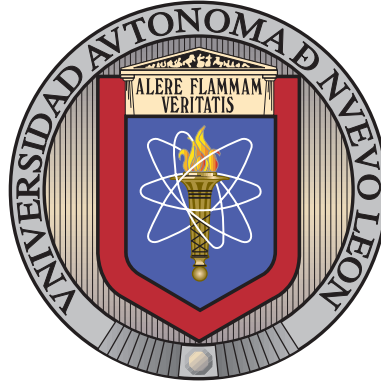


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON OSCILADORES  
CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

POR

ING. SARA Yael ANGULO GUZMÁN

TESIS

EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN  
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON OSCILADORES  
CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO

POR  
ING. SARA Yael ANGULO GUZMÁN

TESIS  
EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS DE LA  
INGENIERÍA ELÉCTRICA CON ORIENTACIÓN  
EN CONTROL AUTOMÁTICO

CD. UNIVERSITARIA

NOVIEMBRE DE 2012

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN  
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

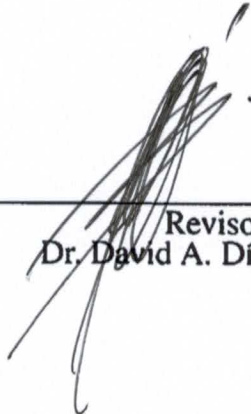
Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "SINCRONIZACIÓN DE REDES COMPLEJAS CON OSCILADORES CAÓTICOS DE ORDEN FRACCIONARIO" realizada por la alumna ING. SARA Yael ANGULO GUZMÁN, matrícula número 1572377 sea aceptada por su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con Orientación en Control Automático.

El Comité de Tesis

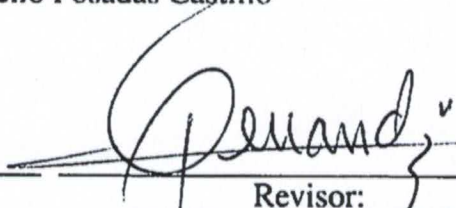


Asesor

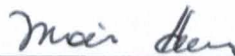
Dr. Cornelio Posadas Castillo



Revisor:  
Dr. David A. Díaz Romero



Revisor:  
Dr. César Cruz Hernández



Vo. Bo.

Dr. Moisés Hinojosa Rivera  
División de Estudios de Posgrado

Cd. Universitaria, a Noviembre de 2012

*Dedicado a Dios y a mi familia...*



## AGRADECIMIENTOS

A Dios por permitirme culminar una etapa más en la vida llena de logros y bendiciones, por ser mi sostén en los momentos más difíciles.

A mis padres por apoyar las decisiones que he tomado, por su amor y comprensión. Les estaré siempre agradecida.

A mis hermanas que han sido un pilar muy fuerte en mi vida, gracias por sus comentarios, por su apoyo incondicional y por empujarme a ser una mejor persona.

A esas personas que me brindaron su cariño incondicional. A las familias Baca Valle y Murrieta Valle por hacerme parte de su familia, por sus atenciones y amor, gracias. A Grecia y Francia por recibirme y brindarme su cariño, las quiero mucho.

A mis compañeros y amigos de maestría, por todos los momentos que compartimos juntos. Gracias por hacer este camino más ameno.

Al Dr. Cornelio Posadas, asesor de tesis y profesor, quien supo guiarme en el transcurso de este proyecto. Por todos sus consejos y comentarios que fueron de vital importancia para la culminación de los objetivos. Por su paciencia y sus enseñanzas, gracias!

A mis revisores Dr. David Díaz Romero y Dr. César Cruz Hernández por sus comentarios que sin duda enriquecieron este trabajo y por los consejos siempre bienvenidos, gracias.

A todos los profesores del DIE que sin duda aportaron conocimientos invaluableles en mi desarrollo profesional, les estoy agradecida.

A CONACyT por la beca otorgada para mis estudios de maestría durante la duración de este proyecto y a PROMEP por los recursos asignados como apoyo al crecimiento de este proyecto.

# RESUMEN

## Sincronización de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario.

Publicación No. \_\_\_\_\_

Sara Yael Angulo Guzmán, Ing. en Electrónica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2012

### Profesor Asesor: Dr. Cornelio Posadas Castillo

Este trabajo de investigación versa sobre la *sincronización* de redes complejas construidas con osciladores caóticos de orden fraccionario. Se aborda el problema de sincronizar redes complejas compuestas por  $N$  osciladores caóticos de orden fraccionario empleando características y propiedades de los sistemas cooperativos. Se estudia la sincronización en redes de tipo regular e irregular. Las redes complejas se conformarán por *nodos* a los cuales a lo largo de este trabajo se les referirá como osciladores caóticos de orden fraccionario.

Se busca sincronizar osciladores caóticos idénticos por medio de una ley de control que sea lo más imperceptible posible, para que el sentido de sincronización no se pierda. Se utiliza una ley de control en uno de los estados del oscilador logrando así sincronía, en régimen caótico.

Se consideran básicamente dos escenarios: *i) sincronía de redes sin oscilador maestro*, en donde la dinámica final de la red sincronizada es un nuevo estado caótico diferente a las dinámicas caóticas de los osciladores aislados y *ii) sincronía de redes con oscilador maestro*, donde la dinámica de la red sincronizada es impuesta por el oscilador maestro por lo que la dinámica final tiende a la de este oscilador maestro.

Se realiza un estudio de la sincronización de las redes complejas con osciladores de orden fraccionario por medio de un software de simulación de circuitos electrónicos para que éstos puedan ser llevados a la implementación empleando circuitería electrónica.

# Índice General

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Resumen</b>                                      | <b>v</b>  |
| <b>Índice General</b>                               | <b>VI</b> |
| <b>Índice de Figuras</b>                            | <b>IX</b> |
| <b>1. Introducción</b>                              | <b>1</b>  |
| 1.1. Introducción general . . . . .                 | 1         |
| 1.1.1. Sincronía. Antecedentes Históricos . . . . . | 1         |
| 1.2. Objetivo general . . . . .                     | 7         |
| 1.2.1. Objetivos particulares . . . . .             | 8         |
| 1.3. Organización del trabajo . . . . .             | 8         |
| <b>2. Redes complejas</b>                           | <b>10</b> |
| 2.1. Definiciones . . . . .                         | 11        |
| 2.2. Topologías en las redes complejas. . . . .     | 12        |
| 2.2.1. Topología Regular. . . . .                   | 13        |
| 2.2.2. Topología Irregular. . . . .                 | 17        |
| 2.2.3. Ejemplos de redes en la naturaleza. . . . .  | 21        |
| <b>3. Sincronización de redes complejas</b>         | <b>26</b> |
| 3.1. Sincronía . . . . .                            | 27        |
| 3.2. Escenarios de acoplamiento . . . . .           | 28        |
| 3.2.1. Acoplamiento unidireccional . . . . .        | 29        |
| 3.2.2. Acoplamiento bidireccional . . . . .         | 30        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 3.3.      | Diferentes tipos de sincronización . . . . .  | 31        |
| 3.4.      | Sincronización de redes complejas . . . . .   | 32        |
| 3.4.1.    | Dinámica de las redes complejas. . . . .  | 33        |
| 3.4.2.    | Estabilidad de las redes complejas. . . . .   | 35        |
| <b>4.</b> | <b>Preliminares matemáticos y Sistemas de orden fraccionario</b>                        | <b>37</b> |
| 4.1.      | Definición de la derivada fraccionaria . . . . .  | 38        |
| 4.2.      | Métodos numéricos para el cálculo de derivadas e integrales fraccionarias . . . . .     | 41        |
| 4.3.      | Estabilidad de sistemas de orden fraccionario . . . . .                                 | 42        |
| 4.3.1.    | Sistemas Lineales . . . . .   | 42        |
| 4.3.2.    | Sistemas no lineales . . . . .  | 43        |
| 4.4.      | Caos . . . . .  | 45        |
| 4.5.      | Osciladores caóticos de orden fraccionario . . . . .                                    | 48        |
| 4.5.1.    | Oscilador Lorenz . . . . .  | 49        |
| 4.5.2.    | Oscilador Chen . . . . .  | 51        |
| 4.5.3.    | Oscilador Rössler . . . . .   | 52        |
| 4.5.4.    | Oscilador Liu . . . . .   | 53        |
| 4.5.5.    | Oscilador Financiero . . . . .  | 54        |
| 4.5.6.    | Oscilador Volta . . . . .   | 55        |
| 4.5.7.    | Oscilador Duffing . . . . .   | 56        |
| 4.5.8.    | Oscilador Lü . . . . .  | 57        |
| 4.5.9.    | Oscilador Arneodo . . . . .   | 58        |
| <b>5.</b> | <b>Sincronización de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario</b> | <b>60</b> |
| 5.1.      | Sincronización de redes regulares . . . . .   | 61        |
| 5.1.1.    | Acoplamiento global . . . . .   | 61        |
| 5.1.2.    | Acoplamiento anillo . . . . .   | 67        |
| 5.1.3.    | Acoplamiento estrella . . . . .   | 71        |
| 5.2.      | Sincronización de redes irregulares . . . . .   | 75        |
| <b>6.</b> | <b>Implementación de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario</b> | <b>85</b> |
| 6.1.      | Realización analógica de los circuitos. . . . .   | 85        |
| 6.2.      | Simulación de redes complejas. . . . .  | 88        |

|  |            |
|--|------------|
| 6.2.1. Circuito analógico del oscilador Liu de orden fraccionario. . . . .         | 88         |
| 6.2.2. Circuito analógico del oscilador Financiero de orden fraccionario . . . . . | 97         |
| 6.2.3. Circuito analógico del oscilador Lü de orden fraccionario. . . . .          | 106        |
| 6.3. Simulación de redes complejas Irregulares. . . . .                            | 113        |
| 6.3.1. Circuito analógico del osciladora Rössler de orden fraccionario . . . . .   | 113        |
| <b>7. Conclusiones y trabajo futuro</b>  | <b>120</b> |
| 7.1. Principales contribuciones de este trabajo de tesis . . . . .                 | 121        |
| 7.2. Trabajo a futuro . . . . .  | 122        |
| <b>Bibliografía</b>  | <b>123</b> |

# Índice de figuras

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Relojes de péndulo en los que Christiaan Huygens observó el fenómeno de sincronía. . . . .  | 2  |
| 1.2. Ejemplos de sincronía. a) Robots en sincronía para realizar una tarea en común, b) Aves sincronizadas en sus movimientos al correr. . . . .   | 3  |
| 1.3. Atractor de Lorenz. . . . .   | 4  |
| 1.4. Sistema microvascular respiratorio que muestra naturaleza fractal. a) Pulmones de un conejo, b) Pulmones de un humano. . . . .  | 6  |
| 2.1. Red compleja en acoplamiento global con $N = 5$ sin nodo maestro. . . . .   | 14 |
| 2.2. Red compleja en acoplamiento anillo con $N = 5$ sin nodo maestro. . . . .   | 15 |
| 2.3. Red compleja en acoplamiento anillo con $N = 5$ sin nodo maestro. . . . .   | 16 |
| 2.4. Red con topología irregular de 8 nodos ( $N = 8$ ). . . . .   | 17 |
| 2.5. Red compleja de 5 nodos, ( $N = 5$ ) en topología irregular sin nodo maestro. . . . .   | 19 |
| 2.6. Red compleja de 5 nodos, ( $N = 5$ ) en topología irregular con nodo maestro. . . . .   | 20 |
| 2.7. Mapa de interacciones de la proteínas humanas creada por científicos de Max Delbrück Center for Molecular Medicine (MDC) Berlin-Buch. . . . .   | 22 |
| 2.8. Red compleja con interacciones entre individuos (red social). . . . .   | 23 |
| 2.9. Ejemplos de sincronía en la ingeniería. a) Mapa parcial de internet donde cada línea que une a dos nodos representa un enlace entre dos IP, b) Topología jerárquica de la cache de Web internacional. . . . . | 24 |
| 3.1. Configuración de acoplamiento unidireccional entre dos osciladores caóticos (maestro-esclavo). . . . .  | 29 |
| 3.2. Configuración de acoplamiento bidireccional entre dos osciladores caóticos. . . . .   | 30 |
| 4.1. Regiones de estabilidad para sistemas de orden fraccionario. . . . .  | 43 |

- 4.2. Atractor del oscilador caótico de orden fraccionario Lorenz con  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 50
- 4.3. Estados de los osciladores caóticos Lorenz de orden fraccionario y de orden entero. . . . . 50
- 4.4. Atractor del sistema Chen de orden fraccionario  $q_1 = 0.985, q_2 = 0.99, q_3 = 0.98$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 51
- 4.5. Atractor del oscilador Rössler de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 52
- 4.6. Atractor del oscilador Liu de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 53
- 4.7. Atractor del oscilador Financiero de orden fraccionario  $q_1 = 1, q_2 = 0.95$  y  $q_3 = 0.9$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 54
- 4.8. Atractor del oscilador Volta de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.99$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 55
- 4.9. Atractor del oscilador Duffing de orden fraccionario  $q_1 = 0.9$  y  $q_2 = 1$  en el plano  $x(t), y(t)$ . . . . . 56
- 4.10. Atractor del oscilador Lü de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 57
- 4.11. Atractor del oscilador Arneodo de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = 0.97$  y  $q_3 = 0.96$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ . . . . . 58
  
- 5.1. Red compleja de 12 osciladores de orden fraccionario en topología regular con acoplamiento global. . . . . 61
- 5.2. Atractor al que converge la red de 12 osciladores Lorenz de orden fraccionario sin oscilador maestro. . . . . 63
- 5.3. Plano de fase de la red compleja en acoplamiento global con osciladores Lorenz de orden fraccionario. . . . . 64
- 5.4. Gráfica de los errores en los estados  $x_{i,1}, y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, N$ . . . . . 65
- 5.5. Gráfica de los estados de la red global  $x_{i,1}, y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ , a) Estados de los osciladores Lorenz de orden fraccionario en un tiempo de 2 seg, b) Estados de los osciladores Lorenz de orden fraccionario en un tiempo de 100 seg. . . . . 66
- 5.6. Red compleja de 12 osciladores Rössler de orden fraccionario en configuración anillo sin oscilador maestro. . . . . 67

5.7. Atractor de la red compleja en acoplamiento anillo formada por osciladores caóticos Rössler de orden fraccionario. . . . . 69

5.8. Plano de fase de los estados  $y_{i,2}$  correspondientes a la red compleja en acoplamiento anillo formada por osciladores Rössler de orden fraccionario. . . . . 70

5.9. Estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$  para  $i = 1, 2, \dots, 12$  de los osciladores caóticos Rössler de orden fraccionario en la red compleja en acoplamiento anillo. . . . . 71

5.10. Red compleja de 12 osciladores caóticos Chen de orden fraccionario en configuración estrella sin oscilador maestro. . . . . 72

5.11. Atractor de la red compleja en acoplamiento en estrella con osciladores caóticos Chen de orden fraccionario. . . . . 74

5.12. Plano de fase de los estados  $y_{i,2}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , con osciladores caóticos Chen de orden fraccionario que conforman la red compleja en acoplamiento estrella. . . . 74

5.13. Estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$ ,  $z_{i,3}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de los osciladores Chen de orden fraccionario que conforman la red compleja en acoplamiento estrella. . . . . 75

5.14. Redes complejas en topología irregular. a) Red con oscilador maestro en  $N_{10}$ , b) red sin oscilador maestro. . . . . 76

5.15. Atractor final para la red con acoplamiento irregular sin oscilador maestro con osciladores caóticos Arneodo de orden fraccionario. . . . . 78

5.16. Sincronía de los estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$  para  $i = 1, 2, \dots, 12$  en la red irregular sin oscilador maestro con osciladores caóticos Arneodo de orden fraccionario. . . . . 79

5.17. Plano de fase de los estados  $x_{i,1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de los osciladores caóticos Arneodo de orden fraccionario que conforman la red irregular. . . . . 80

5.18. Atractor final para la red compleja en acoplamiento irregular con oscilador maestro conformada por osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario. . . . . 82

5.19. Sincronía de los estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de la red irregular con oscilador maestro conformado por osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario. . . . . 83

5.20. Plano de fase de los estados  $x_{i,1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de la red irregular conformada por osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario. . . . . 84

6.1. Gráfica de Bode de la función de transferencia  $1/[1 + (\tau_0 s)^m]$ , para  $0 < m < 2$ , con pendiente de  $-20m$  dB/dec y su aproximación con líneas de zig zag con pendientes individuales de  $-20$  dB/dec y  $0$  dB/dec. . . . . 87



|       |  |     |
|-------|--|-----|
| 6.2.  | Circuito eléctrico para la aproximación de $1/s^{0.95}$ . . . . .  | 89  |
| 6.3.  | Circuito eléctrico y comportamiento de los estados del oscilador Liu de orden fraccionario. a) Circuito eléctrico, b) evolución en el tiempo de los estados $x, y, z$ . . . . .  | 90  |
| 6.4.  | Atractores del oscilador Liu de orden fraccionario. a) Plano de fase $x - y$ , b) plano de fase $x - z$ , c) plano de fase $y - z$ . . . . .   | 91  |
| 6.5.  | Red compleja regular de 4 osciladores Liu en acoplamiento global. . . . .  | 91  |
| 6.6.  | Subcircuito que contiene al oscilador Liu de orden fraccionario. . . . .   | 92  |
| 6.7.  | Subcircuitos de los osciladores Liu de orden fraccionario y leyes de control para cada uno. a) Oscilador 1 y ley de control $u_1$ , b) oscilador 2 y ley de control $u_2$ . . . . .  | 93  |
| 6.8.  | Circuitos Liu de orden fraccionario. a) oscilador 3 y ley de control $u_3$ , b) oscilador 4 y ley de control $u_4$ . . . . .   | 94  |
| 6.9.  | Plano de fase de la red compleja en acoplamiento global con osciladores Liu de orden fraccionario. $y_1 - y_2, y_1 - y_3, y_1 - y_4, y_2 - y_3, y_2 - y_4, y_3 - y_4$ . . . . .  | 95  |
| 6.10. | Estados $y_1, y_2, y_3, y_4$ de los sistemas Liu de orden fraccionario en la red global. a) Estados $y_1, y_2, y_3, y_4$ en un tiempo de 2 ms, b) estados $y_1, y_2, y_3, y_4$ en un tiempo de 5 s. . . . .  | 96  |
| 6.11. | Atractores obtenidos en la red global con osciladores Liu de orden fraccionario. a) Atractor de los estados $x_1 - y_1$ , b) atractor de los estados $x_2 - y_2$ , c) atractor de los estados $x_3 - y_3$ , d) atractor de los estados $x_4 - y_4$ . . . . .                   | 97  |
| 6.12. | Circuito del oscilador Financiero orden fraccionario 2.85 y la medición de sus estados. a) Circuito esquemático, b) evolución en el tiempo de los estados $x, y, z$ del oscilador Financiero de orden fraccionario. . . . .  | 99  |
| 6.13. | Planos de fase del oscilador Financiero de orden fraccionario. a) Atractor de los estados $x - y$ , b) atractor de los estados $x - z$ , c) atractor de los estados $y - z$ . . . . .  | 100 |
| 6.14. | Red compleja de 4 osciladores con acoplamiento anillo. . . . .   | 101 |
| 6.15. | Circuitos eléctricos de los osciladores Financieros de orden fraccionario que conforman la red anillo. a) Oscilador 1 y ley de control $u_1$ , b) oscilador 2 y ley de control $u_2$ , c) oscilador 3 y ley de control $u_3$ , d) oscilador 4 y ley de control $u_4$ . . . . . | 102 |
| 6.16. | Plano de fase con los estados $x_i$ , donde $i = 1, 2, 3, 4$ , de la red con acoplamiento anillo. $x_1 - x_2, x_1 - x_3, x_1 - x_4, x_2 - y_3, x_2 - x_4, x_3 - x_4$ . . . . .   | 103 |

|  |     |
|--|-----|
| 6.17. Estados $x_i$ , para $i = 1, 2, 3, 4$ de los osciladores Financiero que conforman la red anillo. a) Estados $x_1, x_2, x_3, x_4$ simulados en un tiempo de 2 ms, b) estados $x_1, x_2, x_3, x_4$ simulados en un tiempo de 12 s. . . . .   | 104 |
| 6.18. Atractores obtenidos con la red anillo con osciladores Financieros de orden fraccionario. a) Atractor de los estados $x_1 - y_1$ , b) atractor de los estados $x_2 - y_2$ , c) atractor de los estados $x_3 - y_3$ , d) atractor de los estados $x_4 - y_4$ . . . . .  | 105 |
| 6.19. Circuito y estados $x, y, z$ del oscilador Lü de orden fraccionario. a) Circuito eléctrico, b) evolución en el tiempo de los estados $x, y, z$ . . . . .   | 107 |
| 6.20. Planos de fase del oscilador Lü de orden fraccionario. a) Atractor de los estados $x - y$ . b) Atractor de los estados $y - z$ . c) Atractor de los estados $x - z$ . . . . .  | 108 |
| 6.21. Red con acoplamiento estrella de 5 nodos. . . . .  | 109 |
| 6.22. Circuito eléctrico de una red compleja en acoplamiento estrella formada con osciladores de Lü de orden fraccionario. a) Oscilador 1 y ley de control $u_1$ , b) oscilador 2 y ley de control $u_2$ , c) oscilador 3 y ley de control $u_3$ , d) oscilador 4 y ley de control $u_4$ , e) oscilador 5 y ley de control $u_5$ . . . . . | 110 |
| 6.23. Plano de fase de la red estrella con osciladores Lü de orden fraccionario. $x_1 - x_2$ , $x_1 - x_3$ , $x_1 - x_4$ , $x_1 - x_5$ , $x_2 - x_3$ , $x_2 - x_4$ , $x_2 - x_5$ , $x_3 - x_4$ , $x_3 - x_5$ , $x_4 - x_5$ . . .   | 111 |
| 6.24. Atractores obtenidos en la red anillo con osciladores Lü de orden fraccionario. a) Atractor $x_1 - z_1$ , b) atractor $x_2 - z_2$ , c) atractor $x_3 - z_3$ , d) atractor $x_4 - z_4$ , e) atractor $x_5 - z_5$ . . . . .  | 112 |
| 6.25. Circuito y evolución de los estados del oscilador Rössler de orden fraccionario. a) Circuito eléctrico, b) estados $x, y, z$ del oscilador Rössler de orden fraccionario. . . .  | 114 |
| 6.26. Planos de fase del oscilador Rössler de orden fraccionario. . . . .  | 115 |
| 6.27. Red irregular con 5 nodos donde el oscilador maestro es el oscilador 1. . . . .  | 115 |
| 6.28. Circuito eléctrico de una red compleja en acoplamiento irregular formada con osciladores de Rössler de orden fraccionario. a) Oscilador 2 y ley de control $u_2$ , b) oscilador 3 y ley de control $u_3$ , c) oscilador 4 y ley de control $u_4$ , d) oscilador 5 y ley de control $u_5$ . . . . .                                   | 117 |
| 6.29. Plano de fase para la red compleja irregular con osciladores Rössler de orden fraccionario. $y_1 - y_2$ , $y_1 - y_3$ , $y_1 - y_4$ , $y_1 - y_5$ , $y_2 - y_3$ , $y_2 - y_4$ , $y_2 - y_5$ , $y_3 - y_4$ , $y_3 - y_5$ , $y_4 - y_5$ . . . . .  | 118 |

6.30. Atractores obtenidos en la red irregular con osciladores Rössler de orden fraccionario.

a) Atractor  $x_1 - z_1$ , b) atractor  $x_2 - z_2$ , c) atractor  $x_3 - z_3$ , d) atractor  $x_4 - z_4$ , d)  
atractor  $x_5 - z_5$ . . . . . 119

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se encuentra una introducción general acerca de este trabajo y la motivación para su realización. Se dan a conocer los objetivos tanto general como específicos de este trabajo de tesis, así como también, la organización de este manuscrito para así dar una vista general del contenido del documento.

### 1.1. Introducción general

Este trabajo de tesis involucra varios conceptos tales como el de *sincronía*, *caos* y *osciladores de orden fraccionario*, por lo que de forma breve se dará una introducción a cada uno de estos conceptos y en capítulos posteriores, dar sus definiciones formales así como adentrar en sus características principales.

#### 1.1.1. Sincronía. Antecedentes Históricos

La palabra *sincronía* proviene de la etimología griega *syn* que significa *con, a la vez* y de la mitología griega *Chronos* (*Χρόνος*) que significa *tiempo*. En conjunto, el término se refiere a la coincidencia en el tiempo de ciertos sucesos o fenómenos.

Éste fenómeno de la sincronía fue registrado en 1665 por el físico Christiaan Huygens, quien pudo observar dos relojes de péndulo que tenía en la pared de su habitación sostenidos por medio de una viga, tal como se muestra en la Fig. 1.1. Al escuchar el tic-tac de los relojes se dio cuenta que estos estaban sincronizados y escuchaba los sonidos al unísono, para tratar de explicar lo que sucedía pidió mover uno de los relojes a una habitación distinta y pudo comprobar, al transcurrir el tiempo, que los relojes ya no se encontraban sincronizados. También observó que si alguno de ellos era perturbado momentáneamente estos volvían a sincronizar sus movimientos en un periodo de tiempo corto. Con este experimento pudo concluir que ambos relojes sincronizaban sus movimientos por medio de vibraciones imperceptibles a través de la viga. Esto esbozó por primera vez la explicación de osciladores acoplados.

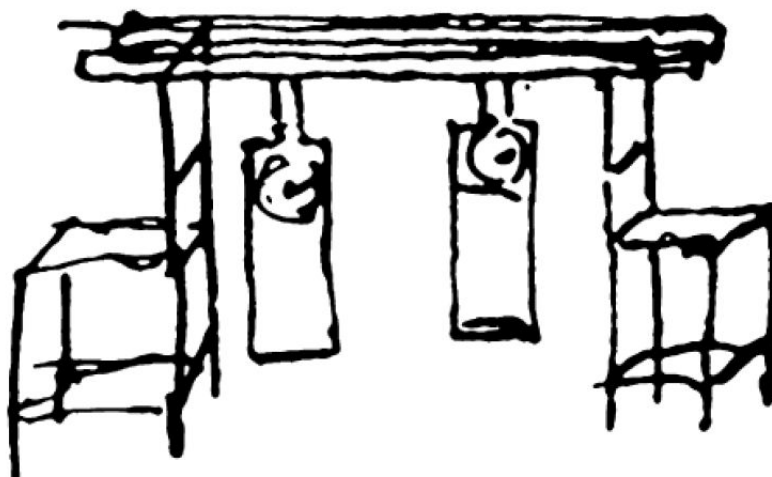


Figura 1.1: Relojes de péndulo en los que Christiaan Huygens observó el fenómeno de sincronía.

La sincronía fue tomando gran relevancia con el paso de los años ya que ésta se encuentra presente en muchos procesos de la naturaleza y por esto es importante comprenderla. Puede observarse por ejemplo, en el cuerpo humano en donde la sincronía interviene en procesos metabólicos en las células o en la sincronía entre los núcleos y células de tumores malignos; en la sincronización de oscilaciones eléctricas y electromagnéticas y en la autosincronización de generadores eléctricos. En la naturaleza

se observa el fenómeno de sincronía en los grupos de luciérnagas machos que logran sincronía en sus frecuencias para emitir un solo pulso de luz, lo cual es muy parecido a los grupos de grillos que sincronizan sus sonidos en uno solo. En el comportamiento humano también es observada la sincronía, en grupos de personas actuando a un ritmo inconsciente o cuando un grupo de individuos aplauden y terminan haciéndolo con la misma sincronía. En la tecnología se observa este comportamiento en robots que trabajan para realizar una misma tarea o en la sincronía de dispositivos electrónicos. Como se observa, la sincronía está inmersa en áreas como la biología, mecánica, ecología, sociología, tecnología, entre otras. En la Fig. 1.2 se muestran dos casos de sincronización, la primera imagen es de dos robots que realizan una misma tarea, y requieren estar sincronizados. La segunda imagen es un caso en la naturaleza cuando se observan dos aves que se sincronizan al correr.



(a)

(b)

Figura 1.2: Ejemplos de sincronía. a) Robots en sincronía para realizar una tarea en común, b) Aves sincronizadas en sus movimientos al correr.

La sincronización se refiere a que un conjunto de sistemas ya sean idénticos o no, manifiesten un mismo comportamiento a través de un medio acoplante apropiado entre ellos. Una de las ventajas del estudio de la sincronización es que por medio de ésta se pueden entender las topologías de las redes complejas así como conocer mejor las propiedades emergentes en las redes.

En sistemas caóticos, la sincronización ha tomado gran importancia debido a que se ha demostrado que se pueden obtener comportamientos deseados por medio de señales de control que pueden ser muy

débiles. La sincronía de estos sistemas se ha empleado en aplicaciones de ciencia e ingeniería tales como dispositivos electrónicos, encriptado de información, en medicina, entre otros. Ahora bien, se dará un breve introducción acerca del *caos*.

La palabra caos deriva del griego  $X\acute{\alpha}\omicron\varsigma$  que significa *abertura* y generalmente la asociamos a un comportamiento desordenado, sin embargo, este comportamiento está bien definido por ecuaciones que lo hacen de naturaleza determinística, es aperiódico y es extremadamente sensible a las condiciones iniciales. En 1963, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz introdujo el término de atractores extraños y el de efecto mariposa, siendo uno de los pioneros de la teoría del caos. Lorenz intentaba predecir el comportamiento de la atmósfera por medio de un modelo matemático y al observar las soluciones de este, se dio cuenta de que si había cambios muy pequeños en sus condiciones iniciales, las soluciones que obtenía eran completamente divergentes. El atractor de este sistema es conocido como el atractor de Lorenz. Con su descubrimiento creció el interés en el estudio de los sistemas caóticos. En la Fig. 1.3 se muestra el atractor de Lorenz.

