenemos escritos 25, no nos daríamos cuenta de la racionalidad o mejor aún, no nos daríamos cuenta de la periodicidad y, por consiguiente, no podríamos afirmar la racionalidad, aunque tampoco negarlo.

Supongamos ahora que nos planteamos la siguiente pregunta : el número $\sqrt{2}$, ¿será racional o irracional ?. Si empleamos una calculadora obtenemos una "aproximación" de este número en forma racional :

$$\sqrt{2} = 1.4142$$

donde no observaríamos ningún grupo de dígitos que se repetiría indefinidamente. Estaríamos, pues, en situación similar al ejemplo anterior, es decir, en el del número "*a*": no podríamos ni afirmar, ni negar que $\sqrt{2}$ es racional. Sin embargo empleando recursos no muy complicados podemos demostrar que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Veámoslo a continuación:

Demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional.
Supongamos que fuese racional. Entonces existirían *a* y *b* naturales tales que :

I) $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$

donde podemos añadir que *a* y *b* sean primos entre sí. Esto último es muy importante para lograr la demostración que nos propusimos.

Elevando al cuadrado en ambos miembros de I) tendremos :

$2 = \dfrac{a^2}{b^2}$ y de aquí:

II) $2b^2 = a^2$

Hemos llegado a la conclusión de que, si I) fuese cierto, a^2 tendría que ser par, pero si el cuadrado de un entero es par, el número tendría que ser par, es decir, existiría un entero *c* tal que *a=2c*.

Sustituyendo en II) resultaría
$2b^2 = 4c^2$ Dividiendo por 2:
$b^2 = 2c^2$ Es decir, b^2 sería par, por tanto *b* también sería par. Pero entonces llegaríamos a una contradicción porque, como *a* y *b* tendrían que ser pares, no serían primos entre sí.

De modo que, partimos de la suposición de que $\sqrt{2}$ es racional, y razonando correctamente, llegamos a una contradicción.

Por tanto $\sqrt{2}$ no es racional. Y al no se racional, es irracional.

Veamos otro caso:
Demostrar que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

Supongamos que no lo sea. Entonces: existirían dos números naturales *a* y *b* tales que $\sqrt[3]{2} = \dfrac{a}{b}$.

Añadamos la condición de que esta fracción sea irreducible, es decir, que el único factor común de *a* y *b* es uno.

Entonces tendríamos : $2 = \dfrac{a^3}{b^3}$ luego $a^3 = 2b^3$.

a^3 sería par, y , en consecuencia *a* también sería par ; de lo contrario sería impar y su cubo también, lo cual estaría en contradicción con la igualdad $a^3 = 2b^3$. Como *a* es, necesariamente par, existe *c* natural tal que *a=2c*.

$8c^3 = 2b^3$ $b^3 = 4c^3$ implicaría *b* par. Pero con *a* y *b* pares, $\dfrac{a}{b}$ no sería irreducible lo que está en contradicción con la hipótesis de que $\dfrac{a}{b}$ es irreducible.

Por tanto $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

El procedimiento utilizado en los casos anteriores sea para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y $\sqrt[3]{2}$ puede ser utilizado en casos similares con el mismo propósito.

Supongamos que se nos plantea la siguiente pregunta:

El número $\sqrt[3]{11}$ ¿ Será racional o irracional?

Vamos a partir de la hipótesis (es decir, de la suposición) de que dicho número fuese racional. Existirían entonces dos números naturales a y b tales que:

I) $\sqrt[3]{11} = \frac{a}{b}$ con a y b primos entre sí (es decir con la fracción $\frac{a}{b}$ irreducible)

Hagamos ahora una operación correcta : elevemos al cubo ambos miembros de I).

Nos quedaría $11 = \frac{a^3}{b^3}$ y, por tanto $a^3 = 11b^3$ y de aquí:

II) $a^3 = 11b^3$. De modo que a^3 sería divisible por 11, lo que nos llevaría a la conclusión de que *a* también lo sería, o sea, existiría *c* natural tal que *a=11c* sustituyendo en II) :

$11^3c^3 = 11b^3$ dividiendo por 11 ambos miembros;

$11^2c^2 = 11b^3$ es decir *b* sería divisible por 11 y, por tanto, también lo sería *b*.

De modo que si suponemos que $\sqrt[3]{11}$ es racional igual a la fracción irreducible $\frac{a}{b}$ efectuando operaciones correctas , llegaríamos a una contradicción, es decir , a que *a* y *b* serían ambos divisibles por 11. Esto nos lleva a la conclusión de que $\sqrt[3]{11}$ es racional ES FALSA. Y, como $\sqrt[3]{11}$ no puede ser racional, tiene que ser irracional.

Finalmente añadiremos que, para todo número primo *p* y todo número natural $n \geq 2$, el número $\sqrt[n]{p}$ es siempre irracional.

Así por ejemplo :

$\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{23}$, $\sqrt[4]{3}$, etc, son irracionales.

RESUMIENDO:

1.- Si tenemos un número expresado como el cociente de dos enteros, dicho número es por definición , racional.

Ejemplo :

$\frac{4}{9}, -\frac{6}{5}, \frac{20}{43}$, etc.

2.- Un decimal que tiene un número limitado de cifras después del punto decimal, es racional.

Ejemplo :

0.396
5.43
0.00293

3.- Un decimal que tenga un grupo de dígitos que se repiten indefinidamente, se dice que es un decimal periódico y es siempre un número racional.

Ejemplo :

0.22222...
0.391391...
4.828282...
1.6454545...

4.- Si *p* es primo y *n* natural, $n \geq 2$, entonces $\sqrt[n]{p}$ es irracional.

Ejemplo:

$\sqrt[3]{7}; \sqrt[4]{3}; \sqrt[8]{17}$.

Nota: Además de los números irracionales de la forma indicada en el 4° punto, hay muchos otros, pero son casos que no estudiaremos ahora.

EJERCICIO 7.7

Expresa en forma de decimal exacto o periódico los siguientes números racionales

1) $\frac{13}{25}$ 2) $\frac{19}{32}$

3) $\frac{3}{7}$ 4) $\frac{41}{125}$

Dí cuáles de los siguientes números son racionales. En los casos en que la respuesta sea afirmativa, explica porqué sabes que son racionales.

5) 0.34 6) 3.4141...
7) 0.4444... 8) 3.41
9) 0.7373... 10) $\sqrt[3]{19}$
11) 2.5555... 12) 0.41
13) 0.696969... 14) 0.4141
15) 2.11111... 16) 0.4141...
17) 0.68 18) 0.24141...
19) 0.92424... 20) $\sqrt{23}$
21) 0.924 22) 0.013013

En los casos en lo que ello sea posible, expresa los números siguientes como el cociente de dos enteros, dando la respuesta como una fracción irreducible.:

23) 0.52 24) 0.2111...

25) 0.4 26) $\sqrt{5}$

27) 0.444... 28) $\frac{4}{9}$

29) 0.5252 30) $\sqrt{0.36}$

31) 1.1111 32) $\sqrt{0.4444...}$