INGENIERIA_

ALGEBRA DE_ MATRICES

NAVEGACION_

NUMEROS_ COMPLEJOS

ALGEBRA_ LINEAL

FISICA_

MATEMATICA

2a. unidad

PREPARATORIA ABIERTA

3er. semestre

DEPARTAMENTO DE EDUCACION ABIERTA

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
DEPARTAMENTO DE EDUCACION ABIERTA

SEGUNDA UNIDAD

MATEMATICA III

TERCER SEMESTRE

ING. ALEJANDRO GONZALEZ G.
LIC. ROGELIO AGUIRRE G.

Monterrey, N.L. 1978.

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON

Rector: Dr. Luis E. Todd

PREPARATORIA No. 3

Director: Dr. Máximo de León Garza.

DEPARTAMENTO DE EDUCACION ABIERTA

Coordinación General:

Ing. Joel S. Pérez Sáenz

Coordinación Administrativa:

Lic. Homero Santos Reyes.

Coordinación Académica:

Lic. Marcos I. de J. Ruiz R.

SEGUNDA UNIDAD: EL ALGEBRA VECTORIAL Y EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

OBJETIVOS DE UNIDAD

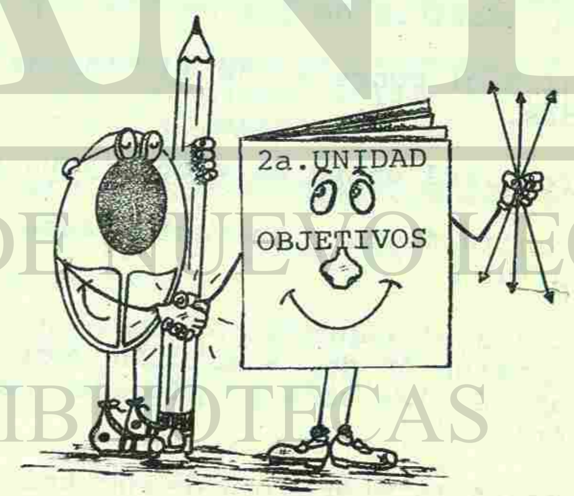
El alumno, al terminar la unidad, en los temas:

I. EL ALGEBRA VECTORIAL.

1. Aplicará los diferentes teoremas y propiedades del álgebra vectorial, en la solución de ejercicios.

II. EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

2. Aplicará los diferentes teoremas y propiedades de los números complejos, en la solución de ejercicios.



OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

El alumno, por escrito en su cuaderno, sin error, en los temas:

I. EL ALGEBRA VECTORIAL.

1.1 Definirá el concepto de producto Cartesiano - de los conjuntos A y B.

1.2 Definirá el concepto de translación o desplazamiento de números reales en la recta numérica.

1.3 Encontrará los valores de x y y, para hacer - igualdades verdaderas, implicando parejas ordenadas iguales.

1.4 Identificará cuándo una flecha está en posición ordinaria, en el plano Cartesiano.

1.5 Nombrará la pareja ordenada representada por una flecha $\vec{PQ}$, cuando se conocen las coordenadas respectivas de los puntos P y Q.

1.6 Definirá el concepto de adición de parejas ordenadas.

1.7 Diferenciará entre un vector y un escalar.

1.8 Diferenciará entre un vector suma y la adición vectorial.

1.9 Enunciará el teorema referente a la propiedad de sustitución de la adición vectorial, así como también las seis propiedades de la adición vectorial.

1.10 Expresará la operación de substracción vectorial en su forma gráfica, así como también con símbolos y palabras.

1.11 Resolverá ejercicios referentes a: la diferencia entre un vector y un escalar; la propiedad de substitución de la adición vectorial y sus - seis propiedades; la substracción vectorial en su forma gráfica, así como también con símbolos y palabras.

1.12 Definirá la norma de $\vec{v}$, es decir $\|\vec{v}\|$, mediante el teorema de Pitágoras.

1.13 Citará otros tres nombres diferentes que se le asignan a la norma de un vector $\vec{v}$.

1.14 Calculará las normas o longitudes de flechas -- que representan vectores, conociendo sus coordenadas respectivas.

1.15 Comprobará la desigualdad de un triángulo, conociendo las coordenadas de los vectores implicados.

1.16 Definirá la multiplicación de un vector por un escalar, así como también sus nueve propiedades.

1.17 Identificará cuándo dos vectores diferentes de cero tienen el mismo sentido y cuándo ellos tienen sentidos opuestos.

1.18 Enunciará el teorema de vectores paralelos.

1.19 Identificará la característica que tiene un vector unitario.

1.20 Resolverá ejercicios referentes a: la multiplicación de un vector por un escalar; dos vectores diferentes de cero, cuando tienen el mismo sentido y cuando ellos tienen sentidos opuestos; vectores paralelos y vectores unitarios.

1.21 Definirá el producto interno o producto punto - de dos vectores, identificando además el símbolo con que se le representa.

1.22 Mencionará la condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares.

1.23 Enunciará las cinco propiedades del producto -- interno o producto punto de dos vectores.

1.24 Resolverá ejercicios referentes a: la perpendicularidad y paralelismo de dos vectores, utilizando el producto interno de ellos.

1.25 Enunciará los tres teoremas referentes a las relaciones entre vectores paralelos y perpendiculares.

1.26 Resolverá ejercicios utilizando los teoremas -- referentes a las relaciones entre vectores paralelos y perpendiculares

II. EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

2.1 Definirá el concepto de campo numérico.

2.2 Diferenciará entre un polinomio reducible y un polinomio irreducible, sobre un campo F.

2.3 Mencionará la condición necesaria y suficiente para que un polinomio irreducible sea primo.

2.4 Identificará los seis "modelos de factorización" o productos notables.

2.5 Resolverá ejercicios, sobre los conjuntos Q y R, referentes a: factores primos de polinomios reducibles e irreducibles, utilizando los "modelos de factorización" o productos notables.

2.6 Definirá la igualdad y la adición de números -- complejos.

2.7 Nombrará las partes a y bi de un número complejo de la forma ordinaria a+bi.

2.8 Definirá el valor absoluto o módulo de a+bi.

2.9 Enunciará el teorema de la desigualdad del -- triángulo, para los dos números complejos a+bi y c+di.

2.10 Resolverá ejercicios referentes a: la igualdad y la adición de números complejos; el valor absoluto o módulo de a+bi y la desigualdad del -- triángulo.

2.11 Definirá la multiplicación de dos números com-- plejos a+bi y c+di.

2.12 Diferenciará entre el conjugado y el recíproco de a+bi.

2.13 Resolverá ejercicios referentes a: la multiplicación de dos números complejos y la obtención del conjugado y el recíproco de un número com-- plejo a+bi.

2.14 Determinará en C (campo de los números comple-- jos) las raíces cuadradas de números complejos de la forma a+bi.

2.15 Expresará en la forma ordinaria, números complejos dados en formas diversas.

2.16 Resolverá ecuaciones sobre C (campo de los números complejos).

DEPARTAMENTO DE EDUCACION ABIERTA

SEGUNDA UNIDAD

PREPARATORIA ABIERTA

EL ALGEBRA VECTORIAL Y EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

CONTENIDO

EL ALGEBRA VECTORIAL Y EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

INDICE

Introducción.

I. EL ALGEBRA VECTORIAL.

A. Parejas de números y su uso.
1. Parejas ordenadas y puntos.
2. Desplazamientos y flechas.

B. El álgebra de las parejas numéricas.
1. La adición vectorial.
2. La norma de un vector.

C. Vectores paralelos y perpendiculares.
1. Multiplicación de un vector por un escalar.
2. Producto interno o producto punto de vectores.
3. Relaciones entre vectores paralelos y perpendiculares.

II. EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

A. Campos numéricos.
1. Axiomas de la igualdad.
2. Axiomas de la adición.
3. Axiomas de la multiplicación.
4. Axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la adición.

B. Factorización de un polinomio.

C. Operaciones con números complejos.
1. Igualdad y adición de números complejos.
2. Valor absoluto de un número complejo.
3. Multiplicación de números complejos.
4. Raíces cuadradas de números complejos.

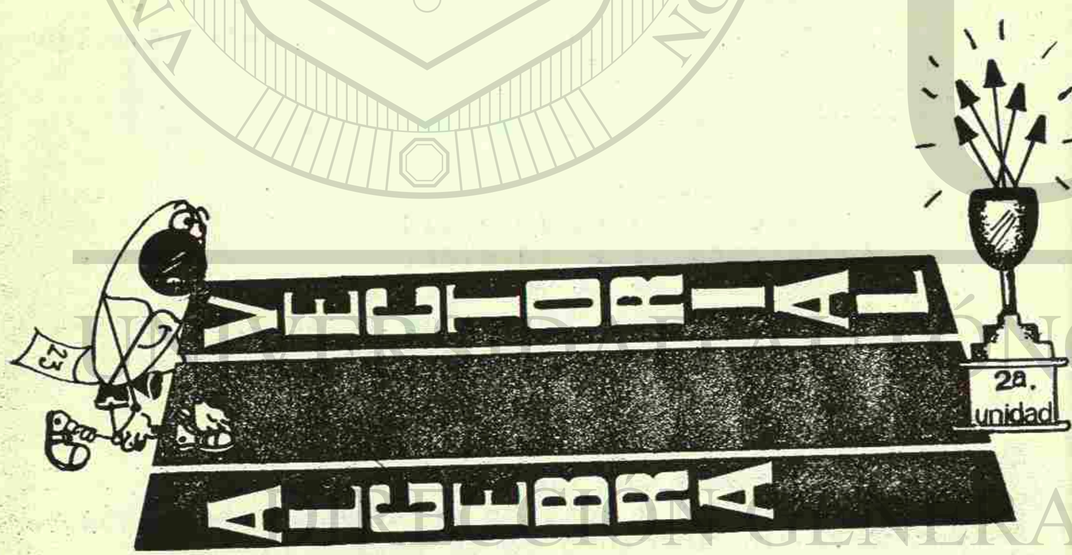
D. Solución de ecuaciones sobre el campo de los números complejos C.

Resumen.

Glosario.

Referencias Bibliográficas.

Anexos.



EL ALGEBRA VECTORIAL Y EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

Una de las herramientas matemáticas más útiles, en el mundo técnico moderno, es el álgebra vectorial y los números complejos. La ingeniería aeronáutica, la física moderna, la computación electrónica, la ingeniería de control y servomecanismos, así como la descripción matemática del flujo bidimensional de un fluído incompresible, como el agua, son algunas de tantas áreas de aplicación de vectores y números complejos, que te podemos citar.

I. EL ALGEBRA VECTORIAL.

Existen cantidades físicas que pueden representarse por un simple número real sobre una escala lineal o recta numérica; algunos ejemplos de esas cantidades son: la temperatura y la masa de un cuerpo, la longitud de una cuerda, el área de una superficie regular y el volúmen de un cubo. A este tipo de cantidades se les llama cantidades escalares. Existen otro tipo de conceptos físicos que necesitan dos o más números reales o componentes para ser expresados; algunos ejemplos de esas cantidades son: el desplazamiento de un cuerpo, la fuerza necesaria para desplazar dicho cuerpo, la velocidad de un avión, la aceleración de un electrón o cualquier otra partícula. A este tipo de cantidades se les llama cantidades vectoriales.

La rama de la matemática que se requiere para estudiar estas cantidades es el álgebra vectorial.

En esta unidad estudiarás las bases de esta rama, principiando con la consideración de algunas propiedades de las parejas ordenadas de números reales.

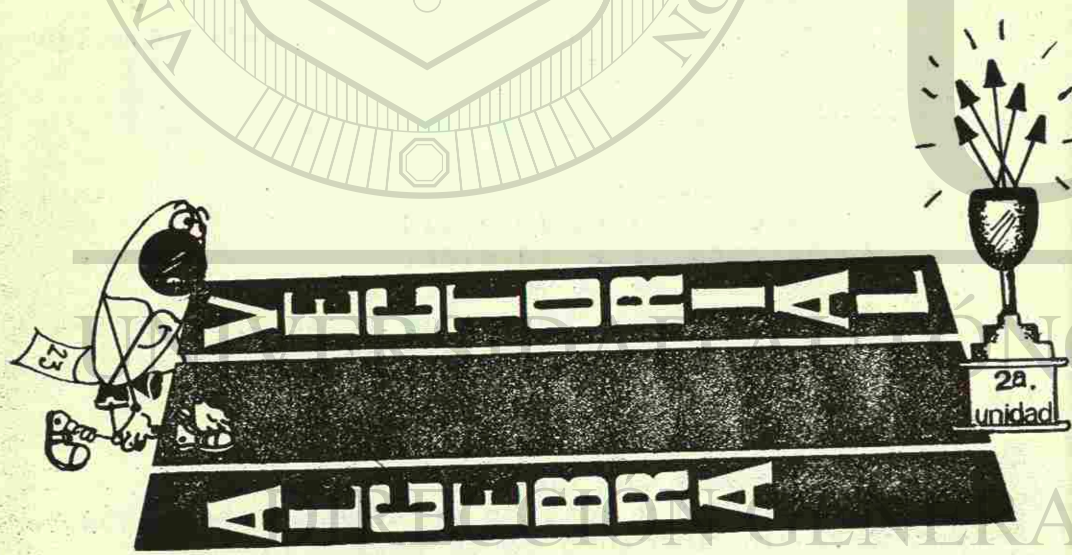
D. Solución de ecuaciones sobre el campo de los números complejos C.

Resumen.

Glosario.

Referencias Bibliográficas.

Anexos.



EL ALGEBRA VECTORIAL Y EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

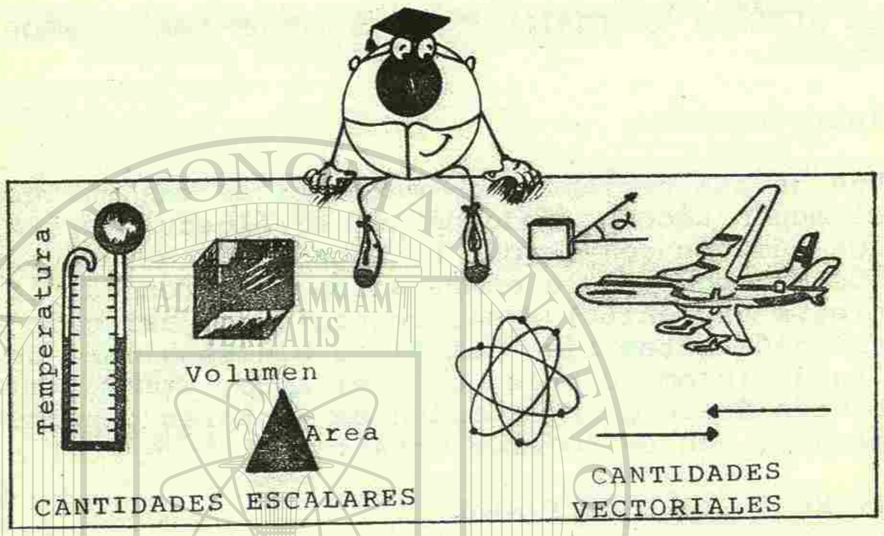
Una de las herramientas matemáticas más útiles, en el mundo técnico moderno, es el álgebra vectorial y los números complejos. La ingeniería aeronáutica, la física moderna, la computación electrónica, la ingeniería de control y servomecanismos, así como la descripción matemática del flujo bidimensional de un fluído incompresible, como el agua, son algunas de tantas áreas de aplicación de vectores y números complejos, que te podemos citar.

I. EL ALGEBRA VECTORIAL.

Existen cantidades físicas que pueden representarse por un simple número real sobre una escala lineal o recta numérica; algunos ejemplos de esas cantidades son: la temperatura y la masa de un cuerpo, la longitud de una cuerda, el área de una superficie regular y el volúmen de un cubo. A este tipo de cantidades se les llama cantidades escalares. Existen otro tipo de conceptos físicos que necesitan dos o más números reales o componentes para ser expresados; algunos ejemplos de esas cantidades son: el desplazamiento de un cuerpo, la fuerza necesaria para desplazar dicho cuerpo, la velocidad de un avión, la aceleración de un electrón o cualquier otra partícula. A este tipo de cantidades se les llama cantidades vectoriales.

La rama de la matemática que se requiere para estudiar estas cantidades es el álgebra vectorial.

En esta unidad estudiarás las bases de esta rama, principiando con la consideración de algunas propiedades de las parejas ordenadas de números reales.

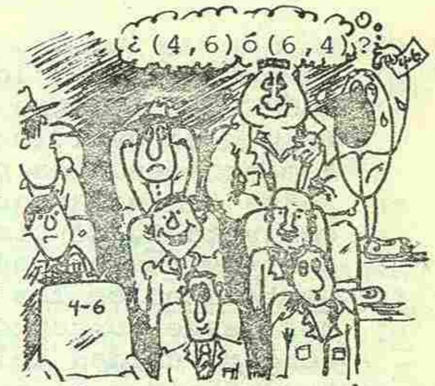


A. Parejas de números y su uso.

1. Parejas ordenadas y puntos.

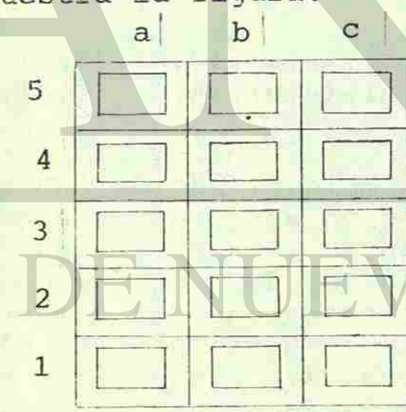
En la tercera unidad del primer semestre, ya estudiaste que cualquier número real se puede asociar con un punto sobre la recta numérica. Generalmente, es muy práctico y útil usar números para localizar un punto en un plano. Por ejemplo, cuando un barco está a punto de zozobrar, (o en peligro de naufragar) su capitán puede pedir auxilio a la estación guardacosta más cercana, enviando por radio transmisor la posición del barco, para lo cual utiliza una pareja de números: uno de ellos sirve para indicar la latitud a la que se encuentra el barco y el otro número indica la longitud.

Similarmente, en una sala de cine o teatro, se puede localizar cualquier asiento indicando en el boleto, primero, el número de la fila y, después, el número de la butaca. En cada uno de los ejemplos citados, el orden respectivo en que se indican los números es de mucha importancia. Por ejemplo, si la pareja de números (4,6) indica



"la cuarta fila y la sexta butaca", entonces la pareja numérica (6,4) indica "la sexta fila y la cuarta butaca". Observa que, a pesar de que utilizamos los mismos números, 4 y 6, en los dos boletos, los asientos son completamente diferentes, debido al orden invertido en que están indicados; razón obvia por la que los pares de números, como (4,6) y (6,4) reciben el nombre de parejas ordenadas.

Usualmente, los hospitales y edificios comerciales o multifamiliares cuyas construcciones son de varios pisos o plantas, utilizan en sus planos un sistema similar de identificación y localización de oficinas o departamentos, según sea el caso. Veamos, por ejemplo, un edificio multifamiliar de cinco pisos con tres departamentos en cada piso, como lo muestra la figura.



Una forma simple y práctica para localizar cada departamento es: mencionar primero el número del piso en que se encuentra el departamento y, segundo, mencionar la letra que identifica dicho departamento; para ello se puede utilizar una pareja ordenada de caracteres tales como (1,b), para localizar en el primer piso el departamento b, o la pareja ordenada (5,c) para localizar en el quinto piso el departamento c. En cada pareja ordenada, la primera coordenada es un número perteneciente al conjunto:

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

el cual incluye los cinco pisos; la segunda coordenada es una letra perteneciente al conjunto B={a, b, c}, el cual incluye los tres tipos de los departamentos en cada piso. El conjunto de todas la parejas ordenadas que resultan de la relación del conjunto A, de pisos, con el conjunto B, de los departamentos en cada piso, se llama: el producto Cartesiano de los conjuntos A y B. Como recordarás, este concepto ya lo habías estudiado en la tercera unidad del segundo semestre. En general, te definimos el producto Cartesiano en notación constructiva como:

AXB = {(x,y)/xεA y yεB}, esto se lee así:

"A cruz B es igual al conjunto de parejas ordenadas (x,y), tal que, x sea elemento de A y y sea elemento de B".

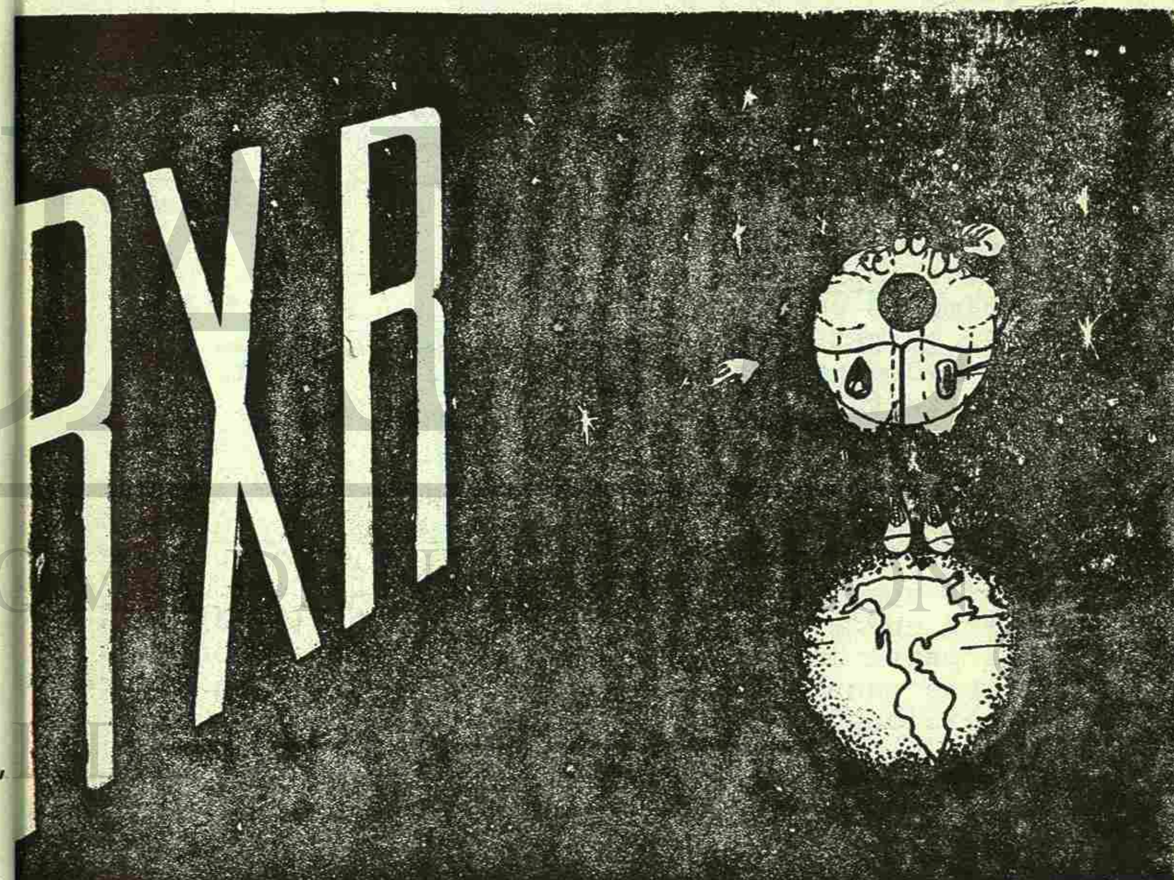
Refiriéndonos al ejemplo citado del edificio de los cinco pisos, el conjunto de todos los departamentos, es decir el producto Cartesiano de A y B es:

AXB = {(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c),(4,a),(4,b),(4,c),(5,a),(5,b),(5,c)}

Después de ver este ejemplo citado de AXB, te será fácil ampliar la visión de este concepto con la definición del producto Cartesiano más importante que existe, (al nivel de este curso). Nos referimos al producto Cartesiano del conjunto R consigo mismo, donde, por supuesto, R es el conjunto de los números reales. La expresión simbólica de este producto Cartesiano es:

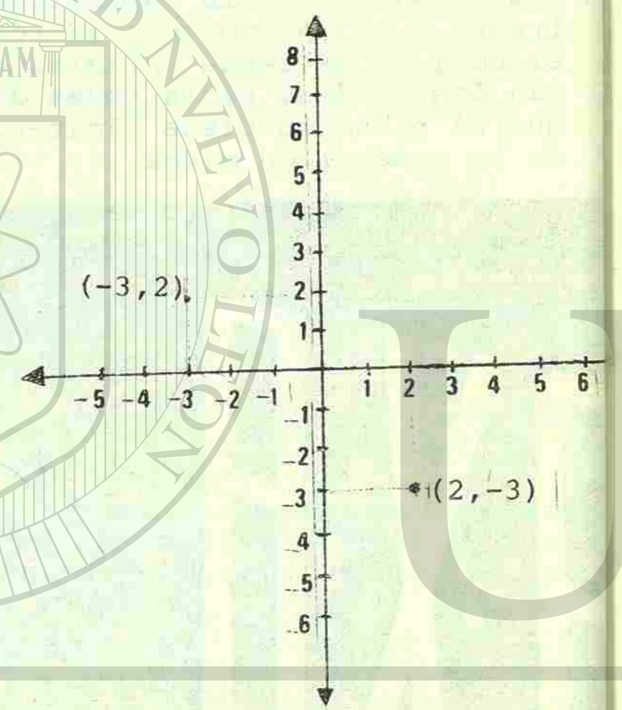
RXR = {(x,y)/xεR y yεR}. Como podrás imaginarte, RXR representa el conjunto de todas las parejas ordenadas (o puntos) que existen en el plano Cartesiano, también llamado Sistema Coordenado Cartesiano.