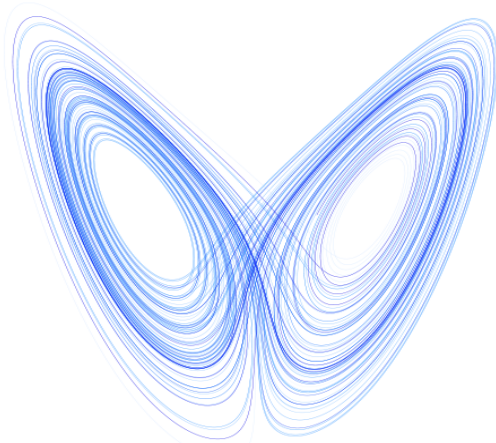


Figura 1.3: Atractor de Lorenz.

Con el tiempo se descubrieron más sistemas caóticos tanto en circuitos como en sistemas que modelan eventos de la naturaleza, por ejemplo el circuito de Chua, el oscilador caótico de Rössler, el

oscilador caótico Financiero, oscilador caótico de Lü y Liu, entre otros.

Con la exploración de estos sistemas, la comunidad científica observó que dos osciladores en régimen caótico podían ser sincronizados, por lo que en 1990 Pécora y Carroll realizan la primera sincronía entre sistemas de este tipo [2], demostrando así, que los osciladores caóticos pueden sincronizarse por medio de señales de control muy débiles y así obtener comportamientos deseados. Más tarde, se hizo viable utilizarlos en comunicaciones seguras debido a su sensibilidad extrema a las condiciones iniciales [3, 4].

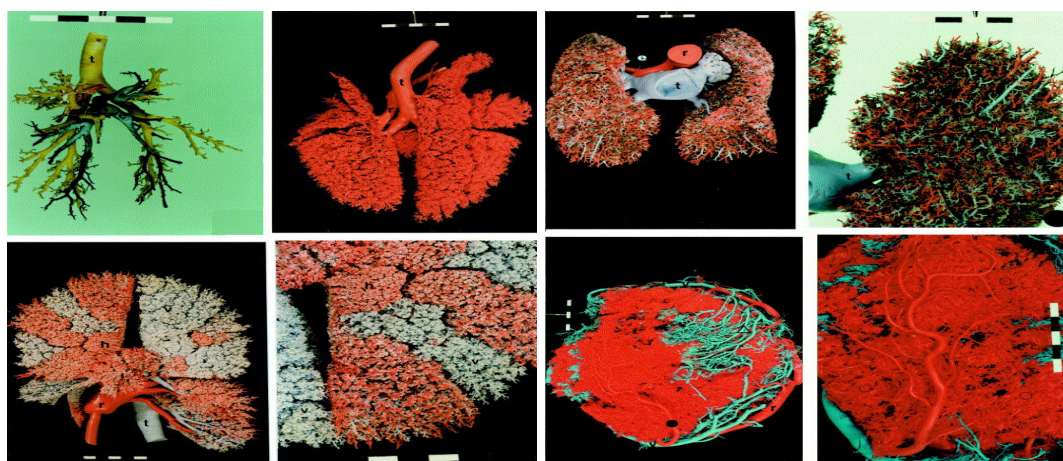
Se han escrito numerosos trabajos acerca de la sincronización de osciladores caóticos utilizando diferentes métodos de control con el fin de sincronizar dos osciladores ya sean idénticos o no. Entre algunos de ellos podemos encontrar control no lineal [5], control activo [6], backstepping [8], control adaptivo [9], entre otros.

La complejidad de los sistemas aumentó cuando se descubrió que los osciladores caóticos pueden conservar el régimen caótico siendo de orden fraccionario, ya que era bien conocido que el caos sólo se mostraba en osciladores con al menos un tercer orden. El concepto de la derivada de orden fraccionario nace desde 1695 cuando L'Hopital y Leibniz se plantean que significado tendría si  $D^n f$  si  $n$  fuera una fracción. Desde entonces, muchos matemáticos tales como Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, entre otros, han hecho contribuciones a la teoría del cálculo fraccionario. Por muchos años las derivadas fraccionarias no fueron utilizadas principalmente por la ausencia de métodos para resolver tales ecuaciones diferenciales.

La teoría del cálculo fraccionario tiene más de 300 años pero en los últimos veinte ha tenido una mayor atención en física así como en matemáticas porque algunos eventos en la naturaleza pueden ser modelados con derivadas de orden fraccionario. Se han observado en muchos sistemas biológicos, por ejemplo, las derivadas de orden fraccionario pueden determinar el intervalo en los latidos del corazón en los humanos. En la naturaleza pueden describir la ramificación de los árboles y también



se observan en el crecimiento de copo de nieve. Se observan formas fractales en el sistema vascular y respiratorio tanto de humanos como en animales, ejemplos de estos se muestran en la Fig. 1.4 tomado de [15]. La aplicación de esta teoría ha sido encontrada en muchos campos de la ciencia e ingeniería, por ejemplo mecánica, física, electrónica, medicina, ecología o economía. Algunas de estas aplicaciones son viscoelasticidad, polarización dieléctrica, finanzas cuantitativas, sismología, procesamiento y manipulación de imágenes. La ventaja de las derivadas de orden fraccionario es que permite un mejor modelado en áreas de mecánica y para las propiedades eléctricas de materiales reales.



(a)

(b)

Figura 1.4: Sistema microvascular respiratorio que muestra naturaleza fractal. a) Pulmones de un conejo, b) Pulmones de un humano.

Como ya se mencionó anteriormente, el estudio de la sincronización de osciladores caóticos tomó gran fuerza en los últimos veinte años y recientemente se ha estudiado utilizando osciladores caóticos de orden fraccionario. Ésta es investigada debido a su aplicación potencial en comunicaciones seguras, procesos de control, descripción de procesos químicos y biológicos. Además se ha encontrado caos en muchos de los osciladores que ya se habían estudiado con orden entero como los osciladores de Lorenz, Rössler, circuito de Chua, oscilador Volta, entre otros.

Una de las principales ventajas de los osciladores de orden fraccionario es que sus variables pueden ajustarse a distintos valores y conservar el régimen caótico para distintos valores en sus derivadas y diferentes parámetros. Esto permite, por ejemplo, que en encriptamiento de información exista un espacio de claves mas amplio.

Se han propuesto varios métodos para lograr sincronización entre dos osciladores caóticos de orden fraccionario por ejemplo vía control no lineal [5], control activo [6], control backstepping [8], entre otros. Estos métodos son efectivos pero en algunos casos el diseño es muy complejo y se incluye la ley de control en varios estados del oscilador además de que en la mayoría de los casos, la sincronización es llevada a cabo solo con dos osciladores.

En este trabajo se busca aplicar una ley de control a  $N$  número de osciladores idénticos con condiciones iniciales distintas y lograr la sincronización con una sola ley de control en el oscilador pero que a su vez ésta sea efectiva. Se hace uso de la teoría de grafos para redes complejas en la sincronización de sistemas dinámicos no lineales que tienen un comportamiento caótico pero además son de orden fraccionario. A continuación, se definen los objetivos general y particulares de este trabajo de investigación.

## **1.2. Objetivo general**

El objetivo de este trabajo es contribuir a la sincronización de redes complejas compuestas por osciladores caóticos de orden fraccionario. Estos sistemas tienen dinámicas extremadamente complejas debido al régimen caótico y cuentan con la particularidad de que sus ecuaciones diferenciales son de orden fraccionario. Se busca lograr la sincronización empleando las características y propiedades de los sistemas cooperativos en los cuales se refiere al trabajo cooperativo como la realización de una acción coordinada de varios participantes involucrados en una tarea.

Como objetivos particulares se tienen los siguientes:

### 1.2.1. Objetivos particulares

- 1) Explorar las diferentes técnicas y aplicaciones para sincronizar redes complejas, formadas por osciladores caóticos de orden fraccionario (sistemas no lineales) con dinámicas extremadamente complejas: de dimensión infinita, con atractores de múltiples enrollamientos.
- 2) Sincronizar redes complejas dispuestas en una topología de acoplamiento regular (acoplamiento global, estrella y anillo) e irregular (redes con un patrón de acoplamiento no definido), formadas por osciladores caóticos de orden fraccionario.
- 3) Estudio de la sincronía de redes complejas mediante un software de circuitos electrónicos.

## 1.3. Organización del trabajo

El contenido de esta tesis está organizado en siete capítulos de la siguiente manera: en el capítulo **uno** se da una pequeña introducción acerca de este trabajo así como los objetivos que se buscan cumplir. En el capítulo **dos** se profundiza en el tema de redes complejas, donde se detallan las topologías de las redes complejas y sus propiedades. Así mismo, se describe el método que se utilizó para lograr la sincronización de las redes complejas de este trabajo.

En el capítulo **tercero** se trata el tema de sincronización y los aspectos y condiciones necesarias para que esta sea lograda en una red compleja.

En el **cuarto** capítulo, se muestran los preliminares matemáticos acerca de la derivada de orden fraccionario así como las propiedades de los sistemas lineales y no lineales de orden fraccionario. Se aborda el tema de caos y de como éste también está presente en osciladores de orden fraccionario. A su vez, se muestran los osciladores caóticos de orden fraccionario que se utilizaron para realizar las pruebas de sincronización.

En el **quinto** capítulo se muestran los resultados de sincronización considerando las topologías tanto regular como irregular, además de que se muestra la sincronización para diferentes casos de osciladores caóticos de orden fraccionario.

Se realizan además, diferentes circuitos de estos osciladores caóticos de orden fraccionario por medio de una aproximación lineal y se realiza también la sincronización de las redes en ambas topologías. Esto se muestra en el capítulo **sexto**. Por último, el capítulo **séptimo** está dedicado a las conclusiones de este trabajo así como a futuros trabajos que pudieran realizarse para dar solución a problemas abiertos o que no han sido explorados pero que son importantes de estudiar.

# Capítulo 2

## Redes complejas

En los últimos años se ha incrementado el interés por el estudio de las propiedades y dinámicas de las redes complejas, principalmente porque este tipo de sistemas se encuentran presentes en la naturaleza. Se encuentran por ejemplo, las redes de regulación genética, redes de proteínas o redes metabólicas en los sistemas biológicos. La red Internet, redes telefónicas o la WWW (*World Wide Web*) forman parte de las redes de comunicaciones. En las redes sociales se encuentran por ejemplo, la propagación de enfermedades, colaboradores científicos o las amistades.

Las propiedades de estas redes, a pesar de que su naturaleza sea distinta, tienen entre sí muchas similitudes en su estructura y sus propiedades. Debido a esto es que se han podido desarrollar herramientas para comprender la estructura así como las dinámicas de las mismas. La importancia de comprender el funcionamiento de las redes complejas es debido a que la estructura de éstas afecta a la dinámica del sistema y se busca además la comprensión de las dinámicas emergentes de los sistemas que conforman estas redes.

En este capítulo se aborda el tema de redes complejas, sus características principales y las topologías que se utilizan en este trabajo de tesis. Se exponen los antecedentes matemáticos que ayudarán a la comprensión de las dinámicas de las redes complejas. Se contemplan además las topologías de las

redes bajo dos esquemas, con y sin nodo maestro. En este trabajo de tesis se consideran solo osciladores idénticos conformando a las redes complejas. Para concluir el capítulo se ejemplifican algunas redes complejas presentes en la naturaleza y la vida cotidiana.

## 2.1. Definiciones

Existen sistemas compuestos por un gran número de elementos que interactúan juntos, provocando que emerjan propiedades diferentes a las que constituyen a estos elementos y son llamadas *dinámicas emergentes*. Como ejemplo se puede tomar a las neuronas. Como tal, una neurona no está dotada de inteligencia pero al interactuar muchas de ellas emerge una nueva dinámica en el sistema nervioso y es lo que se conoce como la mente [16].

Desde el punto de vista matemático, una red puede ser modelada formalmente por medio de un grafo [11], de la siguiente forma:

**Definición 2.1.1.** Una red  $R$  consiste de un conjunto de nodos  $V = v_1, v_2, \dots, v_N$ , y un conjunto de parejas ordenadas  $V = (v_i, v_j) \subset V \times V$ . Cada pareja ordenada  $(v_i, v_j)$  se llama conexión dirigida del nodo  $v_i$  al nodo  $v_j$ . La red  $R$  se llama **no dirigida** si para cada pareja  $(v_i, v_j) \in V$  también existe la pareja  $(v_j, v_i) \in V$ . De lo contrario a la red se le llama **dirigida**. A los nodos que están directamente conectados a un nodo  $v_i$  se les llama **vecinos**. Finalmente, el número de  $k_i$  de vecinos del nodo  $v_i$ , es decir, el número de conexiones de  $v_i$  se le llama **conectividad** de  $v_i$  y el promedio de estas conectividades,  $(k) = N^{-1} \sum_{i=1}^N k_i$  es la **conectividad de la red**, donde  $N$  denota al número de nodos que existen en la red.

El término de *complejidad* puede referirse a la naturaleza de los nodos o a la estructura de la red. Por naturaleza de los nodos se entiende como discreta o continua, es decir, que son sistemas modelados por ecuaciones en diferencias (sistemas discretos) o bien modelados por ecuaciones diferenciales (sistemas continuos). Por la estructura de la red se refiere las topologías o bien, a la forma en que las conexiones modelan a estas topologías.

Se considera a una *red* como un conjunto de nodos interconectados y se conoce como *nodo* al elemento básico o unidad fundamental de la red el cual es un punto de conexión entre dos o más nodos. Los nodos que conforman la red compleja pueden ser por ejemplo, sistemas con dinámicas no lineales y extremadamente complejas como circuitos caóticos o hipercaóticos, láseres, redes neuronales caóticas o como en este caso, *osciladores caóticos de orden fraccionario*.

Algunos puntos importantes de los sistemas complejos son los siguientes:

- Las redes complejas están compuestas de muchos nodos que interactúan entre sí para lograr un fin común.
- Lo que ocurra con un nodo puede afectar a toda la red.
- Si no existe un nodo maestro, las dinámicas de la red van a tender a un nuevo atractor obteniéndose una dinámica emergente.

Para ejemplificar esto puede considerarse una célula, la cual está compuesta de muchas partes como núcleo, membrana, ADN o proteínas. Cada una de las partes de la célula se encarga de realizar alguna función específica. Puede suceder alguna mutación en el ADN sin afectar a la célula pero en otras ocasiones esto puede ser fatal. Los comportamientos de la célula no pueden explicarse en términos de las propiedades de cada una de las partes individuales, de este modo, se puede decir que la célula ha enfermado pero no referirse a un núcleo o membrana enfermos ya que como resultado de la organización colectiva de todas las partes emerge la enfermedad.

## **2.2. Topologías en las redes complejas.**

En este contexto, se define a la topología a la forma en que están acoplados o conectados los nodos que conforman a la red compleja. Existen dos grupos dentro de las redes dinámicas complejas,

el primero son las *redes complejas regulares* y el segundo las *redes complejas irregulares*. Estas se definen de acuerdo a la disposición de los nodos o a su forma de conectar. Las redes regulares siguen un patrón definido en la forma en que conectan sus nodos, además, existen tres diferentes escenarios de acoplamiento que más adelante serán descritos. Las redes irregulares tienen un acoplamiento aleatorio, es decir, no siguen un patrón definido en la conexión de sus nodos.

En este trabajo, se consideran tanto redes complejas regulares como irregulares abordando dos escenarios, uno de ellos con nodo maestro. Esto es, que existe un nodo que impone la dinámica caótica a los demás nodos. El segundo escenario es sin nodo maestro, es decir, que la dinámica final a la que convergen todos los nodos es emergente, distinta a cualquiera de las existentes en la red.

### **2.2.1. Topología Regular.**

Dentro del grupo de las redes regulares las configuraciones comúnmente estudiadas son las de redes con acoplamiento global, redes con acoplamiento anillo y redes con acoplamiento estrella. En este trabajo de tesis se consideran estos tres tipos de redes sin nodo maestro y con osciladores caóticos de orden fraccionario idénticos.

#### **Acoplamiento Global**

En este tipo de redes dos nodos cualquiera están conectados directamente, es decir, cada uno de sus nodos tiene una conexión con el resto de los nodos. En esta red todos los nodos se encuentran conectados.



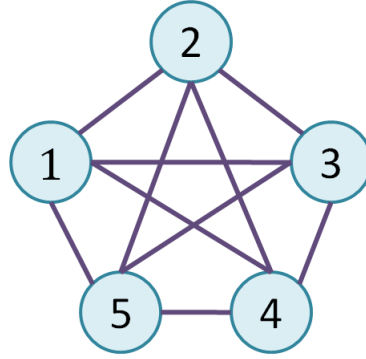


Figura 2.1: Red compleja en acoplamiento global con  $N = 5$  sin nodo maestro.

En este caso cada nodo  $i$  está conectado con  $N - 1$  nodos. Los elementos de la matriz Laplaciana tienen casi las mismas propiedades que 2.2.10 pero en este caso  $d_1 = d_2 = \dots = N - 1$ . De forma generalizada la matriz Laplaciana o matriz de acoplamiento  $A_{gc}$  para el caso global toma la siguiente forma

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -N + 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -N + 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

Otra diferencia notable es el signo en cada uno de los elementos de la matriz, en las matrices de acoplamiento ya sea global, así como anillo y estrella que se verán más adelante, es necesario invertir los signos ya que se logra una sincronización más estable mientras los valores propios del sistema sean más negativos [40].

En esta matriz la suma de los elementos de las columnas es cero. Además los valores propios se encuentran uno de ellos en cero y los demás en  $-N$ . El segundo valor propio mayor de esta matriz  $A_{gc}$  es  $\lambda_{2gc} = -N$  que tiende a  $-\infty$  esto es,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{2gc} = -\infty. \quad (2.2.2)$$

## Acoplamiento anillo

Esta configuración tiene sus nodos acomodados en forma de anillo y acoplados cada uno a sus más cercanos, esto es, cada nodo  $i$  es adyacente a los nodos vecinos  $i \pm 1, i \pm 2, i \pm K/2$  donde  $K$  es un número par. En la Fig. 2.2 se muestra un ejemplo de una red de este tipo.

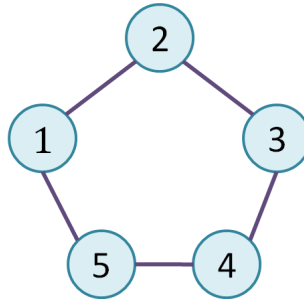


Figura 2.2: Red compleja en acoplamiento anillo con  $N = 5$  sin nodo maestro.

Las matrices de grado y adyacencia se calculan del mismo modo que para redes irregulares con la particularidad de que cada nodo  $i$  está conectado a su nodo vecino. Tomando como caso particular  $K = 2$ , entonces  $d_1 = d_2 = \dots = d_N = K$ . De forma generalizada la matriz de acoplamiento anillo  $A_{nc}$  está definida como sigue

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & -k \end{pmatrix}. \quad (2.2.3)$$

Para este caso, la suma de los elementos de las columnas de la matriz  $A_{nc}$  es cero.

Para esta red, el segundo valor propio mayor puede ser encontrado por medio de

$$\lambda_{2nc} = -4 \sum_{j=1}^{\frac{K}{2}} \sin^2\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad (2.2.4)$$

para un valor fijo de  $K$ ,  $\lambda_{2nc}$  se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{2nc} = 0. \quad (2.2.5)$$

### Acoplamiento estrella

En este tipo de acoplamiento se tiene un nodo central al cual todos están conectados. En la Fig. 2.3 se muestra una red de esta clase.

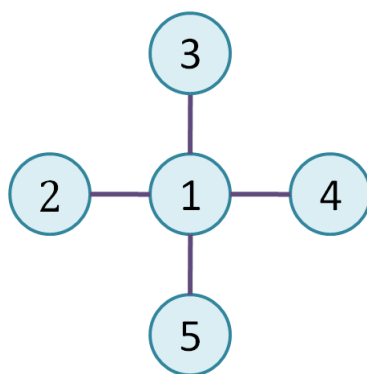


Figura 2.3: Red compleja en acoplamiento anillo con  $N = 5$  sin nodo maestro.

Nuevamente las matrices de grado y adyacencia se calculan como en los casos anteriores. De forma general se define la matriz de acoplamiento estrella  $A_{st}$  como

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -N + 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

En este caso también la suma de los elementos en las filas de la matriz  $A_{st}$  resultan cero. Los valores propios de la matriz se encuentran en  $0, -N, -1, \dots, -1$ . Su segundo valor propio mayor es

$$\lambda_{2nc} = -1. \quad (2.2.7)$$

Como caso particular, en esta clase de redes el valor del segundo valor propio  $\lambda_{2nc}$  no depende del número de nodos de la red.

### 2.2.2. Topología Irregular.

La estructura de estas redes no sigue un patrón definido en la forma en que conectan sus nodos. Ejemplos de este tipo de redes son el Internet donde cada router puede ser un nodo, el cerebro en el cual las neuronas son los nodos o en el WWW que tiene como nodos a las páginas. En la Fig. 2.4 se muestra una red de 8 nodos en topología irregular.

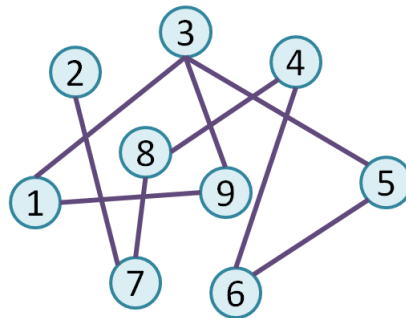


Figura 2.4: Red con topología irregular de 8 nodos ( $N = 8$ ).

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, que consiste de  $N = |V|$  nodos, con  $V = V(G) = v_1, v_2, \dots, v_N$  el conjunto de nodos y  $M = |E|$  conexión entre nodos, donde  $E = E(G) = e_1, e_2, \dots, e_M$  representa el conjunto de conexiones.

Para las redes complejas, son importantes dos matrices asociadas a un grafo  $G$ . La primera es la *matriz de adyacencia*  $A(G)$  y la segunda es la *matriz de grado*  $D(G)$ . A continuación se define cada una de ellas y sus propiedades.

i) **Matriz de adyacencia  $A(G)$ .** Matriz  $N \times N$  en la cual los elementos  $a_{ij}$  están dados de la

siguiente forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G) \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (2.2.8)$$

donde  $(i, j) \in E(G)$  implica que el nodo  $i$  está conectado con el nodo  $j$ . Si existe un grafo simple sin autoconexiones entonces la matriz de adyacencia tendrá ceros en su diagonal principal.

ii) **Matriz de grado  $D(G)$ .** Esta matriz tiene una dimensión  $N \times N$  donde los elementos  $d_{ij}$  están dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{de otra forma,} \end{cases} \quad (2.2.9)$$

donde  $d_i$  es el grado del nodo  $i$ . Para redes irregulares donde no existe un patrón definido en las conexiones de sus nodos, se tiene que  $d_i$  es la suma de los elementos de la fila  $i$  de la matriz de adyacencia  $A(G)$ .

Utilizando estas dos matrices puede formarse la matriz laplaciana para un grafo  $L(G)$  con  $N$  nodos y una dimensión de  $N \times N$ , la cual está definida como  $L(G) = D(G) - A(G)$ , con elementos  $l_{ij}$  definidos como

$$l_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in E(G), \\ d_i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (2.2.10)$$

La matriz Laplaciana  $L(G)$  no toma una forma definida cuando se trata de redes irregulares, esto solo es posible para redes regulares como se verá más adelante, por lo que sus propiedades dependen del tipo de acoplamiento.

Considere la red de la Fig. 2.5

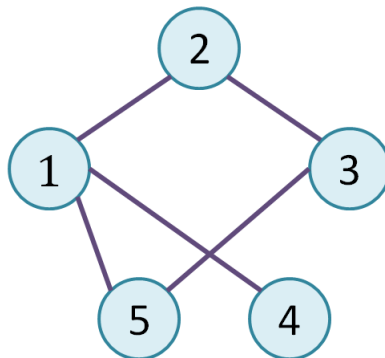


Figura 2.5: Red compleja de 5 nodos, ( $N = 5$ ) en topología irregular sin nodo maestro.

La matriz Laplaciana que define las conexiones entre los nodos es la siguiente

$$L(G) = D(G) - A(G),$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.11)$$

El ejemplo que se presenta en esta sección no tiene un nodo maestro, sino que todos los nodos reciben y envían información hacia los nodos con los que tienen conexión. En la siguiente sección se presenta el caso de red irregular pero con nodo maestro.

### Caso redes complejas irregulares con nodo maestro.

Cuando existe un nodo aislado en la red quiere decir que este nodo no recibe influencia de los nodos con los cuales tiene conexión, únicamente envía información a los nodos y si la sincronización es alcanzada entonces se impone la dinámica de este a toda la red y el atractor al que tiende el sistema

es al del nodo maestro. Así como en el caso donde no existe nodo maestro, la matriz Laplaciana no toma forma definida.

A continuación un ejemplo para determinar la matriz Laplaciana. De acuerdo a la Fig. 2.6 se tiene una red de 5 nodos con nodo maestro en  $N_3$ .

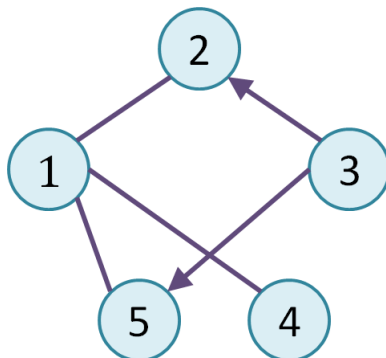


Figura 2.6: Red compleja de 5 nodos, ( $N = 5$ ) en topología irregular con nodo maestro.

Para este caso

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.12)$$

La única diferencia entre la matriz Laplaciana del caso sin nodo maestro y la de nodo maestro, es que se colocan ceros en la fila correspondiente al nodo maestro, esto es para que este nodo no reciba información sino que solo envíe.

### 2.2.3. Ejemplos de redes en la naturaleza.

En la naturaleza se pueden encontrar muchos tipos de redes y conexiones. Están presentes en diferentes campos de la ciencia como biología, química, ingeniería e incluso en la sociedad. Dichos sistemas están presentes en procesos de la naturaleza y otros han sido creados con el fin de transmitir información. Las redes regulares pueden encontrarse en reacciones termodinámicas donde intervienen las moléculas, en la piel de los animales donde los nodos son las células o en comunidades animales con nodos como termitas u hormigas. En el caso de redes irregulares, que son más complejas, se encuentran en el Internet con enrutadores como elementos de sus redes, regulación de genes por medio de proteínas o en el cerebro con neuronas como sus nodos [14]. En esta sección se describen algunas redes complejas que suelen ser las más comunes.

#### 1. Redes bioquímicas.

Las redes bioquímicas se refieren a las redes de interacción de genes, proteínas u otras moléculas y su regulación celular u orgánica. Con el estudio de las redes complejas, la biología moderna ha podido explicar tanto la funcionalidad de una célula individual así como las interacciones y las dinámicas que producen al estar interconectadas varias de ellas para realizar una actividad en común, formando por ejemplo, órganos como el corazón, cerebro o pulmones. Esto es importante ya que permite conocer la relación que tienen éstos con otros órganos o procesos del cuerpo humano, como las series de reacciones bioquímicas que convierten la glucosa en moléculas simples.

Un ejemplo es el metabolismo, el cual se encarga de transformar la materia y la energía y esto involucra a los metabolitos (molécula utilizada o producida durante el metabolismo). Estas funciones metabólicas son catalizadas y reaccionadas por enzimas. La mayoría de éstas son proteínas construidas de 20 tipos diferentes de aminoácidos por lo que pueden ser modeladas como una red de aminoácidos y éstos a su vez como una red de átomos, tales como carbono,



nitrógeno y oxígeno [17].

Otro caso son los genes, los cuales se regulan por factores de transcripción (proteínas que normalmente se unen al ADN). Los factores de transcripción se unen a múltiples sitios de unión en un genoma. Como resultado, todas las células tienen redes complejas de regulación de genes [18].

Así como estos, existen más ejemplos en los cuales se involucran múltiples procesos para controlar o regular funciones en el cuerpo humano. En la Fig. 2.7 se muestra un mapa de proteínas que muestra 3200 interacciones de las proteínas de entre 1 y 700 proteínas.

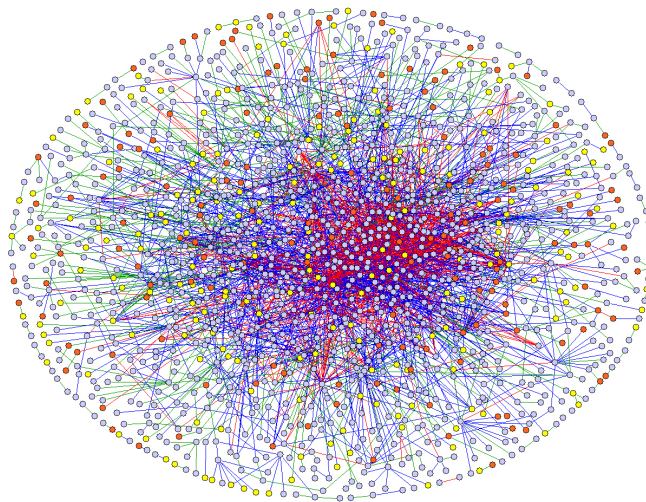


Figura 2.7: Mapa de interacciones de la proteínas humanas creada por científicos de Max Delbrück Center for Molecular Medicine (MDC) Berlin-Buch.

## 2. Redes sociales.

Una red social se compone de individuos o grupos y las relaciones que existen entre ellos. En este caso, los nodos son las personas y las conexiones pueden ser lazos de amistad o bien si pertenecen a una misma familia. En el desarrollo científico se pueden encontrar redes de coautores, las cuales se forman cuando se establece comunicación entre dos científicos al ser coautores de un artículo en común. Una forma de cuantificar estas colaboraciones es mediante

el número de Erdős. Esta es una forma de establecer una relación entre investigadores (vivos o muertos) que han escrito artículos conjuntamente, por lo que el número de Erdős viene a definir una distancia entre estos colaboradores [12].

El análisis de una red social permite conocer las interacciones importantes entre diferentes grupos y la repercusión de estas en la vida cotidiana. Ejemplos de redes sociales son un grupo de amigos que estudian con delincuentes o la cuantificación de las interacciones sociales de células terroristas. También, en el contagio de enfermedades dentro de un grupo de individuos. El estudio de esos fenómenos ayuda a prevenir situaciones que pueden llegar a tener consecuencias catastróficas. En la Fig. 2.8 se muestra una red de individuos [11].

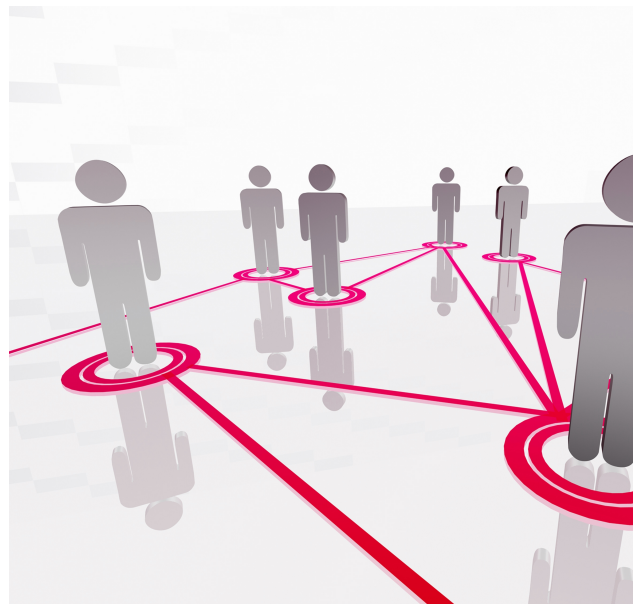


Figura 2.8: Red compleja con interacciones entre individuos (red social).

## 2. Redes en la Ingeniería.

El primer estudio sobre la forma y características y cómo se miraba un mapa de Internet se mostró en 1999 por Faloutsos [19]. En el Internet los nodos están representados por los servidores y como enlaces o conexiones se tiene al cableado, fibra óptica, etc.

Otra de las redes más importantes es la de World Wide Web (WWW), esta es un red formada por hyperlinks entre diferentes páginas Web. Tiene mas de  $10^8$  nodos conocidos. Cada nodo representa a una página Web los cuales tienen un cierto número de links de llegada y también una serie de link que dirigen a otras páginas Web [11].

El Internet y la WWW son redes de gran interés debido a sus grandes dimensiones que permiten un análisis estadístico fiable de sus propiedades topológicas. En la Fig. 2.9 se muestra un mapa de las redes Internet y WWW.

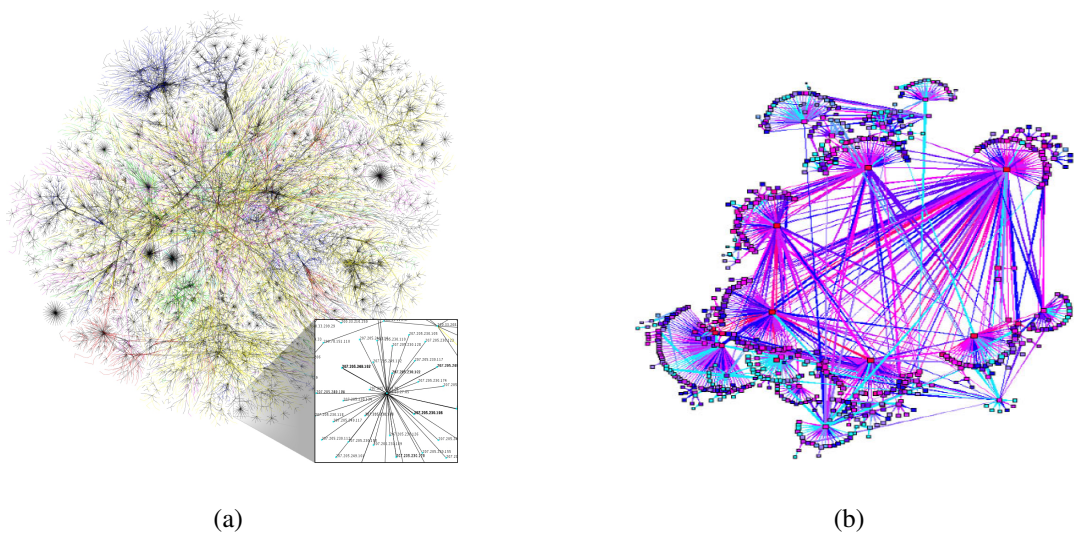


Figura 2.9: Ejemplos de sincronía en la ingeniería. a) Mapa parcial de internet donde cada línea que une a dos nodos representa un enlace entre dos IP, b) Topología jerárquica de la cache de Web internacional.

Las redes de energía y redes eléctricas también son importantes en el área de ingeniería. Por medio del estudio de redes se ha podido demostrar que la complejidad e interconectividad de la infraestructura eléctrica determina la vulnerabilidad de las perturbaciones en la red eléctrica. También se ha podido establecer en la red de sensores, con nodos estocásticos que activando solo un número necesario de nodos sensores en un momento en particular se puede ahorrar energía. Básicamente, el estudio de redes ha servido en este caso para analizar riesgos en las redes de potencia y energía [14].

Existen otras redes complejas que no fueron mencionadas aquí como redes de la ecología, redes neuronales, red de transportes, entre otras. Si el lector quiere profundizar en estos temas se recomienda [11], [14].

# Capítulo 3

## Sincronización de redes complejas

Desde la década de los noventa se ha despertado un gran interés en la sincronización de osciladores caóticos. Fujisaka y Yamada [39] y Pécora y Carroll [2], demostraron que dos osciladores de orden caótico podían ser sincronizados, esto es, que sus oscilaciones coincidan en tiempo y forma. A partir de entonces, se han planteado diversos métodos para la sincronización de osciladores caóticos tales como el método Pécora-Carroll, método OGY o por medio de técnicas de control como control adaptivo, control no lineal, control backstepping, entre otros. Estos se han extendido también a la sincronización de osciladores caóticos de orden fraccionario, aunque usualmente, se hace la sincronización entre dos osciladores ya sean idénticos o de diferente naturaleza. En el caso de este trabajo de tesis, los sistemas a sincronizar son del mismo tipo.

Las aplicaciones en diferentes campos de ciencia e ingeniería han sido muy variadas, se utilizan comúnmente en el encriptamiento para comunicaciones seguras, para modelar sistemas químicos y biológicos, regulación en los latidos del corazón humano, en la ingeniería aplicada a robots, entre muchas otras.

Con el descubrimiento de dinámicas caóticas en osciladores de orden fraccionario, la comunidad científica comenzó a tener interés en la sincronización de esta clase de sistemas. Algunas de las ventajas de utilizarlos es que tienen más grados de libertad al poder ajustar las variables del sistema

lo cual puede aumentar la seguridad en comunicaciones. Una característica muy importante de los sistemas de orden fraccionario es su memoria ilimitada así como también la capacidad de describir las propiedades hereditarias y de memoria de los materiales [20].

En este capítulo se definirá la sincronía, los escenarios de acoplamiento, así como tipos de sincronización existentes para asentar las bases en la comprensión de la sincronización de osciladores caóticos. En el capítulo anterior define al *nodo* como la unidad fundamental de la red compleja, sin embargo, dada la naturaleza de los nodos, para referirse a ellos se les llamará de aquí en adelante *osciladores caóticos de orden fraccionario*. Se muestra también el método que se utilizó para la sincronización de las redes complejas formadas por osciladores caóticos de orden fraccionario y ejemplos de las mismas al final del capítulo.

### 3.1. Sincronía

La palabra sincronía proviene de la etimología griega *syn* que significa *con, a la vez* y de la mitología griega *Chronos* (*Χρόνος*) que significa *tiempo*. En conjunto, el término se refiere a la coincidencia en el tiempo de ciertos sucesos o fenómenos. En este contexto, se define la sincronía como *la propiedad que adquiere un conjunto de objetos, ya sea de una misma especie o de diferentes, de manifestar un comportamiento común que por lo general es diferente a cada una de las dinámicas de los objetos, partiendo además, de comportamientos individuales distintos debido a la presencia de un medio acoplante entre ellos (un medio físico de conexión), siendo este en la mayoría de los casos extremadamente débil* [1].

En el caso de la sincronía de osciladores caóticos de orden fraccionario, estos no tienen una fase o amplitud bien definidos por lo que la idea de la sincronización recae en que al tener dos osciladores caóticos de orden fraccionario o más, con dinámicas que inicialmente evolucionan en forma divergente, al tener un medio de acoplamiento, pueden finalmente seguir una misma trayectoria y

converger en un solo atractor. De manera general, se considera un oscilador caótico de orden fraccionario modelado por las siguientes ecuaciones de estado  ${}_0D_t^q x_m(t) = f(x)$  y el segundo modelado por  ${}_0D_t^q x_e(t) = f(x)$ , donde  $q$  se define como no entero. Se dice que ambos osciladores sincronizan si se cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_m(t) - x_e(t)\| = 0, \quad x_e(0) \neq x_m(0), \quad (3.1.1)$$

donde  $x_m(t)$  y  $x_e(t)$  representan los estados de ambos osciladores caóticos de orden fraccionario. También se define el error de sincronía dado por

$$e(t) = x_m(t) - x_e(t), \quad (3.1.2)$$

Si el error tiende a cero en un tiempo determinado entonces se dice que hay sincronía [7], esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0. \quad (3.1.3)$$

Para un caso ideal, se puede esperar que el error entre los estados sea cero, sin embargo, en el caso de sincronización de osciladores en caso real, el error puede quedar acotado en un valor positivo. Esto sucede debido perturbaciones existentes que afectan a la sincronización.

$$\|x_m(t) - x_e(t)\| \leq \rho, \quad \rho \in R. \quad (3.1.4)$$

Como se mencionó anteriormente, para que la sincronía pueda ser lograda es necesario un medio de acoplamiento que permita una comunicación o interacción entre los osciladores para que fluya la información.

## 3.2. Escenarios de acoplamiento

Generalmente se utilizan dos escenarios de acoplamiento para lograr la sincronización. Para que dos osciladores de cualquier naturaleza puedan sincronizar, es necesario que existan un medio entre ellos que los comunique y que permita el flujo de información. Los dos escenarios más frecuentes se

basan en la forma en que fluye la información. Si ésta solo fluye de un oscilador a otro, es decir, en un solo sentido, se habla de *acoplamiento unidireccional* o maestro-esclavo. En cambio, si la información fluye en ambos sentidos el escenario correspondiente es el de *acoplamiento bidireccional*.

### 3.2.1. Acoplamiento unidireccional

Se consideran dos osciladores caóticos como los mostrados en la Fig. 3.1:

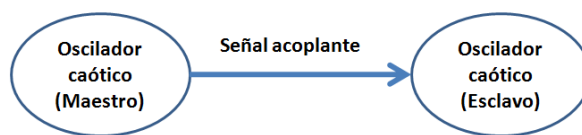


Figura 3.1: Configuración de acoplamiento unidireccional entre dos osciladores caóticos (maestro-esclavo).

Ahora, considere un oscilador maestro definido por  $x_M$  y un oscilador esclavo  $x_S$  con orden fraccionario  $q$ :

$${}_0D_t^q x_M = F(x_M), \quad (3.2.1)$$

$${}_0D_t^q x_S = F(x_S) - c(x_M - x_S). \quad (3.2.2)$$

Bajo este esquema, existe una realimentación del error en el sistema esclavo y el propósito que cumple  $c$ , llamada  *fuerza de acoplamiento* , es el de hacer fuerte o débil el acoplamiento. Si  $c > 0$  muy sutilmente, el acoplamiento será *débil*, pero si  $c \gg 0$  el acoplamiento será *fuerte* ya que el error tiende a cero más rápidamente.

Esta configuración implica que el oscilador esclavo adopta la dinámica del oscilador maestro, y este último, no es influenciado de ningún modo por el esclavo.



### 3.2.2. Acoplamiento bidireccional

En el caso de acoplamiento bidireccional ambos osciladores están acoplados el uno con el otro, ambos tienen la capacidad de enviar y recibir información. En la Fig. 3.2 se muestra este esquema de acoplamiento:

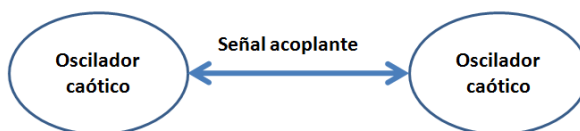


Figura 3.2: Configuración de acoplamiento bidireccional entre dos osciladores caóticos.

Se tienen dos osciladores definidos por el campo vectorial  $F(x)$  y denotados como  ${}_0D_t^q x_1$  y  ${}_0D_t^q x_2$ , ambos están acoplados mutuamente y  $c$  es la fuerza de acoplamiento que ajusta los ritmos de los osciladores induciendo a una sincronización mutua.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^q x_1 &= F(x_1) + c(x_2 - x_1), \\ {}_0D_t^q x_2 &= F(x_2) + c(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

En este tipo de acoplamiento ambos osciladores de orden fraccionario tienen la capacidad de enviar y recibir información, por lo que no se impone la dinámica de un oscilador en específico sino que se obtiene una *dinámica emergente*, la cual resulta como combinación de ambas dinámicas y es diferente a cualquiera de las ya existentes.

Un uso muy común del acoplamiento unidireccional es el de las comunicaciones seguras, en el caso del bidireccional, se puede encontrar en los sistemas láser acoplados con realimentación, o en sistemas de la naturaleza como neuronas interactuando, en el sistema cardíaco y respiratorio, entre otros.

### 3.3. Diferentes tipos de sincronización

La sincronización entre dos o más osciladores puede llevarse a cabo siendo estos idénticos, cuando todos los osciladores corresponden a un mismo tipo, o no idénticos, es decir, cuando se encuentran diferentes sistemas conviviendo en una red. Usualmente se realiza la sincronización con osciladores de un mismo tipo, sin embargo, una ventaja importante al sincronizar osciladores no idénticos es su aplicación, por ejemplo, a comunicaciones seguras donde esto aumenta el grado de complejidad al tratar de obtener el mensaje enviado. Algunos tipos de sincronización se mencionan a continuación.

#### 1. Osciladores caóticos idénticos.

a) *Sincronización idéntica*. Suponer un sistema de orden fraccionario con variables  $x$ ,

$${}_0D_t^q = F(x), \quad (3.3.1)$$

con condiciones iniciales  $\chi_D \subset R^d$  y un sistema con estados  $x'$  con condiciones iniciales  $\chi_R \subset R^d$ , tal que para todo  $x(0) \in \chi_D$  y  $x'(0) \in \chi_R$ . Si la respuesta del oscilador  $x'$  es idéntico al del oscilador  $x$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x'(t) - x(t)\| = 0, \quad (3.3.2)$$

se dice que el oscilador es de *sincronización completa o idéntica*, ya que cada estado sincroniza con su estado correspondiente en el otro oscilador.

b) *Sincronización marginal de caos*. Algunos osciladores caóticos pueden exhibir fenómenos como amplificación de la amplitud de las señales caóticas o una proyección del atractor del oscilador maestro en una región de fase lejos de la estabilidad, es decir, el atractor del esclavo sincroniza en otro lugar del espacio de fase diferente al del maestro. A esta se le conoce sincronización uniforme o marginal de caos.

## 2. Osciladores caóticos no idénticos

- a) *Sincronización generalizada*. Para esta forma de sincronización pueden ocurrir dos situaciones, primero, que los osciladores sean del mismo tipo pero con parámetros distintos. Por ejemplo, dos circuitos eléctricos donde uno difiere en el otro al tener ciertos componentes con diferente valor. El segundo caso es cuando los sistemas son de diferente naturaleza, por ejemplo, un circuito eléctrico y un sistema óptico. Para lograr la sincronización es necesario asociar la salida de uno de los osciladores como una función dada de la entrada del otro.
- b) *Sincronización de fase*. Ocurre cuando las fases de dos o más osciladores no idénticos coinciden mientras sus amplitudes continúan caóticas y no correlacionadas.
- c) *Sincronización parcial*. Esta sucede cuando la sincronización no se da en todos los estados de los osciladores, sino que la condición (3.1.1) y la relación (3.1.4) se cumplen solo para una parte de los estados.

Hasta este punto se ha contemplado la sincronización solo entre dos osciladores pero dado que este trabajo de tesis se enfoca en un conjunto de elementos interactuando entre sí para producir una dinámica común, es necesario abordar el tema de sincronización de redes complejas que se presenta a continuación.

## 3.4. Sincronización de redes complejas

Para el desarrollo de esta tesis fue necesaria la comprensión de las características de las redes complejas y las topologías que se utilizarían. En la sincronización se exploraron varias técnicas pero la que mejor se adecuó es la de matriz de acoplamiento de la teoría de Wang y Chen [41]. En esta parte del capítulo se aborda el análisis de estabilidad y las condiciones de sincronización necesarias.

Esta teoría está diseñada para sistemas de orden entero pero cabe destacar que lo que se busca en este trabajo es la sincronización de redes complejas con osciladores de orden fraccionario.

### 3.4.1. Dinámica de las redes complejas.

Considere una red dinámica de  $N$  osciladores caóticos de orden fraccionario idénticos acoplados. Las ecuaciones de estado de la red se definen

$${}_0D_t^q x_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4.1)$$

donde  $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in R^n$  son las variables de estado del oscilador  $i$ . Se definirá  $c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$  como  $u_i$  que es la ley de control asignada a un estado en el sistema [41], [10].

La constante  $c$  definida positiva mayor que cero representa la *fuerza de acoplamiento* o variable de peso y con ella se puede ajustar el acoplamiento entre los osciladores de orden fraccionario.  $\Gamma \in R^{n \times n}$  es una matriz de constantes 0 – 1 que conecta las variables que están acopladas. Se asume que  $\Gamma = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$  es una matriz diagonal donde para una particular  $i$  se considera  $r_i = 1$  y  $r_i = 0$  para  $j \neq i$ .

La matriz de acoplamiento  $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$  representa la matriz de acoplamiento de la red de acuerdo a su topología. Si existe una conexión entre el oscilador de orden fraccionario  $i$  y el oscilador de orden fraccionario  $j$  entonces  $a_{ij} = 1$ ; de otro modo,  $a_{ij} = 0$ , ( $i \neq j$ ). Los elementos diagonales de esta matriz están definidos como sigue

$$a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.2)$$

Si el grado del nodo  $i$  es  $d_i$ , entonces

$$a_{ii} = -d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.3)$$

Ahora, suponga que la red no tiene oscilador aislado, entonces la matriz  $A$  es una matriz simétrica irreducible que tiene como valor propio un cero con multiplicidad de 1 y los demás valores propios

son estrictamente negativos. Se dice que la red (3.4.1) sincroniza asintóticamente cuando

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (3.4.4)$$

La sincronización de los estados corresponde a una solución  $s(t) \in R^n$  de un oscilador aislado y satisface

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (3.4.5)$$

la solución  $s(t)$  puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o bien un atractor caótico de orden fraccionario como en este caso. La estabilidad de la sincronización

$$x_i(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t). \quad (3.4.6)$$

está determinada por la dinámica de un oscilador caótico de orden fraccionario aislado, de la función no lineal  $f$  y de su solución para  $s(t)$ , el grado de acoplamiento  $c$ , la matriz de conexiones  $\Gamma$  y la matriz de acoplamiento  $A$ .

### Condiciones de sincronía

Las condiciones de sincronización basadas en la teoría de Lyapunov son las siguientes y son tomadas de Wang y Chen [41]:

**Teorema 3.4.1.** *Considere la red dinámica (3.4.1), con valores propios de  $A$  en*

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N. \quad (3.4.7)$$

*Ahora suponga que existe una matriz  $\text{diag}(n \times n)\mathbf{D} > 0$  y dos constantes  $\bar{d} < 0$  y  $\tau > 0$  tales que*

$$[Df(s(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(s(t)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbf{I}_n, \quad (3.4.8)$$

*para todo  $d \leq \bar{d}$ . Si se cumple que  $c\lambda_2 \leq \bar{d}$  entonces la sincronización  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t)$  es exponencialmente estable ya que  $\lambda_2 < 0$  y  $\bar{d} < 0$ , entonces*

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|. \quad (3.4.9)$$

De esta condición se puede deducir que  $|\lambda_2|$  puede llegar a ser muy grande esto implica que la red sincronice con una  $c$  pequeña. La sincronización de la red (3.4.1) con respecto a una configuración en particular, ya sea regular o irregular, va a estar determinada por el segundo valor propio más grande de la matriz de acoplamiento  $\mathbf{A}$ , es decir,  $\lambda_2$ .

### 3.4.2. Estabilidad de las redes complejas.

Existen condiciones que garantizan la estabilidad del error de sincronía en una red compleja definida por (3.4.1) basada en teoría de Lyapunov. Se contemplan dos casos, uno de ellos es el de una red compleja que *sin oscilador maestro*. En este caso, se obtiene una nueva dinámica caótica proveniente de la red. El segundo caso es cuando existe un *oscilador maestro* y la dinámica resultante de la red corresponde a la del oscilador maestro [13].

- 1) **Red compleja sin oscilador maestro.** En este caso la dinámica final de la red es un nuevo estado caótico o estado emergente. Considere una red compleja de  $N$  osciladores acoplados por la función

$${}_0D_t^q x_i = f(x_i) + v_i(x_1, x_2, \dots, x_N), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.4.10)$$

donde  $x_i = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T \in R^n$  representa al vector de estados del  $i$ -ésimo nodo,  $f : R^n \rightarrow R^n$  es una función no lineal del estado,  $v_i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  es una función de acoplamiento. En este caso, los nodos son osciladores caóticos de orden fraccionario idénticos por lo que tienen la misma dimensión, es decir, que  $v_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, i = 1, 2, \dots, N$ .

Cuando los estados de la red (3.4.10) convergen, esto es,  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  implica que cualquier solución de  $x_i(t)$  de un oscilador aislado es también una salida de (3.4.10).

Los estados de cualesquiera dos osciladores caóticos  $x_i(t), x_j(t)$  de la red satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_j(t)\| = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N, i \neq j. \quad (3.4.11)$$

Ahora se define el error de sincronía como  $e_i = x_i - x_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  y se obtiene un sistema dinámico del error de sincronía

$${}_0D_t^q e_i = \tilde{f}(x_i, x_{i+1}) + \tilde{v}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.4.12)$$

donde  $\tilde{f}(x_i, x_{i+1}) = f(x_i) - f(x_{i+1})$ ,  $\tilde{v}_i = v_i(x_1, x_2, \dots, x_N) - v_{i+1}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Proponiendo la función  $\tilde{v}_i = -\tilde{f}(x_i, x_{i+1}) - \alpha e_i$ , con  $\alpha > 0$  y  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , se obtiene que el error es asintóticamente estable alrededor de cero

$${}_0D_t^q e_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (3.4.13)$$

con esto (3.4.11) se cumple.

- 2) **Red compleja con oscilador maestro.** Si la función  $v_k = 0$  entonces se trata del caso con oscilador maestro. Aquí la dinámica de la red va a tender ala del oscilador maestro, por lo que la función de acoplamiento está dada por

$$v_i = f(x_k) - f(x_i) + \alpha(x_k - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.4.14)$$

El oscilador  $k$  que no está acoplado se toma como el maestro y todos los osciladores de la red sincronizarán con  $k$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_k(t)\| = 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, N. \quad (3.4.15)$$

Con esto se garantiza que los estados de la red sincronicen con los estados arbitrarios del nodo desacoplado  $k$ . Se requiere que los osciladores de la red compleja sincronicen con el estado del oscilador maestro  $s(t)$  satisfaciendo

$${}_0D_t^q s = f(s(t)). \quad (3.4.16)$$

Nuevamente, la dinámica de este oscilador maestro puede ser un equilibrio, ciclo límite o atractor caótico. Se define la siguiente función de acoplamiento tal que satisfaga (3.4.15) y con esto se garantice la sincronización asintótica y global

$$v_i = f(s) - f(x_i) + \alpha(s - x_i), \quad \alpha > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.4.17)$$

## Capítulo 4

# Preliminares matemáticos y Sistemas de orden fraccionario

El cálculo fraccionario ha estado presente desde hace más de 300 años. El 30 de septiembre de 1695 el Marquis de L'Hopital le escribió a Leibniz acerca de que pasaría si en la notación  $\frac{d^n y}{dx^n}$ , donde  $n \in N : \{0, 1, 2, \dots\}$  ésta no sea una potencia entera, sino fraccionaria. Leibniz contestó lo siguiente: "*una aparente paradoja de la que se extraerán consecuencias útiles algún día*".

Desde entonces, muchos matemáticos han hecho grandes contribuciones directa o indirectamente al cálculo fraccionario con la intención de desarrollar métodos que permitan resolver ecuaciones diferenciales de este tipo. Euler y Lagrange fueron de los primeros en encontrar aproximaciones. Este último contribuye indirectamente al cálculo fraccionario al desarrollar la ley de los exponentes para operadores diferenciales de orden entero en 1772. Cuando el cálculo fraccionario fue desarrollado nació el interés de como serían las reglas para que  $m$  y  $n$  fueran arbitrarios o de orden no entero.

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y. \quad (4.0.1)$$

En 1812, Laplace definió la derivada de orden fraccionario por medio de una integral y en 1819, S. F. Lacroix obtiene la  $n$ -ésima derivada

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad (4.0.2)$$



Años más tarde, en 1823 el primero en aplicar esta teoría fue Niels Henrik Abel quien resolvió el problema de la curva tautocrona [22], donde el problema es determinar el tiempo que tarda un objeto que se desliza sin fricción en la gravedad uniforme a su punto más bajo independiente de su punto de partida. En los siguientes años hubo muchas aportaciones de Fourier, Liouville, Riemann, Grünwald, Letnikov, entre muchos otros.

Se han encontrado numerosas aplicaciones en áreas de la ciencia e ingeniería y principalmente se ha observado que es una mejor herramienta para modelar las propiedades de algunos materiales, así como para la descripción de memoria y propiedades hereditarias de estos mismos [21]. En sistemas de control, éste aparece cuando las ecuaciones diferenciales que definen al sistema son de orden fraccionario. En termodinámica, teoría de circuitos y en sistemas de mecatrónica juega un rol muy importante, así como en el procesamiento de señales y en los últimos años en la teoría del caos.

En este capítulo se presentan las definiciones esenciales para la comprensión de la teoría del cálculo fraccionario. Se presenta la definición de la derivada fraccionaria así como las propiedades de ésta. Además, se muestran criterios de estabilidad para sistemas lineales así como de sistemas no lineales, siendo estos últimos de gran interés en el desarrollo de esta tesis.

## 4.1. Definición de la derivada fraccionaria

Una de las funciones más importantes en el cálculo fraccionario es la función *Gamma* de Euler. Ésta función generaliza el factorial  $n!$  y permite que  $n$  tome tanto valores no enteros como valores complejos, la cual se define como

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} t^{(n-1)} e^{-t} dt, \quad (4.1.1)$$

donde  $t^{n-1} = e^{(n-1) \log t}$ . Esta integral es convergente para todos los complejos  $n \in \mathbb{C}$  y es una generalización de un factorial en la siguiente forma

$$\Gamma(n) = (n - 1)!. \quad (4.1.2)$$

En el libro *Fractional Differential Equations* se definen las propiedades de esta función y se hace un estudio más detallado de la misma por lo que si el lector quiere profundizar mayormente en el tema, puede consultar la referencia [21]. Para este estudio solo es necesaria la teoría que a continuación se muestra.

El operador de la derivada fraccionaria se denota de la siguiente manera [42]

$${}_a D_t^\alpha f(t), \quad (4.1.3)$$

en este operador se pueden identificar  $a$  y  $t$ , los cuales son conocidos como *terminales*, son los límites relacionados a la operación de la diferenciación de orden fraccionario y el operador  $\alpha$  es el orden fraccionario de la derivada.

Comúnmente son utilizadas tres definiciones que son válidas para la integral-diferencial de orden fraccionario y que son equivalentes bajo ciertas condiciones, estas son la de Riemann-Liouville (RL), Grunwald-Letnikov (GL) y la de Caputo. La definición de RL está dada como

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad (4.1.4)$$

para  $(n - 1 < \alpha < n)$  y donde  $\Gamma$  es la función *Gamma*.

La definición de la diferenciación fraccionaria de RL ha sido muy importante en el desarrollo de las derivadas de orden fraccionario en las matemáticas y también en las aplicaciones en esta área, sin embargo, esta representación deja a las condiciones iniciales contenidas en los límites de la operación y aunque matemáticamente pueden ser resueltas satisfactoriamente, estas no tienen una interpretación física para tales condiciones iniciales.

Una solución posible a esto fue propuesta por M. Caputo y su definición está dada a continuación.

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}}, \quad (4.1.5)$$

para  $n - 1 < \alpha < n$ .