Este sistema coordenado consiste en el plano formado por los puntos generados por dos rectas numéricas infinitas, colocadas perpendicularmente entre sí, y coincidiendo la intersección en el origen de ambas. Esto representa un plano que no tiene límites hacia ninguna dirección, extendido infinitamente. Para que te des una idea de dicho concepto, imagínate que estás parado sobre la superficie de la tierra y tienes frente a tí un enorme pizarrón, en posición vertical, el cual se extiende infinitamente, sin que se distingan los bordes, hacia todas direcciones, indicando que el plano no tiene límites, y que es infinito, como la numeración misma.



Las ventajas del sistema coordenado Cartesiano sobre cualquier plano, son que cualquier punto, (o conjunto de puntos) en él, son fácilmente localizables mediante el sistema antes expuesto.

Como recordarás, en la tercera unidad del segundo semestre, ya te habíamos definido el concepto de gráfi cas sobre el plano Cartesiano, pero nunca está de más recordarlo, y más aún, cuando sobre ello van a descansar los conocimientos de esta unidad.



Para evitar confusiones, sobre las componentes de la pareja ordenada, se ha establecido que siempre las primeras componentes se referirán a la recta numérica horizontal y los segundos términos, a su vez, a la recta numérica vertical.

Así, vemos en la gráfica anterior que el punto (-3, está en la parte superior y el punto (2,-3) está en la parte inferior de la gráfica; las componentes de ambos puntos son las mismas, pero el orden altera s posiciones en forma total.

A la primera componente de la pareja ordenada, como ya lo habíamos definido, se le llama abscisa, y a l segunda se le denomina ordenada.

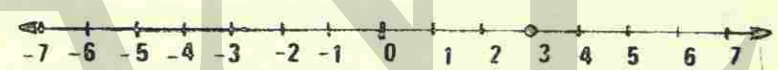
Graficar es el proceso de representar las parejas ordenadas en el plano Cartesiano mediante puntos o líneas, etc.

2. Desplazamientos y Flechas.

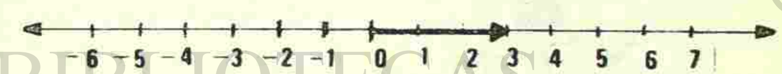
Estamos muy familiarizados con el hecho de asociar un número real (o escalar) con un punto en la recta numérica, o asociar una pareja ordenada de números reales con un punto en el plano Cartesiano.

Pero existe otra interpretación para este tipo de cantidades, que ha sido de mucha utilidad matemática para una gran cantidad de problemas, la cual se basa en el concepto de translación o desplazamiento.

Digamos, el número 3, nosotros lo asociamos en la recta numérica con el punto situado a tres unidades a la derecha del cero. Al punto 0 le llamaremos también origen.



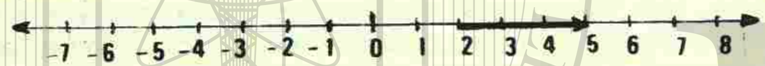
La otra interpretación que se le puede dar, es la de un desplazamiento o translación desde el origen hasta el punto 3,



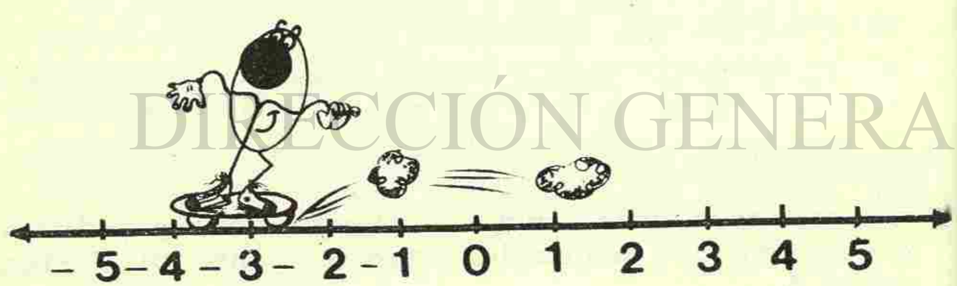
que se representa, como se observa en la gráfica, con una flecha que parte del origen (punto 0) y llega al punto 3.

El número -4 se representará como un desplazamiento desde el origen hasta el punto indicando el número -4.

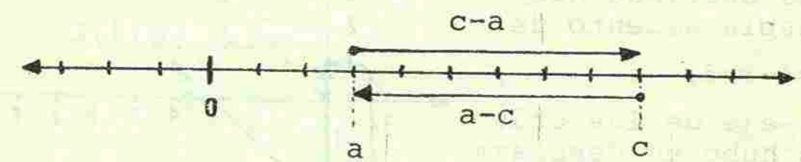
Ahora; un desplazamiento que vaya del punto 2 al punto 5 se puede representar así:



Una translación o desplazamiento desde el punto +1 hasta el punto -3 se verá así:



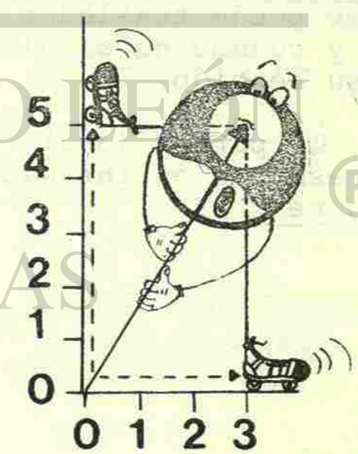
En general, el número real c-a representa una translación o desplazamiento desde el punto a hasta el punto c. Inversamente al número a-c se le asocia una translación desde c hasta a, sobre la recta numérica.



Este tipo de desplazamientos, sobre la recta numérica, nos sugiere que también las parejas ordenadas, sobre el plano Cartesiano, se pueden asociar con translaciones. Estas últimas se producirán cuando existan desplazamientos simultáneos en ambos ejes coordenados.

Supongamos que en el eje de las abscisas hay un desplazamiento de 3 unidades, cuando en el eje de las ordenadas hay uno de 5 unidades; el desplazamiento resultante es como se representa en la gráfica.

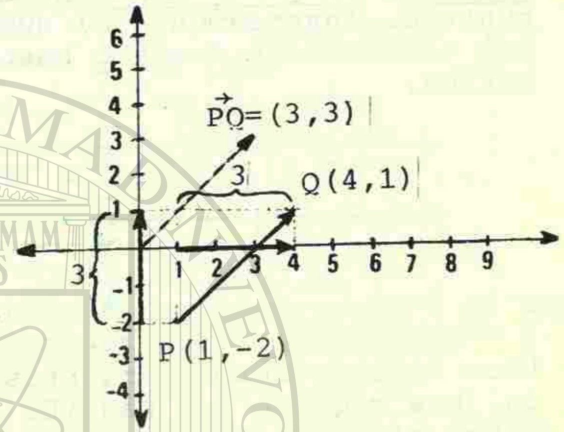
En este caso la flecha que representa el desplazamiento nació en el origen, y terminó en el punto (3,5).



No siempre los desplazamientos o translaciones principian en el origen; a veces puede existir una flecha entre dos puntos cualesquiera del plano.

Ejemplo 1. Encontrar el desplazamiento que va desde el punto P(1,-2) hasta el punto Q(4,1).

Solución: Por el lado de las **abscisas** hubo un desplazamiento desde 1 hasta 4; y por el de las ordenadas desde -2 hasta 1.



En una gráfica ésto se vería así: en el eje de las abscisas hubo un desplazamiento de:

c-a=4-1=3;

en el eje de las ordenadas hubo un desplazamiento de:

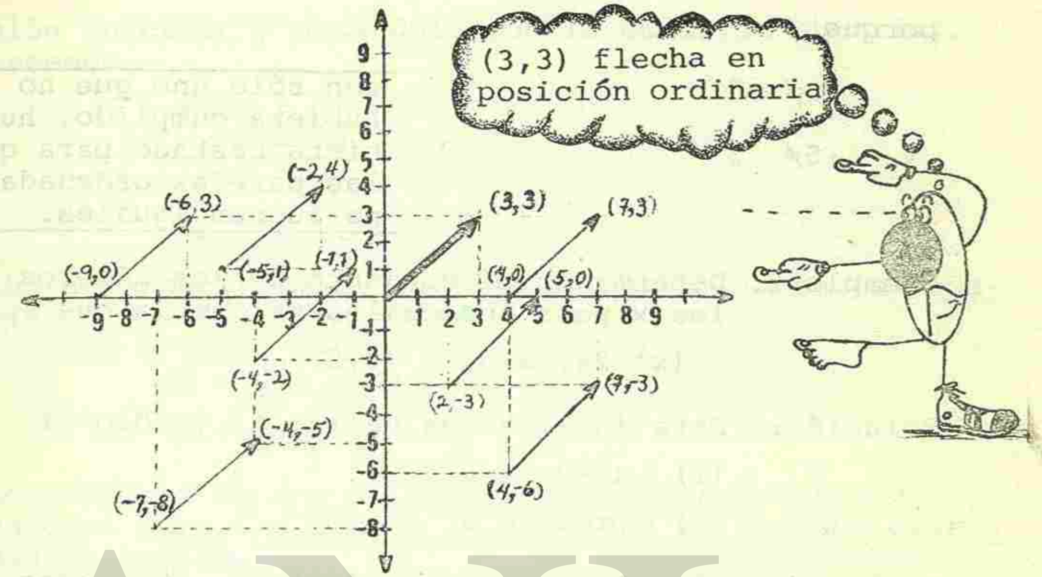
c-a=1-(-2)=3.

Si en el eje <u>x</u> (o de las abscisas) hay un desplazamiento de 3 unidades, y en el eje <u>y</u> (o eje de las ordenadas) hay un desplazamiento también de 3 unidades, entonces la pareja ordenada que representa el desplazamiento resultante es (3,3).

La pareja (3,3) representa al desplazamiento $\overrightarrow{PQ}$ desde P(1,-2) hasta Q(4,1).

Cuando el punto inicial de una flecha coincide con el origen (0,0), se dice que ella está en <u>posición ordinaria</u>. Cualquier flecha sobre el plano Cartesiano se puede trasladar a la posición ordinaria siempre y cuando no se altere su dirección, ni su tamaño, ni su sentido.

Así, la pareja (3,3), del ejemplo anterior, se puede representar en infinidad de formas, <u>todas ellas equivalentes</u>.



Dos parejas ordenadas son iguales si y sólo si la abscisa de una es igual a la abscisa de la otra pareja y la ordenada de una es igual a la ordenada de la otra. Esto se puede expresar formalmente así:

Dos parejas ordenadas en RxR (el plano Cartesiano), (x,y) y (a,b), son iguales si y sólo si <u>x=a</u> y <u>y=b</u>

Así, (2+5, 4x3) = (7,12) — Las parejas ordenadas son iguales

porque
2+5 = 7
y 4x3 = 12

por otro lado

(3,-5) ≠ (-5,3) — Las parejas ordenadas no son iguales porque

$3 \neq -5$

y $-5 \neq 3$

con sólo uno que no se hubiera cumplido, hubiera bastado para que las parejas ordenadas no fueran iguales.

Ejemplo 2. Determinar el conjunto de los números reales x para los cuales se cumpla que

$$(x^2-2x,\ x+3) = (0,5)$$

Solución: Esta igualdad es válida si y sólo si

(1) $x^2-2x = 0$ y

(2) $x+3 = 5$

De la ecuación (1), factorizando la x, obtenemos

$$x(x-2) = 0$$

de lo cual $\underline{x = 0 \text{ ó } x = 2}$

De la ecuación (2), despejando la x, tenemos que

$$x = 5-3$$

$$\underline{x = 2}$$

Para que se satisfaga la igualdad de parejas, ambas ecuaciones deben satisfacerse; para que eso suceda - la variable debe tomar el valor de x = 2, solamente.

Ejemplo 3. Encontrar los valores de x y y para los - cuales se cumple que $(x-2y,\ x-y) = (3,4)$.

Solución: $(x-2y,\ x-y) = (3,4)$ se cumplirá si y sólo si

$x-2y = 3 \longleftarrow$ abscisas iguales

$x-y = 4 \longrightarrow$ ordenadas iguales

Este es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Lo resolveremos en éste caso, por el método de suma o resta. Multiplicando por (-1) a la ecuación inferior y sumándola con la ecuación superior, - tenemos

$$\begin{array}{r} x-2y = 3 \\ \underline{-x+y = -4} \\ 0-y = -1 \end{array}$$

$\therefore \quad \underline{y = 1}$

Ahora, substituyendo este valor de y = 1, en la ecuación $x-y = 4$, tenemos que:

$$x = y+4 = 1+4 = 5$$

$\therefore \quad x = 5.$

Los valores de x = 5 y y = 1 son los ú n i c o s valores para los cuales la igualdad de parejas ordenadas se cumple.

EJERCICIO I-A-2

1 Encuentra el desplazamiento o translación de los siguientes números reales.

a) de 0 a 5
b) de 0 a -3
c) de -3 a 0
d) de -4 a 1
e) de 1 a -4
f) de 10 a 11
g) de 7 a 1
h) de $\frac{1}{2}$ a $\frac{7}{2}$
i) de $\frac{7}{2}$ a $\frac{3}{2}$
j) de 8 a -8

2 Nombra la pareja ordenada representada por $\overrightarrow{RS}$ (es decir, el desplazamiento del punto R al punto S) dadas R y S, respectivamente.

a) R(0,0), S(1,2)
b) R(0,0), S(-3,2)
c) R(4,-5), S(0,0)
d) R(-3,-2), S(1,1)
e) R(1,0), S(0,1)
f) R(8,-5), S(5,-8)
g) R(0,-3), S(0,4)
h) R(0,4), S(0,-3)
i) R(4,5), S(4,5)
j) R(-3,2), S(3,-2)

3 Encuentra los valores de $\underline{x}$ y $\underline{y}$ para los cuales se satisfaga la igualdad propuesta.

a) $(x^2-4x,\ x-4) = (0,0)$
b) $(x+y,\ x-y) = (6,2)$
c) $(2x+3, 8) = (11,\ 3y-1)$
d) $(5x,\ 3x+4) = (10,\ -3)$
e) $(y+4,\ y+x) = (x+4,\ 8)$

B. El álgebra de parejas numéricas.

1. La adición vectorial.

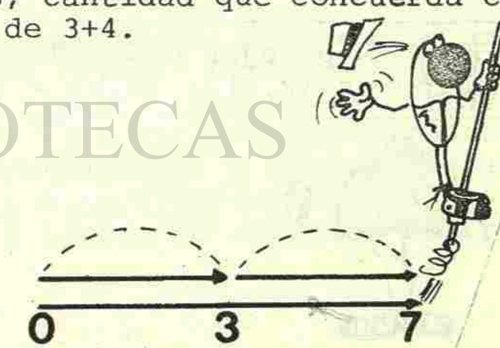
Con la nueva interpretación de los números reales y de las parejas ordenadas, podemos ahora establecer reglas sobre sus desplazamientos en el plano Cartesiano o en la recta numérica.

Tomemos un ejemplo de desplazamiento doble (es decir un desplazamiento seguido de otro desplazamiento).

Ejemplo 1. Graficar en la recta numérica un desplazamiento de 3 unidades, seguido de otro desplazamiento de 4 unidades.

Solución: Graficamos primero el desplazamiento de 3 unidades y luego, a partir del punto asociado al 3, graficamos el desplazamiento de 4 unidades.

Como podemos verificar en la gráfica, el desplazamiento doble equivale a efectuar un desplazamiento simple de 7 unidades; cantidad que concuerda con la suma de 3+4.



EJERCICIO I-A-2

1 Encuentra el desplazamiento o translación de los siguientes números reales.

a) de 0 a 5

b) de 0 a -3

c) de -3 a 0

d) de -4 a 1

e) de 1 a -4

f) de 10 a 11

g) de 7 a 1

h) de $\frac{1}{2}$ a $\frac{7}{2}$

i) de $\frac{7}{2}$ a $\frac{3}{2}$

j) de 8 a -8

2 Nombra la pareja ordenada representada por $\overrightarrow{RS}$ (es decir, el desplazamiento del punto R al punto S) dadas R y S, respectivamente.

a) R(0,0), S(1,2)

b) R(0,0), S(-3,2)

c) R(4,-5), S(0,0)

d) R(-3,-2), S(1,1)

e) R(1,0), S(0,1)

f) R(8,-5), S(5,-8)

g) R(0,-3), S(0,4)

h) R(0,4), S(0,-3)

i) R(4,5), S(4,5)

j) R(-3,2), S(3,-2)

3 Encuentra los valores de x y y para los cuales se satisfaga la igualdad propuesta.

a) $(x^2-4x,\ x-4) = (0,0)$

b) $(x+y,\ x-y) = (6,2)$

c) $(2x+3,8) = (11,\ 3y-1)$

d) $(5x,\ 3x+4) = (10,\ -3)$

e) $(y+4,\ y+x) = (x+4,\ 8)$

B. El álgebra de parejas numéricas.

1. La adición vectorial.

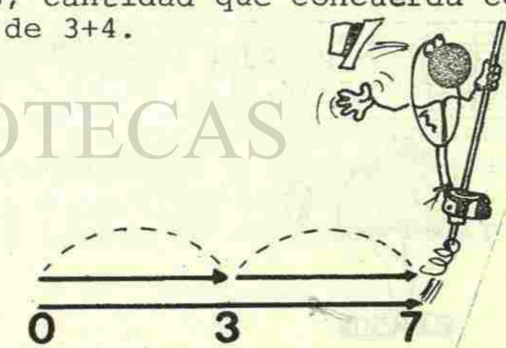
Con la nueva interpretación de los números reales y de las parejas ordenadas, podemos ahora establecer reglas sobre sus desplazamientos en el plano Cartesiano o en la recta numérica.

Tomemos un ejemplo de desplazamiento doble (es decir un desplazamiento seguido de otro desplazamiento).

Ejemplo 1. Graficar en la recta numérica un desplazamiento de 3 unidades, seguido de otro desplazamiento de 4 unidades.

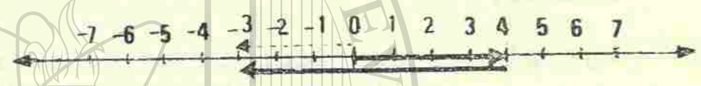
Solución: Graficamos primero el desplazamiento de 3 unidades y luego, a partir del punto asociado al 3, graficamos el desplazamiento de 4 unidades.

Como podemos verificar en la gráfica, el desplazamiento doble equivale a efectuar un desplazamiento simple de 7 unidades; cantidad que concuerda con la suma de 3+4.



Ejemplo 2. Graficar en la recta numérica 4+(-7)

Solución: En la misma forma podemos interpretar 4+(-7) como un desplazamiento de 4 unidades positivas (a la derecha) seguido de otro desplazamiento negativo de 7 unidades (hacia la izquierda).



El desplazamiento total es de -3, que concuerda con la suma algebraica de los números 4+(-7).

Esta adición de desplazamientos en la recta numérica, por medio de flechas, se puede extender a las parejas ordenadas.

Ya hemos visto que una pareja ordenada de números se representa por una flecha en posición ordinaria.

La adición de parejas ordenadas, la podemos definir como la suma de las componentes respectivas de cada pareja; es decir:

Dadas dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b), su adición es (x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)

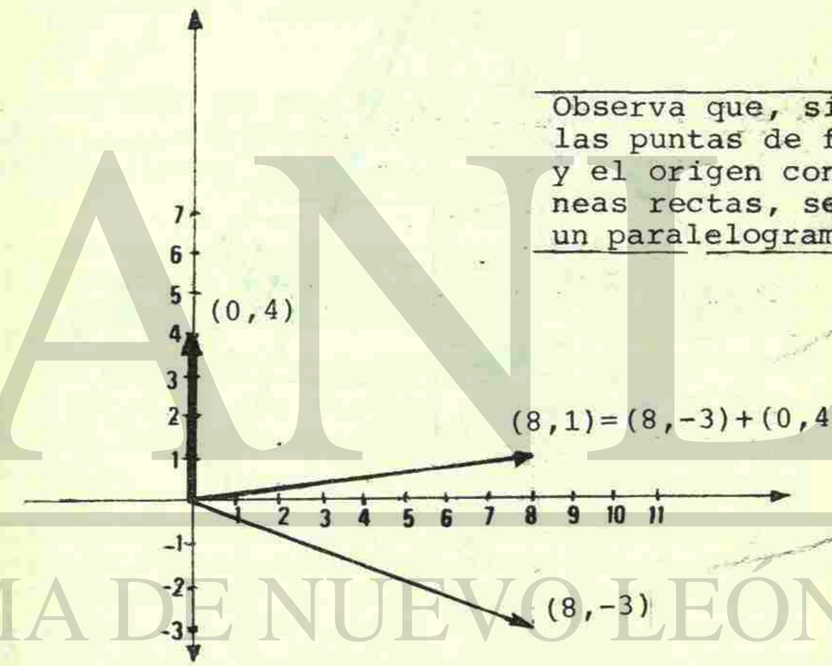
Ejemplo 3. Encontrar la suma de las siguientes parejas ordenadas: (8, -3) y (0,4).

Solución: Por la definición de adición, tenemos que:

$$(8,\ -3)+(0,\ 4) = (8+0,\ ^{-}3+4)$$
$$= (8,\ 1)$$

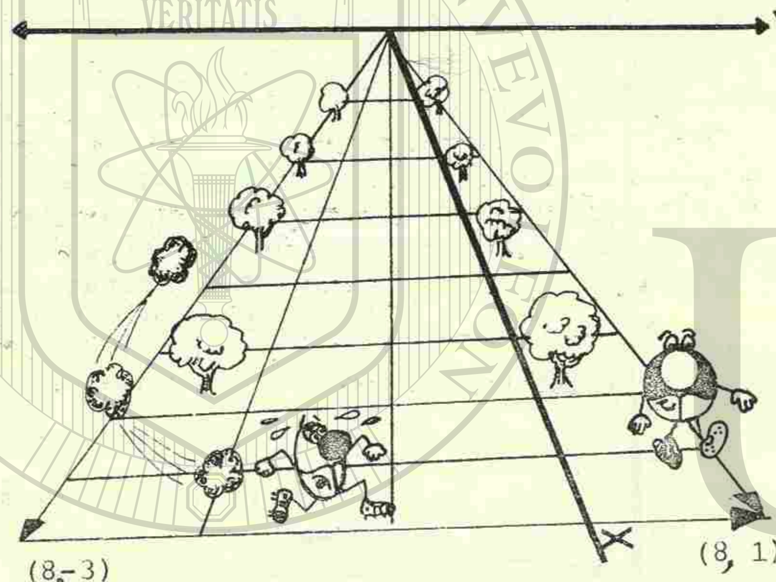
Observa que obtuvimos otra pareja ordenada resultante de la suma de las dos parejas originales.

Si las representamos como flechas, veamos como es el proceso de la adición, gráficamente.



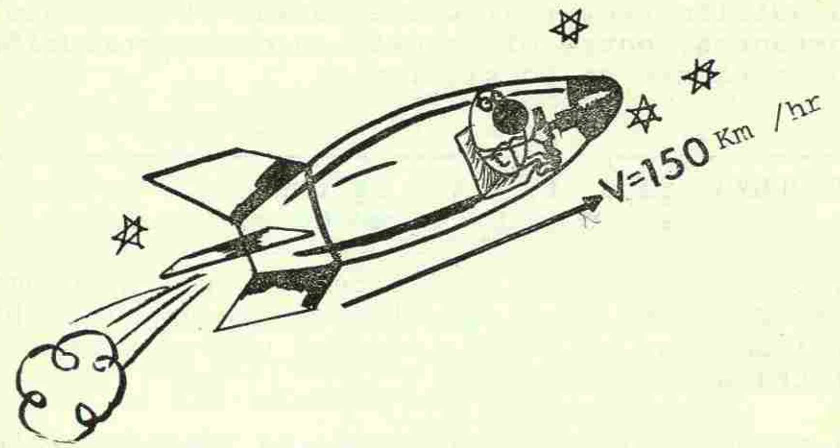
Observa que, si unes las puntas de flecha y el origen con líneas rectas, se forma un paralelogramo.

La adición vectorial se puede interpretar gráficamente en la realidad física. Suponiendo que tenemos el plano de la ciudad graduado en coordenadas y decimos que vamos a recorrer desde el punto (0,0) hasta el punto (8, -3); y después, de ahí mismo moverse en la dirección vertical de la flecha de (0, 4). Para lograr lo anterior se transla da la flecha (0, 4) desde su posición ordinaria - hasta que su punto inicial coincida con el punto (8, -3). Así, se observa que el recorrido es equi valente a que hubiéramos caminado, sin escalas, - desde (0, 0) hasta (8, 1), aunque el camino, ha-- ciendo escalas, sea más largo que el camino direc to. Las trayectorias son desplazamientos que se - comportan como si fueran flechas (es decir, canti dades con magnitud y dirección).



Aquí, se empieza a ver la gran diferencia que -- existe cuando se habla de cantidades escalares - (es decir, números reales) y de parejas ordena-- das (que son cantidades que llevan dos datos in- trínsecos: la magnitud o tamaño y la dirección hacia donde se aplicó dicha magnitud).

Podemos hablar, por ejemplo, de recorrer 20 Kms al noroeste, de empujar con una fuerza de 50 - Kg a un bloque con un ángulo de 30° con respec- to a la horizontal, de moverse a 150 Km/hr -- hacia arriba en un cohete, de caer verticalmen te con una aceleración de 9.8 m/seg^2 etc.



A este tipo de cantidades que necesitan dos (o -- más) componentes para que estén bien definidas, - se les llaman <u>vectores</u>.

De ahora en adelante, le llamaremos vector a - cualquier pareja ordenada que sea elemento de RXR.*

A diferencia del vector, el escalar sólo necesita de una cantidad numérica para expresarse completa mente.

Al estudio de las operaciones de los vectores: -- adición, substracción, multiplicación, etc.; y -- las relaciones que guardan entre sí con sus pro-- piedades, se le denomina álgebra aplicada a vecto res o simplemente, álgebra vectorial.

La operación que estudiamos anteriormente es la - <u>adición vectorial</u>, la cual consiste en el proceso de tomar dos elementos de RXR (vectores) y asig-- narles un vector resultante de la adición de am-- bos. A ese nuevo elemento de RXR se le denomina - <u>vector suma</u>.

*Nota: Esta definición queda a nivel de sinónimo, en esta unidad

La adición vectorial tiene varias propiedades importantes, entre ellas está la de substitución -- que consiste en lo siguiente:

TEOREMA. Si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan vectores y $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$

Esto quiere decir, que si tenemos $\vec{s} = \vec{u}$, podemos - usar el valor de $\vec{u}$ por el de $\vec{s}$ sin mayor problema; al igual que si $\vec{t} = \vec{v}$, podemos usar a $\vec{v}$ como si - se tratase de $\vec{t}$.

En resumen, las propiedades de la adición vecto- - rial son las siguientes:

Sean $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ elementos cualesquiera de RXR.

1). PROPIEDAD DE CERRADURA.

$\vec{s} + \vec{t}$ pertenece a RXR,
es decir, la suma de dos vectores es igual a otro vector , no a un escalar.

2). PROPIEDAD DE SUBSTITUCION.

Si $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$, (esto ya lo estudiamos anteriormente).

3). PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$$\vec{s} + \vec{t} = \vec{t} + \vec{s}$$

Esta propiedad es análoga a la conmutatividad de dos números reales.

4). PROPIEDAD ASOCIATIVA.

$$(\vec{s} + \vec{t}) + \vec{u} = \vec{s} + (\vec{t} + \vec{u})$$

También es como la asociatividad de números -- reales.

5). PROPIEDAD DE IDENTIDAD.

Existe un vector único $\vec{0}$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ y $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$. Al vector $\vec{0}$ comunmente se le llama vector nulo. Similar al idéntico en la adición de los reales.

6). PROPIEDAD DEL INVERSO ADITIVO.

Para cada $\vec{v} \in$ RXR existe un único elemento inverso aditivo $(-\vec{v})$ tal que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ y $(-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$, también similar al inverso aditivo de los números reales.

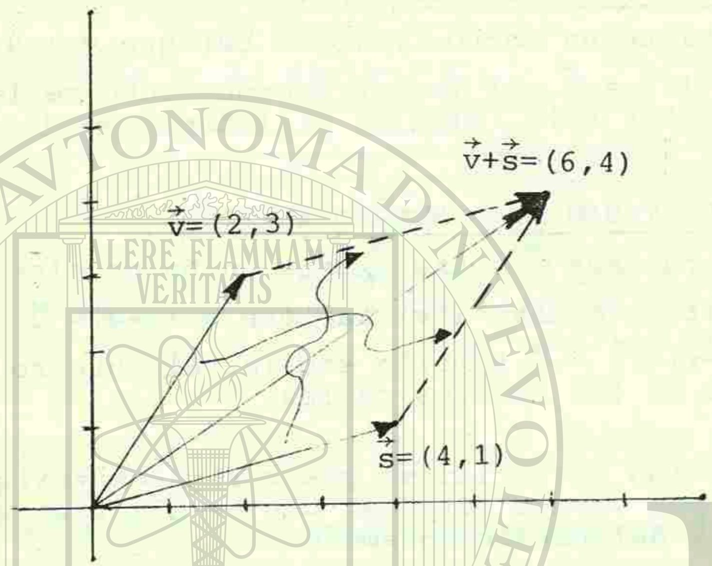
La adición vectorial se puede representar gráficamente por varios métodos. Uno de ellos es el de - la "ley del paralelogramo".

Ejemplo 4. Efectuar gráficamente la adición de -- los vectores $\vec{s} = (4,1)$ y $\vec{v} = (2,3)$, por - el método del paralelogramo.

Solución: Se grafican primero los vectores sumandos. Después, aprovechando la propiedad de las flechas, transladamos el -- vector $\vec{v}$, sin alterar su magnitud, dirección, ni sentido, hasta que su punto inicial coincida con la punta de -- flecha del vector $\vec{s}$.
El vector que parte del punto inicial del vector $\vec{s}$ al punto terminal del vector $\vec{v}$, ya transladado, es el "vector suma" resultante de la adición vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{s}$,

$$(2,3) + (4,1) = (6,4)$$

vector suma



También se puede efectuar el proceso en forma inversa, sin alterar el resultado, es decir, en vez de transladar el vector $\vec{v}$, ahora se hace lo mismo con el vector $\vec{s}$. Se translada sin alterar su magnitud, ni dirección, ni sentido, hasta colocarlo de tal manera, que su punto inicial coincida con la punta de flecha del vector $\vec{v}$. El vector que parte desde el punto inicial de $\vec{v}$ hasta la punta de flecha de $\vec{s}$, es el "vector suma" de $\vec{v}$ y $\vec{s}$, el cual es idéntico al "vector suma" primeramente encontrado: $(4,1) + (2,3) = (6,4)$.

Lo anterior ilustra la propiedad conmutativa de la adición vectorial, no sólo algebraicamente sino también con la gráfica.

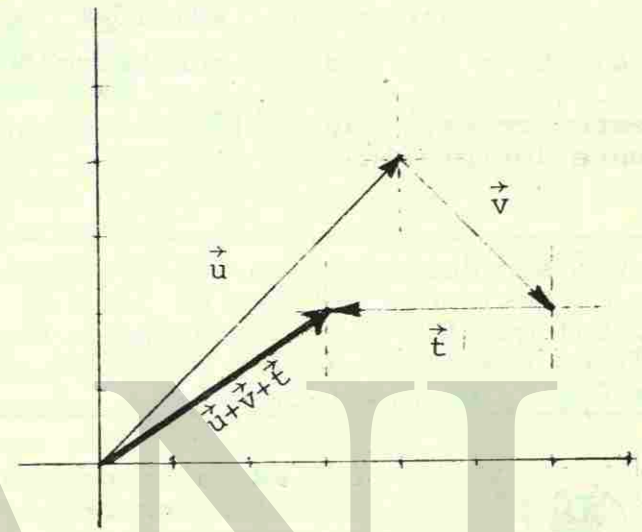
Ejemplo 5. Graficar la adición de los siguientes vectores: $\vec{u} = (4,4)$, $\vec{v} = (2,-2)$, $\vec{t} = (-3,0)$ por medio del método del polígono.

Solución: La adición de estos vectores es

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (4,4) + (2,-2) + (-3,0)$$

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (4+2-3,\ 4-2+0)$$

$$\therefore \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{t} = (3,2)$$



Gráficamente se observa de la siguiente forma: se coloca el vector $\vec{u}$ en posición ordinaria. Seguidamente, en lugar de poner a $\vec{v}$ en posición ordinaria, se trasladan los ejes coordenados al punto terminal del vector $\vec{v}$ y ahí se le coloca, (en posición ordinaria con respecto a los ejes transladados), luego, de igual manera, se vuelven a correr los ejes hasta el extremo de $\vec{v}$; y de ahí se hace partir al vector $\vec{t}$.

El vector suma es la flecha que parte desde el origen y llega hasta donde está la punta de flecha de $\vec{t}$.

Este método del polígono, como se ve en la gráfica, se puede aplicar con muchos más vectores, formando, como su nombre lo indica, un polígono cerrado.

También se puede definir la substracción de vectores, basados en la adición vectorial, en forma análoga a la adición de un número real con el inverso aditivo de otro número real:

$$a+b = c \qquad \text{adición;}$$
$$a+(-b) = a-b = d \qquad \text{substracción}$$

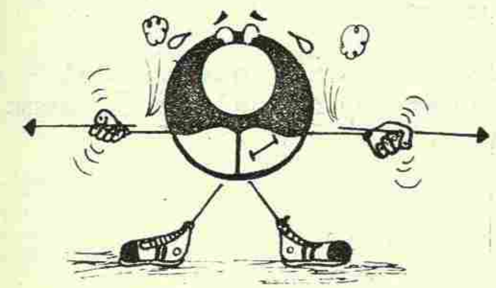
Para extender esta idea a los vectores, tomamos la siguiente definición:

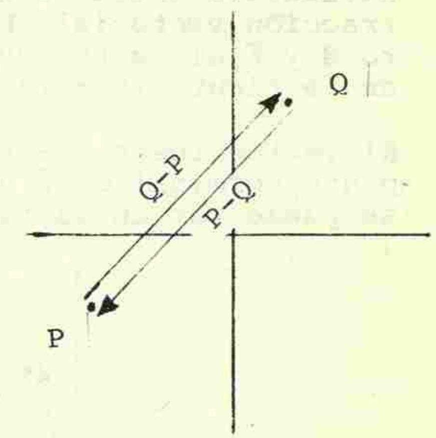
Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son dos vectores cualesquiera sobre el plano Cartesiano y $(-\vec{t})$ es el inverso aditivo de $\vec{t}$, tal que $\vec{t}+(-\vec{t}) = \vec{0}$, entonces la operación $\vec{v}+(-\vec{t})$ es una substracción vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{t}$; pues $\vec{v}+(-\vec{t}) = \vec{v}-\vec{t}$

Esa es la operación de substracción vectorial; el resultado de dicha operación es el "vector resta".

Existe un detalle muy significativo de la substracción que será muy útil para la siguiente unidad de estudio. Si tenemos dos puntos P y Q sobre el plano Cartesiano y aplicamos la substracción, P – Q, sobre ellos, (recordemos que el concepto de vector se origina en los desplazamientos de puntos en el plano Cartesiano) el resultado de dicha substracción da un vector que parte del punto Q y termina en el punto P.

Entonces, P – Q y Q – P son dos vectores paralelos pero con sentidos contrarios, tal como se muestra en la gráfica.

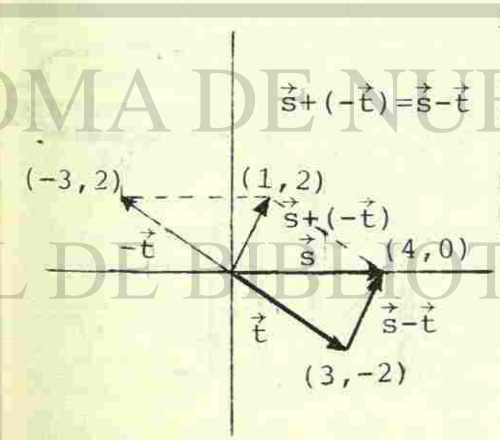




Ejemplo 6. Graficar $\vec{s}+(-\vec{t})$, dado que $\vec{s} = (4,0)$, $\vec{t} = (3,-2)$.

Solución: La expresión $\vec{s}+(-\vec{t})$ también se puede escribir en forma más simple como $\vec{s} - \vec{t}$.
Ahora, los datos cambiarán un poco, para facilitar la operación:

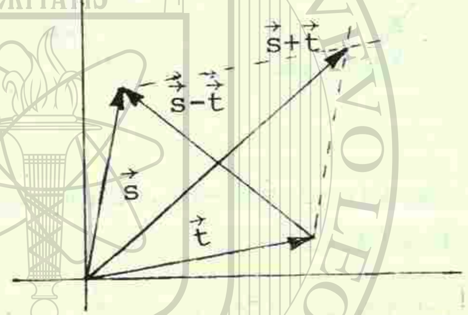
$$\vec{s} = (4,0)$$
$$-\vec{t} = -(3,-2) = (-3,2)$$



Entonces,
$$(4,0) + (-3,2) = (1,2)$$
es el vector resta de $\vec{s}$ y $\vec{t}$.
Gráficamente se muestra que al vector $\vec{t}$ lo cambiamos por su inverso aditivo $(-\vec{t})$ y lo sumamos vectorialmente al vector $\vec{s}$.

Como se puede observar, existe una diferencia significativa entre la adición vectorial y la substracción vectorial. Dados dos vectores cualesquiera $\vec{s}$ y $\vec{t}$, el vector suma es $\vec{s} + \vec{t}$ como se muestra en la figura (paralelogramo) .

El vector resta $\vec{s} - \vec{t}$ es el vector que va del punto terminal de $\vec{t}$ al punto terminal de $\vec{s}$, como se puede ver en la figura.



En sí, la substracción de vectores $\vec{s}$ y $\vec{t}$ es la suma de un vector $\vec{s}$ con el inverso aditivo de $\vec{t}$ (o sea $-\vec{t}$).

EJERCICIO I-B-1

1 Grafica en la recta numérica la adición de los siguientes números, mediante desplazamientos.

a) 0; (+3)

b) (+4); (+5)

c) (-3); (-4); (+1)

d) (-4); (-5)

e) (-3); (+3)

2 Efectúa la adición de las siguientes parejas ordenadas.

a) (0,3); (0,-8)

b) (-4,0); (1,-5)

c) (-3,2); (-8,-5)

d) (3,0); (0,-5); (1,1)

e) (3,-7); (-2,6); (-1,-2)

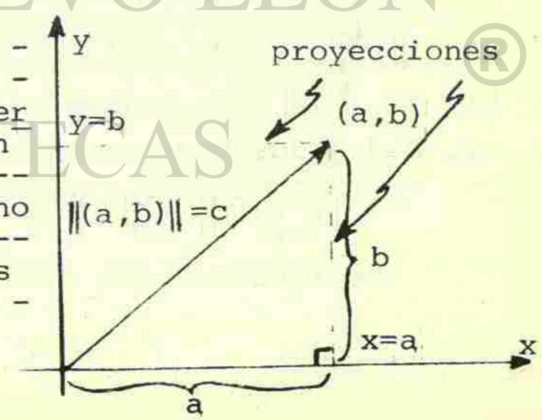
Representa en el plano Cartesiano RXR las adiciones del ejercicio anterior, mediante el método gráfico que creas más conveniente.

2. La norma de un vector.

La norma de un vector es un aspecto muy importante debido a que representa el tamaño o magnitud del vector. La norma también es llamada, a veces, valor absoluto del vector, razón por la cual, es indistinto hablar de la norma o del valor absoluto de un vector.

Para encontrar la norma de un vector sobre el plano Cartesiano RXR, se usan los conceptos referentes a la Geometría Plana Elemental. Particularmente nos referimos al teorema de Pitágoras, puesto que resume el problema de la norma a una simple operación algebraica. Veamos la razón:

Basados en la gráfica que a continuación se presenta, podemos observar que todo vector en posición ordinaria sobre el plano Cartesiano forma, con sus proyecciones* sobre los ejes coordenados x,y , un -



*Consultar Glosario.

triángulo rectángulo. Si las coordenadas del vector son (a,b) los catetos de dicho triángulo miden, respectivamente, a y b. Usando el teorema de Pitágoras, podemos, con esos datos, obtener la hipotenusa del triángulo, la cual corresponde precisamente a la norma del vector antes mencionado.

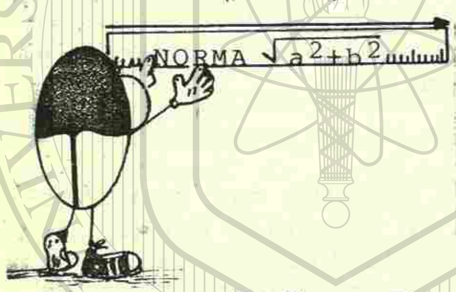
De tal manera que:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

de donde

$$\|(a,b)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Es lo mismo hablar de norma, valor absoluto, magnitud o módulo de un vector (a,b).



Ejemplo 1. Calcular la norma del vector $\vec{v} = (-8, -13)$.

Solución: Aplicando la fórmula para calcular $\|\vec{v}\|$, con $a = -8$ y $b = -13$,

tenemos: $\|\vec{v}\| = \|(-8, -13)\|$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (-13)^2}$$

$$= \sqrt{64 + 169}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{233}$$

La norma de todo vector debe satisfacer siempre las condiciones siguientes:

a). $\|\vec{v}\| \geq 0$

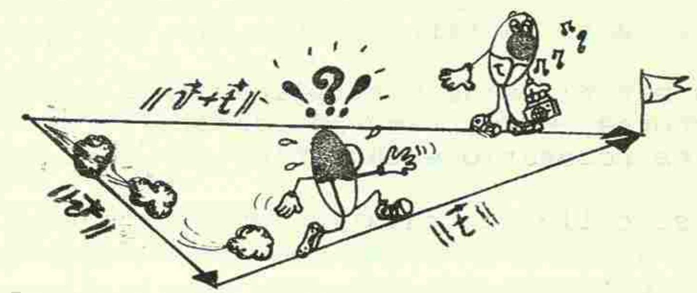
b). Si $\|\vec{v}\| = 0$, entonces $\vec{v} = (0,0) = \vec{0}$

c). Dados dos vectores cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{t}$,

$$\|\vec{v} + \vec{t}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{t}\|$$

(Desigualdad del triángulo)

Esta última propiedad se refiere a que el tamaño o magnitud, de la resultante de la suma de dos vectores, siempre es menor o igual que la suma de las magnitudes de los vectores por separado. Esto se puede observar claramente en toda gráfica que represente una suma de vectores.



EJERCICIO I-B-2

Calcula la norma de los siguientes vectores.

a) $\vec{v} = (-3, -4)$

b) $\vec{v} = (4, -7)$

c) $\vec{v} = (0, 9)$

d) $\vec{v} = (\sqrt{2}, -5)$

e) $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{5})$

f) $\vec{v} = (a, b)$

g) $\vec{v} = (k, 2)$

h) $\vec{v} = (1-k, -k)$

i) $\vec{v} = (a^2, -b^2)$

j) $\vec{v} = (\sqrt{a}, \sqrt{3})$

C. Vectores Paralelos y Perpendiculares.

1. Multiplicación de un vector por un escalar .

A nivel de este curso, estudiaremos sólo dos tipos de productos que impliquen vectores.

a) El producto de un escalar por un vector.

b) El producto "interno" entre dos vectores.

Existen más tipos de multiplicaciones relacionadas con vectores, pero, para los objetivos de esta unidad, no es necesario estudiarlos.

El más sencillo de todos los productos es el de un escalar por un vector, el cual se define en la siguiente forma:

Si $\vec{v}=(a,b)$ es un vector cualquiera y r un escalar, entonces $r\vec{v} = r(a,b) = (ra,rb)$

Es decir, cuando hay un escalar multiplicando a un vector, es igual a que el escalar se multiplique por cada una de las componentes del vector.

Así como la adición vectorial tiene ciertas propiedades que cumple, la multiplicación de un escalar por un vector satisface <u>nueve</u> propiedades específicas:

Sean $\vec{v}$ y $\vec{t}$ dos elementos cualesquiera de RXR y sean r y s dos números reales cualesquiera.

1). <u>PROPIEDAD DE CERRADURA</u>

$r\vec{v}$ pertenece a RXR,
es decir, que al multiplicar un vector $\vec{v}$ en RXR por un escalar r, siempre resulta otro vector en RXR.

2). <u>PROPIEDAD DE SUBSTITUCION</u>

Si $r = s$ y $\vec{v} = \vec{t}$, entonces $r\vec{v} = s\vec{t}$

Esta propiedad indica que se puede substituir un vector por otro igual aunque sus expresiones parezcan diferentes.

3). <u>PROPIEDAD CONMUTATIVA</u>.

$r\vec{v} = \vec{v}r$
Es indistinto multiplicar el vector por el escalar, que el escalar por el vector.

4). <u>PROPIEDAD ASOCIATIVA</u>

$(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$

5). <u>EXISTENCIA DEL IDENTICO MULTIPLICATIVO</u>.

$1\vec{v} = \vec{v}$
Existe el escalar 1 tal que el producto de 1 por cualquier vector es igual al vector mismo.

6). <u>PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO</u>.

$r\vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\vec{v} = (0,0)$
Cuando el producto es el vector nulo, hay varias opciones: el escalar es cero, o el vector $\vec{v}$ es $(0,0)$, (o nulo); o en caso extremo, $r=0$ y $\vec{v} = (0,0)$.

7). <u>PROPIEDAD DEL -1</u>

$(-1)\ \vec{v} = -\vec{v}$
Cuando se multiplica un vector por la unidad negativa, el resultado es el inverso aditivo del vector, es decir, $-\vec{v}$.

1). PROPIEDAD DE CERRADURA

$r\vec{v}$ pertenece a RXR,
es decir, que al multiplicar un vector $\vec{v}$ en RXR por un escalar r, siempre resulta otro vector en RXR.

2). PROPIEDAD DE SUBSTITUCION

Si $r = s$ y $\vec{v} = \vec{t}$, entonces $r\vec{v} = s\vec{t}$

Esta propiedad indica que se puede substituir un vector por otro igual aunque sus expresiones parezcan diferentes.

3). PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$r\vec{v} = \vec{v}r$

Es indistinto multiplicar el vector por el escalar, que el escalar por el vector.

4). PROPIEDAD ASOCIATIVA

$(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$

5). EXISTENCIA DEL IDENTICO MULTIPLICATIVO.

$1\vec{v} = \vec{v}$

Existe el escalar 1 tal que el producto de 1 por cualquier vector es igual al vector mismo.

6). PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO.

$r\vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\vec{v} = (0,0)$

Cuando el producto es el vector nulo, hay varias opciones: el escalar es cero, o el vector $\vec{v}$ es (0,0), (o nulo); o en caso extremo, $r=0$ y $\vec{v} = (0,0)$.

7). PROPIEDAD DEL -1

$(-1)\ \vec{v} = -\vec{v}$

Cuando se multiplica un vector por la unidad negativa, el resultado es el inverso aditivo del vector, es decir, $-\vec{v}$.

8. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS.

1. $r(\vec{v}+\vec{t}) = r\vec{v}+r\vec{t}$

   $(\vec{v}+\vec{t})r = \vec{v}r+\vec{t}r$

2. $(r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v}$

   $\vec{v}(r+s) = \vec{v}r+\vec{v}s$

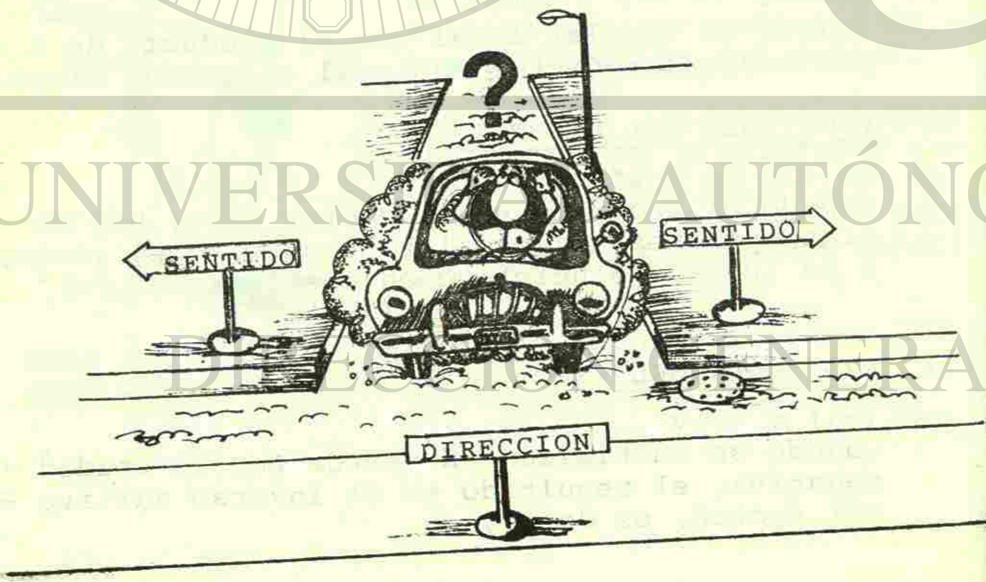
9. PROPIEDAD DE LA NORMA.

$$\|r\vec{v}\| = |r|\left(\|\vec{v}\|\right)$$

La norma del producto de un escalar r por un vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto del escalar r multiplicado por la norma del vector $\vec{v}$.

Habíamos mencionado ya las características esenciales de los vectores: magnitud, dirección y sentido.

A veces hay confusión entre el concepto de dirección y el de sentido. La dirección de un vector es simplemente el ángulo, con respecto a un eje de referencia, que nos indica la inclinación del vector. Ya teniendo la dirección, el sentido del vector puede ser hacia un extremo o hacia el otro.



1). PROPIEDAD DE CERRADURA

$r\vec{v}$ pertenece a RXR,
es decir, que al multiplicar un vector $\vec{v}$ en RXR por un escalar r, siempre resulta otro vector en RXR.