La definición de Caputo provee además de las otras, una interpretación entre las derivadas de orden entero. La ventaja de esta representación, es que las condiciones iniciales aquí son consideradas como si se tratara de una diferenciación de orden entero.

La definición GL es la siguiente

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh). \quad (4.1.6)$$

Los coeficientes binomiales se calculan utilizando la relación entre la función *Gamma* de Euler y el factorial, a continuación se definen

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - j + 1)}{j!}, \quad (4.1.7)$$

para  $\binom{\alpha}{0} = 1$  y  $n = \frac{t-a}{h}$  donde  $a$  es una constante real, la cual expresa el valor límite.

Las principales propiedades de las derivadas e integrales fraccionarias fueron establecidas por Oldham y Spanier en [23]:

- 1) Si  $f(t)$  es una función analítica de  $t$ , entonces su derivada fraccionaria  ${}_0 D_t^\alpha = f(t)$  es una función analítica de  $t, \alpha$ .
- 2) Para  $\alpha = n$ , donde  $n$  es entero, la operación  ${}_0 D_t^\alpha = f(t)$  da el mismo resultado que el clásico diferenciador o integrador de orden  $n$ .
- 3) Para  $\alpha = 0$  la operación  ${}_0 D_t^\alpha = f(t)$  es un operador identidad.

$${}_0 D_t^0 = f(t) = f(t).$$

- 4) Diferenciador e integrador fraccionarios son operaciones lineales

$${}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda_a D_t^\alpha f(t) + \mu_a D_t^\alpha g(t). \quad (4.1.8)$$

5) La ley del índice aditivo

$${}_0D_t^\alpha {}_0D_t^\beta f(t) = {}_0D_t^\beta {}_0D_t^\alpha f(t) = {}_0D_t^{\alpha+\beta} f(t), \quad (4.1.9)$$

se mantiene bajo ciertas restricciones razonables de la función  $f(t)$ .

6) La regla de Leibniz para diferenciación fraccionaria está dada por

$${}_aD_t^\alpha (\phi(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \phi^k(t) {}_aD_t^{\alpha-k} f(t), \quad (4.1.10)$$

si  $\phi(t)$  y  $f(t)$  y todas sus derivadas son continuas en el intervalo de  $[a, t]$ .

7) Es una operación lineal, similar a la diferenciación de orden entero

$${}_aD_t^r (\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda {}_aD_t^r f(t) + \mu {}_aD_t^r g(t). \quad (4.1.11)$$

## 4.2. Métodos numéricos para el cálculo de derivadas e integrales fraccionarias

Para el cálculo numérico de la derivada fraccionaria se puede utilizar la relación derivada de la definición de GL, dado que para una extensa clase de funciones las definiciones de GL, RL y Caputo son equivalentes. La relación para la aproximación numérica explícita de la  $r$ th derivada en los puntos  $kT$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), tiene la siguiente forma

$${}_aD_t^\alpha \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}, & \alpha > 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha}, & \alpha < 0. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

El cálculo fraccionario es una generalización de la integración y la derivación de orden entero,  ${}_aD_t^\alpha$ , donde  $a$  y  $t$  son los límites de la operación y  $\alpha$  es el orden no entero de la diferenciación.

Para el cálculo numérico se utiliza, en este caso, la relación derivada de la definición de GL [22]. La relación para la aproximación numérica explícita de la  $q$ th derivada en los puntos  $kh$ , donde ( $k = 1, 2, \dots$ ) tiene la siguiente forma

$${}_{k-L_m/h}D_{t_k}^q f(t) \approx h^{-q} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{q}{j} f(t_{k-j}), \quad (4.2.2)$$

donde  $L_m$  es la memoria corta,  $t_k = kh$ ,  $h$  es el tiempo de paso del cálculo y  $(-1)^j \binom{q}{j}$  son los coeficientes binomiales  $c_j^q$  ( $j = 0, 1, \dots$ ). Para el cálculo de estos coeficientes se emplea la siguiente relación

$$c_0^q = 1, \quad c_j^q = \left(1 - \frac{1+q}{j}\right) c_{j-1}^q. \quad (4.2.3)$$

La solución general de la ecuación fraccionaria diferencial

$${}_aD_t^q y(t) = f(y(t), t), \quad (4.2.4)$$

puede ser expresada como

$$y(t_k) = f(y(t), t_k) h^q - \sum_{j=v}^k c_j^q y(t_{k-j}). \quad (4.2.5)$$

En este trabajo las simulaciones se realizaron resolviendo (4.2.2) y (4.2.3) que corresponden a los coeficientes binomiales. En la siguiente sección se mencionan algunas propiedades de estabilidad de sistemas fraccionarios.

## 4.3. Estabilidad de sistemas de orden fraccionario

### 4.3.1. Sistemas Lineales

Considere un sistema LTI (*Linear Time Invariant*) representado por el siguiente modelo en espacio de estados

$${}_0D_t^q x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t),$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  son los estados,  $u \in \mathbb{R}^r$  es la entrada y  $y \in \mathbb{R}^p$  es la salida, los vectores  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$  son los órdenes fraccionarios [25].

En el plano complejo se puede ubicar la parte estable e inestable para tales casos, como se muestra en la Fig. 4.1.

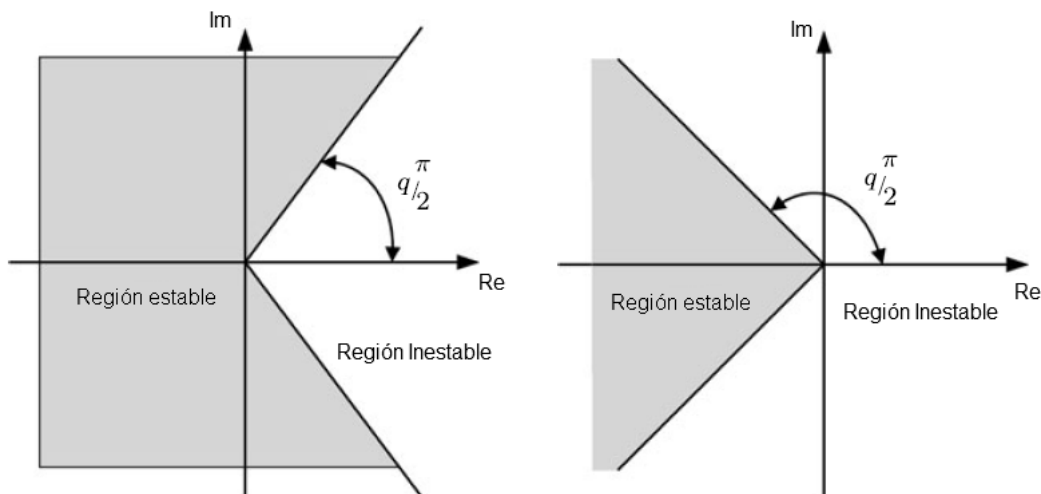


Figura 4.1: Regiones de estabilidad para sistemas de orden fraccionario.

### 4.3.2. Sistemas no lineales

La estabilidad exponencial no puede ser utilizada para caracterizar la estabilidad asintótica de los sistemas de orden fraccionario.

Considere un sistema no lineal de orden fraccionario desproporcionado (4.3.2), es decir, que el orden de cada derivada es distinto al de las demás, representado de la siguiente forma

$${}_0D_t^{q_i} x_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t), \quad (4.3.1)$$

$$x_i(0) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3.2)$$

donde  $c_i$  son las condiciones iniciales. En forma de vector se tiene que

$$D^q x = f(x), \quad (4.3.3)$$

donde  $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$  para  $0 < q_i < 2$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Resolviendo para  $x(x) = 0$  se obtienen los puntos de equilibrio del sistema, es decir,  $E^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ .

La estabilidad en sistemas no lineales es muy compleja ya que a diferencia de los sistemas lineales, se pueden presentar varios puntos de equilibrio por lo que se han establecido criterios de estabilidad asintótica, global, orbital, etc.

**Definición 4.3.1.** La trayectoria  $x(t) = 0$  del sistema (4.3.2) es  $t^{-q}$  asintóticamente estable si hay una  $q$  real positiva tal que

$$\forall \|x(t)\| \quad \text{con} \quad t \leq t_0, \exists N(x(t)), \quad \text{tal que} \quad \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq Nt^{-q}. \quad (4.3.4)$$

Para  $N > 0$ , el hecho de que los componentes de  $x(t)$  decaigan lentamente a 0 después que  $t^{-q}$  permite que alguna vez se llame al sistema fraccionario de memoria larga. La ley de estabilidad de  $t^{-q}$  es un caso especial de la estabilidad de Mittag-Leffler [22], [25].

**Teorema 4.3.1.** De acuerdo al teorema de estabilidad [25] los puntos de equilibrio son asintóticamente estables para  $q_1 = q_2 = \dots = q_n \equiv q$  si todos los valores propios  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) de la matriz Jacobiana  $J = \partial f / \partial x$ , donde  $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$  evaluados en el punto de equilibrio  $E^*$ , satisfacen la condición

$$|\arg(\lambda(J))| = |\arg(\lambda_i)| > q \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.5)$$

**Teorema 4.3.2.** Cuando se considera un sistema desproporcionado, tal que  $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_n$  y suponer que  $m$  es el mínimo común múltiplo del denominador  $u_i$  de  $q_i$ , donde  $q_i = v_i/u_i$ ,  $u_i \in \mathbb{Z}^+$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y si considera una  $\gamma = 1/m$  [25]. El sistema (4.3.2) es asintóticamente estable si cumple que

$$|\arg(\lambda)| > \gamma\pi/2, \quad (4.3.6)$$

para todas las raíces de  $\lambda$  de la siguiente ecuación

$$\det([\lambda^{mq_1} \lambda^{mq_2} \dots \lambda^{mq_n}] - J) = 0. \quad (4.3.7)$$

**Teorema 4.3.3.** *Considere un sistema dinámico no lineal  $n$ -dimensional de orden fraccionario [22]*

$$x^q = Ax + h(x), \quad (4.3.8)$$

*con una matriz constante lineal  $A$  y una función no lineal  $h(x)$  de los estados  $x$ , y  $0 < q < 1$ . Si:*

- 1) *La solución  $x(t) = 0$  de  $x^q = Ax$  es asintóticamente estable y  $\alpha\rho > 1$ , donde  $\rho(A) \equiv$  radio espectral de  $A$ .*
- 2)  *$h(0) = 0$  y  $\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|h(x)\|}{\|x\|}$ , entonces  $x(t) = 0$  para  $t \geq t_0 \geq 0$ , es una solución estable del sistema (4.3.8).*

En el caso de sistemas caóticos de orden fraccionario, una condición necesaria de estabilidad es que mantengan al menos un valor propio en la región inestable para conservar el régimen caótico.

## 4.4. Caos

La palabra caos generalmente es asociada a un desorden, sin embargo, el *caos* está presente en sistemas dinámicos que tienen una supersensibilidad a las condiciones iniciales lo que los hace parecer de naturaleza estocástica pero que por el contrario, están bien definidos por medio de ecuaciones no lineales. El comportamiento de un sistema caótico parece ser irregular o aleatorio, pero su naturaleza es completamente determinística, es decir, existe una ecuación diferencial, o en diferencias, que define su dinámica y por medio de ésta se puede conocer con precisión la secuencia que le da origen.

En 1963 Edward N. Lorenz estaba investigando por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales, como predecir los cambios meteorológicos. Tras varias simulaciones se da cuenta que al hacer cambios casi imperceptibles en las condiciones iniciales podía obtener dinámicas que divergen después de cierto tiempo, a lo que el llamó el *efecto mariposa*. A partir de entonces, se renueva el interés por estudiar los fenómenos caóticos. Antes de 1990 se investigaba el caos con el fin de evitar este comportamiento indeseable, hasta ese momento, en un sistema. Sin embargo, a partir de ese año se comienza a descubrir que los sistemas en régimen caótico puede ser controlados y sincronizados



utilizando señales de control poco invasivas en los sistemas además de que se comienza a ver su utilidad bajo la condición caótica que presentan.

Las principales características de los sistemas caóticos son las siguientes:

- 1) Dinámica no lineal.
- 2) Sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.
- 3) Presencia de atractores extraños.
- 4) Presencia de exponentes positivos de Lyapunov.
- 5) Atractores con dimensión fractal.

Los sistemas caóticos están definidos por ecuaciones diferenciales no lineales lo que hace que su comportamiento en estado estacionario sea más complicado, esto es, no es un equilibrio, oscilaciones periódicas, o una oscilación casi periódica. Cuando esto pasa, usualmente se refiere a un comportamiento caótico [24]. Estos movimientos caóticos parecen exhibir aleatoriedad a pesar de su naturaleza determinística.

La segunda característica es la sensibilidad a las condiciones iniciales, esto quiere decir que al observar un estado de un sistema caótico y partiendo de dos condiciones iniciales donde su diferencia es mínima o prácticamente insignificante, se pueden obtener trayectorias que divergen exponencialmente entre ellas a través del tiempo pero permaneciendo acotadas.

Esto tiene que ver precisamente con la presencia de atractores extraños, un *atractor* es la región del espacio de estados hacia la cual convergen todas las trayectorias posibles de un sistema. Un atractor puede ser un punto, una curva, una variedad o en este caso, un atractor extraño. En estos sistemas, existe un atractor por el cual las trayectorias del sistema se ven atraídas y al mismo tiempo existen fuerzas que lo repelen de él, por lo que este permanece en un espacio acotado sin tender a un punto

fijo o a un ciclo límite. Además, estos atractores tienen una *dimensión fractal*, la cual está definida como *formas geométricas de orden no entero y donde su dimensión de Hausdorff debe superar su dimensión topológica* [26].

De manera general, se refiere a la *dimensión  $d$*  como el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar la localidad de un punto. Se relacionan fácilmente objetos geométricos con dimensiones enteras como por ejemplo un punto que tiene dimensión cero, una línea que es unidimensional, una superficie que corresponde a dos dimensiones, un cuerpo que se localiza en un espacio tridimensional o bien un espacio-tiempo de cuatro dimensiones. La notación cambia para indicar que no existe la restricción de que la dimensión no sea entera,  $D_0$ , es llamada *dimensión fractal* [38].

La dimensión fractal determina la capacidad de un conjunto extraño bajo estudio y en la mayoría de los casos con dinámicas caóticas suele coincidir con la dimensión de Hausdorff, la cual es una generalización métrica del concepto de dimensión de un espacio topológico que permite definir una dimensión fraccionaria [26]. Si se observa en el espacio, la dimensión del objeto fractal es superior a la del espacio que lo contiene. Se refiere también a la medida de su grado de irregularidad, ya que las figuras geométricas que forman son irregulares. Además, está ligada directamente a los grados de libertad del sistema.

Existe la presencia de exponentes positivos de Lyapunov, estos muestran la velocidad de divergencia entre las trayectorias. Cuando son negativos, significan una convergencia en las trayectorias, por el contrario al ser positivos, estos muestran la velocidad de divergencia entre las trayectorias. El sistema debe contar con al menos un exponente positivo de Lyapunov para que sea caótico y si tiene más de dos se le llama al sistema hipercaótico.

Desde los últimos años del siglo pasado, los sistemas caóticos tomaron gran importancia debido a sus aplicaciones. Muchos sistemas en la naturaleza son no lineales y presentan caos, tales como los fluidos en régimen turbulento, la dinámica de la atmósfera, las reacciones químicas, los procesos

metabólicos de las células, los movimientos de grupos animales (cardúmenes o enjambres), la arritmia del corazón, la red neuronal del cerebro humano, entre otros. Por medio de circuitos electrónicos se han aplicado estos sistemas a la codificación de información en las comunicaciones privadas [3], [27], así como el modelado de procesos naturales como el comportamiento de la atmósfera [29], los sistemas químicos y biológicos [28], en el estudio de epidemias y crecimiento de población, la propagación de enfermedades infecciosas, el mercado financiero mundial y otros más.

## 4.5. Osciladores caóticos de orden fraccionario

En sistemas continuos es bien sabido que no se presenta caos cuando se tiene un orden menor a tres, tomando como orden del sistema el número total de estados. Sin embargo, se ha encontrado presencia de caos en osciladores con orden menor a tres siendo estos fraccionarios. Esto quiere decir que el sistema es reorganizado y sus derivadas pueden ser de orden no entero. De este modo, el orden del sistema ya no corresponde al número de ecuaciones diferenciales sino a la suma del orden en cada derivada. Esto permite una mayor flexibilidad al poder cambiar el orden del sistema así como sus parámetros y conservar para ciertos casos, el régimen caótico. En este capítulo se hará mención de los osciladores caóticos de orden fraccionario que se utilizaron como nodos para conformar las redes complejas y con ellas realizar las pruebas de sincronización.

La mayoría de los sistemas que se encuentran en la naturaleza son no lineales y además se han encontrado que muchos de ellos son fraccionarios por lo que el uso de sistemas de orden fraccionario para su modelado ha tomado gran importancia en los últimos años. Se ha encontrado caos en osciladores de orden fraccionario, por ejemplo en el circuito de Chua [32], en el oscilador Lorenz [33], Rössler [34], osciladore CNN (*Complex neural network*) [22], oscilador Financiero [35], Chen [36], entre muchos otros.

A continuación se muestra una breve descripción de cada oscilador de orden fraccionario que se

utilizó para la sincronía de las redes complejas.

### 4.5.1. Oscilador Lorenz

En 1963 Edward Lorenz descubre este atractor de tres dimensiones al simular un sistema que pretendía predecir el comportamiento atmosférico. Años más tarde, se encuentra que este oscilador para ciertos órdenes fraccionarios conserva el régimen caótico [33]. La representación de este oscilador en orden fraccionario es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t)(\rho - z(t)) - y(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t).
 \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Los parámetros bajo los cuales el oscilador exhibe caos son  $\beta = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 8/3$  y los órdenes fraccionarios  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$  [22]. En la Fig. 4.2 se observan el atractor correspondiente al oscilador Lorenz caótico de orden fraccionario y en la Fig. 4.3 se muestran los estados del oscilador caótico de orden fraccionario pero comparado con los estados de un oscilador Lorenz caótico de orden entero bajo los siguientes parámetros  $\beta = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 8/3$  y  $q_1 = q_2 = q_3 = 1$  [29]. Ambos osciladores tienen las mismas condiciones iniciales  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $y_1 = y_2 = 0.1$ ,  $z_1 = z_2 = 2.5$ . Se observa que las trayectorias comienzan a diverger en un tiempo finito, por lo que en apariencia los atractores de estos dos osciladores pudieran parecer iguales sin embargo, la trayectoria de sus estados es diferente.

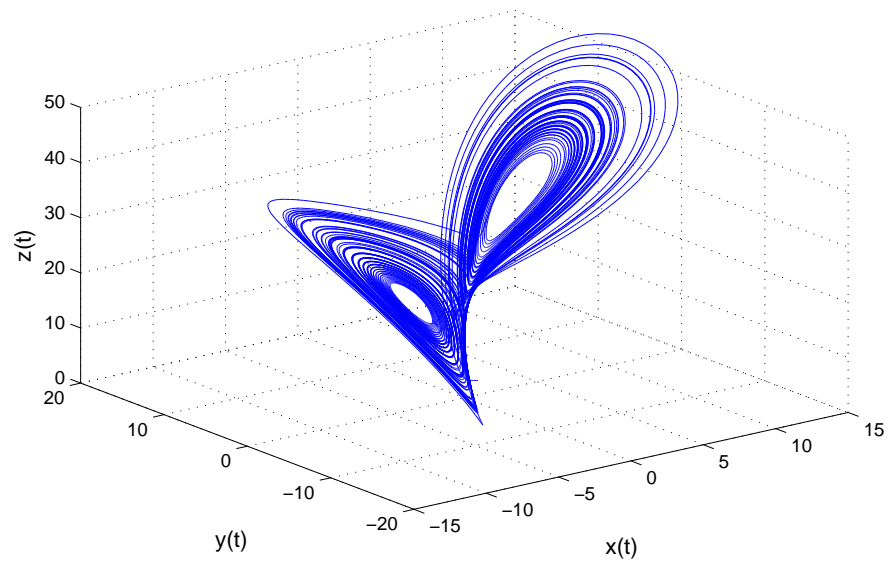


Figura 4.2: Atractor del oscilador caótico de orden fraccionario Lorenz con  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$  en el plano  $x(t), y(t), z(t)$ .

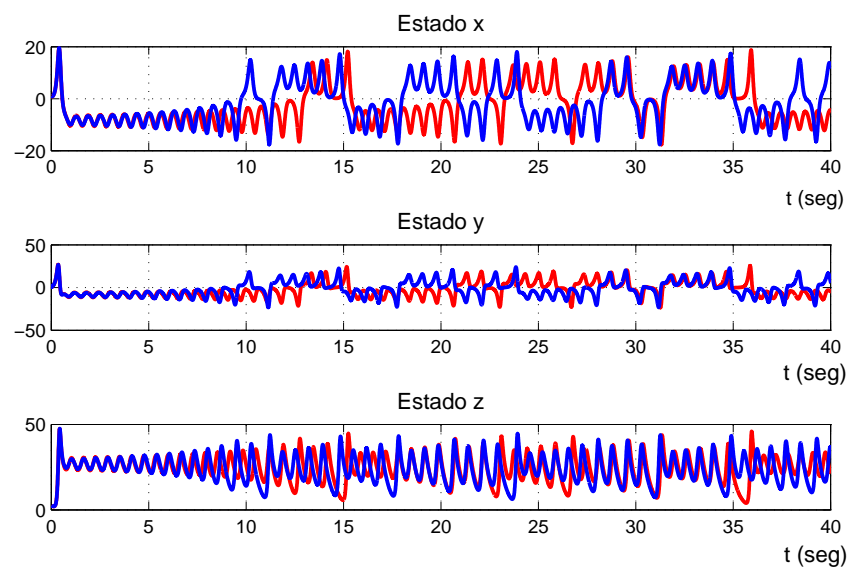


Figura 4.3: Estados de los osciladores caóticos Lorenz de orden fraccionario y de orden entero.

### 4.5.2. Oscilador Chen

El oscilador Chen es muy parecido al oscilador Lorenz, incluso existe un conjunto de ecuaciones que generalizan a los osciladores Lorenz, Chen y Lü. El oscilador Chen de orden fraccionario está descrito por las siguientes ecuaciones y bajo los parámetros  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$  y  $d = c - a = -7$  y con los órdenes  $q_1 = 0.985$ ,  $q_2 = 0.99$ ,  $q_3 = 0.98$  el sistema exhibe un comportamiento caótico [30].

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= (c - a)x(t) - x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

En la Fig. 4.4 se muestra el atractor del oscilador de orden fraccionario bajo los parámetros ya mencionados.

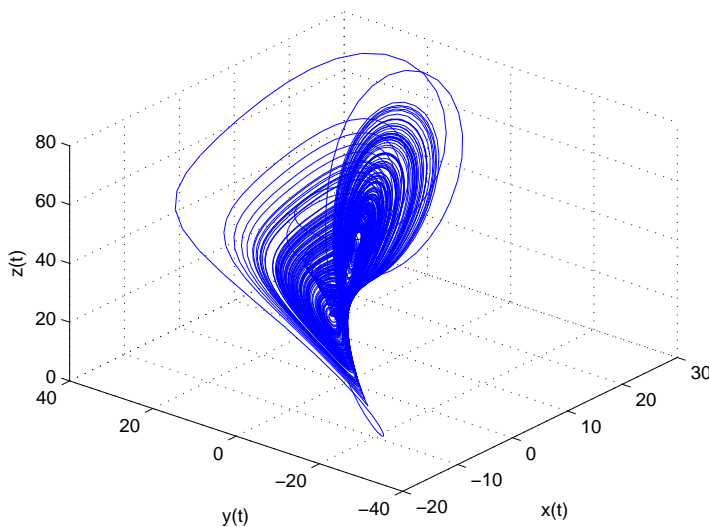


Figura 4.4: Atractor del sistema Chen de orden fraccionario  $q_1 = 0.985$ ,  $q_2 = 0.99$ ,  $q_3 = 0.98$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

### 4.5.3. Oscilador Rössler

El oscilador Rössler es muy útil en el modelado de reacciones químicas y en el año 2004 se encuentra comportamiento caótico cuando éste tiene un orden menor a 3, siendo éste fraccionario. Los parámetros bajo los cuales el oscilador Rössler de orden fraccionario exhibe caos son  $a = 0.4$ ,  $b = 0.2$ , y  $c = 10$  y un orden total del sistema de 2.7, siendo  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$  [31], [34]. Las ecuaciones que definen al oscilador de orden fraccionario son las siguientes:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= -(y(t) + z(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= x(t) + ay(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= b + z(t)(x(t) - c). \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

En la Fig. 4.5 se muestra el atractor del oscilador Rössler de orden fraccionario.

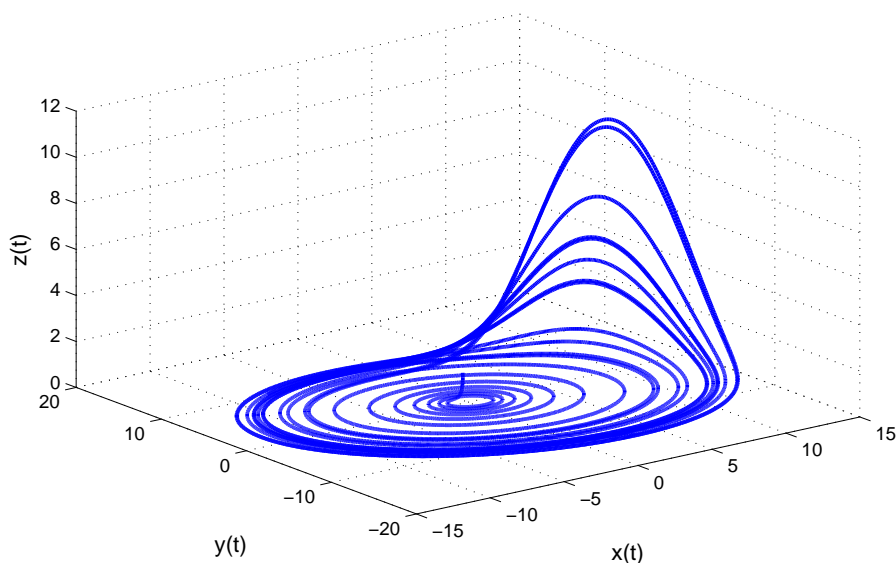


Figura 4.5: Atractor del oscilador Rössler de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

#### 4.5.4. Oscilador Liu

El oscilador de Liu fue reportado en la literatura en 2009 y un año más tarde se introduce el oscilador de orden fraccionario. Se encontró que para derivadas mayores a 0.916 el sistema conserva el régimen caótico. Las ecuaciones que lo definen se muestran a continuación.

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= -ax(t) - ey^2(t), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= by(t) - kx(t)z(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= -cz(t) + mx(t)y(t). \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Bajo los parámetros  $a = e = 1$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 5$  y  $k = m = 4$  y el orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  el oscilador exhibe un comportamiento caótico [22]. En la Fig. 4.6 se muestra el atractor correspondiente a este oscilador en orden fraccionario.

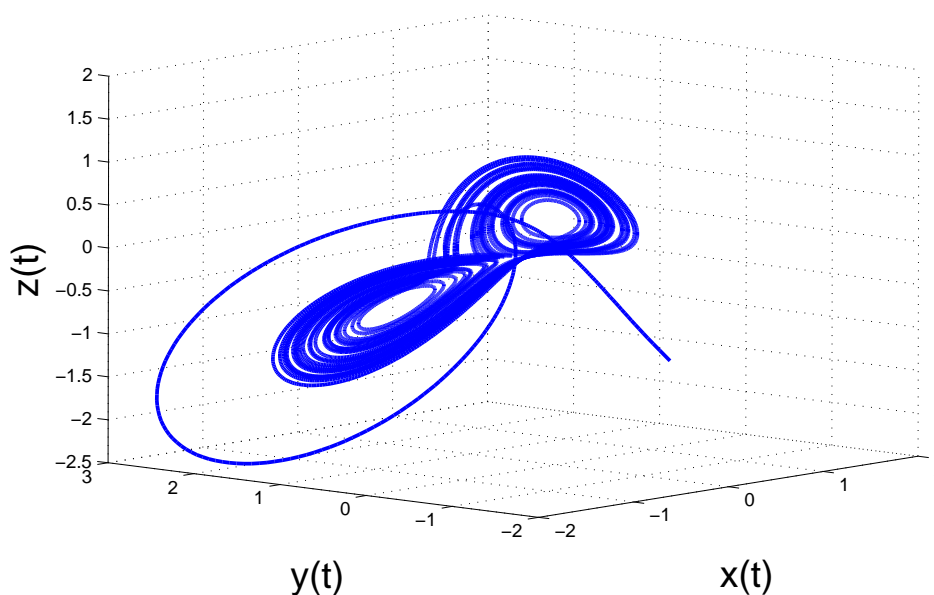


Figura 4.6: Atractor del oscilador Liu de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .



### 4.5.5. Oscilador Financiero

Este oscilador es muy útil en el estudio de las dinámicas de la economía ya que se pueden modelar fluctuaciones económicas, cambios estructurales, crecimientos irregulares, entre otros. En sí, permite comprender la complejidad de los sistemas reales económicos y financieros. Se encontró caos en este oscilador para un orden total mayor a 2.35. Las ecuaciones que modelan al oscilador de orden fraccionario son las siguientes:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= z(t) + x(t)(y(t) - a), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= 1 - by(t) - x^2(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -x(t)cz(t). \end{aligned} \tag{4.5.5}$$

En la Fig. 4.7 se muestra el atractor del oscilador Financiero de orden fraccionario el cual exhibe caos bajo los siguientes parámetros,  $a = c = 1$ ,  $b = 0.1$  y  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 0.95$  y  $q_3 = 0.9$  [35].