2). PROPIEDAD DE SUBSTITUCION

Si $r = s$ y $\vec{v} = \vec{t}$, entonces $r\vec{v} = s\vec{t}$

Esta propiedad indica que se puede substituir un vector por otro igual aunque sus expresiones parezcan diferentes.

3). PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$r\vec{v} = \vec{v}r$

Es indistinto multiplicar el vector por el escalar, que el escalar por el vector.

4). PROPIEDAD ASOCIATIVA

$(rs)\vec{v} = r(s\vec{v})$

5). EXISTENCIA DEL IDENTICO MULTIPLICATIVO.

$1\vec{v} = \vec{v}$

Existe el escalar 1 tal que el producto de 1 por cualquier vector es igual al vector mismo.

6). PROPIEDAD DEL PRODUCTO CERO.

$r\vec{v} = \vec{0}$ si y sólo si $r = 0$ ó $\vec{v} = (0,0)$

Cuando el producto es el vector nulo, hay varias opciones: el escalar es cero, o el vector $\vec{v}$ es (0,0), (o nulo); o en caso extremo, $r=0$ y $\vec{v} = (0,0)$.

7). PROPIEDAD DEL -1

$(-1)\ \vec{v} = -\vec{v}$

Cuando se multiplica un vector por la unidad negativa, el resultado es el inverso aditivo del vector, es decir, $-\vec{v}$.

8. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS.

1. $r(\vec{v}+\vec{t}) = r\vec{v}+r\vec{t}$

   $(\vec{v}+\vec{t})r = \vec{v}r+\vec{t}r$

2. $(r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v}$

   $\vec{v}(r+s) = \vec{v}r+\vec{v}s$

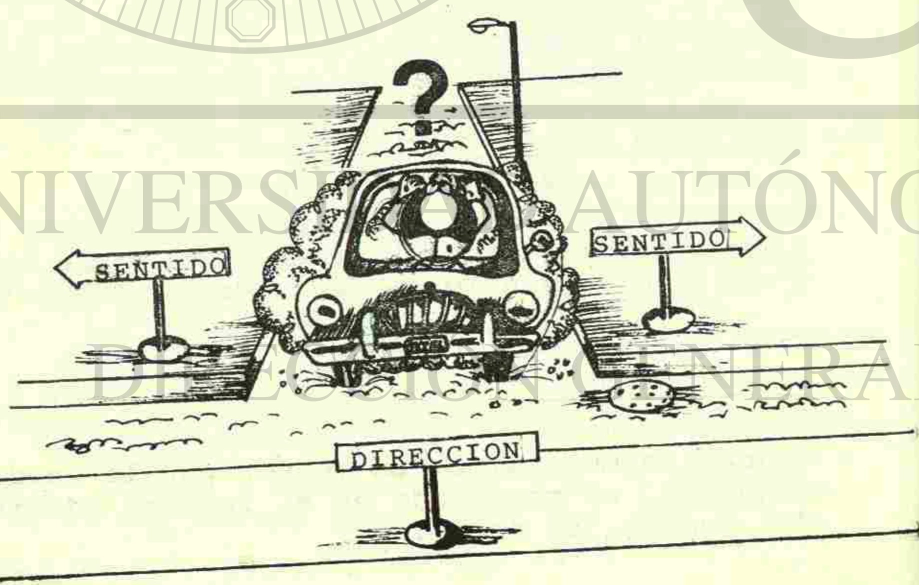
9. PROPIEDAD DE LA NORMA.

$\|r\vec{v}\| = |r|\,(\|\vec{v}\|)$

La norma del producto de un escalar r por un vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto del escalar r multiplicado por la norma del vector $\vec{v}$.

Habíamos mencionado ya las características esenciales de los vectores: magnitud, dirección y sentido.

A veces hay confusión entre el concepto de dirección y el de sentido. La dirección de un vector es simplemente el ángulo, con respecto a un eje de referencia, que nos indica la inclinación del vector. Ya teniendo la dirección, el sentido del vector puede ser hacia un extremo o hacia el otro.



8. PROPIEDADES DISTRIBUTIVAS.

1. $r(\vec{v}+\vec{t}) = r\vec{v}+r\vec{t}$

   $(\vec{v}+\vec{t})r = \vec{v}r+\vec{t}r$

2. $(r+s)\vec{v} = r\vec{v}+s\vec{v}$

   $\vec{v}(r+s) = \vec{v}r+\vec{v}s$

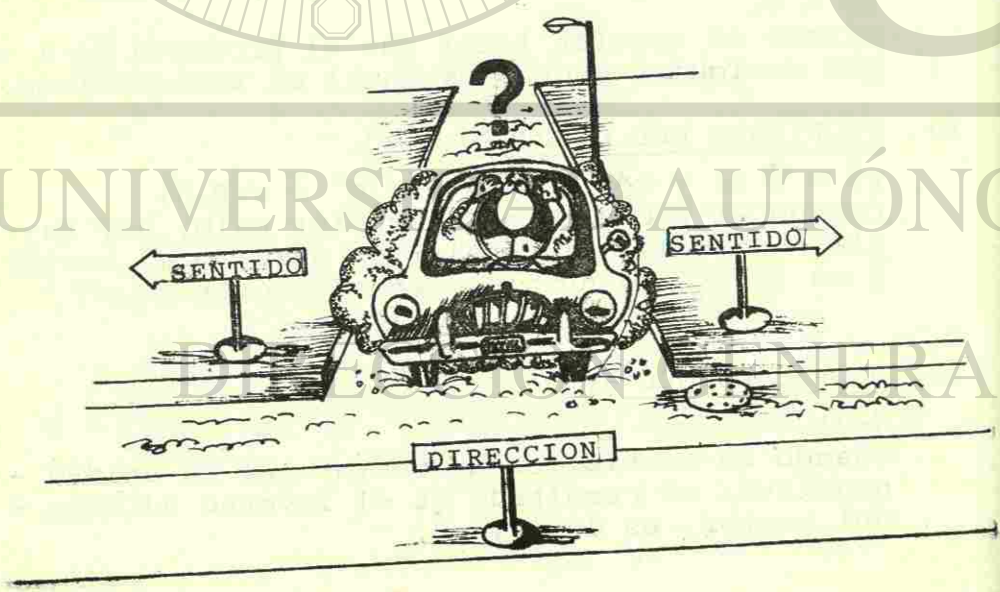
9. PROPIEDAD DE LA NORMA.

$$\|r\vec{v}\| = |r|\left(\|\vec{v}\|\right)$$

La norma del producto de un escalar r por un vector $\vec{v}$ es igual al valor absoluto del escalar r multiplicado por la norma del vector $\vec{v}$.

Habíamos mencionado ya las características esenciales de los vectores: magnitud, dirección y sentido.

A veces hay confusión entre el concepto de dirección y el de sentido. La dirección de un vector es simplemente el ángulo, con respecto a un eje de referencia, que nos indica la inclinación del vector. Ya teniendo la dirección, el sentido del vector puede ser hacia un extremo o hacia el otro.



Dos vectores diferentes de cero, con igual dirección, pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos. Para averiguarlo se tiene que saber lo siguiente:

Dados dos vectores, diferentes de cero, $\vec{v}$ y $\vec{t}$, si uno de ellos ($\vec{v}$ por ejemplo) es el producto del otro ($\vec{t}$) por un escalar r, entonces son paralelos ($\vec{v}$ y $\vec{t}$).

$$r\vec{t} = \vec{v}$$

Si el escalar r es positivo, tienen el mismo sentido.

Si el escalar r es negativo, tienen sentidos opuestos.

Ejemplo 1. Verificar que $\vec{v} = (10, -4)$ y $\vec{t} = (-5,2)$ tienen sentidos opuestos.

Solución: Tomemos el vector de componentes más pequeñas ($\vec{t}$) y busquemos un escalar que multiplicado por dicho vector, dé igual al vector de componentes más grandes $\vec{v}$.

Intentando primero con el número 2,

$$2(-5,2) = (-10,4),$$

vemos que no resulta el vector $\vec{v}$ sino otro vector con los signos alterados, para solucionar esto, probamos ahora con -2, entonces:

$$(-2)(-5,2) = (10,-4) = \vec{v}$$

El resultado es igual al vector $\vec{v}$, por lo que nos damos cuenta que son paralelos y además, puesto que el escalar es negativo, se deduce que los vectores tienen sentidos opuestos.

Ejemplo 2. Verificar que $\vec{v} = (\frac{1}{2}, -4)$ y $\vec{t} = (2,-16)$ tienen la misma dirección y sentido.

Solución: El vector $\vec{v}$ es el de componentes más pequeñas, entonces buscamos un número que multiplicado por $\vec{v}$ resulte $\vec{t}$. Proponiendo el número 4 y probando,

$$4(\frac{1}{2}, -4) = (2,-16) = \vec{t},$$

se ha encontrado que $\vec{t}$ es un producto de un escalar positivo por el vector $\vec{v}$, por lo tanto tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Dos vectores, diferentes de cero, con la misma dirección se dice que son paralelos (no importa el sentido que lleven). El vector (0,0) es paralelo a cualquier vector.

Aclarando: dos vectores, diferentes de cero, serán paralelos, siempre y cuando uno de ellos sea igual al producto del otro vector por un escalar.

TEOREMA. Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son respectivamente paralelos a un vector $\vec{u}$, diferente del vector cero, entonces $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son vectores paralelos entre sí.

Con respecto a la magnitud, existen cierto tipo de vectores cuyo tamaño mide la unidad. Dichos vectores se llaman vectores unitarios.

Ejemplo 3. Comprobar que el vector $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un vector unitario.

Solución: La norma de $\vec{u}$ está dada por:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$\therefore \|\vec{u}\| = 1$ Como la norma de $\vec{u}$ es la unidad, a éste se le llama vector unitario.

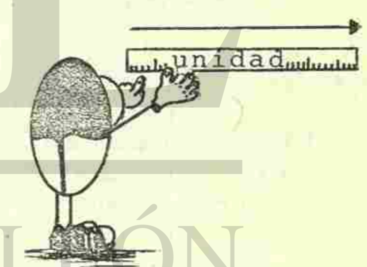
En general, para un vector cualquiera, $\vec{v}$, diferente de cero, $\frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$ es un vector unitario en el mismo sentido que $\vec{v}$, mientras que $-\frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$ es un vector unitario en sentido opuesto a $\vec{v}$.

Ejemplo 4. Encontrar un vector unitario en el mismo sentido que $\vec{v} = (3,4)$ y un vector unitario con el sentido opuesto a $\vec{v}$.

Solución: Primero procedemos a encontrar $\|\vec{v}\|$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{9+16}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$



Entonces $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}(\vec{v})$

$$= \frac{1}{5}(3,4)$$

$$= \left(\frac{1}{5}\cdot 3, \frac{1}{5}\cdot 4\right)$$

$$\therefore \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

y el vector unitario en el sentido opuesto a $\vec{v}$,

$$-\vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

EJERCICIO I-C-1

1 Efectúa las multiplicaciones siguientes.

a) $5(3,-2)$ f) $z(x,y)$

b) $(-2)(1,4)$ g) $(-3)(x+y,\ x-y)$

c) $(-8)(-1,2)$ h) $(-1)(4,-7)$

d) $a(5,-4)$ i) $(-1)(-a,\ -b)$

e) $(-b)(x,-3)$ j) $(-1)(x,y)$

2 Determina si la pareja de vectores dados es paralela, si lo es, menciona que sentido tienen entre sí los vectores dados.

a) $\vec{v}=(3,-8)$; $\vec{s}=(6,-16)$

b) $\vec{v}=(-5,4)$; $\vec{s}=(-4,5)$

c) $\vec{v}=(8,-2)$; $\vec{s}=(-4,1)$

d) $\vec{v}=(\frac{1}{2},6)$; $\vec{s}=(-1,-12)$

e) $\vec{v}=(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$; $\vec{s}=(3,2)$

3 Determina cuál de los siguientes vectores es unitario. En caso de que no lo sea, encuentra un vector unitario en el mismo sentido que él y otro en sentido opuesto.

a) $(1,1)$

b) $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$

c) $(\frac{6}{10},\frac{8}{10})$

d) $(5,\ 6)$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

2. Producto interno o Producto punto de vectores.

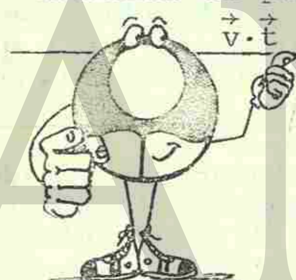
Una herramienta muy útil y práctica en álgebra vectorial es el producto interno, (llamado también producto punto o escalar) el cual estudiaremos en esta unidad.

Se le denomina también producto escalar debido a que, precisamente, el resultado de dicho producto es un número escalar y no un vector como en el producto anteriormente estudiado.

Dicho producto se define de la siguiente manera:

Si $\vec{v}=(v_1,v_2)$ y $\vec{t}=(t_1,t_2)$ son elementos de RXR, entonces el producto interno de $\vec{v}$ y $\vec{t}$, es

$$\vec{v}\cdot\vec{t} = v_1t_1 + v_2t_2$$



Como se puede ver claramente, el resultado del producto interno es una suma de números reales, es decir, un escalar.

Ejemplo 1. Encontrar el producto interno (o escalar) de $\vec{v}=(-8,3)$ y $\vec{t}=(5,6)$

Solución: $\vec{v}\cdot\vec{t}=(-8,3)\cdot(5,6)$

Usando la definición :

$$\vec{v}\cdot\vec{t}=(-8)(5)+(3)(6)$$
$$=-40+18$$

$$\vec{v}\cdot\vec{t}=-22$$

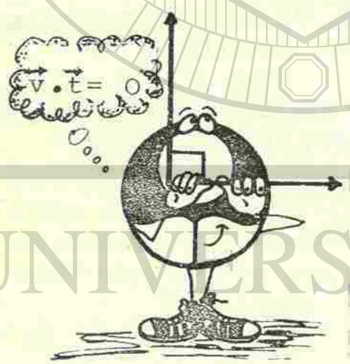
Debes notar que el símbolo del producto interno de dos vectores es el punto que los separa.

Al producto interno se le llama también producto punto para distinguirlo del "producto cruz", que es otra forma de multiplicación vectorial. Dichos productos se representan, respectivamente, así:

$\vec{v} \times \vec{t}$	$\vec{v} \cdot \vec{t}$
producto cruz de $\vec{v}$ y $\vec{t}$	producto punto de $\vec{v}$ y $\vec{t}$

El producto interno (escalar o punto) de vectores tiene una gran importancia en el álgebra vectorial, puesto que nos informa sobre la perpendicularidad (o no perpendicularidad) y el paralelismo (o no paralelismo) de dos vectores dados.

Una condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares (es decir que formen entre sí un ángulo de 90°) es que su producto interno sea igual a cero.



Así, fácilmente, sabiendo las coordenadas de los vectores nos daremos cuenta si son perpendiculares o no.

Ejemplo 2. Determinar si son perpendiculares o no los siguientes pares de vectores:

a) $\vec{v} = (3,-2)$, $\vec{t} = (2,4)$

b) $\vec{v} = (5,6)$; $\vec{t} = (-12,10)$

Solución: a) Si $\vec{v} = (3,-2)$, $\vec{t} = (2,4)$, Entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\vec{t} &= (3,-2)\cdot(2,4) \\ &= (3)(2) + (-2)(4) \\ &= 6-8 \\ \underline{\vec{v}\cdot\vec{t}} &\underline{= -2} \end{aligned}$$

Puesto que $-2 \neq 0$, entonces los vectores no son perpendiculares.

b)
$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\vec{t} &= (5,6)\cdot(-12,10) \\ &= (5)(-12) + (6)(10) \\ &= -60 + 60 \\ \underline{\vec{v}\cdot\vec{t}} &\underline{= 0} \end{aligned}$$

Puesto que $\vec{v}\cdot\vec{t} = 0$, $\vec{v}$ y $\vec{t}$ sí son perpendiculares.

Al igual que la adición y el producto de un escalar por un vector, el producto interno también tiene ciertas propiedades que lo caracterizan, ellas son:

Si $\vec{v}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{s}$ son elementos cualesquiera de RXR y r es cualquier número real, entonces

a) PROPIEDAD DE SUBSTITUCION.

Si $\vec{v} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{s}$, entonces $\vec{v}\cdot\vec{t} = \vec{u}\cdot\vec{s}$

b) PROPIEDAD CONMUTATIVA.

$\vec{v}\cdot\vec{t} = \vec{t}\cdot\vec{v}$

c) PROPIEDAD ASOCIATIVA.

$r(\vec{v}\cdot\vec{t}) = (r\vec{v})\cdot\vec{t}$

d) PROPIEDAD DISTRIBUTIVA.

$\vec{v}\cdot(\vec{t} + \vec{s}) = \vec{v}\cdot\vec{t} + \vec{v}\cdot\vec{s}$ y

$(\vec{t} + \vec{s})\cdot\vec{v} = \vec{t}\cdot\vec{v} + \vec{s}\cdot\vec{v}$

e) PROPIEDAD DE LA NORMA.

$\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

EJERCICIO I-C-2

1 Encuentra el producto interno (producto escalar o producto punto) de las siguientes parejas de vectores.

a) $\vec{v} = (4,-5)$; $\vec{s} = (1,-3)$

b) $\vec{v} = (3,a)$; $\vec{s} = (-a,8)$

c) $\vec{v} = (a,b)$; $\vec{s} = (-b,a)$

d) $\vec{v} = (x+y,\ -x)$; $\vec{s} = (y, x+y)$

e) $\vec{v} = (x-3,\ x+3)$; $\vec{s} = (3,-9)$

2 Determina si $\vec{v} \perp \vec{s}$, (si el vector $\vec{v}$ es perpendicular al $\vec{s}$) mediante el producto punto de ellos.

a) $\vec{v} = (9,-2)$; $\vec{s} = (4,18)$

b) $\vec{v} = (3,3)$; $\vec{s} = (4,4)$

c) $\vec{v} = (2,2)$; $\vec{s} = (7,-7)$

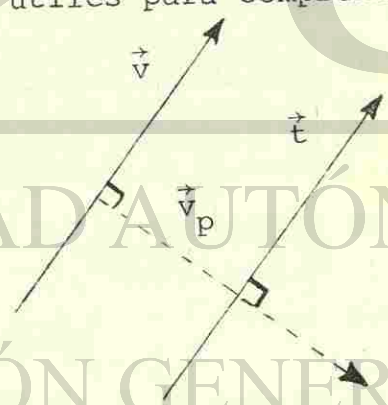
d) $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; $\vec{s} = (-1, \frac{3}{2})$

e) $\vec{v} = (8,3)$; $\vec{s} = (3,8)$

3. Relaciones entre vectores paralelos y perpendiculares.

Dados dos vectores, diferentes de cero, que sean paralelos entre sí, podemos observar ciertas propiedades interesantes, muy útiles para comprender la geometría de vectores.

Sean dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{t} = (t_1, t_2)$ paralelos en RXR. Si encontramos un vector perpendicular a $\vec{v}$, éste se puede expresar en la forma $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$, entonces este vector también será perpendicular a $\vec{t}$. Esto se expresa en el siguiente teorema.



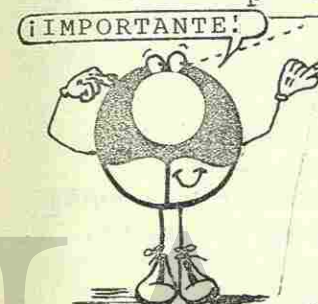
TEOREMA. Sean $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores en RXR. Entonces $\vec{t}$ es paralelo a $\vec{v}$ si y sólo si $\vec{t}$ y $\vec{v}_p$, son vectores perpendiculares, siendo $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$

Resumiendo el teorema anterior en forma práctica, el corolario siguiente expone un método para comprobar el paralelismo entre dos vectores.

Corolario. $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son vectores paralelos si y sólo si

$$\vec{t} \cdot \vec{v}_p = -t_1 v_2 + t_2 v_1 = 0,$$

donde $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$

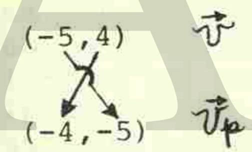


Ejemplo 1. Determinar si son paralelos los vectores representados por las siguientes parejas:

a) $(\frac{15}{2}, -6)$, $(-5,4)$

b) $(-3, -6)$, $(6, -10)$

Solución: a) Tomando el vector perpendicular de cualquiera de ellos, por ejemplo el del vector $(-5,4)$:



observa que la abscisa del primer vector pasó a ser la ordenada del vector perpendicular; y la ordenada del primero pasó a ser el negativo de la abscisa del segundo vector.

En esta forma tenemos ya el vector perpendicular al vector $(-5,4)$. Entonces usando las propiedades del producto interno, procedemos a multiplicar

$$\underbrace{(-4, -5)}_{\substack{\text{Vector perpendicular}\\ \text{a}(-5,4)}} \cdot \underbrace{(\frac{15}{2}, -6)}_{\substack{\text{el otro}\\ \text{vector dado}}} = (-4)(\frac{15}{2}) + (-5)(-6)$$

$= -30 + 30 = 0$

$\therefore\ (-4,5)\cdot(\frac{15}{2}\ ,\ -6) = 0$ El producto interno es cero, por lo tanto los vectores originales -- son paralelos.

b) Ahora, tomando el vector perpendicular de cualquiera de ellos, siguiendo el mismo proceso anterior, obtenemos:

$(6,\ -10)$ vector original

$(10,\ 6)$ vector perpendicular

Haciendo el producto punto del vector perpendicular con el otro vector dado en el ejemplo,

$(10,6)\cdot(-3,\ -6) = (10)(-3) + (6)(-6)$

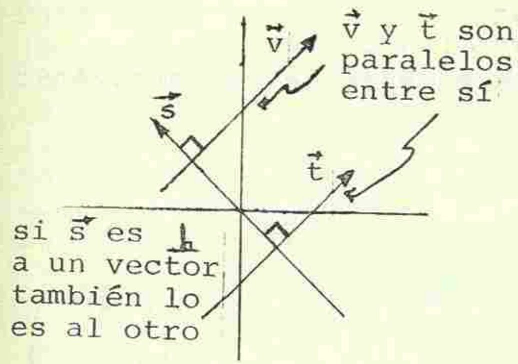
$= -30 - 36$

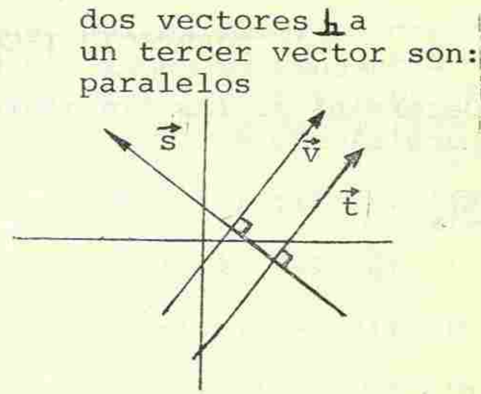
$(10,6)\cdot(-3,\ -6) = -66$ El producto interno no es cero, por lo tanto los vectores originales no son paralelos.

Las figuras siguientes pueden ilustrar otros teoremas que también son útiles en la resolución de problemas geométricos referentes a rectas en el plano Cartesiano.

TEOREMA. En RXR un vector perpendicular a uno de dos vectores paralelos diferentes de cero, es perpendicular al otro.

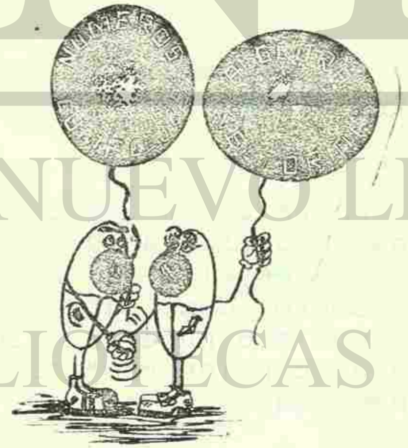
TEOREMA. En RXR, dos vectores, $\vec{v}$ y $\vec{t}$, perpendiculares a un tercer vector $\vec{s}$, diferente de cero, son paralelos entre sí.





Estos teoremas son muy útiles en la geometría analítica de puntos y rectas, que verás ampliamente en la siguiente unidad.

En el siguiente tema de esta misma unidad estudiarás un caso de un conjunto numérico que tiene propiedades muy parecidas a los vectores de dos dimensiones, (los que acabas de estudiar) y tienen gran aplicación en física y en la teoría de números en matemáticas. Ahora le exponemos como un caso muy particular de la extensa variedad de ramas que posee el análisis vectorial.



EJERCICIO I-C-3

Determina si las siguientes parejas de vectores son paralelos o no.

a) $(-3,7)$; $(6,-14)$

b) $(\frac{2}{5},\frac{3}{10})$; $(4,3)$

c) $(10,-10)$; $(-\frac{3}{7},\frac{3}{7})$

d) $(8,-4)$; $(2,1)$

e) $(9,-\frac{3}{5})$; $(-\frac{3}{5},-\frac{9}{8})$

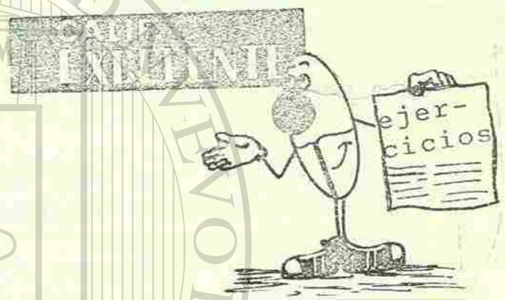
f) (a,b); $(-b,a)$

g) $(a+b,a-b)$; $(1+\frac{b}{a},1-\frac{b}{a})$

h) $(3,b)$; $(6,b)$

i) $(9,-1)$; $(-1,\frac{1}{9})$

j) $(3,4)$; $(4,8)$

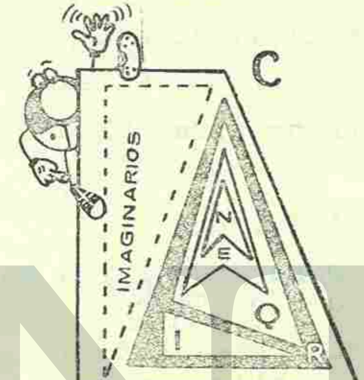


II. EL CAMPO DE LOS NUMEROS COMPLEJOS.

Introducción.

En este tema, que ahora vas a estudiar, te mostraremos uno de los casos particulares de conjuntos vectoriales que estudiaste en el tema anterior. Se trata del campo de los números complejos, que, aunque su nombre mismo dice que son números, tienen propiedades que los comparan con los vectores; y, de hecho pueden tratarse como tales.

Para darte una idea de lo que son los números complejos y su relación con los demás tipos de conjuntos numéricos (reales, racionales, etc), te sugerimos, que recuerdes (dentro de los temas de Matemática I, que ya cursaste) una gráfica en la cual se esquematizaban los conjuntos de números que, en aquel entonces, estudiabas. La gráfica mencionada tendrá ahora un nuevo conjunto incluído en ella.



En esta gráfica se ve que el conjunto de los números reales contiene a todos los demás conjuntos que conocías. Ahora; el conjunto de los números complejos abarca a los números reales, y, además contiene otros números más que son los imaginarios.

En otras palabras, los números reales forman un subconjunto de los números complejos.

El álgebra de los números complejos tiene grandes y muy importantes aplicaciones en ramas de la ingeniería, como la electrónica, y en otros estudios como son: la mecánica cuántica, el análisis de Fourier, etc. Por lo anterior, es importante que, desde preparatoria se conozcan por lo menos las leyes fundamentales que los constituyen.

A. Campos Numéricos.

En matemáticas, un campo numérico (o simplemente campo), es un conjunto cuyos elementos son números que satisfacen ciertas propiedades bien definidas llamadas "axiomas de campo".

Los axiomas de campo son los siguientes:

Sea F un conjunto numérico. F es un campo si satisface las siguientes propiedades:

1. Axiomas de la Igualdad

   Para todo $a,b,c\ \varepsilon F$,

   a) Propiedad reflexiva: $a=a$

   b) Propiedad simétrica: Si $a=b$, entonces $b=a$

   c) Propiedad transitiva: Si $a=b$ y $b=c$, entonces $a=c$

2. Axiomas de la Adición

   a) Cerradura: Para todo a y b en F, $a+b\ \varepsilon F$ y $a+b$ es única.

   b) Asociatividad: Para todo a,b, y c en F, $(a+b)+c = a+(b+c)$

   c) Existencia del Idéntico: Existe en F un único elemento llamado 0 (cero) con la propiedad de que para todo $a\varepsilon F$, $0+a = a$ y $a+0 = a$

   d) Existencia del Inverso: Para cada $a\varepsilon F$, existe un elemento $-a$, (inverso aditivo de a) donde $-a\varepsilon F$, tal que $a+(-a) = 0$ y $(-a)+a = 0$

   e) Conmutatividad: Para todo a, $b\varepsilon F$, se cumple que $a+b = b+a$

3. Axiomas de la multiplicación

   a) Cerradura: Para todo $a,b\varepsilon F$, $\underline{ab}\varepsilon F$ y $\underline{ab}$ es único.

   b) Asociatividad: Para todo $a,b,c\varepsilon F$, $a(bc) = (ab)c$.

   c) Existencia del Idéntico: Existe un único elemento llamado 1 (uno, $1 \neq 0$) con la propiedad de que para todo $a\varepsilon F$, $1\cdot a = a$ y $a\cdot 1 = a$

   d) Existencia de Inversos: Para cada $a\varepsilon F$, excepto el 0, en F, existe un elemento llamado $\frac{1}{a}$ (recíproco o inverso multiplicativo) en F tal que $a\cdot\frac{1}{a} = 1$ y $\frac{1}{a}\cdot a = 1$

   e) Conmutatividad: Para todo $a,b\varepsilon F$, $ab = ba$.

4. Axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la adición.

   Para todo $a,b,c\varepsilon F$

   1) $a(b+c) = ab+ac$

   2) $(b+c)a = ba+ca$

Cualquier conjunto numérico, junto con las operaciones de adición y multiplicación, que satisfaga todas las propiedades anteriores, es un campo.

En realidad, el conjunto de los números reales (R) es un campo; también lo es el conjunto de los números racionales (Q). Y ahora, el conjunto de los números complejos es también un campo, porque cumple con todas las propiedades anteriores (la demostración de ello queda para el alumno). Queda así justificado el nombre del tema: "El campo de los números complejos".

B. Factorización* de un Polinomio.

Antes de comenzar con las propiedades de los números complejos, veamos una de las razones más objetivas por las cuales necesitamos extender el campo de los números reales a otro campo más extenso, éste es el de los números complejos.

*Consultar Glosario.

Ejemplo 1. Factorizar el polinomio x^2-x-6.

Solución: Por los métodos que ya se vieron en unidades anteriores, la factorización de dicho polinomio es la siguiente:

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

donde $(x-3)$ y $(x+2)$ son polinomios sobre* el campo de los racionales; por tanto, se dice que x^2-x-6 es reducible sobre los racionales.

Entonces, generalizando, un polinomio sobre un campo F es reducible sobre F, si aquél es el producto de dos o más polinomios sobre F, ninguno de los cuales es una constante. Evidentemente, un polinomio que no es reducible sobre un campo F se dice que es irreducible sobre F.

Veamos el caso de factorizar sobre Q la expresión $3x+5$. Por cualquier forma que se factorice no cumple con las condiciones de reducibilidad, por lo tanto es irreducible sobre Q.

Veamos porqué:

$3x+5$ se puede factorizar así:

$3x+5 = 3(x+\frac{5}{3})$ — Observa que 3 es una constante.

o de esta otra forma

$3x+5 = x(3+\frac{5}{x})$; $x \neq 0$ — Observa que $3+\frac{5}{x}$ no es polinomio.

por lo tanto, la expresión $3x+5$ es irreducible sobre el campo de los racionales (Q).

*Consultar Glosario.

Ahora, dentro de los polinomios irreducibles, aquellos que su primer coeficiente* es 1 se les llama primos. Así, tenemos que:

$3x+2$; no es primo $\left\{\right.$ porque a pesar de ser irreducible su primer coeficiente no es 1.

$x+10$; es primo $\left\{\right.$ pues es irreducible y su primer coeficiente es 1.

x^2-x-6; no es primo $\left\{\right.$ aunque su primer coeficiente es 1, el polinomio es reducible sobre Q.

Para poder resolver los ejercicios de polinomios que te presentaremos al finalizar este inciso, conviene que recuerdes los "modelos de factorización" o productos notables que ya te presentamos en unidades anteriores; éstos son:

$$x^2-a^2 = (x+a)(x-a) \quad (1)$$
$$x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2) \quad (2)$$
$$x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2) \quad (3)$$
$$x^2+2ax+a^2 = (x+a)^2 \quad (4)$$
$$x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b) \quad (5)$$
$$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 = (x+a)^3 \quad (6)$$

Ejemplo 2. Factorizar $x^2+7x-18$ sobre Q (racionales).

Solución: La expresión la podemos poner de la forma siguiente de acuerdo con (5)

$$x^2+7x-18 = x^2+(9-2)x+(9)(-2)$$

de ahí que $a=9$ y $b=-2$

por lo tanto

$$x^2+7x-18 = (x+9)(x-2)$$

*Consultar Glosario.

Este mismo ejemplo se puede hacer también de la forma como se te mostró en la segunda unidad del segundo semestre:

$$x^2+7x-18 \Rightarrow x^2+7x-18 = (x+9)(x-2)$$

$$\begin{array}{lll} (x & +9) \rightarrow & 9x \\ (x & -2) \rightarrow & \underline{-2x} \\ & & 7x \end{array}$$

Ejemplo 3. Factorizar x^3-27 sobre R (reales)

Solución: Esta expresión es una diferencia de cubos ya que $x^3-27 = x^3-3^3$ y según el modelo (2)

$$x^3-27 = x^3-3^3 = (x-3)(x^2+3x+9)$$

Habrá veces en las cuales el polinomio será irreducible sobre un campo pero reducible sobre otro campo más extenso; por ejemplo, veamos el siguiente polinomio sobre el campo de los números racionales.

$$x^2-2$$

mediante el modelo de factorización (1)

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$$

nos damos cuenta que este polinomio es irreducible sobre los racionales, puesto que

$$x^2-(\sqrt{2})^2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

De aquí obtenemos que el polinomio x^2-2 es irreducible sobre el campo de los racionales, pero es reducible sobre el campo de los números reales.

Existen otros casos de polinomios que son irreducible en el campo de los reales; veamos un ejemplo:

Sea el polinomio

$$x^2+1.$$

Si buscamos entre los modelos de factorización y todos los métodos para factorizar polinomios, nos daremos cuenta de que no existen polinomios sobre el campo de los reales que multiplicados den por resultado x^2+1. El modelo de factorización que más se asemeja a este polinomio es

$$x^2-a^2 = (x+a)(x-a) \qquad (1)$$

En esa forma

$$x^2+1 = x^2-(-1)$$
$$= x^2-(\sqrt{-1})^2$$

elevando al cuadrado el (-1) y sacando su raíz cuadrada, simultáneamente

entonces, aplicando el modelo (1)

$$x^2+1 = (x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1})$$

Observemos detenidamente que el número $\sqrt{-1}$ no existe en el conjunto de los números reales. En unidades pasadas, a este tipo de números se les llamó imaginarios (denotados por la letra i).

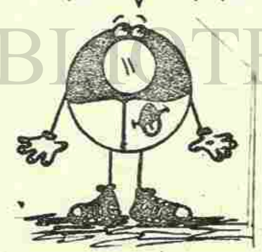
Si $i = \sqrt{-1}$,

entonces $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$

En otras palabras, i es un número imaginario tal que elevado al cuadrado da el número real (-1)

Entonces tenemos ahora que:

$$x^2+1 = (x+\sqrt{-1})(x-\sqrt{-1}) = (x+i)(x-i)$$



polinomios sobre un campo más completo que los números reales

Por eso, ahora nos vemos impulsados a definir un -- campo, de tal extensión que contenga al campo de los números reales y también reúna a los números imaginarios; para ello idearemos un modelo* de número. Digamos que el campo está constituído por números de la forma a+bi, conocida como la forma ordinaria, donde a y b son números reales. Al número a lo llamaremos parte real y al número bi lo denominaremos parte -- imaginaria; en esa forma, ahora tenemos un número -- que está formado tanto de números reales como de imaginarios. Como su forma no es tan simple como los -- números que tradicionalmente conocemos, se llamarán números complejos.

Estos números, como te dijimos antes, comprenden a - los números reales y a los imaginarios. Para ilustrarte lo anterior, observa que en el número complejo a+bi:

Si b=0, entonces a+bi se reduce al número real a, -- pues a+bi = a+0i = a.

Si a=0, entonces el número complejo a+bi se reduce - al número imaginario bi, pues a+bi = 0+bi = bi. Algunos autores le llaman número imaginario puro al bi.

Todo número complejo, del tipo a+bi, tiene los dos - tipos de componentes: la real a y la imaginaria bi.

En el tema siguiente definiremos las operaciones con los números complejos y sus propiedades, de acuerdo con los axiomas de campo, para que nuestro estudio - sea consistente.

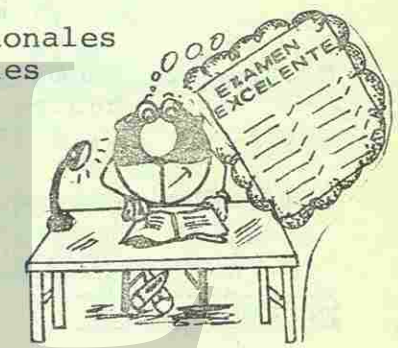
*Consultar Glosario.

EJERCICIO II-B

Encuentra los factores primos de cada polinomio dado sobre su respectivo campo.

a) x^2-9 ; sobre Q	f) t^4-6t^2+9 ; sobre R
b) x^3+8 ; sobre Q	g) v^6+2v^3+1 ; sobre R
c) x^2+3x+2 ; sobre Q	h) x^3-3x^2+3x-1; sobre Q
d) x^3-7 ; sobre R	i) x^4-16 ; sobre Q
e) x^3+4 ; sobre R	j) x^4-15 ; sobre R

Nota: Q = conjunto de números racionales
R = conjunto de números reales



C) Operaciones con Números Complejos.

1. Igualdad y Adición de Números Complejos.

Ahora consideremos un teorema importante y básico de los números complejos.

TEOREMA: Sean dos números complejos a+bi y c+di; donde a,b,c y d, son números reales. Ambos números son iguales si y sólo si a=c y b=d.

Dicho en otras palabras, dos números complejos -- son iguales siempre y cuando sus correspondientes partes reales sean idénticas y también lo sean -- sus partes imaginarias.

Ejemplo 1. Encontrar el valor de k que satisfaga la igualdad

$$(k+2)+i = 4+i$$

Solución: Para que se satisfaga la igualdad se tiene que cumplir que:

$k+2 = 4$ — coeficientes respectivos de la "i", en cada número complejo del ejemplo 1.

y $1 = 1$

$k = 4 - 2$ — es el valor de k, para cumplir la igualdad de números complejos.

$\therefore\ k = 2$

Ejemplo 2. Encontrar los valores de m y n para los cuales $z_1 = z_2$, dado que $z_1 = 5m + 6ni$ y $z_2 = 10 + mi$.

Solución: Para que $z_1 = z_2$ debe cumplirse que:

$$\underbrace{5m}_{\text{partes reales}} + \overbrace{6ni}^{\text{partes imaginarias}} = \underbrace{10}_{\text{partes reales}} + \overbrace{mi}^{\text{partes imaginarias}}$$

Igualando de acuerdo al teorema,

$$5m = 10 \qquad (1)$$
$$6n = m \qquad (2)$$

de (1) obtenemos m

$$5m = 10$$

$$m = \frac{10}{5} \quad \therefore\ \underline{m = 2}$$

y de (2) se tiene el valor de n

$$6n = m$$

$$n = \frac{m}{6} = \frac{2}{6}$$

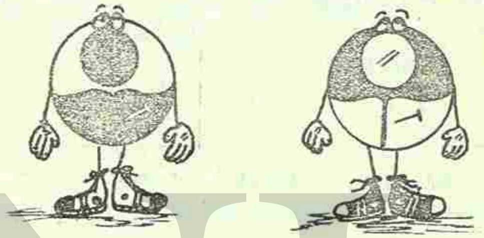
$$\therefore\ \underline{n = \frac{1}{3}}$$

Notación: Existen otras formas de representar a los números complejos del tipo a+bi. Una de las más usuales, además de la forma ordinaria a+bi, es la llamada forma rectangular, (a,b).

Es decir,

$$a+bi \quad = \quad (a,b)$$

forma ordinaria   forma rectangular



La forma rectangular (a,b) es muy práctica, pues tiene la gran ventaja de que a cualquier número se le puede asignar un punto en el plano complejo. El plano complejo también se conoce como diagrama de Argand, en honor de J.R. Argand quién propuso esta interpretación geométrica de los números complejos en 1806, (aunque, realmente la idea fué originada por C. Wessel en 1797).

Veamos algunos números complejos z, dados en la forma (a,b),

$z_1 = (5,3)$

$z_2 = (-6,4)$

$z_3 = (4,-7)$

$z_4 = (-5,-5)$

Un número $z = (a,b)$, con la componente $b = 0$, se encuentra sobre el eje de los números reales, puesto que su parte imaginaria es igual a cero. Es decir, el número $z = (a,0)$ es un número real.

En una forma similar, cuando en el número $z = (a,b)$, $a = 0$, es decir, $z = (0,b)$; z es llamado número imaginario (también suele llamársele imaginario puro), y se le localiza sobre el eje de los imaginarios.

La adición de números complejos está definida de tal forma que no contradice a ningún axioma de campo sobre la adición.

TEOREMA: Si $z_1 = (a,b)$ y $z_2 = (c,d)$ son dos números complejos cualesquiera, entonces
$z_1 + z_2 = (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

Expresando lo anterior en la forma de notación ordinaria, tenemos que:

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces
$z_1 + z_2 = (a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

Esto es análogo a la suma de dos binomios, con términos semejantes, en el campo de los números reales.

Nota: Observa que el teorema de la adición de números complejos, expresado en la forma rectangular, es idéntico al teorema de la adición de dos vectores (a,b) y (c,d) en el plano Cartesiano.

Ejemplo 3. Encontrar la suma de los siguientes pares de números complejos expresados en forma rectangular:

a) $z_1 = (5,3)$; $z_2 = (8,6)$

b) $z_1 = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$; $z_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

c) $z_1 = (2x, y)$; $z_2 = (-5x, r)$

Solución: a) Según el teorema anterior

$$z_1 + z_2 = (5, 3) + (8, 6)$$
$$= (5+8, 3+6)$$
$$\therefore \underline{z_1 + z_2 = (13, 9)}$$

b) $$z_1 + z_2 = (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{5}{2}) + (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$
$$= \left(\tfrac{3}{2} + (-\tfrac{1}{2}), (-\tfrac{5}{2}) + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= (\tfrac{2}{2}, -\tfrac{4}{2})$$
$$\therefore z_1 + z_2 = (1, -2)$$

c) $$z_1 + z_2 = (2x, y) + (-5x, r)$$
$$= [2x + (-5x), y + r]$$
$$= (2x - 5x, y + r)$$
$$\therefore \underline{z_1 + z_2 = (-3x, y + r)}$$

Ejemplo 4. Encontrar la suma de los siguientes pares de números complejos expresados en forma ordinaria.

a) $z_1 = 3+4i$; $z_2 = 5+2i$

b) $z_1 = -2+7i$; $z_2 = -6 -8i$

c) $z_1 = r+si$; $z_2 = 1+i$

Solución: Según el teorema de la adición

$$a)\quad z_1 + z_2 = (3+4i) + (5+2i)$$
$$= (3+5) + (4i+2i)$$
$$\therefore\ \underline{z_1 + z_2 = 8 + 6i}$$

$$b)\quad z_1 + z_2 = (-2+7i) + (-6\ -8i)$$
$$= (-2\ -6) + (7i - 8i)$$
$$z_1 + z_2 = (-8) + (-i)$$
$$\therefore\ \underline{z_1 + z_2 = -8\ -i}$$

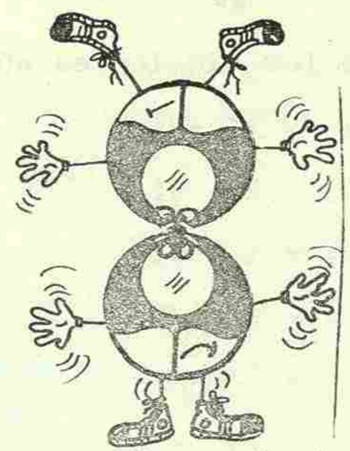
$$c)\quad z_1 + z_2 = (r+si) + (1+i)$$
$$= (r+1) + (si+i)$$
$$\therefore\ \underline{z_1 + z_2 = (r+1) + (s+1)i}$$

Existe un caso especial, en el cual la suma de dos números complejos es igual a cero. Veamos una ilustración de este caso especial:

Si $z_1 = a+bi$ y z_2 es un número tal que $z_1 + z_2 = 0$, entonces

$\underbrace{(a + bi)}_{z_1} + z_2 = 0$. Si despejamos z_2 de esta ecuación, tenemos que $z_2 = -\underbrace{(a+bi)}_{z_1}$

Como puedes observar, $z_2 = -z_1$, pues partimos de que $z_1 = a+bi$.



Debido a que $z_1 + z_2 = 0$, es decir, $z_2 = -z_1$, el número complejo z_2 recibe el nombre de "negativo de z_1", ó "inverso aditivo de z_1", ó simplemente el "opuesto de z_1".

Generalizando, para todo número complejo z, existe uno y sólo un número complejo -z, llamado negativo de z, tal que sumado con el anterior da igual a cero.

Expresándolo simbólicamente, $z + (-z) = 0$.

Si $z = a+bi$, entonces $-z = -a - bi$ ó $-z = -(a+bi)$.

EJERCICIO II-C-1

1 Encuentra el valor de m y n para el cual se cumple la igualdad de números complejos.

a) $m + ni = 5 - 4i$

b) $2mn + mi = n^2 + i$

c) $m + n + ni = 5 + 5i$

d) $m + 5i = 4 + 2ni$

e) $mi = n + 8i$

2 Calcula la suma de los siguientes números complejos.

a) $z_1 = 5 + 2i$; $z_2 = -4 -3i$

b) $z_1 = 8+0i$; $z_2 = 2 + 9i$

c) $z_1 = 6i$; $z_2 = 1 + 8i$

d) $z_1 = -6 + 3i$; $z_2 = 3 - 6i$

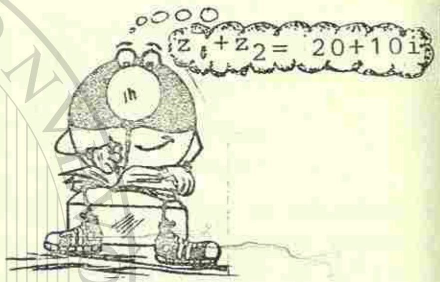
e) $z_1 = 7i$; $z_2 = -7+0i$

f) $z_1 = (8,3)$; $z_2 = (5, -2)$

g) $z_1 = (-6, -1)$; $z_2 = (7,0)$

h) $z_1 = (-8,0)$; $z_2 = (0, -7)$

i) $z_1 = (r,s)$; $z_2 = (s,r)$



2. Valor absoluto de un número complejo.

En unidades pasadas del primer semestre te mencionamos el concepto de valor absoluto aplicado a los números reales. Como recordarás, el valor absoluto (también llamado "módulo") se limita a tomar de cualquier número su valor no negativo (en caso de que el número en cuestión sea cero, su valor absoluto es también cero), así:

$$|5| = 5$$

$$|-6| = 6$$

$$|0| = 0$$

El valor absoluto de cero es igual a cero

Para los números complejos, también se puede definir el valor absoluto. Este, no es tan simple como el de los números reales, puesto que el número complejo consta de dos componentes.

El valor absoluto o módulo de un número complejo $z = a + bi$, se define como:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}\ ,$$

donde $\sqrt{a^2+b^2}$ es siempre un número real no negativo.

Esta fórmula se asemeja a la norma de un vector, en el plano Cartesiano, en posición ordinaria, la cual ilustra la analogía que existe entre los vectores y los números complejos.

Es muy importante que recuerdes que cualquier número complejo se puede representar gráficamente como un vector, teniendo éste las mismas componentes del número complejo.

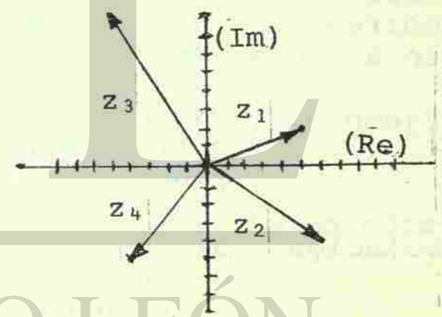
Ejemplo 1. Graficar los siguientes números complejos, representándolos gráficamente como vectores.

a) $z_1 = 5 + 2i = (5,2)$

b) $z_2 = 6 - 4i = (6, -4)$

c) $z_3 = -5 + 8i = (-5, 8)$

d) $z_4 = -4 -5i = (-4, -5)$



Esto expresa claramente otra similitud del concepto de vector con el de número complejo.

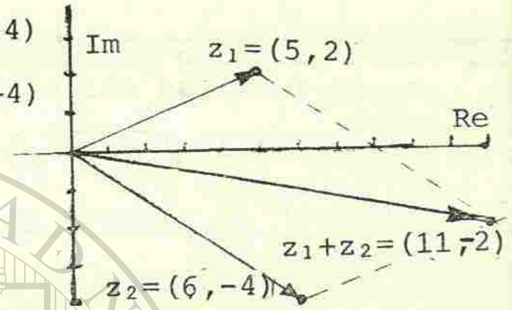
La suma y la diferencia de números complejos se puede representar gráficamente, utilizando la ley del paralelogramo (o la del triángulo) tal como lo hicimos en la adición vectorial. Para que visualices esta idea, grafiquemos los números complejos anteriores, como si fueran vectores, efectuando la suma de

$$z_1 \text{ y } z_2 \ ; \ z_3 \text{ y } z_4$$

a) $z_1 = (5, 2)$; $z_2 = (6, -4)$

$z_1 + z_2 = (5, 2) + (6, -4)$

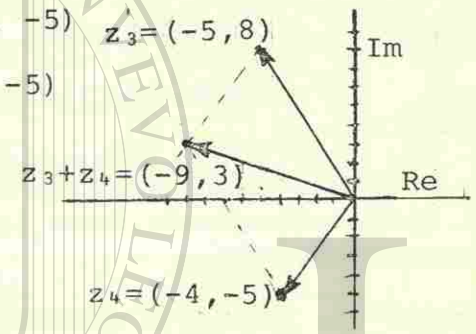
$\therefore\ z_1 + z_2 = (11, -2)$



b) $z_3 = (-5, 8)$; $z_4 = (-4, -5)$

$z_3 + z_4 = (-5, 8) + (-4, -5)$

$\therefore\ z_3 + z_4 = (-9, 3)$



Asimismo, el valor absoluto de un número complejo -- corresponde a la magnitud de un vector que represente a dicho número.