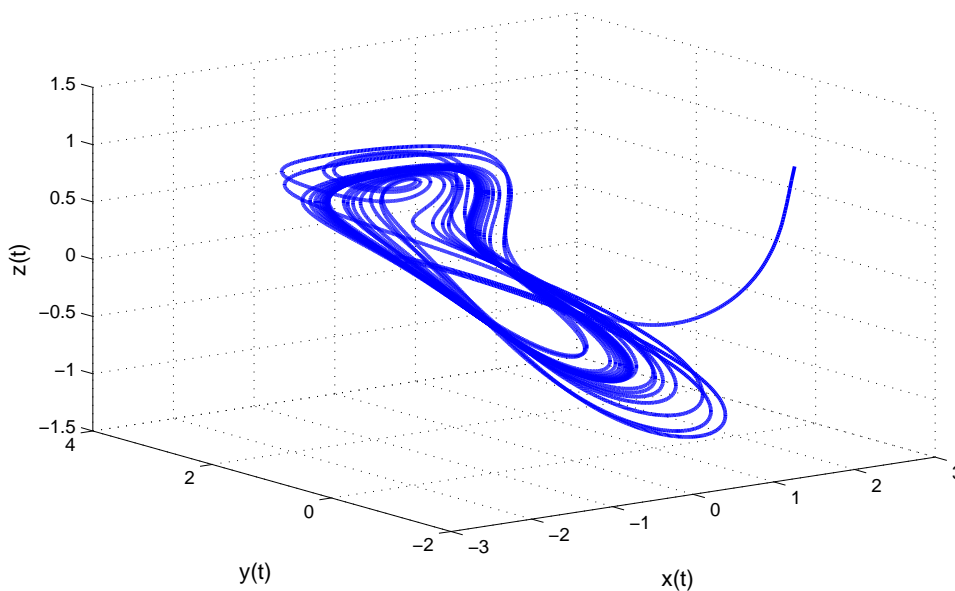


Figura 4.7: Atractor del oscilador Financiero de orden fraccionario  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 0.95$  y  $q_3 = 0.9$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

### 4.5.6. Oscilador Volta

Este oscilador exhibe un atractor doble y se ha encontrado caos cuando sus derivadas tienen orden fraccionario. Fue descubierto por un alumno de doctorado en la Universidad de Genova en 1984 y en 2009 se realiza su descripción y análisis para el orden fraccionario. Las ecuaciones que describen al oscilador Volta de orden fraccionario son las siguientes:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= -x(t) - ay(t) - z(t)y(t), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= -y(t) - bx(t) - x(t)z(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= cz(t) + x(t)y(t) + 1. \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

Los parámetros para que el oscilador exhiba caos son  $a = 19$ ,  $b = 11$ ,  $c = 0.73$  y el orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.99$  [22]. En la Fig. 4.8 se muestra el atractor de dicho oscilador.

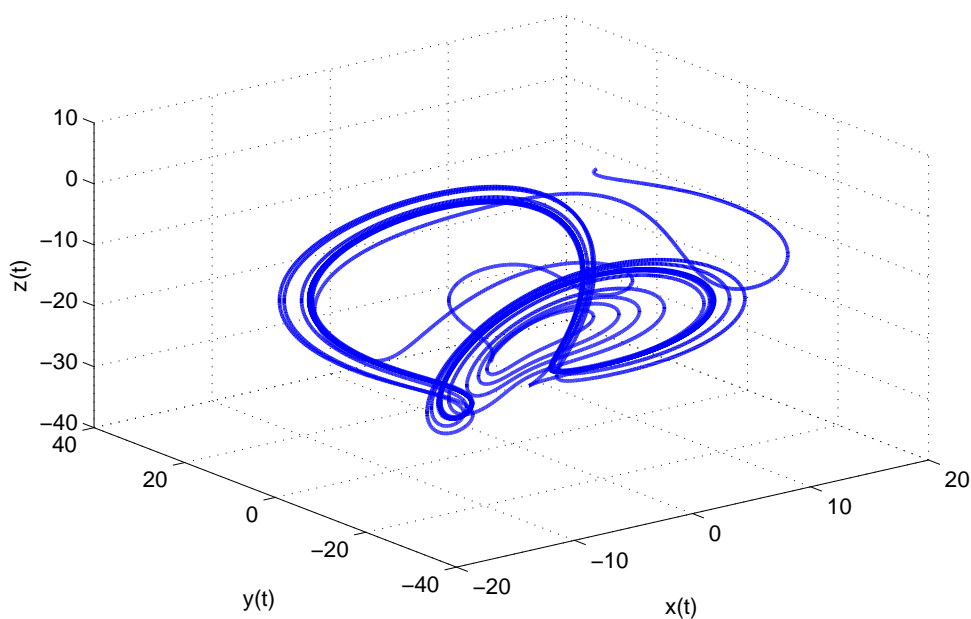


Figura 4.8: Atractor del oscilador Volta de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.99$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

### 4.5.7. Oscilador Duffing

El oscilador Duffing puede exhibir comportamiento caótico o bien un ciclo límite de acuerdo a los parámetros a los que esté sujeto. Cuando el oscilador es de orden fraccionario conserva su régimen caótico bajo ciertos parámetros. Su comportamiento es útil para comprender el comportamiento caótico de las vibraciones forzadas de la maquinaria industrial. El oscilador Duffing de orden fraccionario está definido por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= y(t), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

El orden fraccionario en las derivadas para que el oscilador de orden fraccionario exhiba caos son  $q_1 = 0.9$  y  $q_2 = 1$ . Los parámetros son los siguientes  $\alpha = 0.15$ ,  $\delta = 0.3$ , y  $\omega = 1$  [22]. En la Fig. 4.9 se muestra el atractor del caótico Duffing caótico de orden fraccionario.

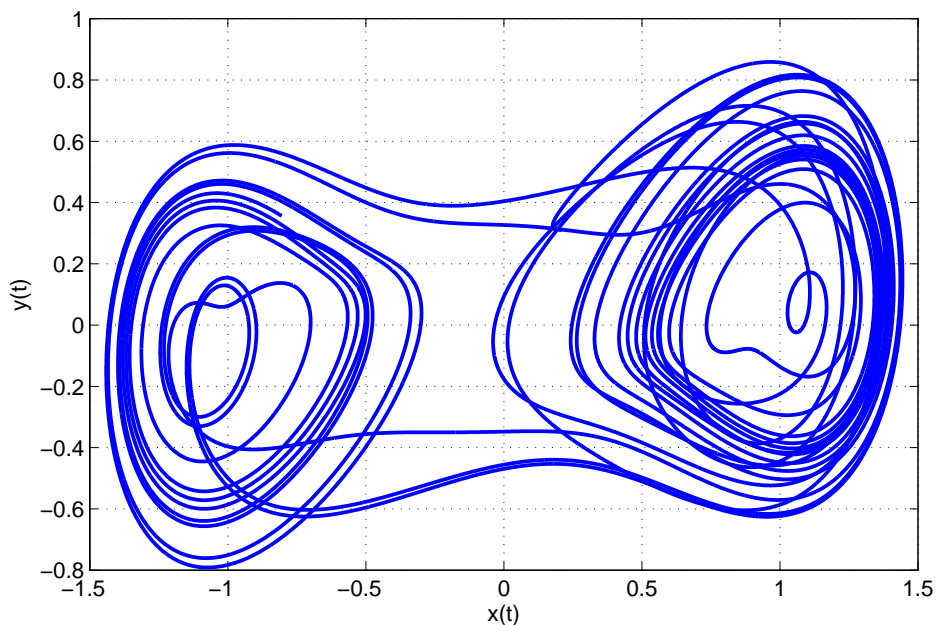


Figura 4.9: Atractor del oscilador Duffing de orden fraccionario  $q_1 = 0.9$  y  $q_2 = 1$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ .

### 4.5.8. Oscilador Lü

Por medio de este oscilador se puede ir del oscilador Lorenz al Chen y viceversa, tanto para el orden fraccionario como para el orden entero. El oscilador Lü de orden fraccionario se define por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= -x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t). \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

El atractor se muestra en la Fig. 4.10, el cual se obtiene con los siguientes parámetros  $a = 36$ ,  $b = 3$  y  $c = 20$  [37]. El orden total del sistema es de 2.9 con  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  y bajo esto el oscilador exhibe una dinámica caótica.

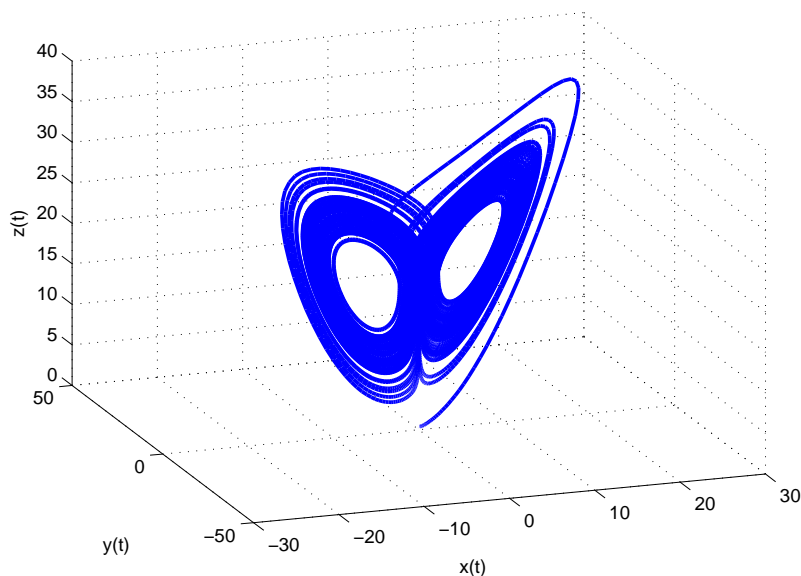


Figura 4.10: Atractor del oscilador Lü de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

### 4.5.9. Oscilador Arneodo

El oscilador Arneodo de orden fraccionario presenta caos para un orden mayor a 0.86 en sus derivadas. Las siguientes son las ecuaciones del oscilador Arneodo de orden fraccionario:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= y(t), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= z(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= -\beta_1x(t) - \beta_2y(t) - \beta_3z(t) + \beta_4x^3(t). \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Los parámetros  $\beta_1 = -5.5$ ,  $\beta_2 = 3.5$ ,  $\beta_3 = 0.8$ ,  $\beta_4 = -1$  y un orden en sus derivadas de  $q_1 = q_2 = 0.97$  y  $q_3 = 0.96$  [22], el oscilador de orden fraccionario presenta el atractor mostrado en la Fig. 4.11.

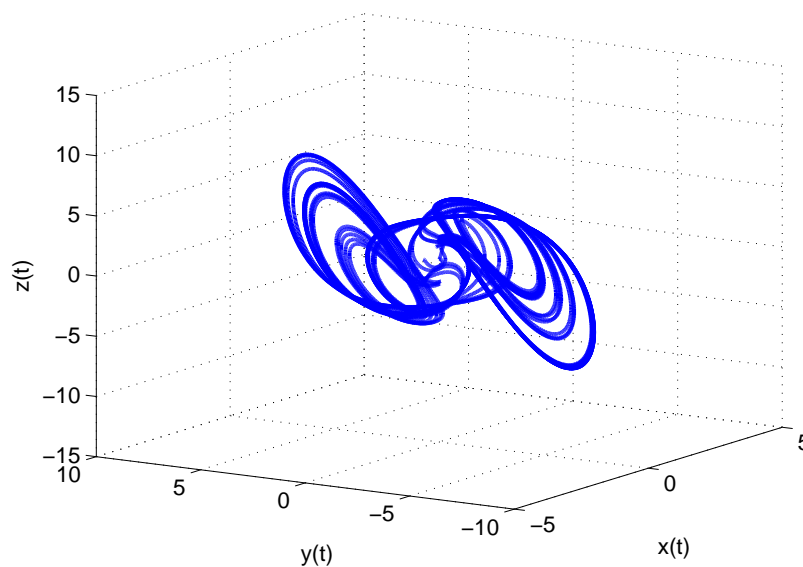


Figura 4.11: Atractor del oscilador Arneodo de orden fraccionario  $q_1 = q_2 = 0.97$  y  $q_3 = 0.96$  en el plano  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

Para cada uno de los osciladores se mencionan los parámetros bajo los cuales se presenta el régimen caótico, estos fueron utilizados para la sincronización de las redes complejas que se presentan en el siguiente capítulo, sin embargo, no son los únicos parámetros bajo los cuales estos osciladores

presentan un comportamiento caótico. En las referencias señaladas se encuentran otros casos con diferentes órdenes en sus derivadas para los cuales también se puede observar caos en estos osciladores de orden fraccionario.

## Capítulo 5

# Sincronización de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario

En este capítulo se encuentran los resultados de la sincronización de redes complejas conformadas por osciladores caóticos de orden fraccionario. En el capítulo 4 se presentaron los osciladores de orden fraccionario que se utilizarán así como los parámetros bajo los cuales exhiben dinámicas caóticas. Los escenarios de acoplamiento implican redes con oscilador maestro y sin oscilador maestro en topología regular e irregular.

Los trabajos existentes acerca de sincronización de osciladores de orden fraccionario solo involucran a dos de ellos y se utilizan técnicas de control que al tratar de expandir a una red resulta muy complejo. La teoría de Wang y Chen [41], para redes complejas puede llevar a estos osciladores a un régimen de sincronización. A continuación se presenta la sincronización de redes complejas para diversos casos.

## 5.1. Sincronización de redes regulares

### 5.1.1. Acoplamiento global

Para esta configuración se utilizan osciladores de Lorenz de orden fraccionario, el atractor es mostrado en la Fig. 4.2. Las ecuaciones que definen su dinámica son:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= \sigma(y_{i,2}(t) - x_{i,1}(t)) + u_{i,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= x_{i,1}(t)(\rho - z_{i,3}(t)) - y_{i,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= x_{i,1}(t)y_{i,2}(t) - \beta z_{i,3}(t). \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

Los parámetros bajo los cuales el oscilador exhibe caos y que son considerados para las simulaciones son  $\beta = 28$ ,  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 8/3$  y los órdenes fraccionarios  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.995$  [22].

Se define la red de 12 osciladores en acoplamiento global mostrada en la Fig. 5.1.

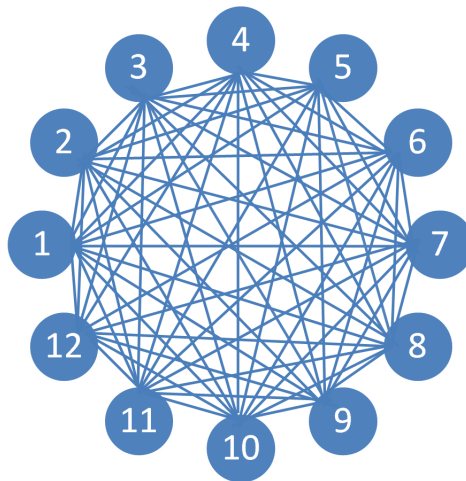


Figura 5.1: Red compleja de 12 osciladores de orden fraccionario en topología regular con acoplamiento global.

Se definen los doce osciladores de orden fraccionario y se ubica la ley de control  $u_{i,1}$  en el primer



estado de cada oscilador  ${}_0D_t^{q_1}x_{11}(t)$ . La ley de control está definida como  $u_{i,1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij}\Gamma x_j, i = 1, 2, \dots, N,$ .

$$\begin{aligned}
 N_1 & \begin{cases} {}_0D_t^{q_1}x_{1,1}(t) = \sigma(y_{1,2}(t) - x_{1,1}(t)) + u_{1,1}, \\ {}_0D_t^{q_2}y_{1,2}(t) = x_{1,1}(t)(\rho - z_{1,3}(t)) - y_{1,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z_{1,3}(t) = x_{1,1}(t)y_{1,2}(t) - \beta z_{1,3}(t). \end{cases} \\
 N_2 & \begin{cases} {}_0D_t^{q_1}x_{2,1}(t) = \sigma(y_{2,2}(t) - x_{2,1}(t)) + u_{2,1}, \\ {}_0D_t^{q_2}y_{2,2}(t) = x_{2,1}(t)(\rho - z_{2,3}(t)) - y_{2,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z_{2,3}(t) = x_{2,1}(t)y_{2,2}(t) - \beta z_{2,3}(t). \end{cases} \\
 & \vdots \\
 N_{12} & \begin{cases} {}_0D_t^{q_1}x_{12,1}(t) = \sigma(y_{12,2}(t) - x_{12,1}(t)) + u_{12,1}, \\ {}_0D_t^{q_2}y_{12,2}(t) = x_{12,1}(t)(\rho - z_{12,3}(t)) - y_{12,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z_{12,3}(t) = x_{12,1}(t)y_{12,2}(t) - \beta z_{12,3}(t). \end{cases}
 \end{aligned}$$

En 2.2.1, se define la matriz de acoplamiento global para una red compleja con acoplamiento global.

Para los doce osciladores de orden fraccionario se tiene la siguiente matriz:

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.2)$$

Cada fila de la matriz  $A_{gc}$  corresponde a la ley de control para cada oscilador de orden fraccionario, en este caso no hay un oscilador maestro por lo que se obtiene una dinámica emergente. Dado que la

matriz  $\Gamma$  se define como  $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$ , la ley de control se encuentra en el primer estado de cada oscilador de orden fraccionario.

Considerando las siguientes condiciones iniciales  $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (-5.1, 0.2, 2.5)$ ,  $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (0.8, 12, -1)$ ,  $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (2.3, -5, -2.6)$ ,  $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (10, 10, 1)$ ,  $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (6.5, 9, 3)$ ,  $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (9, 1.2, 3.57)$ ,  $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (-3.7, -1, 4)$ ,  $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (4.5, 8, 6)$ ,  $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (-1, 0.01, -4)$ ,  $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (5.7, -7.9, 3.1)$ ,  $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (0.1, 3, 0.3)$ ,  $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (0.19, 4, 7.5)$  y un acoplamiento de  $c = 20$ . Se obtuvo sincronización para una red en acoplamiento global de la Fig. 5.1. En la Fig. 5.2 se muestra el atractor final hacia el cual tienden las dinámicas de la red global.

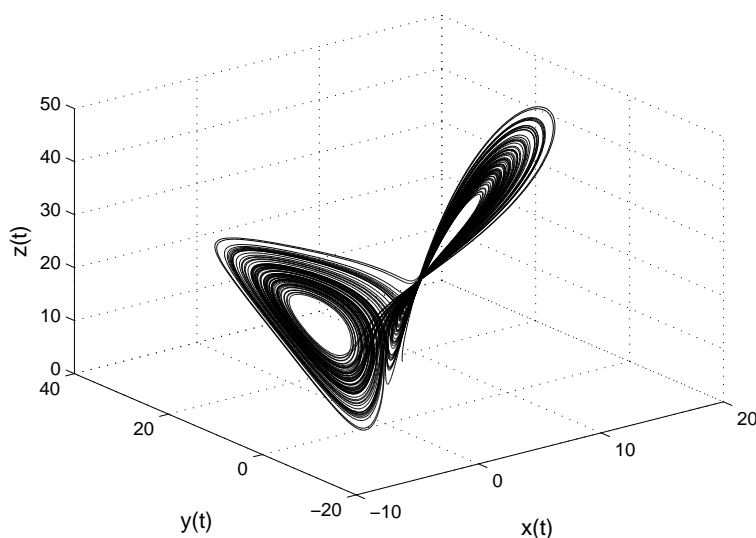


Figura 5.2: Atractor al que converge la red de 12 osciladores Lorenz de orden fraccionario sin oscilador maestro.

El plano de fase así como el error entre los estados se muestran en la Fig. 5.3 y la Fig. 5.4 respectivamente. En el plano de fase puede observarse que todos los estados sincronizan con su estado correspondiente en los otros osciladores y esto se demuestra al ver la línea de  $45^\circ$  al centro de los

planos de fase y se observa también un tiempo transitorio. Por otro lado, en la Fig. 5.4 se comparan todos los errores correspondientes a los estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$  de cada uno de los osciladores de orden fraccionario, cuando  $i = 1, 2, \dots, N$ , y se observa que todos estos tienden a cero.

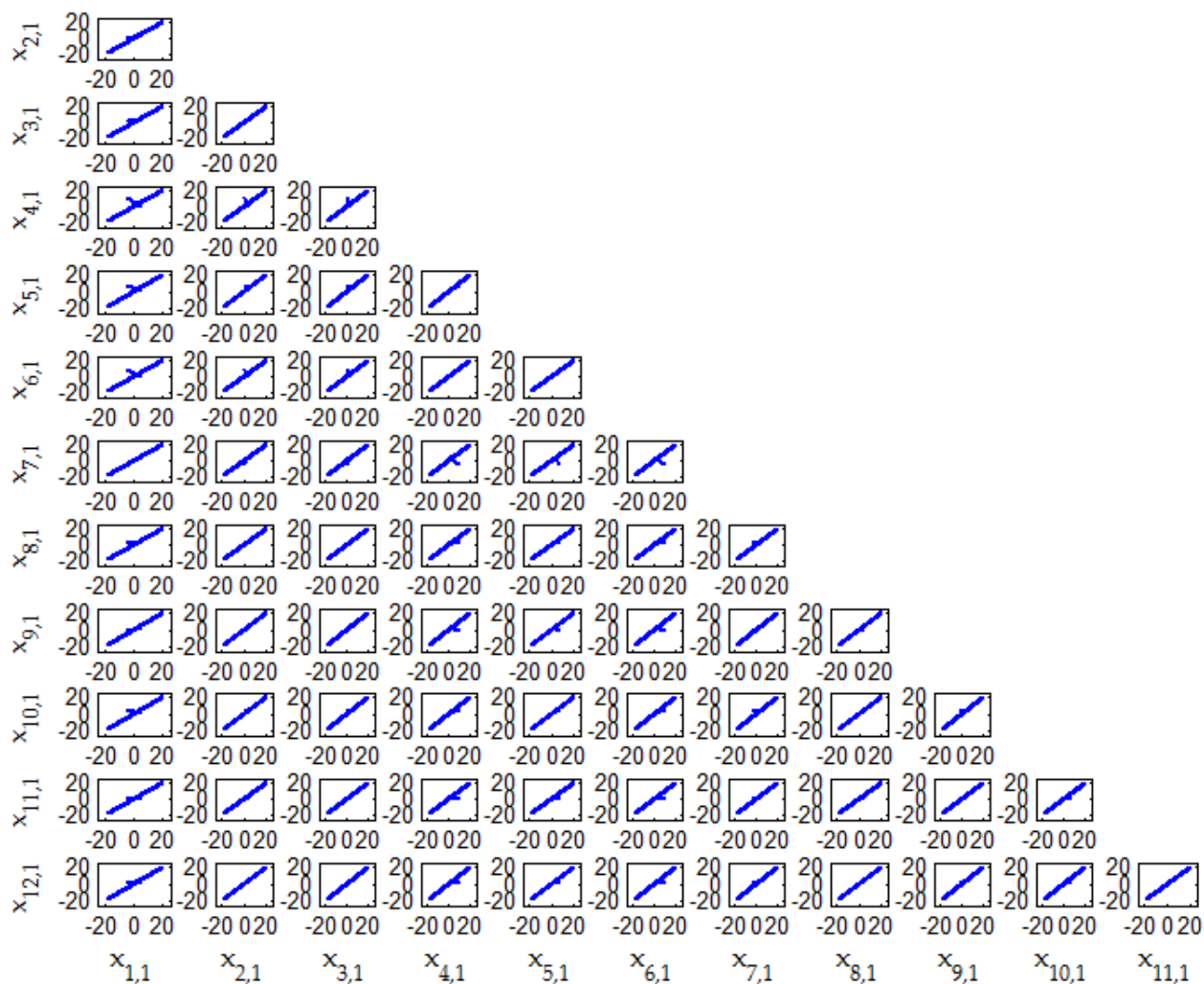


Figura 5.3: Plano de fase de la red compleja en acoplamiento global con osciladores Lorenz de orden fraccionario.

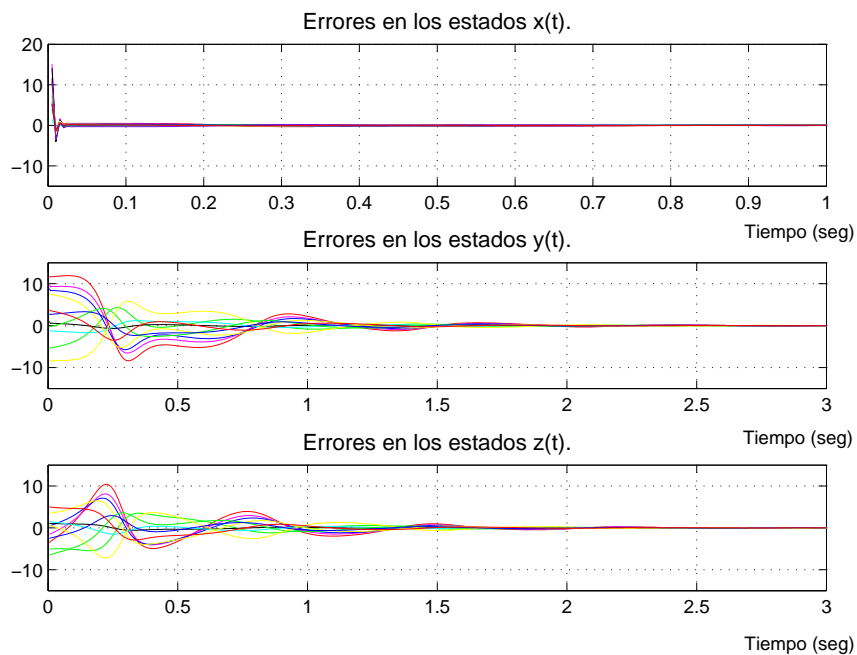
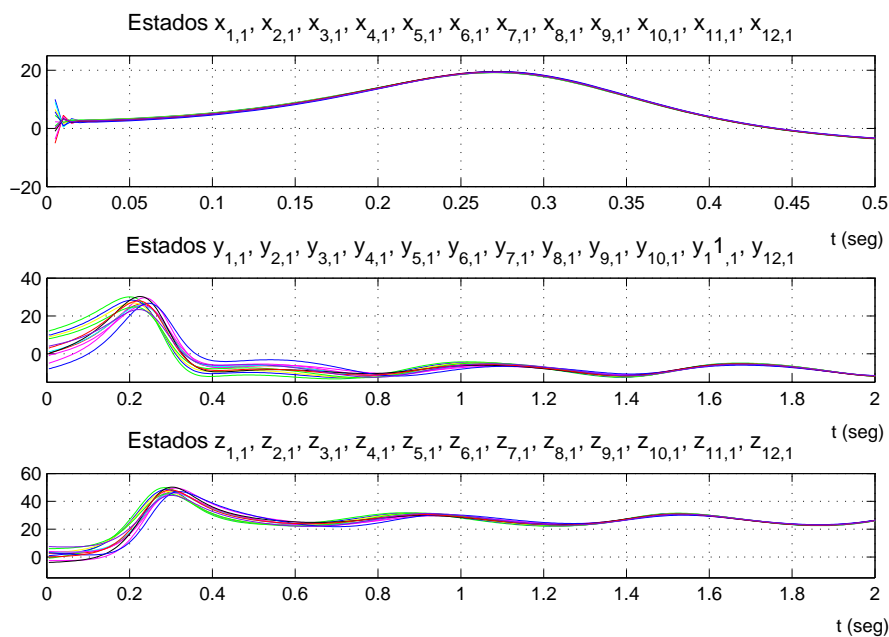
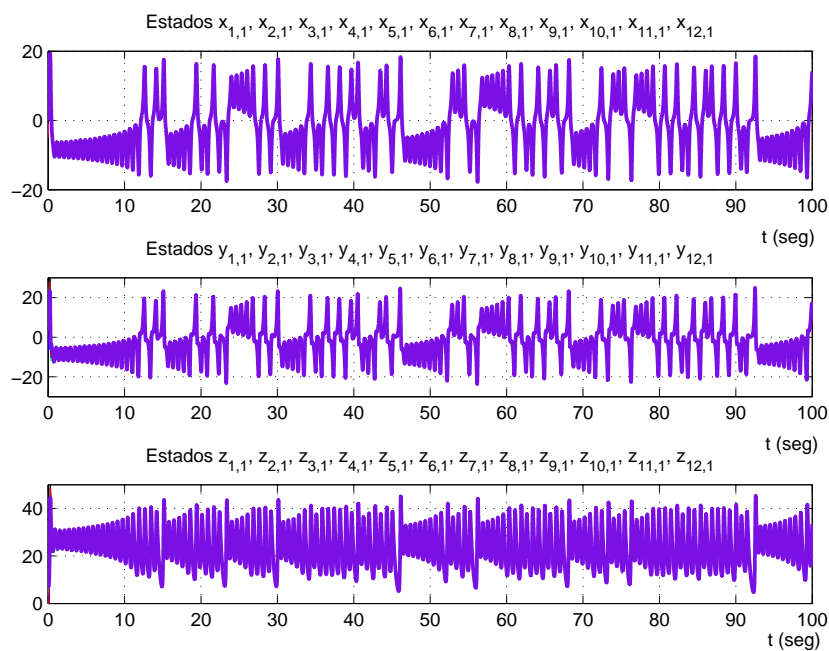


Figura 5.4: Gráfica de los errores en los estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, N$ .

La gráfica de los estados del oscilador Lorenz de orden fraccionario se muestra en la Fig. 5.5, se muestran los estados en un tiempo de simulación menor para que pueda ser apreciada de mejor forma como es que partiendo todos los osciladores en condiciones iniciales distintas, éstas convergen en una misma trayectoria y posteriormente se observan los estados de la sincronización de la red global con osciladores Lorenz de orden fraccionario en un tiempo de 100 seg.



(a)



(b)

Figura 5.5: Gráfica de los estados de la red global  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ , a) Estados de los osciladores Lorenz de orden fraccionario en un tiempo de 2 seg, b) Estados de los osciladores Lorenz de orden fraccionario en un tiempo de 100 seg.

### 5.1.2. Acoplamiento anillo

Se considera también una red compleja de 12 osciladores de orden fraccionario en acoplamiento anillo cuya configuración es mostrada en la Fig. 5.6, conformada por osciladores Rössler de orden fraccionario definidos por las siguientes ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= -(y_{i,2}(t) + z_{i,3}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= x_{i,1}(t) + ay_{i,2}(t) + u_{i,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= b + z_{i,3}(t)(x_{i,1}(t) - c). \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Los parámetros con los cuales se realizaron las simulaciones son  $a = 0.4$ ,  $b = 0.2$ , y  $c = 10$  y un orden total del sistema de 2.7 con  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$  [31]. El atractor de este oscilador se mostró en la Fig. 4.5.

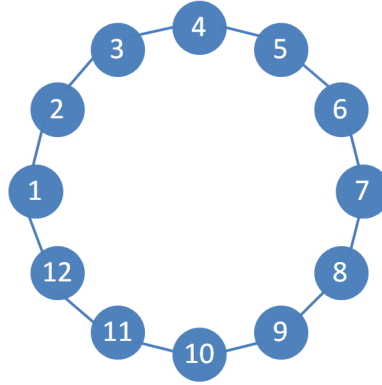


Figura 5.6: Red compleja de 12 osciladores Rössler de orden fraccionario en configuración anillo sin oscilador maestro.

Del mismo modo que en el caso anterior, se establecen los doce osciladores Rössler de orden fraccionario y sus respectivas leyes de control.

$$N_1 \begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) = -(y_{1,2}(t) + z_{1,3}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) = x_{1,1}(t) + ay_{1,2}(t) + u_{1,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{1,3}(t) = b + z_{1,3}(t)(x_{1,1}(t) - c). \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N_2 \left\{ \begin{array}{l} {}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) = -(y_{2,2}(t) + z_{2,3}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) = x_{2,1}(t) + ay_{2,2}(t) + u_{2,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{2,3}(t) = b + z_{2,3}(t)(x_{2,1}(t) - c). \end{array} \right. \\
\vdots \\
N_{12} \left\{ \begin{array}{l} {}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) = -(y_{12,2}(t) + z_{12,3}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) = x_{12,1}(t) + ay_{12,2}(t) + u_{12,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) = b + z_{12,3}(t)(x_{12,1}(t) - c). \end{array} \right.
\end{aligned}$$

En la ley de control que se está utilizando se denota a la fuerza de acoplamiento como  $c$ , por lo que para evitar confusiones entre el parámetro  $c$  del oscilador Rössler, se denotará como  $k$  a la fuerza de acoplamiento. De tal modo que la ley de control es  $u_{i,2} = k \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ . La matriz  $\Gamma$  es la que se encarga de establecer que nodos conectan de sistema a sistema, por lo que la matriz queda de la siguiente forma  $\Gamma = \text{diag}(0, 1, 0)$  dado que la ley de control está en el segundo estado de los osciladores de orden fraccionario.

De acuerdo con la teoría de sistemas complejos, en (2.2.3) se establece la matriz de acoplamiento que es utilizada para el acoplamiento anillo con  $N$  osciladores. Para este caso, con  $N = 12$  la matriz correspondiente es la siguiente:

$$A_{nc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.1.4)$$

Se realizaron las pruebas de sincronización utilizando condiciones iniciales distintas para cada sistema  $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (0.2, -0.1, 0.1)$ ,  $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (8, -4, -1)$ ,  $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (4, 0.1, 2)$ ,  $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (-2.23, 5, 5.21)$ ,  $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (5, 3.2, -3)$ ,  $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (-4, -2.9, 0.12)$ ,  $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (3.4, -2, -4.3)$ ,  $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (5.1, 7.7, -5.2)$ ,  $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (4.5, 8.1, 1.1)$ ,  $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (2.1, -1.1, 0.65)$ ,  $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (7.2, 3, 8)$ ,  $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (1.1, -6.1, 3)$ .

Cada fila será tomada como la ley de control correspondiente al segundo estado de cada oscilador caótico Rössler de orden fraccionario. Se obtuvieron resultados de sincronización para  $c > 5$  y en la Fig. 5.7 se muestra el atractor al cual convergen todas las dinámicas de la red, que al no tener oscilador maestro tienden a un nuevo atractor.

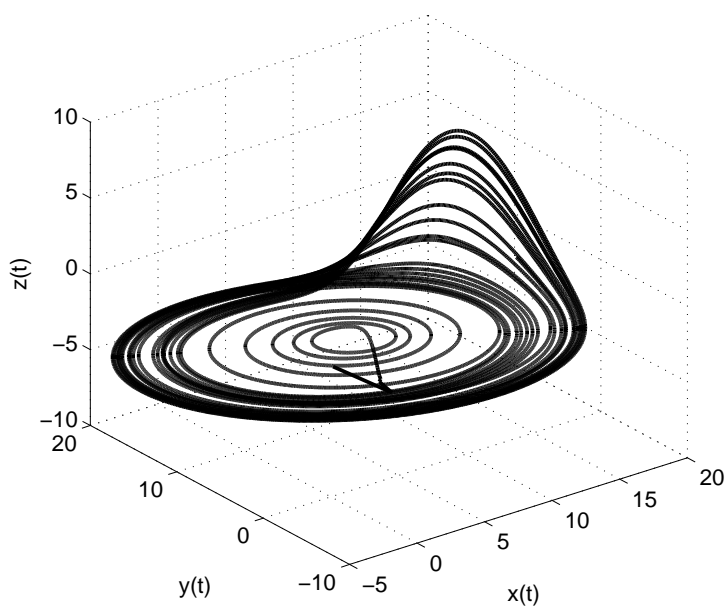


Figura 5.7: Atractor de la red compleja en acoplamiento anillo formada por osciladores caóticos Rössler de orden fraccionario.

En la Fig. 5.8 se muestra el plano de fase que demuestra la sincronía de los osciladores caóticos Rössler de orden fraccionario al observarse la línea de  $45^\circ$  al centro de las gráficas. Los estados de los



doce osciladores se muestran en la Fig. 5.9 en la cual se observa un mayor tiempo transitorio en los estados  $x_{i,2}$  en comparación con los estados  $y_{i,2}$  y  $z_{i,2}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$  donde es prácticamente imperceptible.

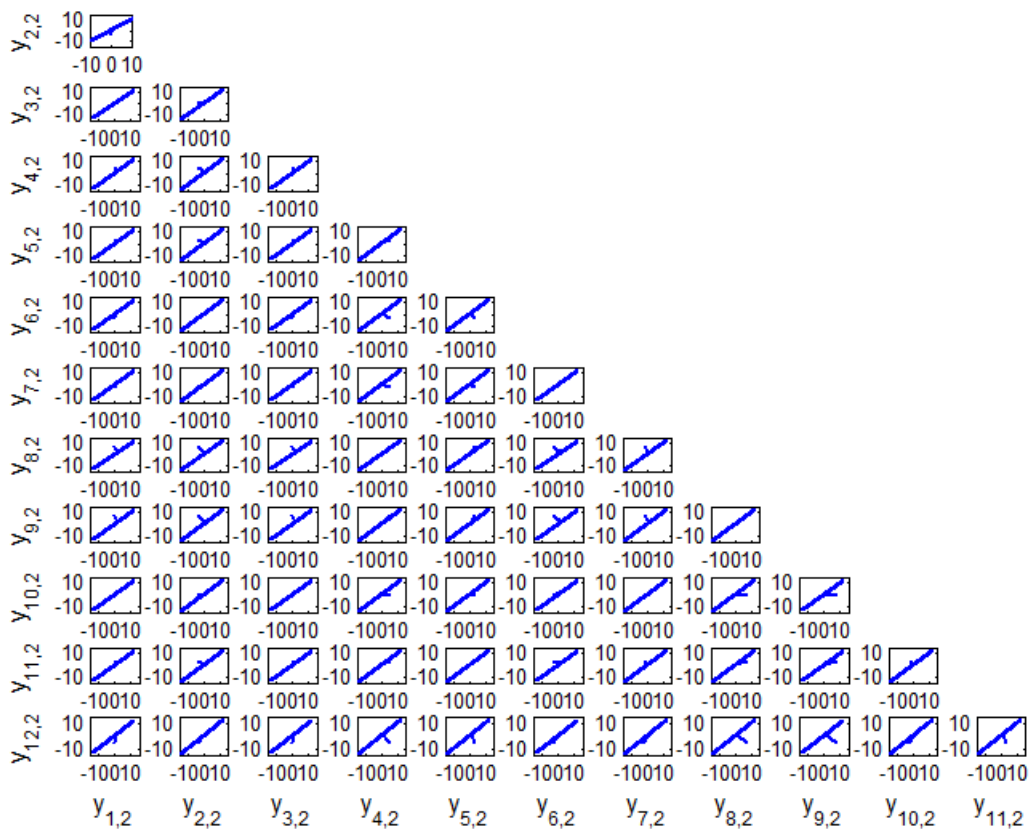


Figura 5.8: Plano de fase de los estados  $y_{i,2}$  correspondientes a la red compleja en acoplamiento anillo formada por osciladores Rössler de orden fraccionario.

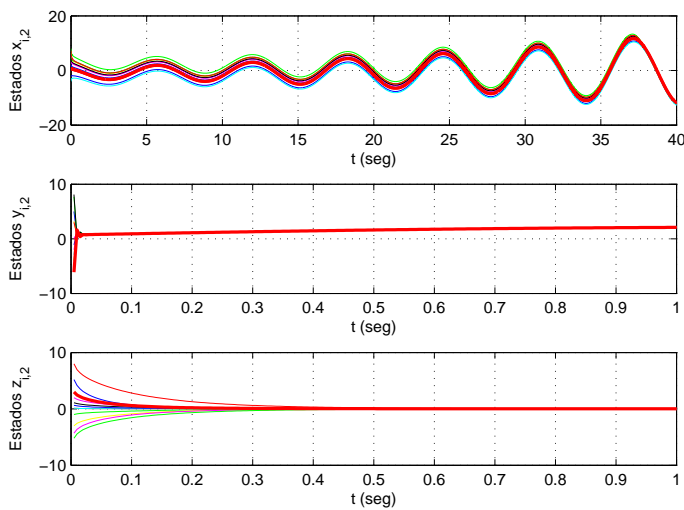


Figura 5.9: Estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$  para  $i = 1, 2, \dots, 12$  de los osciladores caóticos Rössler de orden fraccionario en la red compleja en acoplamiento anillo.

### 5.1.3. Acoplamiento estrella

Como último caso de las redes complejas regulares se encuentra el acoplamiento estrella dispuesto como aparece en la Fig. 5.10. Se propone que los osciladores caóticos que formen esta red sean osciladores Chen de orden fraccionario.

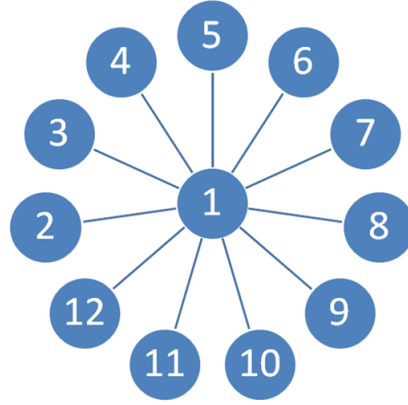


Figura 5.10: Red compleja de 12 osciladores caóticos Chen de orden fraccionario en configuración estrella sin oscilador maestro.

Las ecuaciones de estado del oscilador caótico Chen de orden fraccionario están dadas a continuación, con los siguientes parámetros  $a = 35$ ,  $b = 3$ ,  $c = 28$  y  $d = c - a = -7$  y  $q_1 = 0.985$ ,  $q_2 = 0.99$ ,  $q_3 = 0.98$  con los cuales el oscilador exhibe caos [30].

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= a(y_{i,2}(t) - x_{i,1}(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= (c - a)x_{i,1}(t) - x_{i,1}(t)z_{i,3}(t) + cy_{i,2}(t) + u_{i,2}, \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= x_{i,1}(t)y_{i,2}(t) - bz_{i,3}(t).
 \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

La ley de control se encuentra en el segundo estado de cada oscilador caótico de orden fraccionario:

$$\begin{aligned}
 N_1 &\left\{ \begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= a(y_{1,2}(t) - x_{1,1}(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= (c - a)x_{1,1}(t) - x_{1,1}(t)z_{1,3}(t) + cy_{1,2}(t) + u_{1,2}, \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{1,3}(t) &= x_{1,1}(t)y_{1,2}(t) - bz_{1,3}(t).
 \end{aligned} \right. \\
 N_2 &\left\{ \begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) &= a(y_{2,2}(t) - x_{2,1}(t)), \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) &= (c - a)x_{2,1}(t) - x_{2,1}(t)z_{2,3}(t) + cy_{2,2}(t) + u_{2,2}, \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{2,3}(t) &= x_{2,1}(t)y_{2,2}(t) - bz_{2,3}(t).
 \end{aligned} \right. \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$$N_{12} \begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) = a(y_{12,2}(t) - x_{12,1}(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) = (c - a)x_{12,1}(t) - x_{12,1}(t)z_{12,3}(t) + cy_{12,2}(t) + u_{12,2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) = x_{12,1}(t)y_{12,2}(t) - bz_{12,3}(t). \end{cases}$$

Tal como en el caso de acoplamiento anillo la ley de control está dada por  $u_{i,1} = k \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , y debido a que la ley de control se presenta en el segundo estado, la matriz  $\Gamma$  queda definida como  $\Gamma = \text{diag}(0, 1, 0)$ .

La matriz de acoplamiento de acuerdo a (2.2.6) quedaría de la siguiente forma:

$$A_{sc} = \begin{pmatrix} -11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.1.6)$$

Las condiciones iniciales que se consideraron para realizar las pruebas fueron  $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (1.5, 2, 0.5)$ ,  $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (8, -4, -9)$ ,  $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (-3, -1, 6)$ ,  $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (-7, -5, 9)$ ,  $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (5, 9, -3)$ ,  $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (1, 3, -0.5)$ ,  $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (3.2, 8, -6.5)$ ,  $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (-10.3, 7.2, -1.25)$ ,  $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (0.01, 3.4, -1.6)$ ,  $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (7.2, 4.3, 3.2)$ ,  $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (-5, -3, 2.2)$ ,  $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (11.1, 0.1, 5)$ .

Se obtuvieron las siguientes gráficas, en la Fig. 5.11 se encuentra el atractor final para este acoplamiento sin oscilador maestro y en la Fig. 5.12 se encuentra el plano de fase de los estados  $y_{i,2}$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de cada oscilador caótico de orden fraccionario.

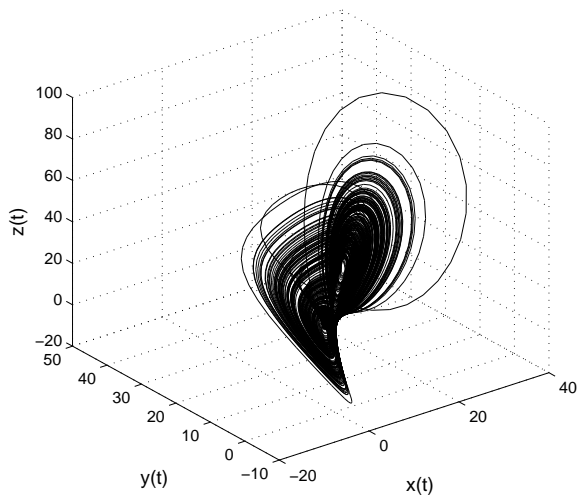


Figura 5.11: Atractor de la red compleja en acoplamiento en estrella con osciladores caóticos Chen de orden fraccionario.

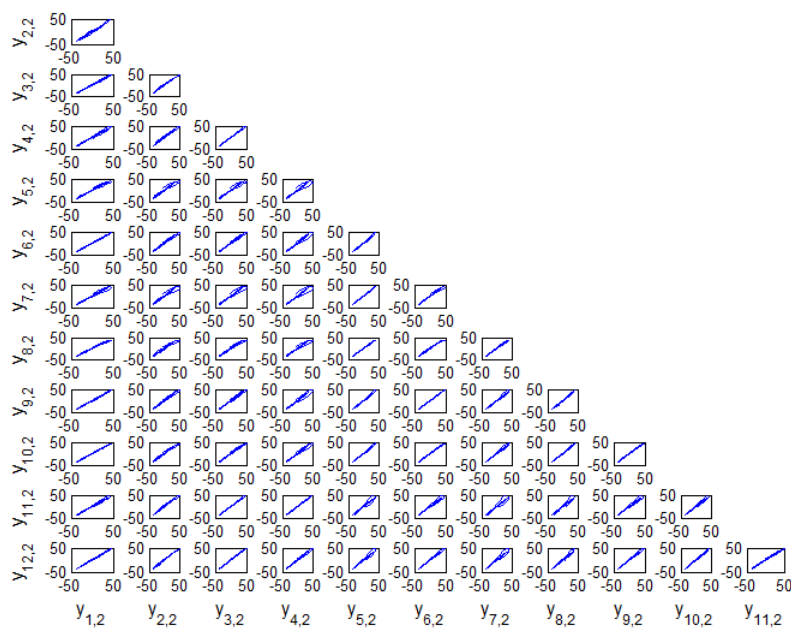


Figura 5.12: Plano de fase de los estados  $y_{i,2}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , con osciladores caóticos Chen de orden fraccionario que conforman la red compleja en acoplamiento estrella.

Los estados de cada oscilador de orden fraccionario que conforman la red estrella son mostrados en la Fig. 5.13, donde se observa que todos los estados convergen a un mismo estado totalmente nuevo ya que la red no tiene oscilador maestro.

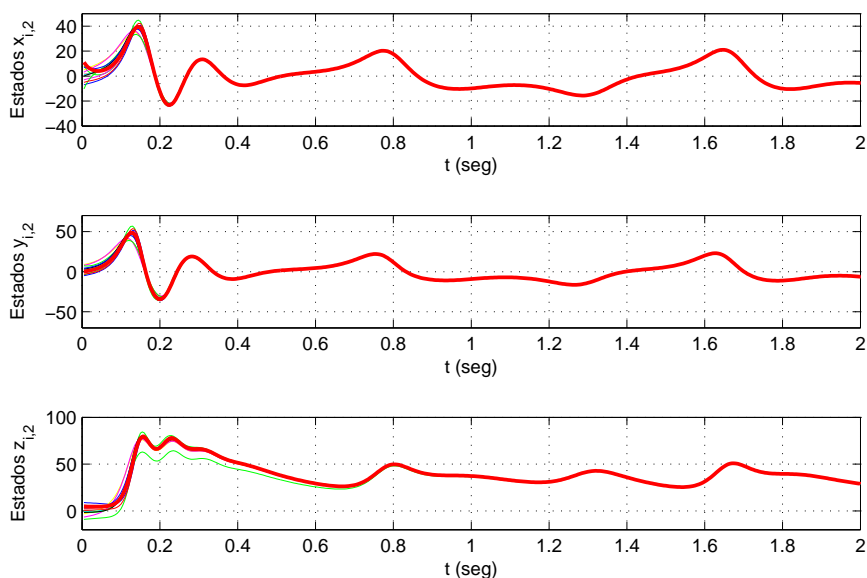


Figura 5.13: Estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$ ,  $z_{i,3}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de los osciladores Chen de orden fraccionario que conforman la red compleja en acoplamiento estrella.

## 5.2. Sincronización de redes irregulares

Para esta topología se proponen dos casos, ambos con doce osciladores caóticos de orden fraccionario pero considerando sincronización con y sin oscilador maestro. Las dos redes que se proponen se muestran en la Fig. 5.14 la primera de ellas corresponde a la red irregular con oscilador maestro, siendo este el nodo  $N_{10}$  y la segunda de ellas es una red sin oscilador maestro.

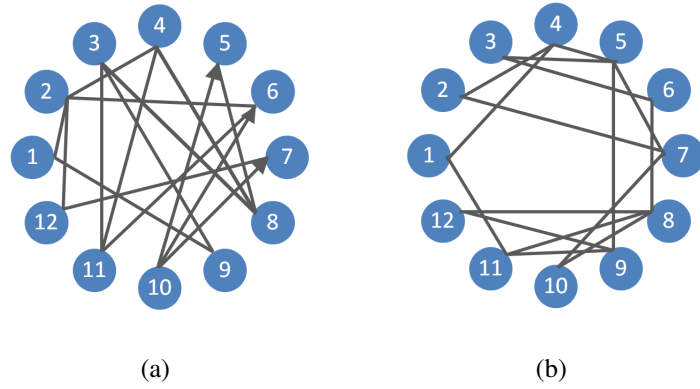


Figura 5.14: Redes complejas en topología irregular. a) Red con oscilador maestro en  $N_{10}$ , b) red sin oscilador maestro.

Como primer caso se toma el de red irregular **sin oscilador maestro** y se proponen osciladores Arneodo de orden fraccionario como nodos constituyentes de la red compleja. Éste se encuentra definido a continuación tomando en cuenta los parámetros  $\beta_1 = -5.5$ ,  $\beta_2 = 3.5$ ,  $\beta_3 = 0.8$ ,  $\beta_4 = -1$  y  $q_1 = q_2 = 0.97$  y  $q_3 = 0.96$  para que el oscilador de orden fraccionario exhiba caos [22].

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{i,1}(t) &= y_{i,2}(t) + u_{i,1}, \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{i,2}(t) &= z_{i,3}(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{i,3}(t) &= -\beta_1 x_{i,1}(t) - \beta_2 y_{i,2}(t) - \beta_3 z_{i,3}(t) + \beta_4 x_{i,1}^3(t).
 \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

La ley de control está dada por  $u_{i,1} = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \Gamma x_j$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , y se encuentra en el primer estado de cada oscilador. Las ecuaciones de los doce osciladores caóticos de orden fraccionario Arneodo se muestran a continuación y se puede observar que la ley de control está en el primer estado de cada oscilador, por lo tanto, la matriz  $\Gamma$  queda definida como  $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned}
 N_1 \left\{ \begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= y_{1,2}(t) + u_{1,1}, \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= z_{1,3}(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{1,3}(t) &= -\beta_1 x_{1,1}(t) - \beta_2 y_{1,2}(t) - \beta_3 z_{1,3}(t) + \beta_4 x_{1,1}^3(t).
 \end{aligned} \right. \\
 N_2 \left\{ \begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) &= y_{2,2}(t) + u_{2,1}, \\
 {}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) &= z_{2,3}(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z_{2,3}(t) &= -\beta_1 x_{2,1}(t) - \beta_2 y_{2,2}(t) - \beta_3 z_{2,3}(t) + \beta_4 x_{2,1}^3(t).
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$N_{12} \begin{cases} \vdots \\ {}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) = y_{12,2}(t) + u_{12,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) = z_{12,3}(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z_{12,3}(t) = -\beta_1 x_{12,1}(t) - \beta_2 y_{12,2}(t) - \beta_3 z_{12,3}(t) + \beta_4 x_{12,1}^3(t). \end{cases}$$

La matriz de acoplamiento para el caso irregular sin oscilador maestro se obtiene de acuerdo a (2.2.10) y es la siguiente:

$$A_{irc} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.2.2)$$

Se consideraron condiciones iniciales en cada uno de los osciladores distintas a los demás y son las siguientes  $(x_{1,1}, y_{1,2}, z_{1,3}) = (-0.2, 0.5, 0.2)$ ,  $(x_{2,1}, y_{2,2}, z_{2,3}) = (1, -2.1, 3.1)$ ,  $(x_{3,1}, y_{3,2}, z_{3,3}) = (2.98, 2.8, -1.1)$ ,  $(x_{4,1}, y_{4,2}, z_{4,3}) = (4.2, -1.1, 3.2)$ ,  $(x_{5,1}, y_{5,2}, z_{5,3}) = (5.7, 4.23, 6.2)$ ,  $(x_{6,1}, y_{6,2}, z_{6,3}) = (-4.1, 0.12, 1.4)$ ,  $(x_{7,1}, y_{7,2}, z_{7,3}) = (-2, -4.3, 6.1)$ ,  $(x_{8,1}, y_{8,2}, z_{8,3}) = (9, -5.2, 4.5)$ ,  $(x_{9,1}, y_{9,2}, z_{9,3}) = (8.1, 1.1, 2.1)$ ,  $(x_{10,1}, y_{10,2}, z_{10,3}) = (-1.1, 12, 7.2)$ ,  $(x_{11,1}, y_{11,2}, z_{11,3}) = (-3, 8, 10.1)$ ,  $(x_{12,1}, y_{12,2}, z_{12,3}) = (-6.1, 3, -4.32)$ .

Se obtiene sincronización para una  $c = 25$  y se observa como todos los osciladores tienden a un mismo atractor y esto también puede verse en la gráfica de los estados, donde después de un tiempo transitorio los estados convergen a uno, es decir, sincronizan. En la Fig.5.15 se muestra el atractor final de la red irregular sin oscilador maestro conformada por osciladores caóticos Arneodo de orden



fraccionario; en la Fig. 5.16 se muestran los estados de cada uno de los osciladores y finalmente en la Fig. 5.17 se muestra el plano de fase donde se visualiza también que la sincronía se ha cumplido.

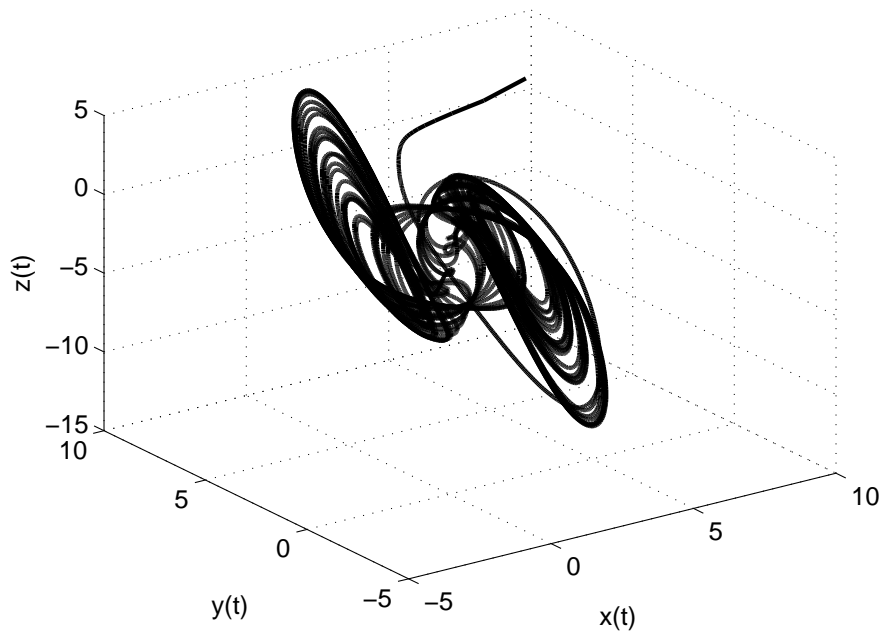


Figura 5.15: Atractor final para la red con acoplamiento irregular sin oscilador maestro con osciladores caóticos Arneodo de orden fraccionario.

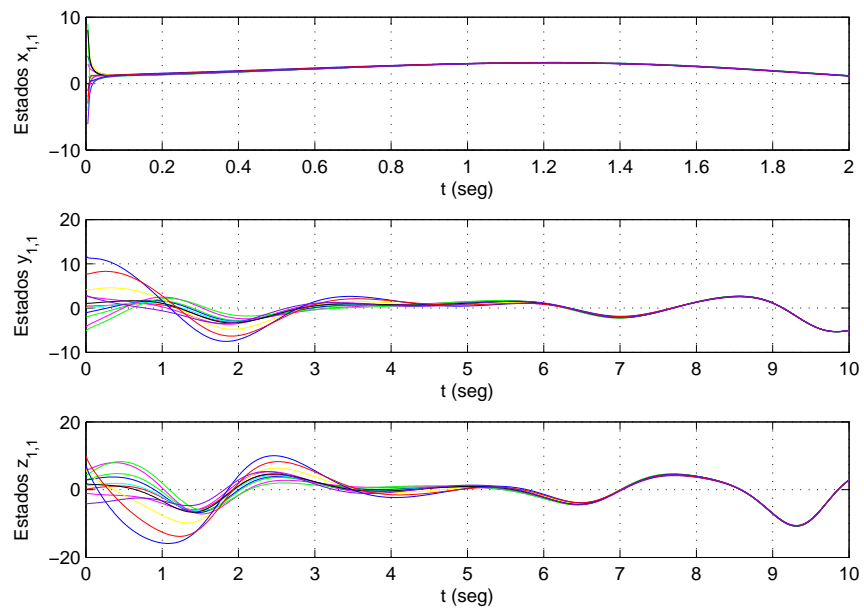


Figura 5.16: Sincronía de los estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$  y  $z_{i,3}$  para  $i = 1, 2, \dots, 12$  en la red irregular sin oscilador maestro con osciladores caóticos Arneodo de orden fraccionario.