Ejemplo 3. Calcular los valores absolutos o módulos de los números complejos del ejemplo anterior.

Solución: a) Según la fórmula del valor absoluto -- de un número complejo, $|z_1| = \sqrt{a^2+b^2}$ sustituyendo a=5 y b=2 en esta fórmula ya que $z_1 = (5, 2)$, tenemos:

$$|z_1| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{25+4} = \underline{\sqrt{29}}$$

b) $z_2 = 6 + (-4)i = (6, -4)$

De nuevo si aplicamos la fórmula de valor absoluto tenemos que:

$$|z_2| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Si a=6 y b= -4, entonces

$$|z_2| = \sqrt{6^2+(-4)^2}$$

$$|z_2| = \sqrt{36+16}$$

$$|z_2| = \sqrt{52} = \sqrt{(4)\cdot(13)}$$

$$\underline{|z_2| = 2\sqrt{13}}$$

c) $z_3 = -5+8i = (-5, 8)$. Si a= -5 y b=8, entonces

$$|z_3| = \sqrt{(-5)^2+8^2}$$

$$|z_3| = \sqrt{25+64}$$

$$\underline{|z_3| = \sqrt{89}}$$

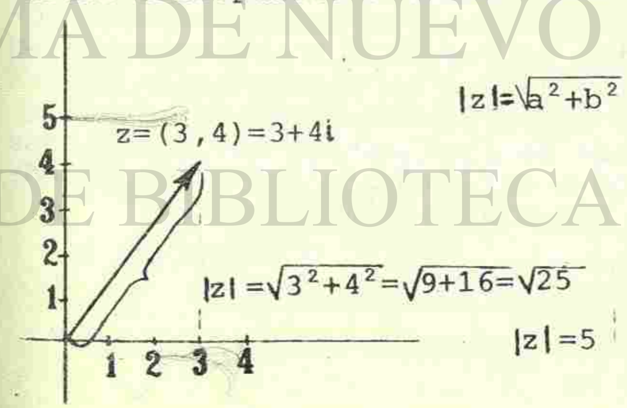
d) $z_4 = -4 -5i = (-4, -5)$

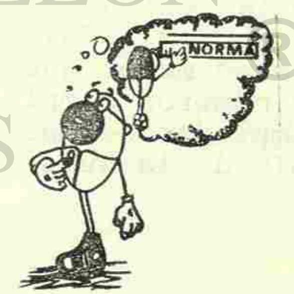
$$|z_4| = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2}$$

$$|z_4| = \sqrt{16+25}$$

$$\underline{|z_4| = \sqrt{41}}$$

Gráficamente, el módulo (o valor absoluto) de un número complejo es equivalente a la norma (o magnitud) de un vector sobrepuesto a dicho número;





Es decir, el módulo, valor absoluto, magnitud, (como se le quiera llamar) de un número complejo es la distancia del punto que representan las coordenadas del número complejo al origen.

No importa hacia donde esta dirigido el vector o número complejo, el valor de su módulo nunca es negativo.

Dada esta definición enunciaremos el siguiente teorema:

TEOREMA: Si a+bi y c+di son números complejos, entonces siempre se cumple que:

1. $|a+bi| \geq 0$
   (valor absoluto nunca es negativo)
2. $|a+bi| = 0$ si y sólo si $a=0$ y $b=0$
3. $|(a+bi) + (c+di)| \leq |a+bi| + |c+di|$
   (desigualdad del triángulo)

Los incisos (1) y (2) están relacionados y significan la idea antes expuesta de que la distancia (o valor absoluto) de un número al origen es siempre positiva o cero.

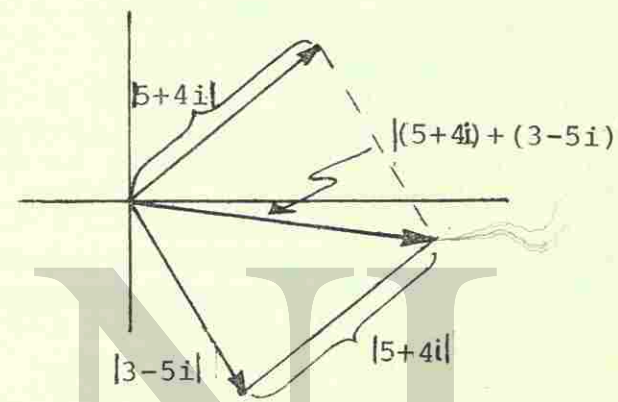
El inciso (3) es una ley que vale para cualquier número complejo. Geométricamente, se interpreta como la desigualdad del triángulo e implica que la suma de dos lados cualesquiera de un triángulo siempre es mayor que el tercer lado. Dicho en términos de números complejos: la suma de los módulos de dos complejos siempre va a ser mayor o igual que el módulo de la suma de los mismos números.

Ejemplo 4. Verificar gráfica y numéricamente la desigualdad del triángulo, dados los siguientes números complejos

a) $z_1 = 5+4i$; $z_2 = 3-5i$

b) $z_1 = 10+4i$; $z_2 = -5-2i$

Solución:



Observando el triángulo inferior de la gráfica del ejemplo, te podrás dar cuenta de la verificación del teorema de la desigualdad del triángulo; ya que:

$$|(5+4i) + (3-5i)| \overset{?}{\leq} |5+4i| + |3-5i|$$

$$|8-1i| \overset{?}{\leq} |5+4i| + |3-5i|$$

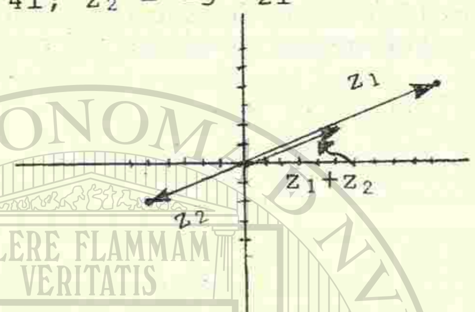
$$\sqrt{64+1} \overset{?}{\leq} \sqrt{25+16} + \sqrt{9+25}$$

$$\sqrt{65} \overset{?}{\leq} \sqrt{41} + \sqrt{34}$$

$$8.06 \overset{?}{\leq} 5.83 + 6.4$$

$\underline{8.06 \leq 12.24}$ Sí se cumple el teorema

b) $z_1 = 10 + 4i$; $z_2 = -5 -2i$



En este caso, las flechas asociadas a cada número -- complejo dado son colineales, de lo cual se observa que también se cumple gráficamente la desigualdad -- del triángulo. Desarrollando los datos, obtenemos:

$$|(10+4i) + (-5 -2i)| \overset{?}{\leq} |10+4i|+|-5 -2i|$$

$$|5 +2i| \overset{?}{\leq} \sqrt{100+16} + \sqrt{25+4}$$

$$\sqrt{25+4} \overset{?}{\leq} \sqrt{116} + \sqrt{29}$$

$$\sqrt{29} \overset{?}{\leq} \sqrt{116} + \sqrt{29}$$

Sumando $(-\sqrt{29})$ en ambos lados de la desigualdad

$$\sqrt{29} - \sqrt{29} \overset{?}{\leq} \sqrt{116} + \sqrt{29} - \sqrt{29}$$

$$\underline{0 < \sqrt{116}}$$

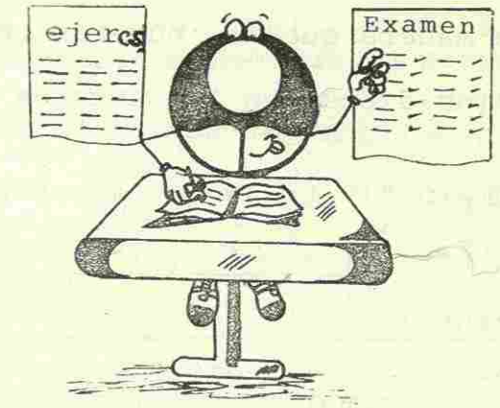
Con esto queda verificada numéricamente la desigualdad del triángulo.

EJERCICIO II-B-2

Calcula el valor absoluto (o módulo) y grafica los - siguientes números complejos.

a) $z = 2+2i$

b) $z = 3+4i$



c) $z = 3-4i$

d) $z = 5+0i$

e) $z = -3 +4i$

f) $z = -5+0i$

g) $z = 2i$

h) $z = -4i$

i) $z = -3 -4i$

j) $z = i$

Verifica el teorema de la desigualdad del triángulo para los siguientes pares de números complejos.

a) $z_1 = 2+3i$; $z_2 = 3+4i$

b) $z_1 = 2i$; $z_2 = -3 -4i$

c) $z_1 = 5+0i$; $z_2 = 4i$

d) $z_1 = 6+0i$; $z_2 = 8+0i$

e) $z_1 = 1+i$; $z_2 = 2 -4i$

3. Multiplicación de Números Complejos.

En la multiplicación de números complejos, existe una gran similitud con el producto de dos binomios. Como recordarás, la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición afirma que:

$$\underline{(a+b)(c+d) = (ac+bd) + (ad+cb)}$$

En forma muy semejante se define la multiplicación de números complejos, sólo con una pequeña diferencia: - que las segundas componentes de los complejos son, como dijimos, imaginarios y éstos se comportan de diferente manera que los números reales.

Habíamos dicho que los números imaginarios son aquellos que tienen el número "i" como factor.

El número "i" tiene la característica de que:

$$i = \sqrt{-1}\ ,\ i^2 = -1$$

Por tanto;

TEOREMA: Si $z_1 = a+bi$; $z_2 = c+di$ son dos números complejos, entonces su producto es:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+cb)i$$

Esto es válido ya que,

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi + cbi+bd\ (i^2)$$

$$ac+bd(i^2) + adi+cbi$$

$$ac+bd(-1) + adi+cbi$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad+cb)i$$

Observa y compara el resultado del producto de dos binomios reales y el producto de dos números complejos aquí expuesto. La existencia del número "i" altera el parecido de ambas expresiones.

Ejemplo 1. Efectuar las multiplicaciones de los siguientes números complejos.

a) $z_1 = 5$; $z_2 = 1+2i$

b) $z_1 = 3i$; $z_2 = 2+i$

c) $z_1 = 1-i$; $z_2 = 2+i$

d) $z_1 = 1+2i$; $z_2 = 1-2i$

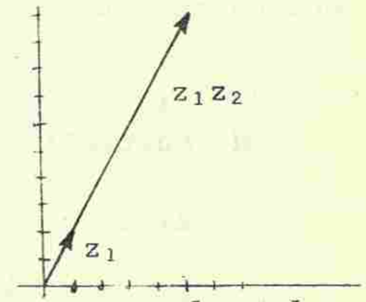
Solución:

a) Multiplicar z_1 por z_2 , si $z_1 = 5+0i$ (el número z_1 es real puesto que su parte imaginaria es cero) y $z_2 = 1+2i$.

$$z_1\ z_2 = (5+0i)(1+2i)$$

$$= (5-0) + (10+0)i$$

$$z_1\ z_2 = 5 + 10i$$



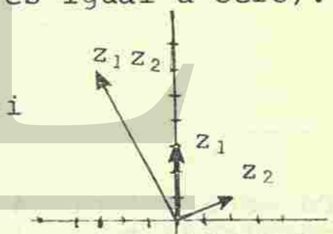
Observa que el producto $z_1\ z_2$ produjo un alargamiento de z_2 , en z_1 veces.

b) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 0+3i$ y $z_2 = 2+i$ (el número z_1 es imaginario puro, puesto que su parte real es igual a cero).

$$z_1\ z_2 = (0+3i)(2+i)$$

$$= (0-3) + (0+6)i$$

$$z_1\ z_2 = -3 + 6i$$



Observa que el vector de $z_1\ z_2$ quedó girado 90° con respecto a z_2, debido a que z_2 se multiplicó por un número imaginario puro, z_1.

c) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 1-i$ y $z_2 = 2+i$

$$z_1\ z_2 = (1-i)(2+i)$$

$$= [2-(-1)] + (i - 2i)$$

$= (2+1) + (1-2)i$

$\underline{z_1 z_2 = 3 - i}$

Nota: La interpretación gráfica del producto $z_1 z_2$ de este ejemplo se complica puesto que hay cambios en dirección y en tamaño simultáneamente.

d) Multiplicar z_1 por z_2, si $z_1 = 1+2i$ y $z_2 = 1-2i$,

$z_1 z_2 = (1+2i)(1-2i)$

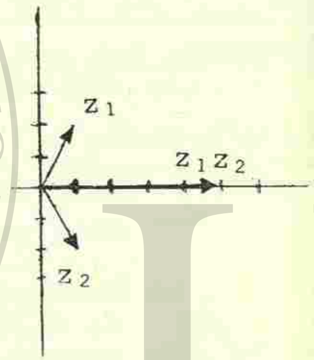
$= 1-(4i^2) + (2i-2i)$

$= 1-(-4) + (2-2)i$

$= 1+4 + 0i$

$= 5 + 0i$

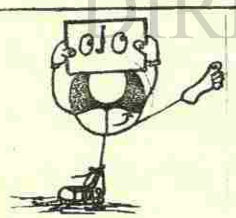
$\underline{z_1 z_2 = 5}$ número real



El producto de dos números complejos puede dar como resultado un número real.

En este ejemplo anterior se observa cómo dos números complejos multiplicados entre sí, dan como resultado un número real. Este caso sólo sucede, cuando los números a multiplicar son conjugados.

El conjugado de un número complejo a+bi es el complejo a-bi.



Así, el conjugado de un número $z = a+bi$ es denotado como
$\overline{z} = a - bi$.
En la misma forma, para un complejo $z = c-di$, su conjugado es
$\overline{z} = c+di$.

Lo único que cambia es el signo de la parte imaginaria bi. Si bi es positivo, el conjugado de a+bi cambia su signo por -bi y viceversa.

Ejemplo 2. Encontrar el conjugado de cada número complejo dado.

a) $z_1 = 4+3i$

b) $z_2 = 5-\frac{2}{3}i$

c) $z_3 = -2+i$

d) $z_4 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$

e) $z_5 = 3+0i$

f) $z_6 = i$

g) $z_7 = -3i$

h) $z_8 = -5+0i$

Solución:

a) Si $z_1 = 4+3i$, entonces su conjugado es

$\overline{z}_1 = 4 - 3i$

Observa que cambiamos el signo de 3i por -3i

---

b) Si $z_2 = 5-\frac{2}{3}i$, entonces su conjugado es

$\overline{z}_2 = 5+\frac{2}{3}i$

Cambiamos el signo de $-\frac{2}{3}i$ por $+\frac{2}{3}i$

---

c) Si $z_3 = -2+i$, entonces su conjugado es

$\overline{z}_3 = -2 - i$

No importa el signo del primer número a, solamente cambiamos el signo de la parte imaginaria bi

---

d) Si $z_4 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}i$, entonces su conjugado es

$\bar{z}_4 = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}i$

e) Si $z_5 = 3$, que en forma de número complejo se puede expresar como $z_5 = 3+0i$, entonces su conjugado es

$\bar{z}_5 = 3 - 0i$

es decir, $\bar{z}_5 = 3$

El conjugado de un número real es el mismo número

f) Si $z_6 = i$, que expresado en forma de complejo, $z_6 = 0+i$, su conjugado es

$\bar{z}_6 = 0 - i$

$\bar{z}_6 = -i$

El conjugado de un número imaginario es el negativo del mismo.

g) Si $z_7 = -3i = 0 -3i$, entonces

$\bar{z}_7 = 0 + 3i$

$\bar{z}_7 = 3i$

h) Si $z_8 = -5 = -5+0i$

$\bar{z}_8 = -5 - 0i$

$\bar{z}_8 = -5$

Cuando multiplicamos un número complejo por su conjugado el resultado es un número real. Veamos porqué: si tenemos un número $z = a+bi$, su conjugado es $\bar{z} = a-bi$; si multiplicamos $z\bar{z}$ tenemos que

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi)$$
$$= a^2-(b^2i^2) \quad + (abi - abi)$$
$$= a^2-(-b^2) \quad + (\cancel{ab}-\cancel{ab})i$$

Se elimina la parte imaginaria.

$$= (a^2+b^2) + 0i$$
$$\therefore z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Observa que a^2+b^2 es un número real pues a y b son reales.

Ejemplo 3. Verificar que al multiplicar dos números conjugados complejos se obtiene un número real.
Sea el complejo $z = 2-4i$.

Solución: Si $z = 2-4i$, el conjugado $\bar{z}$ será

$\bar{z} = 2+4i$

Multiplicándolos y realizando operaciones

$$z\,\bar{z} = (2-4i)(2+4i)$$
$$= 4-(-16) \quad + 8i - 8i$$
$$= 4 + 16$$
$$\therefore z\,\bar{z} = 20$$

Se elimina la parte imaginaria.

Número real

Para ser consistentes con los axiomas de campo, ahora, que te expusimos la definición del producto de números complejos, tenemos que definirte el recíproco de un número complejo.

El recíproco o inverso multiplicativo de un número complejo $z = a+bi$, es un número tal que z multiplicado por su recíproco dé como resultado la unidad.

Si $z = a+bi$, su inverso multiplicativo (o recíproco) es $\frac{1}{z}$ ya que

$$z\,\frac{1}{z} = 1$$

concretizando, si $z = a+bi$, entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$

$$= (a^2+b^2) + 0i$$

$$\therefore\ z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Observa que a^2+b^2 es un número real pues a y b son reales.

Ejemplo 3. Verificar que al multiplicar dos números conjugados complejos se obtiene un número real.
Sea el complejo $z = 2-4i$.

Solución: Si $z = 2-4i$, el conjugado $\bar{z}$ será

$$\bar{z} = 2+4i$$

Multiplicándolos y realizando operaciones

$$z\,\bar{z} = (2-4i)(2+4i)$$

$$= 4-(-16) + 8i - 8i$$ Se elimina la parte imaginaria.

$$= 4 + 16$$

$$\therefore\ z\,\bar{z} = 20$$ Número real

Para ser consistentes con los axiomas de campo, ahora, que te expusimos la definición del producto de números complejos, tenemos que definirte el recíproco de un número complejo.

El recíproco o inverso multiplicativo de un número complejo $z = a+bi$, es un número tal que z multiplicado por su recíproco dé como resultado la unidad.

Si $z = a+bi$, su inverso multiplicativo (o recíproco) es $\frac{1}{z}$ ya que

$$z\,\frac{1}{z} = 1$$

concretizando, si $z = a+bi$, entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \qquad (1)$$

Si multiplicamos por la unidad no se altera el número.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi}$$

La unidad se expresa como un número dividido entre sí mismo; en este caso el conjugado del denominador.

$$= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

realizamos la operación

$$= \frac{a-bi}{(a^2+b^2)}$$

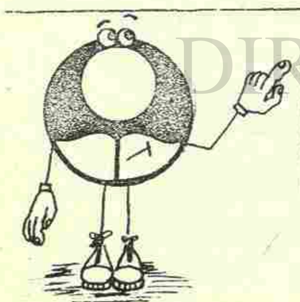
El producto de dos binomios complejos conjugados da un número real de la forma a^2+b^2

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Si separamos en parte real y parte imaginaria, tenemos el número complejo recíproco de z.

TEOREMA. Dado un número complejo $z = a+bi$, existe un número y sólo uno $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ llamado recíproco de z, tal que

$$(z)\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$



En otras palabras, a cada número complejo z se le asigna un número $\frac{1}{z}$ tal que al multiplicarlos entre sí, dan como resultado la unidad. Por esta razón $\frac{1}{z}$ se llama el recíproco o in--

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \quad (1)$$

Si multiplicamos por la unidad no se altera el número.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi}$$

La unidad se expresa como un número dividido entre sí mismo; en este caso el conjugado del denominador.

$$= \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$$

realizamos la operación

$$= \frac{a-bi}{(a^2+b^2)}$$

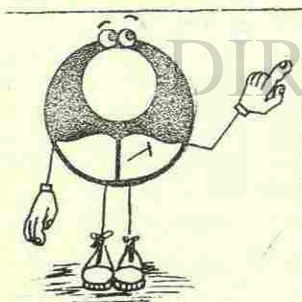
El producto de dos binomios complejos conjugados da un número real de la forma a^2+b^2

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Si separamos en parte real y parte imaginaria, tenemos el número complejo recíproco de z.

TEOREMA. Dado un número complejo $z = a+bi$, existe un número y sólo uno $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ llamado recíproco de z, tal que

$$(z)\left(\frac{1}{z}\right) = 1.$$



En otras palabras, a cada número complejo z se le asigna un número $\frac{1}{z}$ tal que al multiplicarlos entre sí, dan como resultado la unidad. Por esta razón $\frac{1}{z}$ se llama el recíproco o in-

verso multiplicativo de z.

Ejemplo 4. Calcular el recíproco de los siguientes números complejos.

a) $z = 1+i$

b) $z = 3-2i$

c) $z = 2+0i$

d) $z = -5i$

Solución: El proceso para encontrar el recíproco de un número complejo es el siguiente:

a) Si $z = 1+i$, entonces su recíproco es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i}$$

$$= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)}$$

Para no alterar el número multiplicamos por la unidad, expresada como $\frac{1-i}{1-i}$, escogiendo siempre el conjugado del denominador para obtener un denominador real.

$$= \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$$

Efectuamos la multiplicación y como dijimos, no se alteró el número original.

$$= \frac{1-i}{1^2+1^2}$$

La multiplicación de conjugados del denominador dió un número real

$$= \frac{1-i}{2}$$

Se debe procurar que el denominador del resultado quede un número real.

$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$ — Este número complejo, es el recíproco de z.

b) Si z = 3-2i, entonces su recíproco es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3-2i}$$

$$= \frac{1}{3-2i} \cdot \frac{(3+2i)}{(3+2i)}$$

$$= \frac{3+2i}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$= \frac{3+2i}{9+4}$$

$$= \frac{3+2i}{13}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13} i$$

c) Si $z=2+0i=2$,

Observa que 2 es un número real.

entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$ es el recíproco - pues el denominador ya es un número real

d) Si $z = -5i$,

Observa que -5i es - un número imaginario

entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{-5i}$$

$$= \frac{1}{-5i} \cdot \frac{(+5i)}{(+5i)}$$

Multipliquemos $\frac{1}{-5i}$ por la unidad, para que no se altere, - procurando que la - fracción contenga - al conjugado del número z.

$$= \frac{5i}{-25i^2}, \quad \text{puesto que } i^2=-1$$

$$= \frac{5i}{-(-25)}$$

$$= \frac{5i}{25}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{z} = \frac{i}{5}$$

éste es el recíproco - del número complejo -- z = -5i

Ahora con todas las propiedades y operaciones que hemos definido, tenemos con los números complejos un nuevo campo que denotaremos con la letra C (mayúscula).

Cabe ahora pensar si acaso existe, para cada complejo, algún o algunos números dentro de C (números complejos), tal que multiplicados por sí mismos (o elevándolos al cuadrado) den el número complejo. En - - otras palabras, verificar la existencia de la raíz - cuadrada de cada número complejo; y ver que dicho número (o números) pertenezcan al campo C.

EJERCICIO II-C-3

1 Efectúa las siguientes multiplicaciones con números complejos.

a) (5)(3+2i)

b) (2i)(1+4i)

c) (1+i)(5-3i)

d) (-1-i)(1-i)

e) (3+4i)(3-4i)

2 Encuentra el <u>conjugado</u> de los siguientes números complejos.

a) $5 + 0i$
b) $8i$
c) $3+9i$
d) $-4 -5i$
e) $5 -2i$
f) $-9 -8i$
g) $-3 +0i$
h) $-7i + 2$
i) $-8i$
j) $20i + 5$

3 Encuentra el <u>recíproco</u> de los siguientes números complejos.

a) $5 +0i$
b) $8i$
c) $3 + 9i$
d) $-4 + 5i$
e) $5 -2i$
f) $-9 -8i$
g) $-3+0i$
h) $-7i + 2$
i) $-8i$
j) $20i + 5$

4. Raíces Cuadradas de Números Complejos.

Dado un número complejo $z = a+bi$ encontremos sus raíces cuadradas. Tales raíces r, deben cumplir que

$$r^2 = a+bi$$

Sabiendo esto, resolvamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Encontrar las raíces cuadradas del número $z = 4$

Solución: Cualquier raíz de la forma $z_r = a+bi$ debe cumplir que

$$(a+bi)^2 = 4$$

Si extraemos raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, entonces

$$a+bi = \underline{+}2$$

El número real 2 se puede escribir como $2+0i$, similarmente, -2 se puede escribir como $-2+0i$.
Si igualamos las partes reales y las imaginarias, respectivamente, en cada lado de la ecuación, entonces

$$a = \underline{+}2 \quad y \quad b = 0$$

Las raíces cuadradas son:

$$\underline{z_{r_1} = a+bi = +2} \; ; \quad \underline{z_{r_2} = a+bi = -2}$$

Ejemplo 2. Encontrar las raíces cuadradas del número $z = -9$

Solución: Cualquier raíz $z_r = a+bi$ de -9 debe cumplir que:

$$z_r^2 = (a+bi)^2 = -9$$

Si extraemos raíz cuadrada, obtenemos que

$$a+bi = \underline{+}\sqrt{-9} = \underline{+}\, 3i$$

es decir

$$a+bi = 0 \underline{+}\, 3i$$

Igualamos las partes imaginarias, respectivamente,

$$a = 0 \qquad \underline{z_{r_1} = +\,3i}$$
$$b = \underline{+}\,3 \quad \therefore \quad \underline{z_{r_2} = -\,3i}$$

Ejemplo 3. Encontrar las raíces cuadradas del número $z = 4+3i$

Solución: Cualquier raíz cuadrada de z deberá cumplir que

$$(a+bi)^2 = 4+3i$$

En este ejemplo no se puede obtener la raíz cuadrada directamente; lo que se hace es desarrollar el binomio complejo que está elevado al cuadrado, es decir:

$$a^2 + 2abi + b^2i^2 = 4+3i$$

simplificando y ordenando el miembro izquierdo, tenemos:

$$(a^2 - b^2) + 2abi = 4+3i$$

Ahora igualamos las partes reales e imaginarias, respectivamente, en cada lado de la ecuación, para obtener el siguiente par de ecuaciones:

1) $a^2 - b^2 = 4$ Partes reales

2) $2abi = 3i$ Partes imaginarias

Este es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el cual puedes resolver por cualquiera de los métodos que ya conoces.