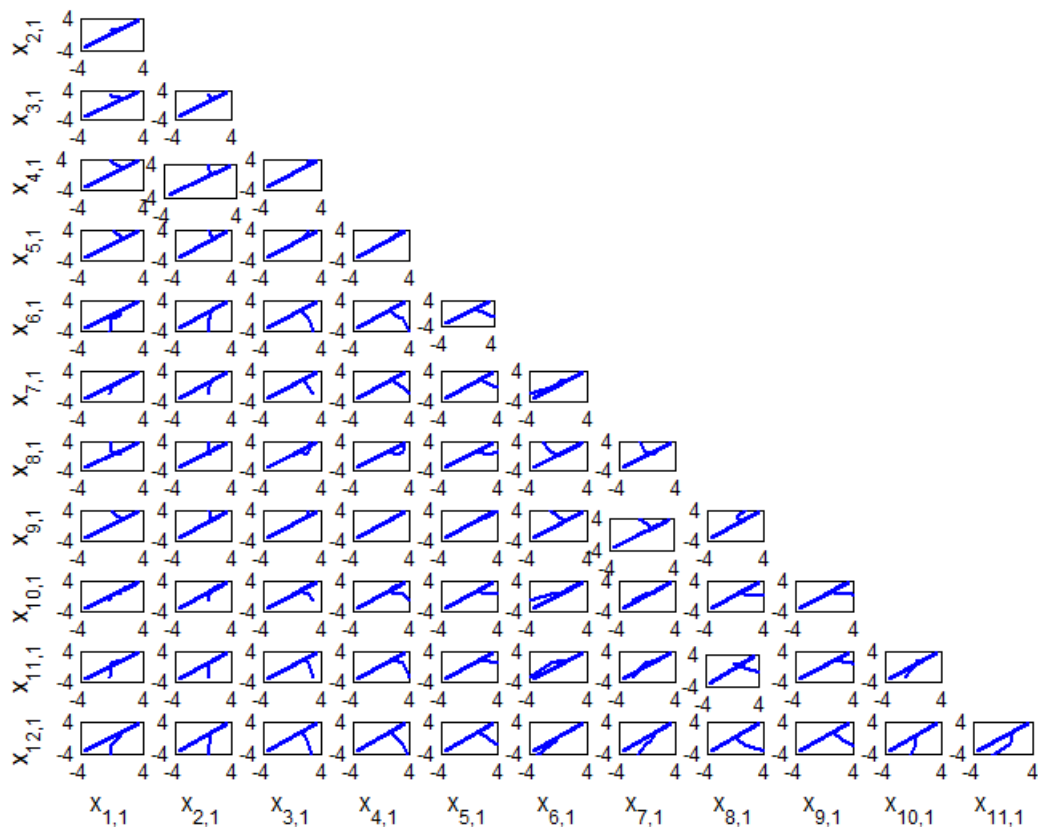


Figura 5.17: Plano de fase de los estados  $x_{i,1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de los osciladores caóticos Arneodo de orden fraccionario que conforman la red irregular.

Como segundo caso se considera una red compleja irregular donde existe un **oscilador maestro** que impone la dinámica a la red y a la cual todos los osciladores deben converger. El sistema que se propone es el oscilador caótico de orden fraccionario Duffing definido por las siguientes ecuaciones de estado:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) &= y_{1,2}(t) + u_{i1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) &= x_{1,1}(t) - x_{1,1}^3(t) - \alpha y_{1,2}(t) + \delta \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Los parámetros para que el sistema exhiba caos son  $\alpha = 0.15$ ,  $\delta = 0.3$ ,  $\omega = 1$  y  $q_1 = 0.9$  y  $q_2 = 1$  [22]. Se elimina la ley de control correspondiente al oscilador maestro, es decir, en el oscilador  $N_{10}$ .

A continuación se presentan los osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario que conforman la segunda red irregular mostrada en Fig. 5.14b. La ley de control se asigna al primer estado de cada oscilador, es decir, a  $x_{i,1}$ , por lo tanto, la matriz  $\Gamma$  queda definida como  $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$ .

$$\begin{aligned}
 N_1 & \begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_{1,1}(t) = y_{1,2}(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y_{1,2}(t) = x_{1,1}(t) - x_{1,1}^3(t) - \alpha y_{1,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{cases} \\
 N_2 & \begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_{2,1}(t) = y_{2,2}(t) + u_{2,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{2,2}(t) = x_{2,1}(t) - x_{2,1}^3(t) - \alpha y_{2,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{cases} \\
 & \quad \vdots \\
 N_{12} & \begin{cases} {}_0D_t^{q_1} x_{12,1}(t) = y_{12,2}(t) + u_{12,1}, \\ {}_0D_t^{q_2} y_{12,2}(t) = x_{12,1}(t) - x_{12,1}^3(t) - \alpha y_{12,2}(t) + \delta \cos(\omega t), \end{cases}
 \end{aligned}$$

De acuerdo a (2.2.12) la matriz de acoplamiento queda definida de la siguiente forma:

$$A_{irc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (5.2.4)$$

Para llevar a cabo la simulación de sincronización se proponen distintas condiciones iniciales, es decir, se consideraron condiciones iniciales en cada uno de los osciladores de orden fraccionario distintas a los demás y son las siguientes  $(x_{1,1}, y_{1,2}) = (1, 3)$ ,  $(x_{2,1}, y_{2,2}) = (-0.5, 3.2)$ ,  $(x_{3,1}, y_{3,2}) =$

$(-2, -3.5), (x_{4,1}, y_{4,2}) = (0.3, 4.2), (x_{5,1}, y_{5,2}) = (-1.25, 0.01), (x_{6,1}, y_{6,2}) = (3.4, -1.6), (x_{7,1}, y_{7,2}) = (7.2, 4.3), (x_{8,1}, y_{8,2}) = (2.2, -5), (x_{9,1}, y_{9,2}) = (3, 2.2), (x_{10,1}, y_{10,2}) = (3.1, 0.43), (x_{11,1}, y_{11,2}) = (5, -1), (x_{12,1}, y_{12,2}) = (2.3, -2).$

Se obtiene sincronía en todos los estados y se utiliza una fuerza de acoplamiento  $c = 15$ . El atractor final se muestra en la Fig. 5.18 el cual es el atractor del oscilador  $N_{10}$  al cual tienden todos los demás. La gráfica de estados se muestra en la Fig. 5.19 y todos los estados convergen a uno solo. El plano de fase que también demuestra sincronía, se muestra en la Fig. 5.20.

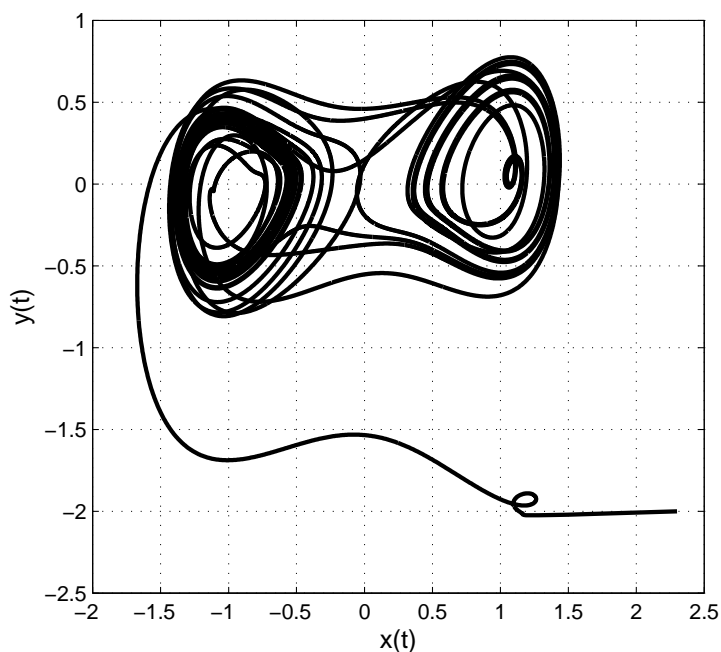


Figura 5.18: Atractor final para la red compleja en acoplamiento irregular con oscilador maestro conformada por osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario.

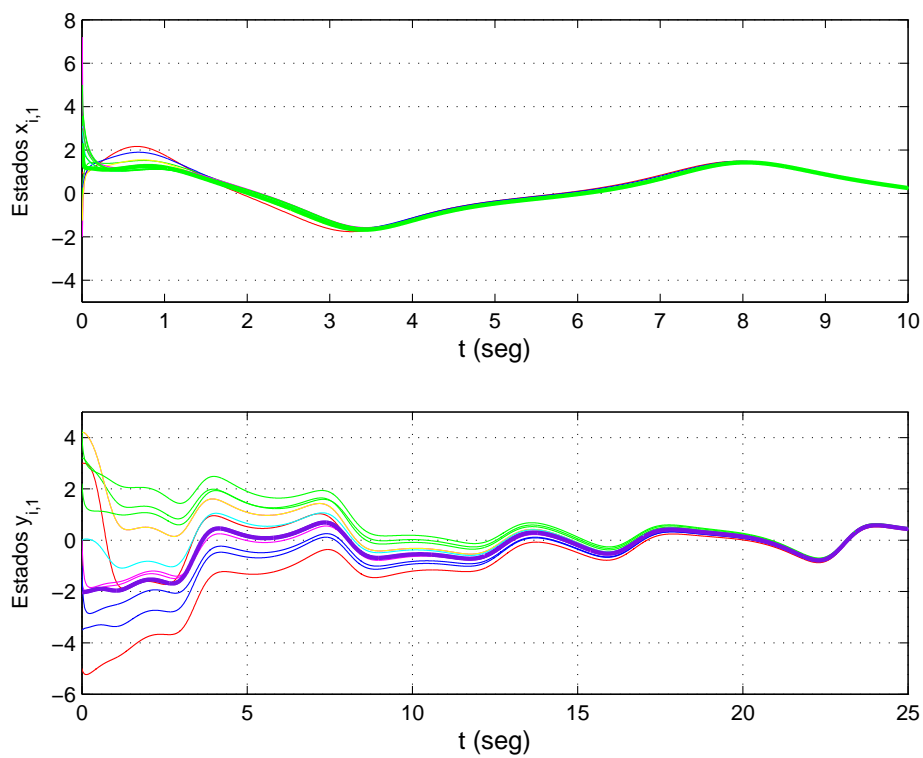


Figura 5.19: Sincronía de los estados  $x_{i,1}$ ,  $y_{i,2}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de la red irregular con oscilador maestro conformado por osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario.

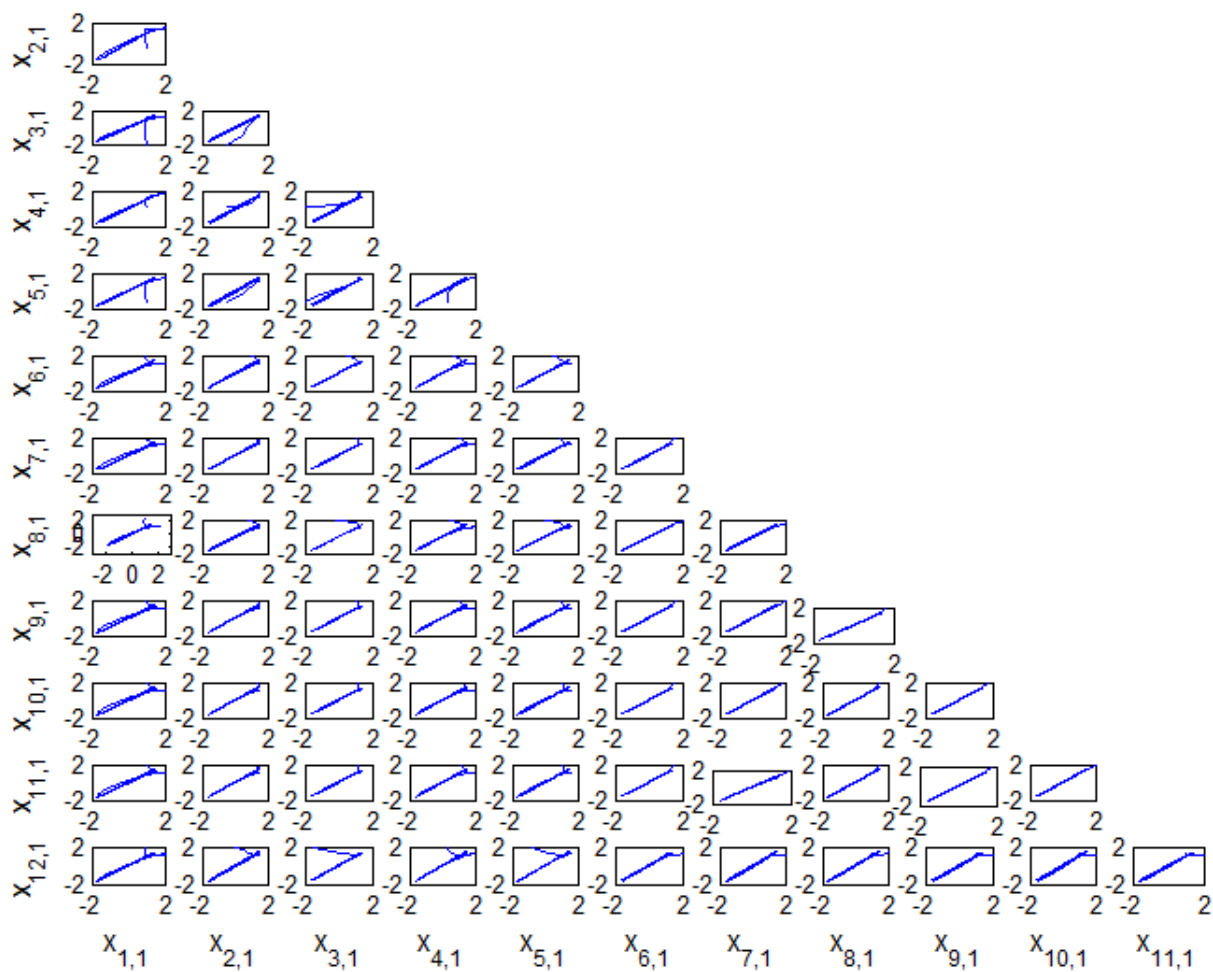


Figura 5.20: Plano de fase de los estados  $x_{i,1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, 12$ , de la red irregular conformada por osciladores caóticos Duffing de orden fraccionario.

# Capítulo 6

## Implementación de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario

En este capítulo se considera la simulación de redes complejas con osciladores caóticos de orden fraccionario por medio de un software de circuitos avanzados, *Multisim*, el cual permite evaluar el comportamiento de la red desde una perspectiva más cercana a una implementación física. Se consideran también dos escenarios, uno de ellos es la sincronización de *redes regulares* en sus tres acoplamientos y el segundo es la sincronización de *redes irregulares*.

### 6.1. Realización analógica de los circuitos.

La ecuación fundamental de una ecuación diferencial de orden fraccionario se representa de la siguiente forma:

$$(\tau_0)^m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + x(t) = e(t), \quad \text{para } 0 < m < 2. \quad (6.1.1)$$

La función de transferencia de este tipo de sistemas de orden fraccionario está dado por la siguiente función irracional:

$$G(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{[1 + (\tau_0 s)^m]}, \quad \text{para } 0 < m < 2, \quad (6.1.2)$$



donde  $s$  es la frecuencia compleja y  $\tau_0$  es el tiempo característico de relajación. Una de las formas de estudiar a los osciladores de orden fraccionario es por medio de aproximaciones lineales que se obtienen utilizando técnicas en el dominio de la frecuencia basadas en los diagramas de Bode. Se obtiene una aproximación lineal que va a depender de un ancho de banda deseado y la discrepancia entre la aproximación de la magnitud del diagrama de Bode y la magnitud real del sistema.

En [43] se encuentra el análisis de este método por lo que aquí solo se presentará la teoría necesaria para la implementación de los circuitos.

En el dominio de Laplace el integrador de orden fraccionario  $m$  puede representarse como:

$$F(s) = \frac{1}{s^m}. \quad (6.1.3)$$

El diagrama de Bode de la función de transferencia (6.1.3) se caracteriza por una pendiente de  $-20m$  dB por década. En [45] se establece un algoritmo para calcular una función de transferencia lineal que se aproxime a la función fraccionaria. Esta se basa en aproximarse a la línea de  $-20m$  dB por medio de líneas en zig-zag conectadas juntas alternando pendientes de 0 dB y -20 dB por década, en la Fig. 6.1 se puede apreciar esta aproximación.

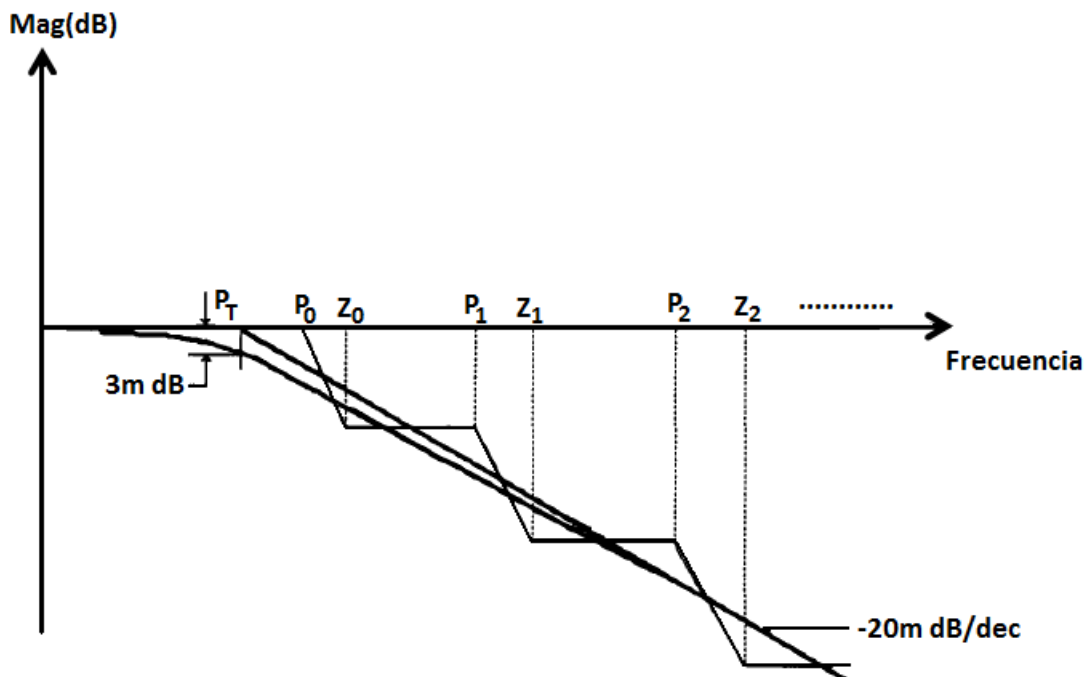


Figura 6.1: Gráfica de Bode de la función de transferencia  $1/[1 + (\tau_0 s)^m]$ , para  $0 < m < 2$ , con pendiente de  $-20m$  dB/dec y su aproximación con líneas de zig zag con pendientes individuales de  $-20$  dB/dec y  $0$  dB/dec.

De acuerdo a este algoritmo, si la discrepancia entre la línea actual y la aproximación se especifica como  $y$  dB sobre un rango de frecuencias de  $w_{max}$  y una frecuencia de corte de  $p_T$ , entonces, (6.1.3) puede ser aproximado con la ecuación siguiente

$$F(s) = \frac{1}{s^m} \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{p_T}} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1 + \frac{s}{p_i})}. \quad (6.1.4)$$

El operador de orden fraccionario es aproximado por medio de una función de transferencia lineal de orden  $N + 1$  donde  $N$  está dado por

$$N = 1 + \text{Integer} \frac{\log(\frac{w_{max}}{p_0})}{\log(ab)}, \quad (6.1.5)$$

y  $p_0$ ,  $a$  y  $b$  están dados por

$$\begin{aligned} p_0 &= p_T 10^{[y/20m]}, \\ a &= 10^{[y/1-(1-m)]}, \\ b &= 10^{[y/10m]}. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

A continuación se realiza la sincronización de redes complejas con osciladores de orden fraccionario por medio de circuitos y su simulación con un software de circuitos esquemáticos. El error de aproximación para hacer estos circuitos es de 2dB a una frecuencia  $w_{max} = 100$  y una frecuencia de corte  $p_T = 0.01$  los cuales son elegidos de las tablas que se presentan en [43]. Se utilizan amplificadores operacionales de tipo LM741, elementos resistivos, capacitivos y multiplicadores AD633AN. En todos los OPAMP's LM741, los pines numerados como 1 y 5 no son conectados, ya que el propósito de estos pines se relaciona a una eliminación de offset en las entradas del dispositivo lo cual no es necesario para este caso.

## 6.2. Simulación de redes complejas.

### 6.2.1. Circuito analógico del oscilador Liu de orden fraccionario.

Se considera el oscilador de Liu de orden fraccionario definido por las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -ax(t) - ey^2(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= by(t) - kx(t)z(t) + u_{i2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -cz(t) + mx(t)y(t), \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

donde  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  es el orden fraccionario y se consideran los siguientes parámetros  $a = e = 1$ ,  $b = 2.5$ ,  $c = 5$  y  $k = m = 4$  con los cuales el sistema exhibe caos [22]. De acuerdo a [44] la aproximación de la derivada  $1/s^{0.95}$  está dada de la siguiente forma

$$\frac{1}{s^{0.95}} \approx \frac{1.281s^2 + 18.6004s + 2.0833}{s^3 + 18.4738s^2 + 2.6574s + 0.003}. \quad (6.2.2)$$

El circuito para la realización de (6.2.2) se muestra en la Fig. 6.2, ésta es una red de capacitores y resistores con los que se realiza la aproximación del orden fraccionario utilizándola en un derivador, como se observará más adelante.

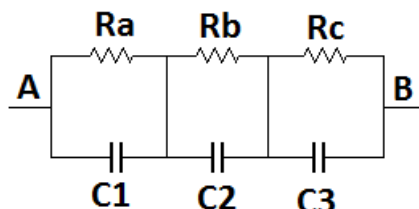


Figura 6.2: Circuito eléctrico para la aproximación de  $1/s^{0.95}$ .

La función de transferencia lineal que se obtiene entre A y B en el circuito mostrado en Fig. 6.2 es la siguiente

$$H(s) = \frac{1}{C_0} \frac{\left(\frac{C_0}{C_1} + \frac{C_0}{C_2} + \frac{C_0}{C_3}\right) \frac{s^2 + \left(\frac{C_2 + C_3}{R_a} + \frac{C_1 + C_3}{R_b} + \frac{C_1 + C_2}{R_c}\right)s + \left(\frac{R_a + R_b + R_c}{R_a R_b R_c}\right)}{(s + 1/R_a C_1)(s + 1/R_b C_2)(s + 1/R_c C_3)}, \quad (6.2.3)$$

donde  $C_0$  es un parámetro unitario con valor  $C_0 = 1\mu F$  y  $F(s) = H(s)C_0 = 1/s^{0.95}$ . Los valores de los capacitores y resistencias son las siguientes:  $C_1 = 1.268\mu F$ ,  $C_2 = 4.58\mu F$ ,  $C_3 = 3.64\mu F$ , y  $R_a = 692.85M\Omega$ ,  $R_b = 1.5153M\Omega$ ,  $R_c = 14.979k\Omega$ . El circuito está elaborado con amplificadores operacionales LM741, las resistencias que se consideran son  $R_1 = 100k\Omega$ ,  $R_2 = R_3 = R_4 = R_8 = R_9 = R_{12} = R_{13} = R_{17} = R_{18} = R_{21} = R_{22} = R_{26} = R_{27} = 10k\Omega$ ,  $R_{10} = 40k\Omega$ ,  $R_{11} = R_{19} = 2.5k\Omega$ ,  $R_{20} = 20k\Omega$ , las cuales forman parte de la adecuación de la señal para obtener las ecuaciones que definen al oscilador. El circuito eléctrico se muestra en la Fig. 6.3 (a) y se observa que el derivador tiene en la realimentación la red de capacitores y resistores mostrada anteriormente en la Fig. 6.2 con los valores que se obtuvieron al establecer su función de transferencia. Los estados del oscilador se muestran en la Fig. 6.3 (b).

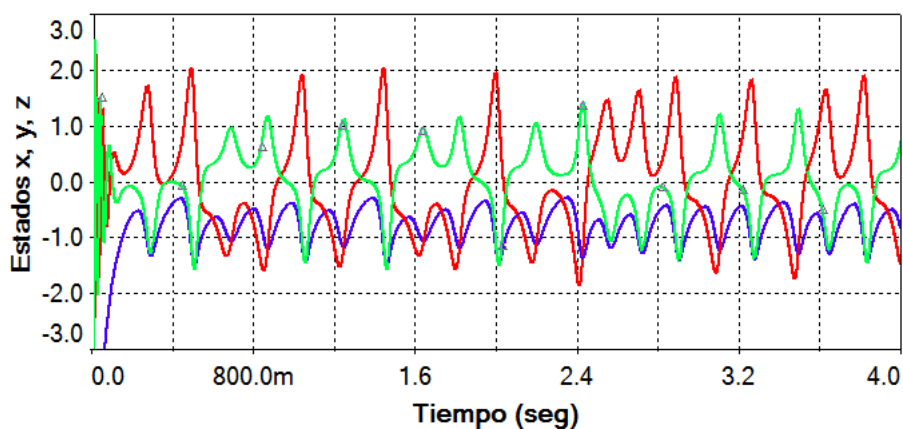
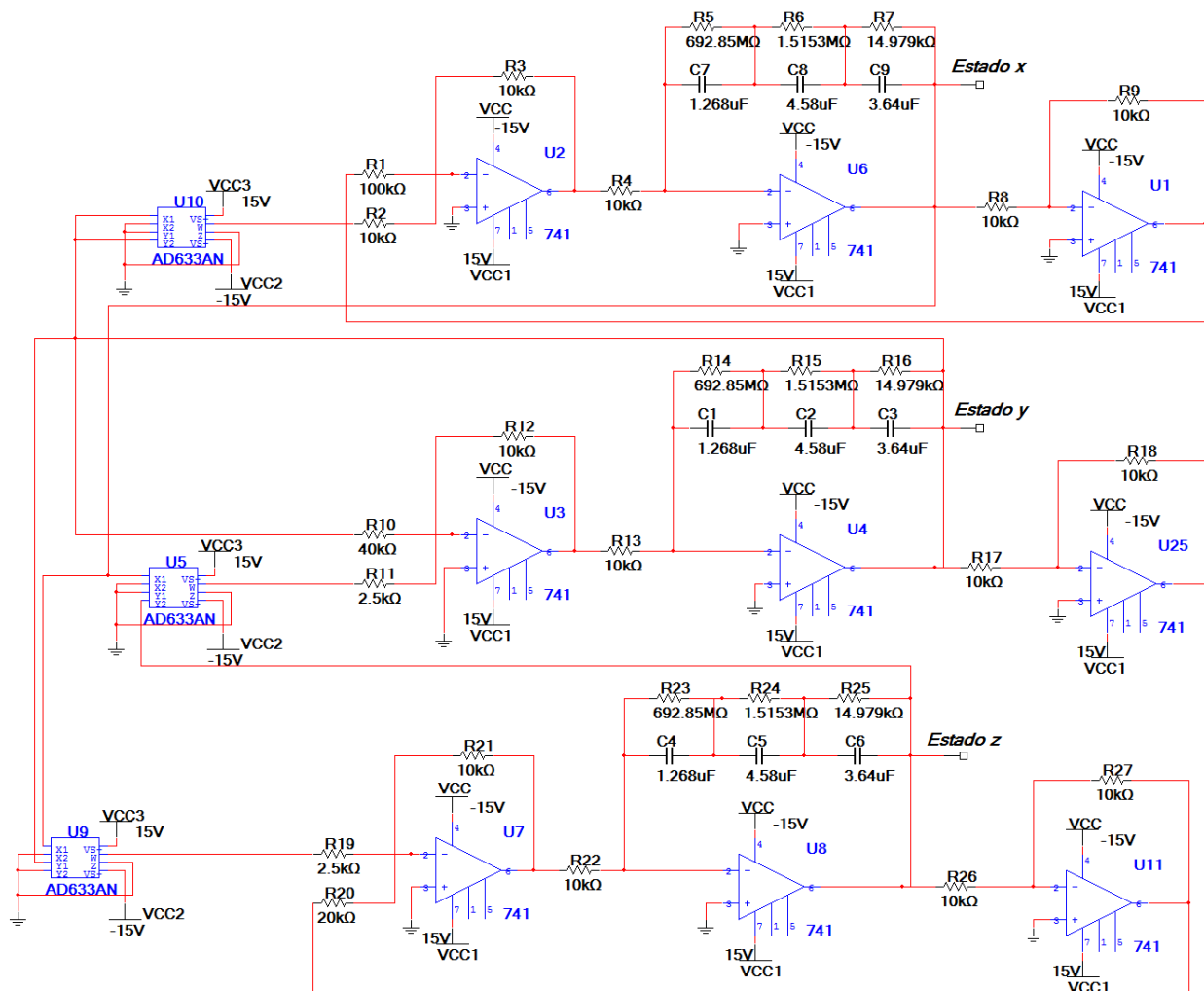


Figura 6.3: Circuito eléctrico y comportamiento de los estados del oscilador Liu de orden fraccionario. a) Circuito eléctrico, b) evolución en el tiempo de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Para esta simulación con circuitos esquemáticos no es posible obtener una vista en tres dimensiones del atractor del oscilador Liu de orden fraccionario, por lo que en la Fig. 6.4 se muestran los planos de fase entre los estados de este oscilador.