Para simplificar el proceso, podemos encontrar otra ecuación que auxilia y agiliza el problema, de la manera siguiente:

Si tomamos el módulo, en cada miembro, de la expresión

$$(a+bi)^2 = 4+3i$$

tenemos que:

$$|(a+bi)^2| = |4+3i|$$

Puesto que el módulo del cuadrado de un número complejo es igual que el cuadrado de su módulo, podemos escribir que:

$$|a+bi|^2 = |4+3i|$$

ahora, como $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$,

$$(\sqrt{a^2+b^2})^2 = \sqrt{16+9}$$

simplificando operaciones inversas nos queda:

$$a^2+b^2 = \sqrt{25} = 5$$

$\therefore$ $\underline{a^2+b^2 = 5}$ $\underline{\text{Ecuación auxiliar}}$ (3)

Sumando las ecuaciones (1) y (3), tenemos que:

$$\begin{array}{rl} & a^2-b^2 = 4 \\ + & \underline{a^2+b^2 = 5} \\ & 2a^2+0 = 9 \end{array}$$

si despejamos a^2, entonces

$$a^2 = \frac{9}{2}$$

extrayendo la raíz cuadrada en cada miembro, obtenemos:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$$

y racionalizando el denominador,

$$\therefore \quad a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Ahora el valor de b, lo obtenemos de la ecuación (2)

$$2abi = 3i,$$

dividiendo entre i, obtenemos

$$2ab = 3 ;$$

despejando b, se tiene que $b = \frac{3}{2a}$,

substituyendo el valor de $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ en la ecuación,

$$b = \frac{3}{2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

racionalizando el denominador, tenemos que $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Haciendo lo mismo para el valor de $a = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$, obtenemos a $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$ Las raíces cuadradas de $z = 4 + 3i$ son:

$$3\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \quad y \quad -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$$

Como vemos, a cada número complejo se le asignan dos raíces cuadradas. Esa es una propiedad especial de las números complejos que se extiende a todas las raíces. Por ejemplo, cualquier número complejo tiene tres raíces cúbicas, cuatro raíces cuartas, cinco raíces quintas, etc. En unidades posteriores te señalaremos un método muy simplificado que sirve para obtener cualquier tipo de raíces de números complejos.

EJERCICIO II-C-4

Encuentra las raíces cuadradas de cada uno de los siguientes números complejos.

a) $z = 9+0i$

b) $z = -9+0i$

c) $z = i$

d) $z = -4i$

e) $z = 1+i$

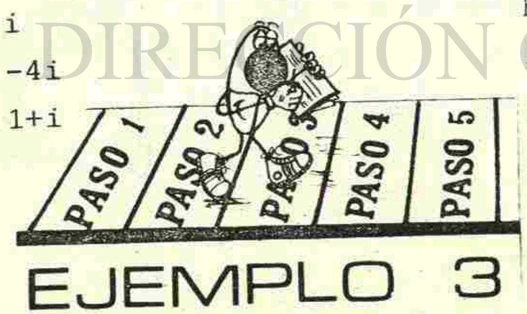
f) $z = 1-i$

g) $z = 4+3i$

h) $z = -4-3i$

i) $z = 4-3i$

j) $z = -4+3i$



D. Solución de Ecuaciones sobre el Campo de los Números Complejos C.

En la introducción de este tema, comenzamos a hablar sobre polinomios reducibles e irreducibles sobre un campo determinado; y llegamos a la conclusión de que de los polinomios sobre los números reales (R) no todos eran reducibles sobre el mismo campo R y que sí lo eran sobre el campo de los números complejos C.

Todos los números reales se pueden expresar como números complejos, pero con la componente imaginaria igual a cero.

Los números complejos provienen de expresiones con radicales cuadráticos que tienen radicandos negativos

Ejemplo 1. Expresar en forma ordinaria el número $\sqrt{-4}$

Solución: El número $\sqrt{-4}$ se puede escribir

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4}$$
$$= i\sqrt{4}$$
$$= 2i$$

Ejemplo 2. Expresar en forma ordinaria

$$\sqrt{-9} + \sqrt{25}$$

Solución: El número $\sqrt{-9} + \sqrt{25}$ se puede escribir así:

$$\sqrt{-9} + \sqrt{25} = \sqrt{25} + \sqrt{-1}\sqrt{9}$$
$$= 5 + 3i$$

Ejemplo 3. Expresar en forma ordinaria

$$\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{36}$$

Solución: La expresión $\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{36}$ se escribe como

$$\sqrt{-25} + \sqrt{-9} - \sqrt{36} = \sqrt{-1}\sqrt{25} + \sqrt{-1}\sqrt{9} - \sqrt{36}$$
$$= 5i+3i - 6$$
$$= \underline{-6+8i}$$

Ejemplo 4. Expresar en forma ordinaria
$$\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-4} + \sqrt{-36}$$

Solución: La expresión $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-4} + \sqrt{-36}$ se escribe

$$\sqrt{-5}\ \sqrt{-4} + \sqrt{-36} = \sqrt{-1}\sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}\sqrt{4} + \sqrt{-1}\sqrt{36}$$
$$= (i\sqrt{5} \cdot i\sqrt{4}) + i\sqrt{36}$$
$$= (\sqrt{5 \cdot 4}\ i^2) + 6i$$
$$= \underline{-\sqrt{20} + 6i}$$

Una expresión matemática que posee variables y que está igualada a alguna cantidad constante se le llama ecuación.

Un polinomio igualado a alguna cantidad, es un ejemplo clásico de ecuación. En el caso de una ecuación polinomial, se dice que está sobre C si sus coeficientes pertenecen a C. Sus raíces (o respuestas) estarán también en C.

Ejemplo 5. Resolver la ecuación $z^2+4 = 0$ sobre C.

Solución: Se procede en forma parecida como se hacía con las ecuaciones sobre R.

Se despeja z, de donde
$$z^2 = -4$$
si obtenemos raíz cuadrada en cada miembro, entonces
$$\sqrt{z^2} = \pm\sqrt{-4}$$
$$z = \pm\sqrt{-1}\ \sqrt{4}$$

$$\therefore\ \underline{z = \pm\ 2i}$$

La solución pertenece al campo C.

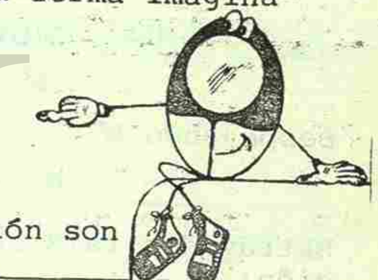
Ejemplo 6. Resolver la ecuación $(z-3)^2 = -16$, sobre el campo C.

Solución: Para resolverla procedamos a extraer raíz cuadrada a cada miembro de la ecuación original.

$$(z-3)^2 = -16$$
$$z-3 = \pm\sqrt{-16}$$

Convirtiendo el miembro derecho a la forma imaginaria nos queda:

$$z-3 = \pm\ i\sqrt{16}$$
$$z-3 = \pm\ 4i$$
$$z = 3 \pm\ 4i$$



Las dos soluciones para dicha ecuación son

$\underline{z = 3+4i}$; $\underline{z_2 = 3-4i}$

La solución pertenece al campo C

Ejemplo 7. Resolver la ecuación $z^2 = -2i$ sobre C.

Solución: Si $z = a+bi$ es la solución, entonces
$$(a+bi)^2 = -2i$$
desarrollando el binomio complejo elevado al cuadrado, obtenemos
$$a^2-b^2 + 2abi = -2i$$
igualando término a término, partes reales e imaginarias, respectivamente,

$$(a^2-b^2) + 2abi = 0 - 2i$$

(1) $a^2-b^2 = 0$

(2) $2ab = -2$

Por la ecuación (1) sabemos que si $a^2-b^2 = 0$, entonces

$$a^2 = b^2$$

$$\therefore \quad a = \pm b$$

Substituyendo uno de estos resultados en la ecuación (2), digamos $a = +b$.

$$2ab = -2$$

$$2(b)b = -2$$

$$2b^2 = -2$$

Despejando b^2

$$b^2 = -\frac{2}{2} = -1$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la ecuación:

$$b^2 = -1$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{-1}$$

$$\underline{b = \pm i}$$

En este resultado existe una contradicción, puesto que por definición de número complejo, a y b deben ser números reales exclusivamente, de donde desechamos esa posible solución a nuestra ecuación.

Ahora, tomamos el otro resultado de la ecuación (1), es decir:

$$a = -b$$

Substituyendo dicho valor en la ecuación (2)

$$2ab = -2$$

$$2(-b)(b) = -2$$

$$-2b^2 = -2$$

Despejando b^2 de la ecuación

$$b^2 = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$b^2 = 1$$

Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación.

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{1}$$

$$\underline{b = \pm 1}$$

Este resultado si es válido puesto que, hemos obtenido un número real, satisfaciendo la definición de número complejo.

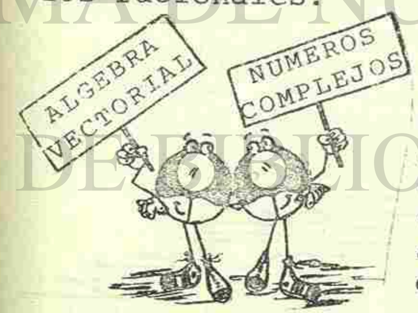
De la ecuación (1) solamente tomamos el resultado $a = -b$

$\therefore$ Si $b = +1$, entonces $a = -1$ y

si $b = -1$, entonces $a = +1$,

Por lo tanto la solución a la ecuación es $\overline{z_1 = -1 + i}$ y $\overline{z_2 = 1 - i}$

El conjunto de los números complejos es un ejemplo de conjunto vectorial sobre el plano de dos ejes (o dimensiones) como ya te habíamos mencionado al principio de este tema. Los números complejos; a su vez, forman un campo (la demostración de ésto se deja para el alumno)* como el de los números reales y los racionales.



Esperamos que hayas captado la analogía tan especial que hay entre los vectores y los números complejos, que a pesar de ser conceptos diferentes y que se crearon en circunstancias muy alejadas entre sí, tienen propiedades que los unen íntimamente.

EJERCICIO II- D

1 Expresa en la forma ordinaria de número complejo las siguientes expresiones con radicales.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{-4}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16}$

c) $\sqrt{-36} \cdot \sqrt{-9}$

d) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}$

e) $\sqrt{-9} - \sqrt{-18} \cdot \sqrt{-2}$

2 Resuelve sobre C las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + 9 = 0$

b) $z^2 - 9 = 0$

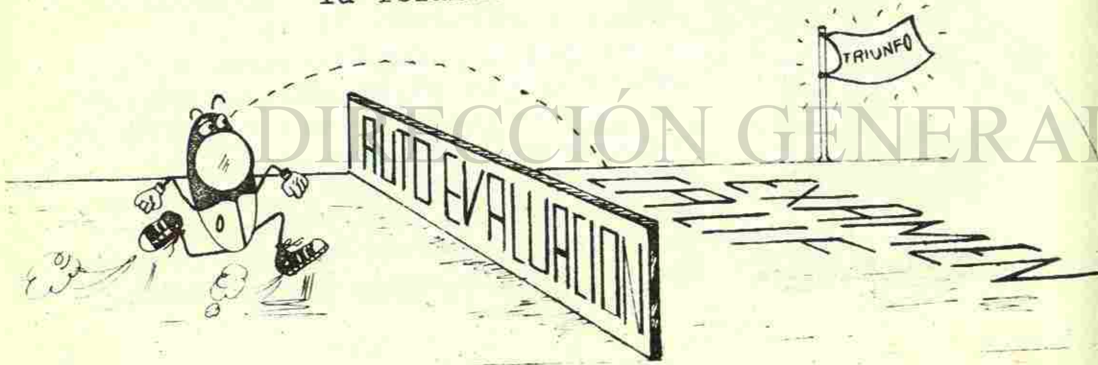
c) $z^2 - 8i = 0$

d) $z^2 - z + 4 = 0$

e) $z^2 + 2z + 8 = 0$

f) $(z-6)^2 = 5$

Sugerencia: Resolver los ejercicios d, e por medio de la fórmula de ecuaciones cuadráticas



RESUMEN

I. El álgebra vectorial.

Cantidad escalar es aquella que puede representarse - por un simple número real sobre una recta numérica.

Cantidad vectorial es aquella que para representarse necesita dos o más números reales o componentes.

RXR representa el conjunto de todas las parejas ordenadas (o puntos) que existen en el plano Cartesiano. Cuando el punto inicial de una flecha coincide con el origen (0,0), se dice que la flecha está en posición ordinaria.

Dos parejas ordenadas en RXR, (x,y) y (a,b), son iguales si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

Dadas dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b), su adición es $(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$.

Un vector es cualquier pareja ordenada que sea elemento de RXR.

TEOREMA: Si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan vectores y $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

Si $\vec{v} = (a,b)$ entonces $\|\vec{v}\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$, siendo a y b números reales.

La norma de todo vector debe satisfacer siempre las - condiciones siguientes:

a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

b) Si $\|\vec{v}\| = 0$, entonces $\vec{v} = (0,0) = \vec{0}$

c) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{t}$,

$$\|\vec{v} + \vec{t}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{t}\|$$

Si $\vec{v} = (a,b)$ es un vector cualquiera y r un escalar, entonces $r\vec{v} = r(a,b) = (ra, rb)$.

EJERCICIO II- D

1 Expresa en la forma ordinaria de número complejo las siguientes expresiones con radicales.

a) $\sqrt{4} + \sqrt{-4}$

b) $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{-9} - \sqrt{-16}$

c) $\sqrt{-36} \cdot \sqrt{-9}$

d) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{8} \cdot \sqrt{-2}$

e) $\sqrt{-9} - \sqrt{-18} \cdot \sqrt{-2}$

2 Resuelve sobre C las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 + 9 = 0$

b) $z^2 - 9 = 0$

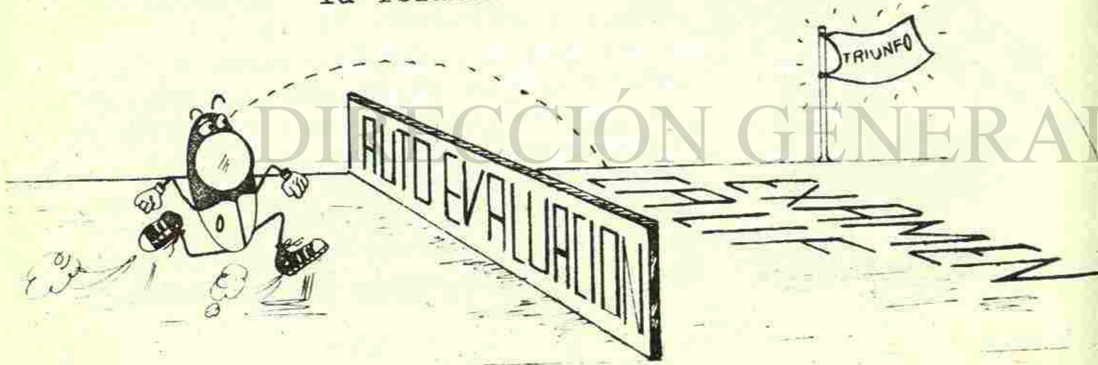
c) $z^2 - 8i = 0$

d) $z^2 - z + 4 = 0$

e) $z^2 + 2z + 8 = 0$

f) $(z-6)^2 = 5$

Sugerencia: Resolver los ejercicios d, e por medio de la fórmula de ecuaciones cuadráticas



RESUMEN

I. El álgebra vectorial.

Cantidad escalar es aquella que puede representarse - por un simple número real sobre una recta numérica.

Cantidad vectorial es aquella que para representarse necesita dos o más números reales o componentes.

RXR representa el conjunto de todas las parejas ordenadas (o puntos) que existen en el plano Cartesiano. Cuando el punto inicial de una flecha coincide con el origen (0,0), se dice que la flecha está en posición ordinaria.

Dos parejas ordenadas en RXR, (x,y) y (a,b), son iguales si y sólo si $x = a$ y $y = b$.

Dadas dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b), su adición es $(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$.

Un vector es cualquier pareja ordenada que sea elemento de RXR.

TEOREMA: Si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ representan vectores y $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$.

Si $\vec{v} = (a,b)$ entonces $\|\vec{v}\| = \|(a,b)\| = \sqrt{a^2+b^2}$, siendo a y b números reales.

La norma de todo vector debe satisfacer siempre las - condiciones siguientes:

a) $\|\vec{v}\| \geq 0$

b) Si $\|\vec{v}\| = 0$, entonces $\vec{v} = (0,0) = \vec{0}$

c) Dados dos vectores cualesquiera $\vec{v}$ y $\vec{t}$,

$$\|\vec{v} + \vec{t}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{t}\|$$

Si $\vec{v} = (a,b)$ es un vector cualquiera y r un escalar, entonces $r\vec{v} = r(a,b) = (ra, rb)$.

TEOREMA: Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son respectivamente paralelos a un vector $\vec{u}$, diferente del vector cero, entonces $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son vectores paralelos entre sí.

Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{t} = (t_1, t_2)$ son elementos de RXR, entonces el producto interno de $\vec{v}$ y $\vec{t}$ es

$$\vec{v}\cdot\vec{t} = v_1t_1 + v_2t_2$$

Una condición necesaria y suficiente para que dos vectores sean perpendiculares, es que su producto interno sea igual a cero.

TEOREMA: Sean $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ dos vectores en RXR. Entonces $\vec{t}$ es paralelo a $\vec{v}$ si y sólo si $\vec{t}$ y $\vec{v}_p$ son vectores perpendiculares, siendo

$$\vec{v}_p = (-v_2, v_1).$$

COROLARIO. $\vec{t} = (t_1, t_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son vectores paralelos si y sólo si $\vec{t} \cdot \vec{v}_p = -t_1v_2 + t_2v_1 = 0$, donde $\vec{v}_p = (-v_2, v_1)$

A. Un campo numérico es un conjunto cuyos elementos satisfacen ciertas propiedades llamadas "axiomas de campo". Los axiomas de campo son de cuatro clases:

1. Axiomas de Igualdad.
2. Axiomas de la Adición.
3. Axiomas de la Multiplicación.
4. Axioma distributivo de la multiplicación con respecto a la adición.

Como ejemplos de campos numéricos tenemos a los números racionales y los reales. Además están los números complejos.

B. Un polinomio sobre un campo F es reducible sobre F, si es el producto de dos o más polinomios sobre F, ninguno de los cuales es una constante. Inversamente un polinomio que no es reducible sobre F se dice que es irreducible sobre F.

Se le llama "primo" a aquel polinomio irreducible cuyo primer coeficiente es igual a uno.

Los "Modelos de Factorización" o productos notables son:

$$x^2-a^2 = (x-a)(x+a)$$
$$x^3-a^3 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$$
$$x^3+a^3 = (x+a)(x^2-ax+a^2)$$
$$x^2+2ax+a^2 = (x+a)^2$$
$$x^2+(a+b)x+ab = (x+a)(x+b)$$
$$x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 = (x+a)^3$$

Se te mostró en dicho tema que para todos los polinomios irreducibles sobre el campo de los números reales existe un campo, más amplio, en el cual dichos polinomios sí son reducibles, éste es el campo de los números complejos.

Un número complejo se representa en dos formas:

a+bi	(a, b)
forma ordinaria	forma rectangular

donde a se denomina la parte real, y b se denomina la parte imaginaria de a+bi.

La unidad de los números imaginarios es i, la cual se define como

$$i = \sqrt{-1}$$

y tiene como característica escencial que:

$$i^2 = -1$$

C) 1. Dados dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2=c+di$, $z_1=z_2$ si y sólo si a=c y b=d.

Un número complejo se puede representar en el plano complejo en forma similar a los vectores sobre el plano Cartesiano.

Dados dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$, la suma es; $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$.

Dado un número $z = a+bi$, tiene un número asignado $-z = -a-bi$; llamado su inverso aditivo tal que la suma da como resultado cero, es decir:

$$z + (-z) = (a=bi) + (-a-bi) = (a-a) + (b-b)i$$
$$= 0+0i = 0$$

2. Valor absoluto, magnitud o módulo de un número complejo es la distancia del punto, que representa las coordenadas del número complejo, al origen, situando al número complejo en el plano complejo. Matemáticamente se le encuentra así:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

El valor absoluto o módulo, siempre es positivo o cero; nunca negativo.

Dados dos números complejos $a+bi$ y $c+di$, siempre se cumple que

$$|(a+bi) + (c+di)| \leq |a+bi| + |c+di|$$

llamada la desigualdad del triángulo, pues significa que en todo triángulo la magnitud de cualquiera de sus lados siempre va a ser menor que la suma de las magnitudes de los otros lados.

3. Dados dos números complejos $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di$, el producto de ambos se define así:

$$z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+cb)i$$

El conjugado de un número complejo $z = a+bi$ es

$$\bar{z} = a-bi$$

El recíproco o inverso multiplicativo de un número complejo $z = a+bi$, es

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i$$

El producto de un número complejo por su conjugado da un número real como resultado.

$$z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$$

El producto de un número complejo por su recíproco da la unidad como respuesta, es decir:

$$z\left(\frac{1}{z}\right) = (a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\, i\right) = 1$$

F) Así sucede con los números reales, los números complejos también tienen raíces cuadradas.

Dado un número $c+di$ cualquiera, elemento de los complejos, existen dos números $a_1+b_1 i$ y $a_2+b_2 i$, tal que:

$$(a_1+b_1 i)^2 = c+di \quad y \quad (a_2+b_2 i)^2 = c+di$$

donde

$$a^2-b^2 + 2abi = c+di$$

de lo cual

$$a^2-b^2 = c \quad y$$
$$2abi = di \quad ó \quad 2ab = d\ ;$$

siendo esto válido para ambos números $a_1+b_1 i$ y $a_2+b_2 i$, llamados raíces cuadradas de $c+di$

GLOSARIO

FACTORIZACION: Proceso algebraico mediante el cual una expresión consistente en sumandos o similares queda en forma de factores.

MODELO: Cuando algún concepto que se esté estudiando, ya sea matemático o físico no se conoce exactamente, se procede a crear una imagen concepto (o modelo) a manera de proposición, que satisfaga las condiciones que requiere la investigación. Cuando el modelo satisface las propiedades del concepto estudiado, se dice que el modelo representa el concepto del problema; y si el modelo no satisface dichas propiedades, entonces se le desecha y se propone otro modelo más satisfactorio.

POLINOMIO SOBRE UN CAMPO: En matemáticas se dice que un polinomio está sobre un determinado campo o conjunto numérico cuando sus coeficientes pertenecen a dicho campo o conjunto.

PRIMER COEFICIENTE: Para cualquier polinomio dado el primer coeficiente es el número que multiplica a la variable de mayor exponente en todo el polinomio.

PROYECCIONES: Dada una gráfica en el plano Cartesiano, son los valores que dicha gráfica toma en cada uno de los ejes coordenados. En general, también se consideran proyecciones a las líneas que parten de un punto en el plano Cartesiano y caen perpendicularmente a cada uno de los ejes.

ANEXO
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

EJERCICIO I-A-2

1

a) 5
b) -3
c) 3
d) 5
e) -5
f) 1
g) -6
h) $\frac{6}{2} = 3$
i) $-\frac{4}{2} = -2$
j) -16

2

a) $\vec{RS} = (1,2)$
b) $\vec{RS} = (-3,2)$
c) $\vec{RS} = (-4,5)$
d) $\vec{RS} = (4,3)$
e) $\vec{RS} = (-1,1)$
f) $\vec{RS} = (-3, -3)$
g) $\vec{RS} = (0,7)$
h) $\vec{RS} = (0, -7)$
i) $\vec{RS} = (0,0)$
j) $\vec{RS} = (6, -4)$

3

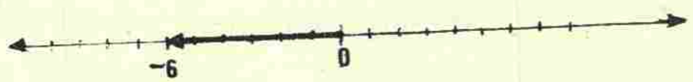
a) $x = 4$
b) $x = 4;\ y = 2$
c) $x = 4;\ y = 3$
d) $\emptyset$ (no hay x que satisfaga la igualdad)
e) $x = 4;\ y = 4$

EJERCICIO I-B-1

1

a)


b)


c)


d) 

e) 

2

a) (0, -5)

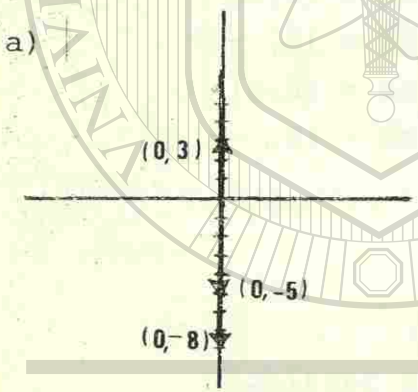
b) (-3, -5)

c) (-11, -3)

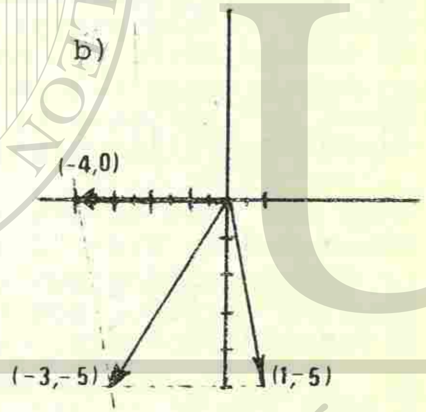
d) (4, -4)

e) (0, -3)

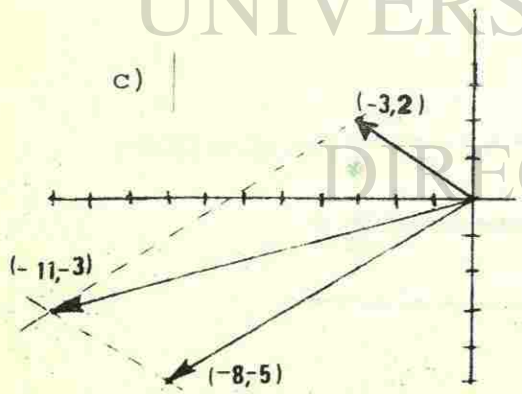
a)



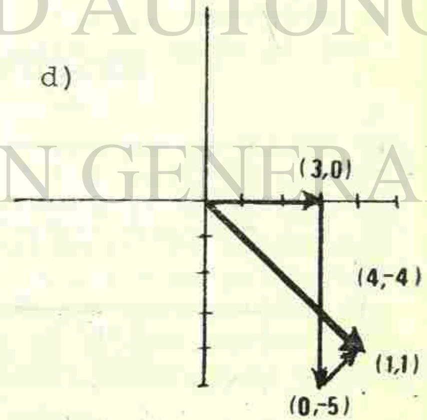
b)



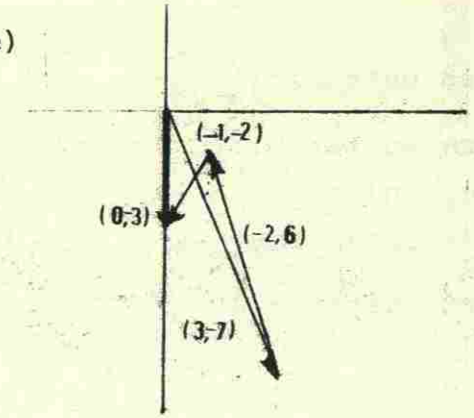
c)



d)



e)



EJERCICIO I-B-2

a) 5

b) $\sqrt{65}$

c) 9

d) $3\sqrt{3}$

e) $\sqrt{7}$

f) $\sqrt{a^2+b^2}$

g) $\sqrt{k^2+4}$

h) $\sqrt{1-2k+2k^2}$

i) $\sqrt{a^4+b^4}$

j) $\sqrt{a+3}$

EJERCICIO I-C-1

1

a) (15, -10)

b) (-2, -8)

c) (8, -16)

d) (5a, -4a)

e) (-bx, 3b)

f) (zx, zy)

g) (-3x-3y, -3x+3y)

h) (-4, +7)

i) (a,b)

j) (-x, -y)

2

a) Paralelos. Mismo sentido.

b) No paralelos.

c) Paralelos. Sentidos opuestos.

d) Paralelos. Sentidos opuestos.

e) No paralelos.

3

a) No es unitario; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

b) Sí es unitario.

c) Sí es unitario.

d) No es unitario; $\left(\frac{5}{\sqrt{61}}, \frac{6}{\sqrt{61}}\right)$; $\left(-\frac{5}{\sqrt{61}}, -\frac{6}{\sqrt{61}}\right)$

e) Sí es unitario

EJERCICIO I-C-2

1

a) 19

b) 5a

c) 0

d) $y^2 - x^2$

e) $-6x - 36$

2

a) Sí son perpendiculares.

b) No son perpendiculares.

c) Sí son perpendiculares.

d) Sí son perpendiculares.

e) No son perpendiculares.

EJERCICIO I-C-3

a) Sí son paralelos

b) Sí son paralelos

c) Sí son paralelos

d) No son paralelos

e) No son paralelos

f) No son paralelos

g) Sí son paralelos

h) No son paralelos

i) Sí son paralelos

j) No son paralelos

EJERCICIO II-B

a) $(x+3)(x-3)$

b) $(x+2)(x^2-2x+4)$

c) $(x+2)(x+1)$

d) $(x-\sqrt[3]{7})\left[x^2+\sqrt[3]{7}\,x+(\sqrt[3]{7})^2\right]$

e) $(x+\sqrt[3]{4})(x^2-\sqrt[3]{4}\,x+2\sqrt[3]{2})$

f) $(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$

g) $(v+1)(v^2-v+1)(v+1)(v^2-v+1)$

h) $(x-1)(x-1)(x-1)$

i) $(x+2)(x-2)(x^2+4)$

j) $(x+\sqrt[4]{15})(x-\sqrt[4]{15})(x^2+\sqrt{15})$

EJERCICIO II-C-1

1 a) $m = 5$; $n = -4$

b) $m = 1$; $n = 0;\ 2$

c) $m = 0$; $n = 5$

d) $m = 4$; $n = \frac{5}{2}$

e) $m = 8$; $n = 0$

2 a) $1 - i$

b) $10 + 9i$

c) $1 + 14i$

d) $-3 - 3i$

e) $-7 + 7i$

f) $(13, 1)$

g) $(1, -1)$

h) $(-8, -7)$

i) $(r+s, s+r)$

EJERCICIO II-B-2

a) $2\sqrt{2}$

b) 5

c) 5

d) 5

e) 5

f) 5

g) 2

h) 4

i) 5

j) 1

EJERCICIO II-C-3

1 a) $15 + 10i$

b) $-8 + 2i$

c) $8 + 2i$

d) -2

e) 25

2

a) 5

b) $-8i$

c) $3-9i$

d) $-4+5i$

e) $5+2i$

f) $-9+8i$

g) -3

h) $+7i+2$ ó $2+7i$

i) $+8i$

j) $5-20i$

3

a) $\frac{1}{5}$

b) $-\frac{1}{8}i$

c) $\frac{1}{30} - \frac{1}{10}i$

d) $-\frac{4}{41} - \frac{5}{41}i$

e) $\frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$

f) $\frac{-9}{145} + \frac{8}{145}i$

g) $-\frac{1}{3}$

h) $\frac{2}{53} + \frac{7}{53}i$

i) $\frac{1}{8}i$

j) $\frac{1}{85} - \frac{4}{85}i$

EJERCICIO II-C-4

a) $3; -3$

b) $3i; -3i$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

d) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i\ ;\ -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

e) $\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}i\ ;\ -\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}i$

f) $\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{2}} - \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}i\ ;\ -\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{2}} + \frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}}i$

g) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\ ;\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

h) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i \;;\; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

i) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \;;\; -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

j) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \;;\; \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}i$

EJERCICIO II-D

1. a) $2+2i$

   b) $7-i$

   c) -18

   d) $8i$

   e) $6+3i$

2. a) $3i;\ -3i$

   b) $3;\ -3$

   c) $2+2i \;;\; -2-2i$

   d) $\frac{1+i\sqrt{15}}{2} \;;\; \frac{1-i\sqrt{15}}{2}$

   e) $-1+i\sqrt{7} \;;\; -1-i\sqrt{7}$

   f) $6+\sqrt{5} \;;\; 6-\sqrt{5}$

LA AUTOEVALUACION ES UNO DE LOS INDICADORES DE TU DOMINIO DE LA UNIDAD CORRESPONDIENTE.

AUTOEVALUACION

INSTRUCCIONES: Lee detenidamente las siguientes cuestiones anontando, dentro del paréntesis la letra que corresponda a la respuesta correcta.

1. La ecuación correcta para definir el producto Cartesiano de dos conjuntos K y M, es: ( )

   A) $K \times M = \{(y,x): x \in K \ \ y \ \ y \in M\}$
   B) $K \times M = \{(x,y): x \in K \ \ y \ \ y \in M\}$
   C) $K \times M = \{(x,y): K \in x \ \ y \ \ y \in M\}$
   D) $K \times M = \{(x,y): x \in M \ \ y \ \ y \in K\}$

2. Encuentra los valores de x y y para los cuales la igualdad $(3x-2, y+3) = (7,-2)$ es verdadera. ( )

   E) $x = 3, y = -5$
   F) $x = -5, y = 3$
   G) $x = -3, y = 5$
   H) $x = 5, y = -5$

3. Cuando el punto inicial de una flecha es el origen, las coordenadas de su punto extremo son también, las coordenadas de la pareja que representa; en este caso, se dice que la flecha está en posición:

   I) Regular.
   J) Cartesiana.
   K) Trasladada.
   L) Ordinaria.

4. Nombra la pareja ordenada representada por $\overrightarrow{RS}$ cuando las coordenadas respectivas de R y S son (0,3); (5,-2):

   M) (-5, -5)
   N) (-5, 5)
   O) (5, -5)
   P) (5, 5)

5. La expresión correcta para la definición de la adición de parejas ordenadas es: ( )

   Q) Si $(a,b) \in R \times R$, $(c,d) \in R \times R$, entonces $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$
   R) Si $(a,b) \in R \times R$, $(c,d) \in R \times R$, entonces $(a+c) \cdot (c+d) = (a+c, b+d)$
   S) Si $(a,b) \in R \times R$, $(c,d) \in R \times R$, entonces $(a+c) + (c \cdot d) = (a+c, b+d)$
   T) Si $(a+b) \in R \times R$, $(c+d) \in R \times R$, entonces $(a+c) \cdot (c+d) = (a+c, b+d)$

6. Identifica la expresión que representa un vector. ( )

   T) $(2 + \sqrt{5})$

   U) $(2, -5)$

   V) $(2 - \sqrt{5})$

   W) $(\frac{2}{3} - \sqrt{5})$

7. La suma de dos parejas ordenadas en R X R se llama vector suma, mientras que la operación asociada con la suma de llama: ( )

   X) Igualdad escalar
   Y) Propiedad asociativa
   Z) Suma escalar.
   A) Adición vectorial

8. La propiedad de sustitución de la adición vectorial, afirma que si $\vec{s}$, $\vec{t}$, $\vec{u}$, y $\vec{v}$ representan vectores tales que $\vec{s} = \vec{u}$ y $\vec{t} = \vec{v}$, entonces:

   B) $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$
   C) $\vec{s} \cdot \vec{t} = \vec{u} + \vec{v}$
   D) $\vec{s} + \vec{t} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
   E) $\vec{s} = \vec{u} \cdot (\vec{v}+\vec{t})$

9. La operación de sustracción vectorial afirma que si $\vec{u} \in R \times R$ y $\vec{v} \in R \times R$, entonces: ( )

F) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
G) $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
H) $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u}\vec{v}$
I) $\vec{v} + (-\vec{u}) = \vec{u} - (-\vec{v})$

10. La definición de la norma $\|\vec{v}\|$ de un vector $\vec{v}$, mediante el teorema de Pitágoras, es: ( )

J) Si $\vec{v} = (a,b) \in R \times R$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2}$

K) Si $\vec{v} = (a,b) \in R \times R$, $\vec{v} = \|a^2+b^2\|$

L) Si $\vec{v} = (a,b) \in R \times R$, $\vec{v} = \sqrt{a^2+b^2}$

M) Si $\vec{v} = (a,b) \in R \times R$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2-b^2}$

11. Cita otros tres nombres diferentes que se le asignan a la norma de un vector $\vec{v}$. ( )

M) Coordenada, escalar o cartesiana.
N) Abscisa, ordenada o coordenada.
O) Anchura, espesor o gráfica.
P) Magnitud, módulo o tamaño.

12. Calcula la norma del vector $\vec{v} = (-5, 12)$: ( )

Q) 169
R) -169
S) 13
T) -13

13. Comprueba la desigualdad del triángulo para los vectores $\vec{r} = (3,1)$; $\vec{s} = (2,-1)$. La simplificación de esta comprobación es:

U) 25 = 25
V) 29.142 < 25
W) 25 = 29.142
X) 25 < 29.142

14. "Si $\vec{v} \in R \times R$, $r \in R$ y $\vec{v} = (a,b)$ entonces $r\vec{v} = \vec{v}r = (ra,rb)$", es la definición de: ( )

Y) La multiplicación de dos vectores
Z) La multiplicación de un vector por un escalar
A) La multiplicación de dos escalares.
B) La sustitución de un vector por un escalar

15. Dos vectores diferentes de cero tienen el mismo sentido si y solamente si uno de ellos es: ( )

C) El producto del otro por un escalar positivo.
D) El producto del otro por un escalar negativo.
E) La suma del otro con un escalar positivo.
F) La diferencia del otro con un escalar negativo.

16. Si $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son paralelos a un vector $\vec{u}$ diferente de cero, entonces $\vec{v}$ y $\vec{t}$ son:

G) Vectores perpendiculares entre sí.
H) Vectores paralelos entre sí.
I) Vectores intersectados entre sí.
J) Vectores sumados entre sí.

17. Si la norma de un vector es 1, éste se llama: ( )

K) Vector unitario.
L) Escalar unitario.
M) Vector unidireccional.
N) Vector director.

18. Determina cuál pareja de vectores $\vec{s}$ y $\vec{t}$ tienen sentidos opuestos: ( )

O) $\vec{s} = (2,1)$; $\vec{t} = (-1, -2)$

P) $\vec{s} = (2, \sqrt{6})$; $\vec{t} = (\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

Q) $\vec{s} = (1, -3)$; $\vec{t} = (-2, 6)$

R) $\vec{s} = (3,1)$; $\vec{t} = (1, 3)$

19. "Si $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{t} = (t_1, t_2)$ son elementos de - R X R, entonces $\vec{v} \cdot \vec{t} = v_1t_1 + v_2t_2$", ésta es la definición de: (   )

S) La suma opuesta de $\vec{v}$ y $\vec{t}$
T) La suma escalar de $\vec{v}$ y $\vec{t}$
U) El producto externo de $\vec{v}$ y $\vec{t}$
V) El producto interno de $\vec{v}$ y $\vec{t}$

20. Dos vectores son perpendiculares entre sí, si y - solamente si su producto interno es: (   )

W) 1
X) 0
Y) -1
Z) ∞

21. Las propiedades de sustitución, conmutativa, aso-- ciativa, distributiva y de la norma, son los nom-- bres que reciben las cinco propiedades correspon-- dientes al: (   )

A) Producto externo de vectores.
B) Producto interno de vectores.
C) Producto vectorial de escalares.
D) Producto externo de escalares.

22. ¿Cuál de las siguientes parejas de vectores tiene - perpendicularidad entre dichos vectores? (   )

E) $(3, -1)$; $(2, -6)$

F) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right)$; $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$

G) $\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{6}\right)$; $\left(-\frac{5}{3}, 6\right)$

H) $(-2, 8)$; $\left(-3, -\frac{3}{4}\right)$

23. Completa el teorema siguiente: "En R X R un vector perpendicular a uno de dos vectores paralelos diferentes de cero es": (   )

I) Paralelo y coincidente al otro.
J) Coincidente al otro.
K) Perpendicular al otro.
L) Paralelo al otro.

24. ¿En cuál de las parejas de vectores dados, son paralelos dichos vectores? (   )

M) $(3,7)$; $(7, -3)$

N) $(4,6)$; $(-2, 3)$

O) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$; $(1, -1)$

P) $(\sqrt{3}, -2)$; $(6, -4\sqrt{3})$

25. Un conjunto de números, junto con las operaciones de adición y multiplicación, que satisfacen todos los axiomas de igualdad, adición y multiplicación, así como el axioma distributivo, se dice que es -- un: (   )

Q) Plano Cartesiano.
R) Campo numérico.
S) Grupo imaginario.
T) Semi-grupo imaginario.

26. Si un polinomio sobre un campo F, es el producto - de dos o más polinomios sobre F, ninguno de los -- cuales es una constante, se llama polinomio: (   )

U) Reducible.
V) Irreducible.
W) Primo.
X) Neperiano.

27. Un polinomio irreducible sobre un campo se dice que es primo si su primer coeficiente es: ( )

Y) 0
Z) -1
A) 1
B) 2

28. Identifica cuál de las expresiones es un modelo de factorización" o producto notable correcto: ( )

C) $x^3 + a^3 = (x+a)\ (x^2-ax + a^2)$
D) $x^3 + a^3 = (x+a)\ (x^2+2ax+a^2)$
E) $(x + a)^3 = x^3+3a^2\ x^2 + ax^2 + a^3$
F) $x^3 + a^3 = (x - a)\ (x^2 - 2ax + a^2)$

29. Determina sobre Q los factores primos del polinomio $y^4 - 4y^2 + 4$: ( )

G) $y^2 + 2$
H) $y^2 - 2$
I) $y - 4$
J) $y^2 - 4$

30. La adición de los números complejos (a,b) y (c,d) se define como: ( )

K) (a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)
L) (a+b), (c+d) = (a+c, b+d)
M) (a+c), (b,d) = (a,c) + (b,d)
N) (a,c), (b,d) = (a+c+b+d)

31. En un número complejo a+bi: ( )

O) a se llama parte real y b se llama parte imaginaria.
P) a se llama parte imaginaria y b se llama parte radical.
Q) a se llama parte imaginaria y b se llama parte irracional.
R) a se llama parte imaginaria y b se llama parte real.

32. El valor absoluto, o módulo, de a+bi se define como: ( )

S) El número imaginario negativo $(a^2+b^2)^2$
T) El número radical negativo $\sqrt{a^2 - b^2}$
U) El número real no negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$
V) El número real negativo $a^2 + b^2$

33. Si a + bi y c + di son números complejos, una de las proposiciones del teorema de la desigualdad del triángulo afirma que: ( )

W) $|(a+bi) + (c+di)| > |a+bi+c+di|$
X) $|(a+bi) + (c+di)| \leq |a+bi| + |c+di|$
Y) $|a+bi| < 0$
Z) $|(a+bi)\ (c+di)| \leq |a+bi| + |a+di|$

34. Calcula $z_1 + z_2$ si $z_1 = (-2-4i)$ y $z_2 = (-1+i)$: ( )

A) 3 - 3i
B) -3 + 3i
C) 3 + 3i
D) -3 - 3i

35. La definición para la multiplicación de dos números complejos (a+bi) y (c+di) es: ( )

E) (a+bi) (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc) i
F) (a+bi) (c+di) = (ac+bd) + (ad-bc)
G) (a+bi) (c+di) = (ac-bd) (ad+bc) i
H) (a+bi) (c+di) = (ac+bd) (ad-bc)

36. Si a + bi es un número complejo, entonces:

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i,$$ donde $(a+bi \neq 0)$, es su: ( )

I) Inverso aditivo
J) Conjugado.
K) Recíproco o inverso multiplicativo.
L) Idéntico multiplicativo

37. Determina el recíproco y el conjugado de 1-2i : ( )

M) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; $1 + 2i$

N) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$; $-1 -2i$

O) $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$; $-1 +2i$

P) $-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$; $-1 -2i$

38. Determina en C (campo de los números complejos), las raíces cuadradas de 5 -12i: ( )

Q) $3 + 2i$, $-3 -i$
R) $3 - 2i$, $-3 + 2i$
S) $3 + 2i$, $-3 -2i$
T) $-2i -3$, $-3i + 2$

39. Expresa en forma ordinaria $\sqrt{-4} + \sqrt{-1} - \sqrt{-36}$: ( )

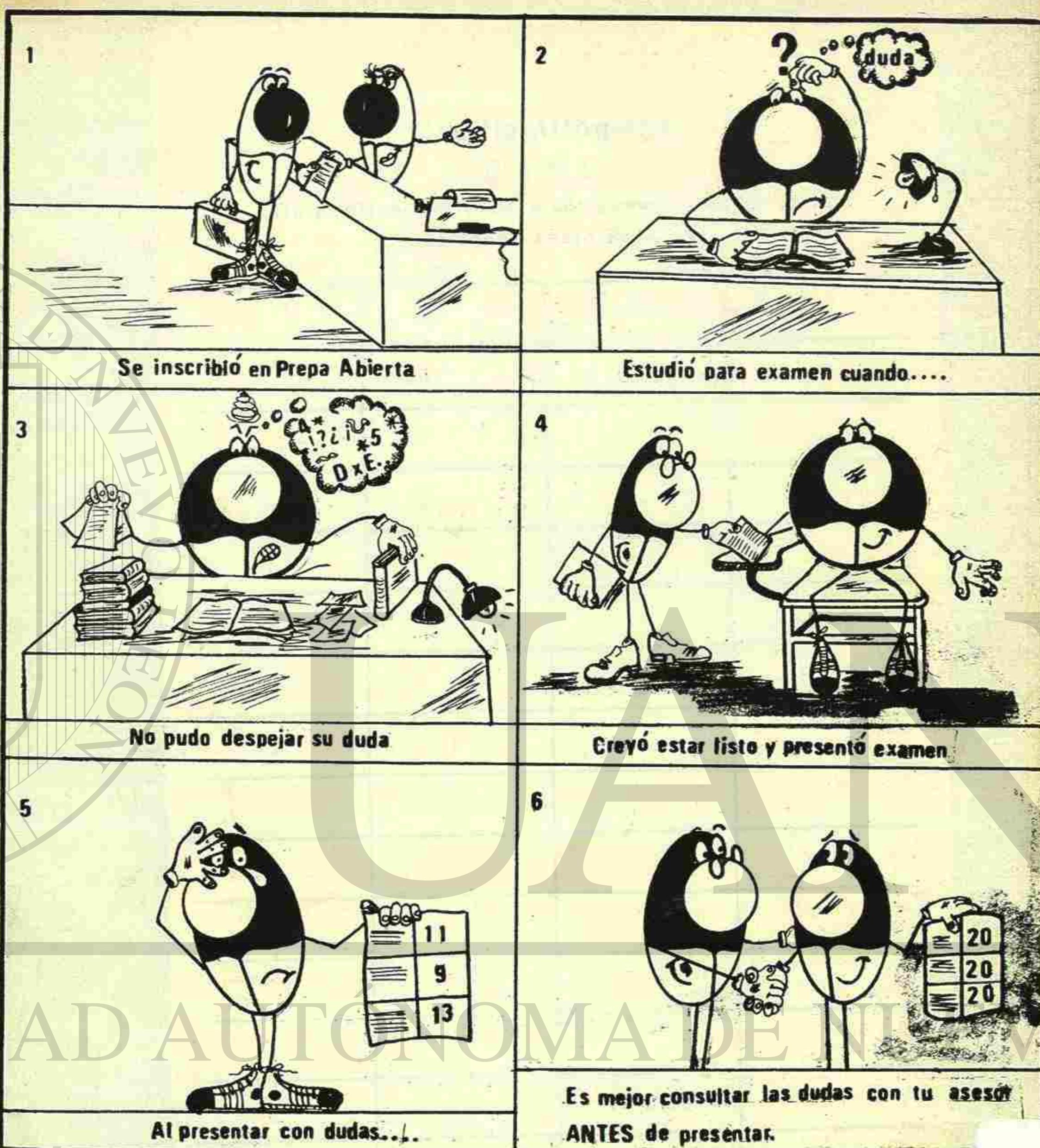
U) $3 + i$
V) $-3 + i$
W) $3 - i$
X) $-3i$

40. Resuelve sobre C (campo de los números complejos) la ecuación $(y+4)^2 = -49$: ( )

Y) $\{4i + 7, 4i - 7\}$
Z) $\{4i + 7i, 4i - 7i\}$
A) $\{-4 + 7i, -4 - 7i\}$
B) $\{-4i + 7, -4i - 7\}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

1. (B)
2. (E)
3. (L)
4. (O)
5. (Q)
6. (U)
7. (A)
8. (B)
9. (G)
10. (J)
11. (P)
12. (S)
13. (X)
14. (Z)
15. (C)
16. (H)
17. (K)
18. (Q)
19. (V)
20. (X)
21. (B)
22. (H)
23. (K)
24. (P)
25. (R)
26. (U)
27. (A)
28. (C)
29. (H)
30. (K)
31. (O)
32. (U)
33. (X)
34. (D)
35. (E)
36. (K)
37. (M)
38. (R)
39. (X)
40. (A)



LA ASESORIA ES UN SERVICIO QUE DEBES APROVECHAR CUANDO LO NECESITES.

MONTERREY, N.L. 1979.