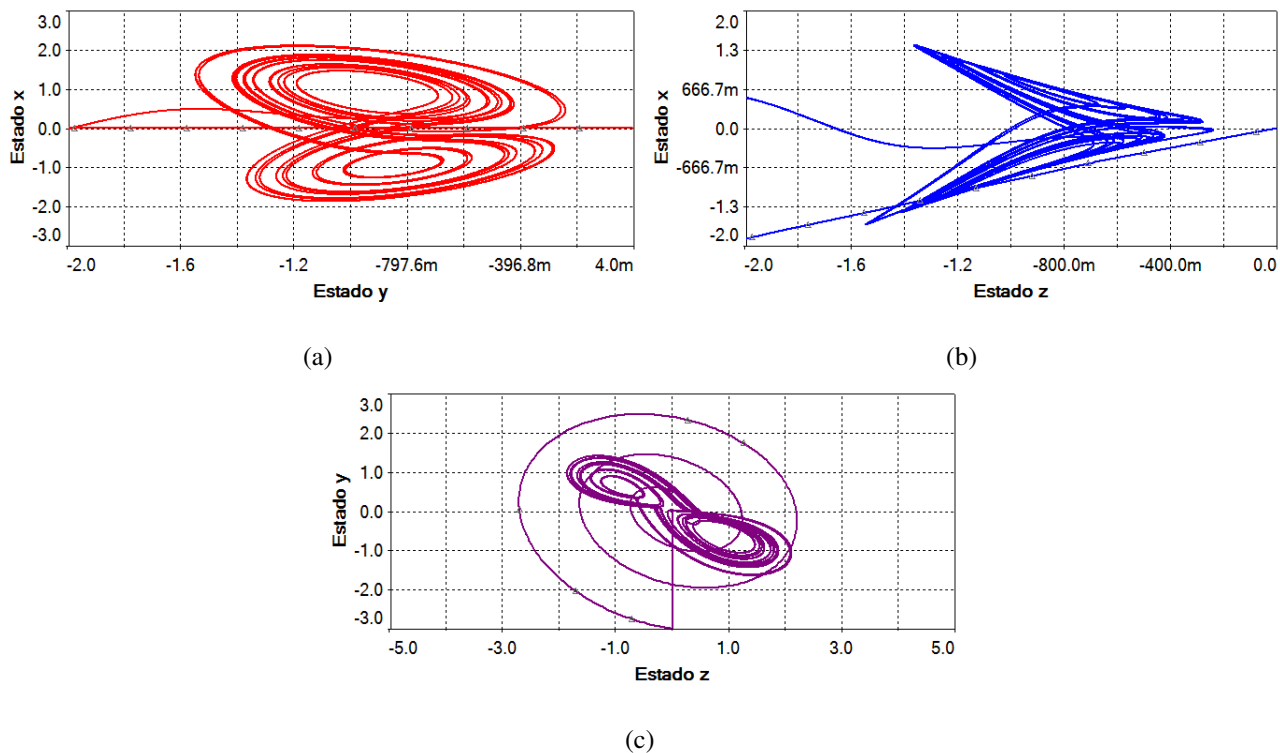


Figura 6.4: Atractores del oscilador Liu de orden fraccionario. a) Plano de fase  $x - y$ , b) plano de fase  $x - z$ , c) plano de fase  $y - z$ .

### Red con acoplamiento global.

Se considera la red en acoplamiento global con 4 osciladores ( $N = 4$ ) mostrada en la Fig. 6.5.

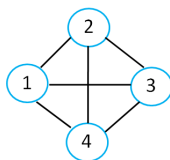


Figura 6.5: Red compleja regular de 4 osciladores Liu en acoplamiento global.

Se utilizan los osciladores Liu de orden fraccionarios descritos anteriormente. La matriz de acoplamiento se obtiene de acuerdo a (2.2.1).

$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad (6.2.4)$$

Por lo tanto, las leyes de control que se implementan son las siguientes:

$$\begin{aligned} u_1 &= c(-3y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\ u_2 &= c(y_1 - 3y_2 + y_3 + y_4), \\ u_3 &= c(y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4), \\ u_4 &= c(y_1 + y_2 + y_3 - 3y_4). \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Al tratarse de varios osciladores la construcción de la red se hace complicada desde el punto de vista de la circuitería, por lo que se encapsula cada sistema en un subcircuito como se muestra en la Fig. 6.6. En las terminales del subcircuito se tiene a los estados del sistema,  $x_i, y_i, z_i$  donde  $i = 1, 2, \dots, N$  y la ley de control  $u_i$  la cual es implementada por medio de un sumador con amplificador operacional fuera del subcircuito.

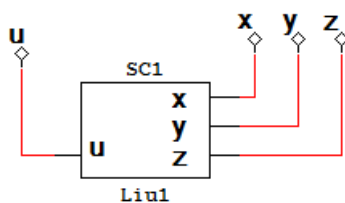
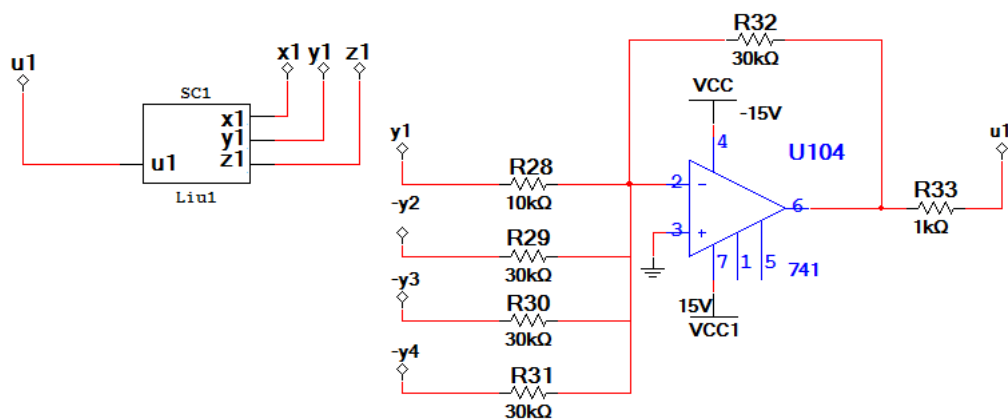


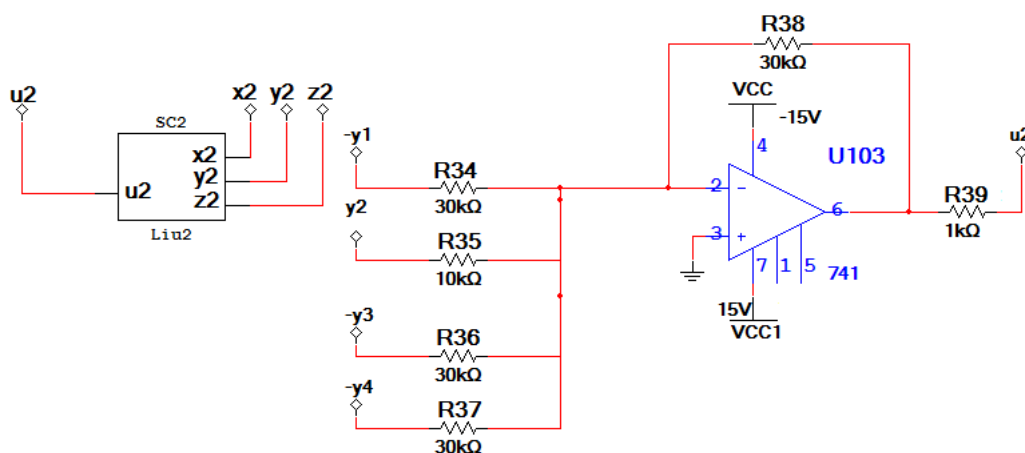
Figura 6.6: Subcircuito que contiene al oscilador Liu de orden fraccionario.

La red conformada por los 4 osciladores Liu de orden fraccionario y sus respectivas leyes de control se muestran en la Fig. 6.7 y en la Fig. 6.8. Para formar las leyes de control  $u_1, u_2, u_3, u_4$ , se utilizaron sumadores en los que se consideraron las resistencias con valor de  $R_{28} = R_{35} = R_{42} =$

$$R_{49} = 10k\Omega, R_{29} = R_{30} = R_{31} = R_{32} = R_{34} = R_{36} = R_{37} = R_{38} = R_{40} = R_{41} = R_{43} = R_{44} = R_{46} = R_{47} = R_{48} = R_{50} = 30k\Omega, R_{33} = R_{39} = R_{45} = R_{51} = 1k\Omega.$$



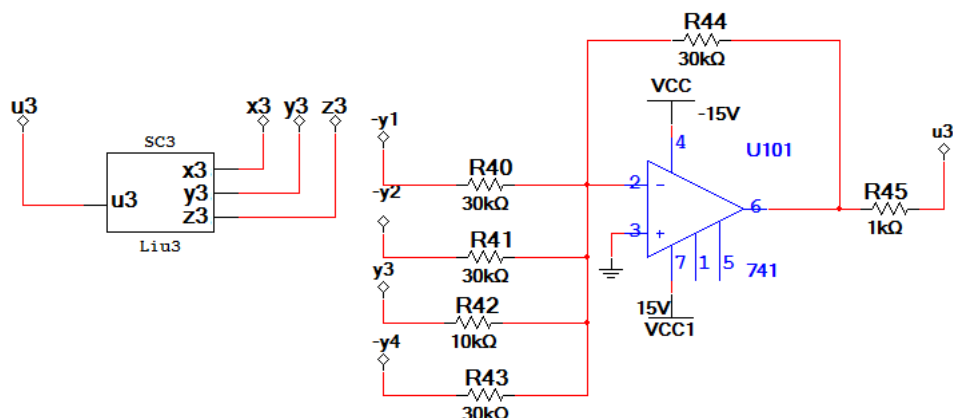
(a)



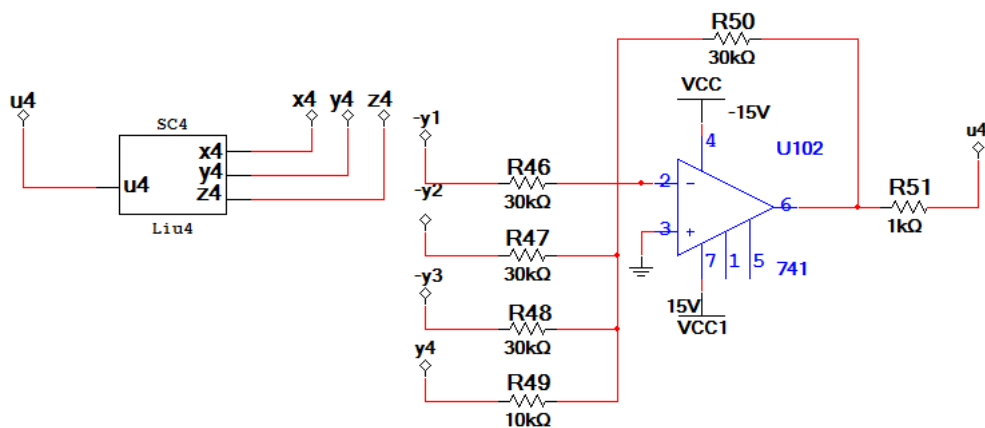
(b)

Figura 6.7: Subcircuitos de los osciladores Liu de orden fraccionario y leyes de control para cada uno. a) Oscilador 1 y ley de control  $u_1$ , b) oscilador 2 y ley de control  $u_2$ .





(a)



(b)

Figura 6.8: Circuitos Liu de orden fraccionario. a) oscilador 3 y ley de control  $u_3$ , b) oscilador 4 y ley de control  $u_4$ .

En esta simulación se consideran las condiciones iniciales  $(x_1, y_1, z_1) = (0.5, 1.5, 2)$ ,  $(x_2, y_2, z_2) = (0.7, 0.8, 1.8)$ ,  $(x_3, y_3, z_3) = (1.1, 1.9, 0.9)$ ,  $(x_4, y_4, z_4) = (0.9, 0.1, 1.6)$ . Se obtiene el plano de fase en la Fig. 6.9 en la que se observa que la sincronización es lograda. La fuerza de acoplamiento utilizada es de  $c = 10$ .

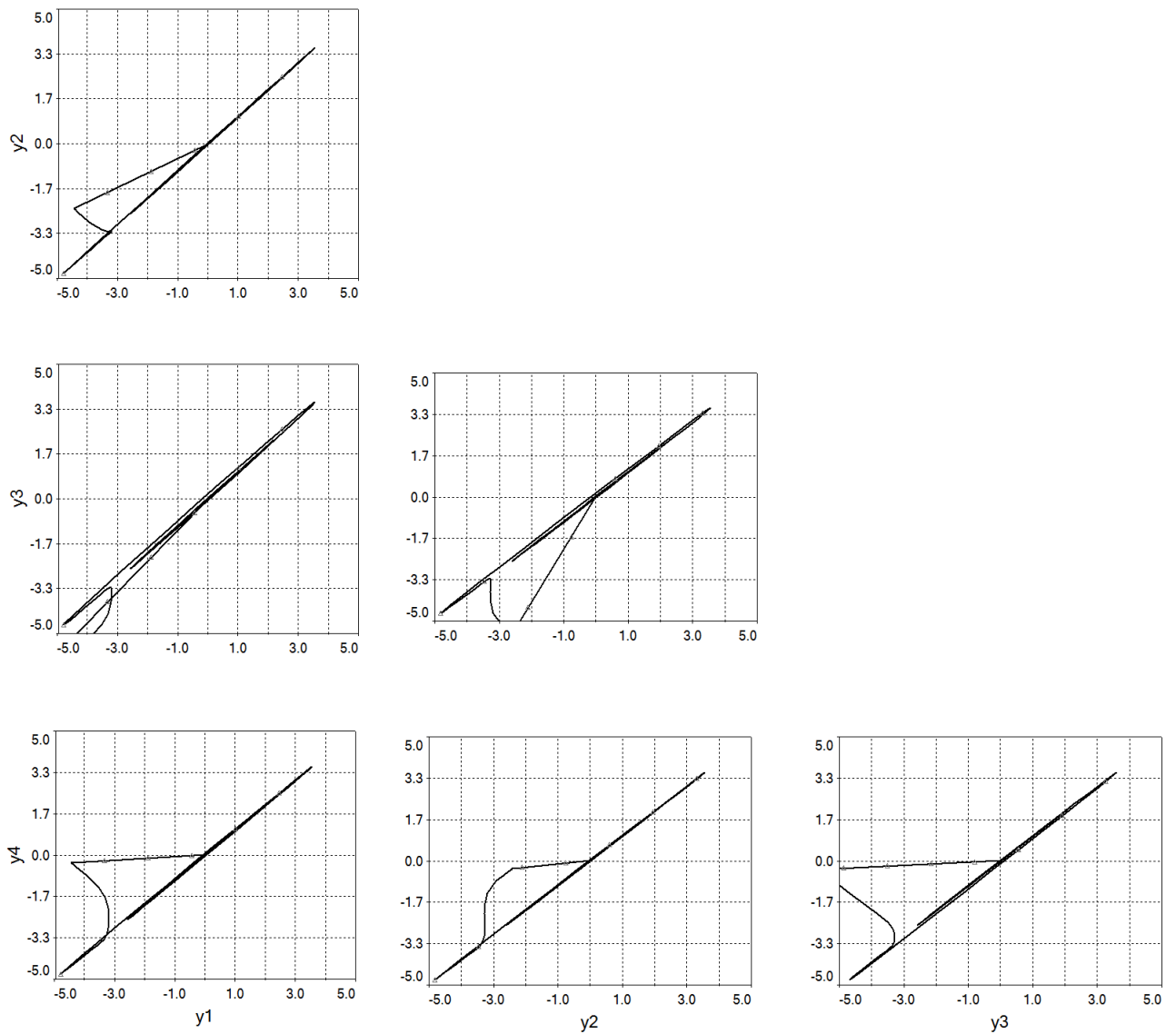
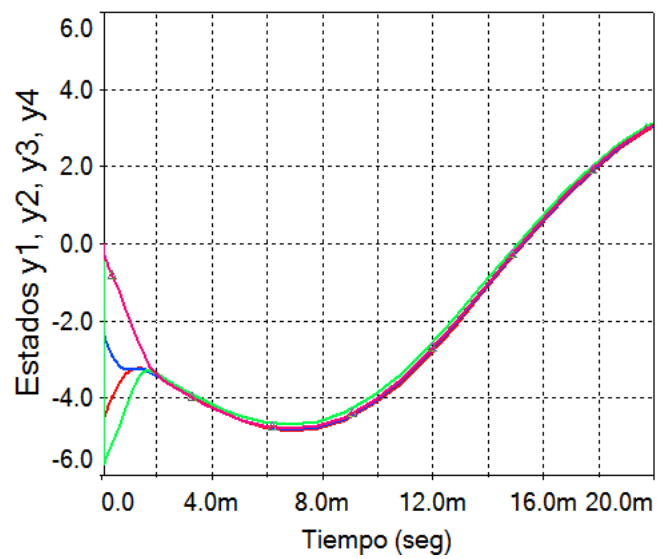
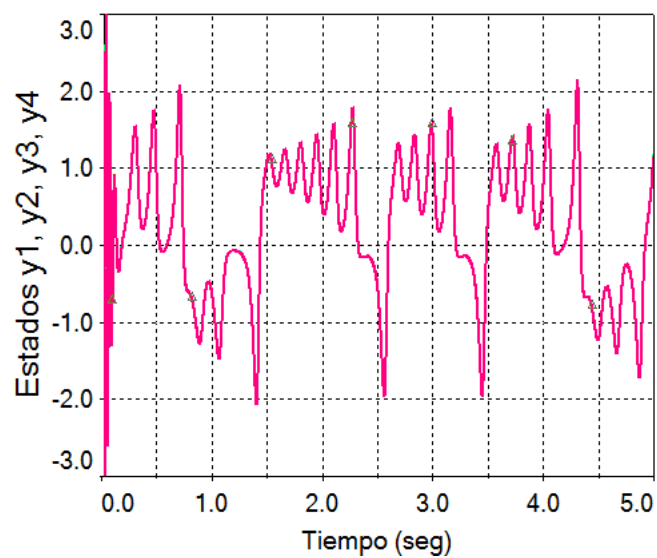


Figura 6.9: Plano de fase de la red compleja en acoplamiento global con osciladores Liu de orden fraccionario.  $y_1 - y_2$ ,  $y_1 - y_3$ ,  $y_1 - y_4$ ,  $y_2 - y_3$ ,  $y_2 - y_4$ ,  $y_3 - y_4$ .

En la gráfica de la Fig. 6.10 se muestran los cuatro estados  $y_1, y_2, y_3, y_4$  donde se observa la convergencia hacia una misma dinámica.



(a)



(b)

Figura 6.10: Estados  $y_1, y_2, y_3, y_4$  de los sistemas Liu de orden fraccionario en la red global. a) Estados  $y_1, y_2, y_3, y_4$  en un tiempo de 2 ms, b) estados  $y_1, y_2, y_3, y_4$  en un tiempo de 5 s.

Finalmente, se muestran los atractores correspondientes a cada oscilador en la Fig. 6.11.

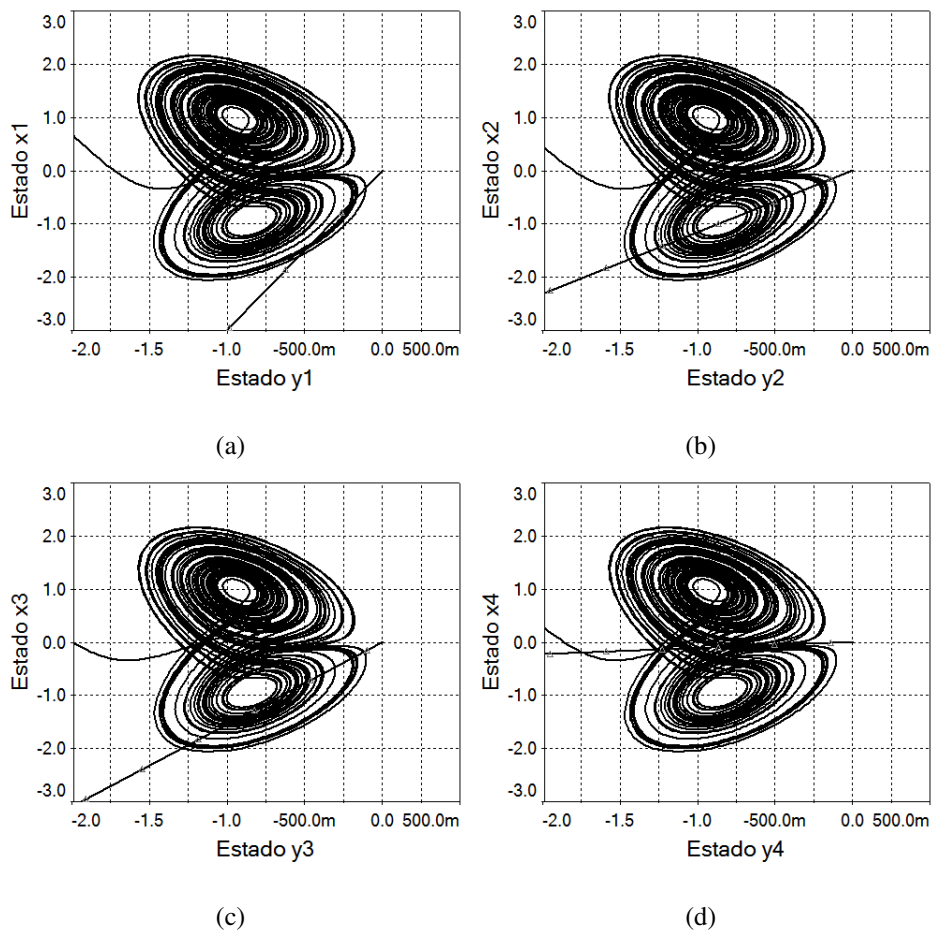


Figura 6.11: Atractores obtenidos en la red global con osciladores Liu de orden fraccionario. a) Atractor de los estados  $x_1 - y_1$ , b) atractor de los estados  $x_2 - y_2$ , c) atractor de los estados  $x_3 - y_3$ , d) atractor de los estados  $x_4 - y_4$ .

### 6.2.2. Circuito analógico del oscilador Financiero de orden fraccionario

En esta sección se plantea además la sincronización en una red con acoplamiento anillo, donde cada nodo en la red es un oscilador Financiero de orden fraccionario definido por las siguientes ecuaciones, donde los parámetros  $a = c = 1$ ,  $b = 0.1$  y  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = 0.95$  y  $q_3 = 0.9$  hacen que el

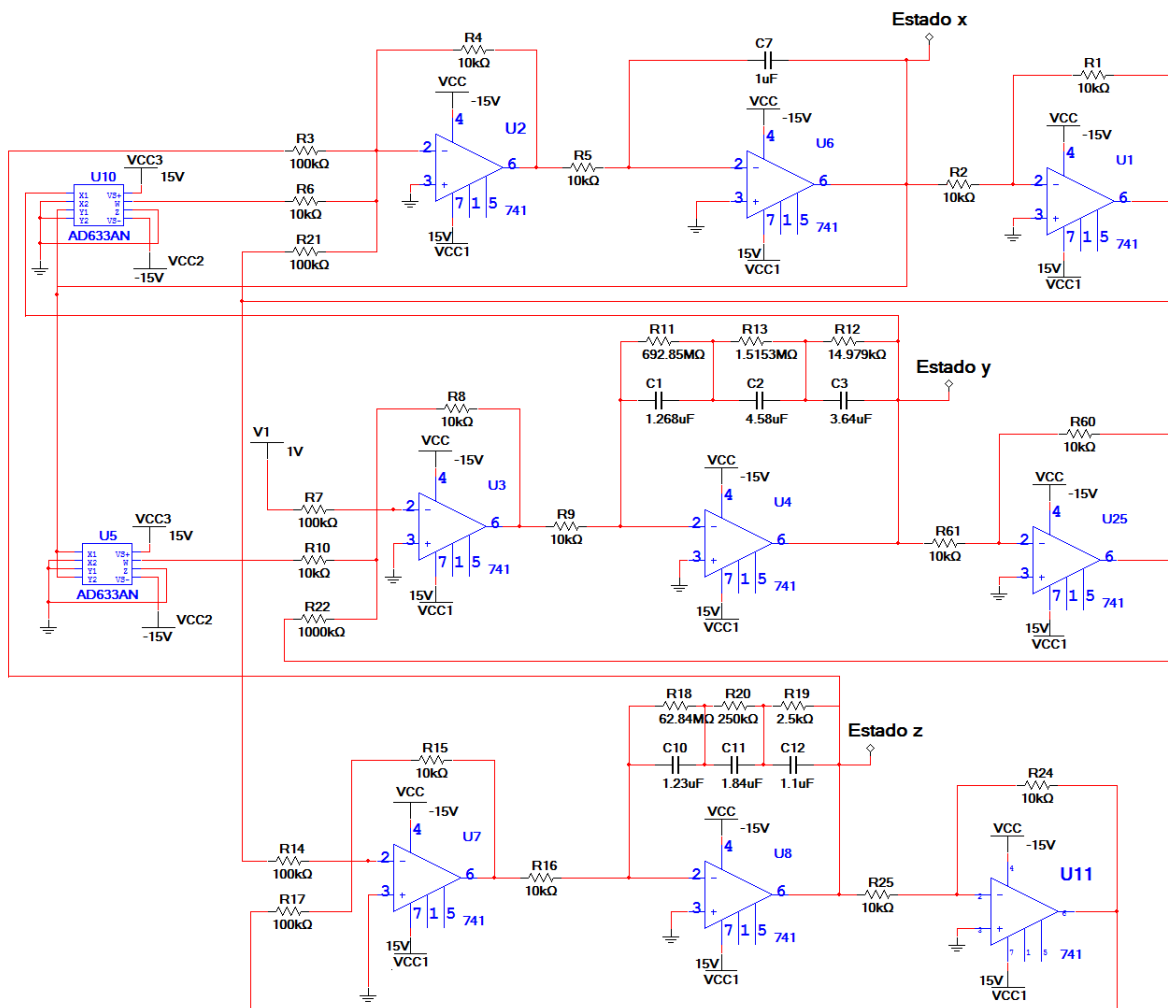
oscilador exhiba caos [35]. La ley de control se sitúa en el primer estado.

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^{q_1} x(t) &= z(t) + x(t)(y(t) - a) + u_i, \\
 {}_0D_t^{q_2} y(t) &= 1 - by(t) - x^2(t), \\
 {}_0D_t^{q_3} z(t) &= -x(t)cz(t).
 \end{aligned}
 \tag{6.2.6}$$

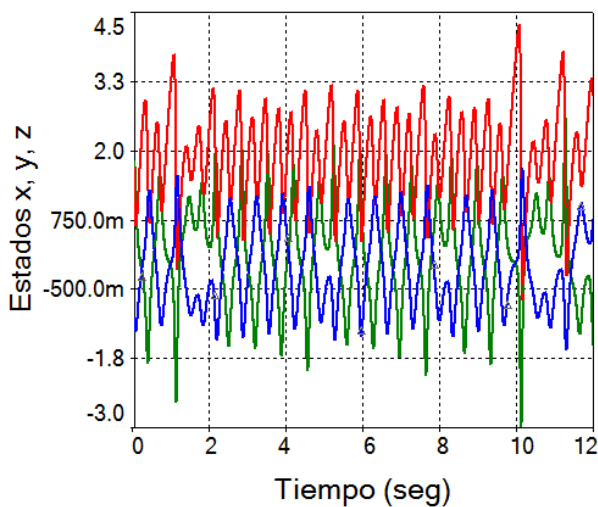
En este caso, se hacen tres derivadores diferentes ya que cada ecuación diferencial tiene una fraccionalidad distinta. Para la primer ecuación se construye el derivador solo con un capacitor con valor  $C = 1\mu F$ , ya que es una ecuación diferencial de orden 1. Para la segunda ecuación se construye el derivador con (6.2.2) y los valores en las resistencias y capacitores de este son iguales que para el oscilador Liu ( $\frac{1}{s^{0.95}}$ ) dado que el orden fraccionario corresponde a 0.9. Por último, el derivador de la última ecuación,  $\frac{1}{s^{0.9}}$ , se lleva a cabo con la siguiente aproximación

$$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}.
 \tag{6.2.7}$$

Al resolver (6.2.3), para este caso cuando  $\frac{1}{s^{0.9}}$ , el derivador que se forma con la red de capacitores y resistores de la Fig. 6.2 tiene los siguientes valores  $C_1 = 1.23\mu F$ ,  $C_2 = 1.84\mu F$ ,  $C_3 = 1.1\mu F$ , y  $R_a = 62.8M\Omega$ ,  $R_b = 250k\Omega$ ,  $R_c = 2.5k\Omega$ . El oscilador construido por medio de un circuito eléctrico se muestra en la Fig. 6.12 (a), los valores de las resistencias que se utilizan para adecuar las señales de cada estado son  $R_1 = R_3 = R_9 = R_{16} = R_{17} = 100k\Omega$ ,  $R_2 = R_4 = R_5 = R_6 = R_7 = R_8 = R_{10} = R_{12} = R_{13} = R_{14} = R_{15} = R_{18} = R_{19} = R_{20} = 10k\Omega$ . En la gráfica de la Fig. 6.12 (b) se encuentran los estados  $x, y, z$  del sistema.



(a)



(b)

Figura 6.12: Circuito del oscilador Financiero orden fraccionario 2.85 y la medición de sus estados. a) Circuito esquemático, b) evolución en el tiempo de los estados  $x, y, z$  del oscilador Financiero de orden fraccionario.

Los diagramas de fase obtenidos en la simulación del circuito del oscilador Financiero se muestran en la Fig. 6.13.

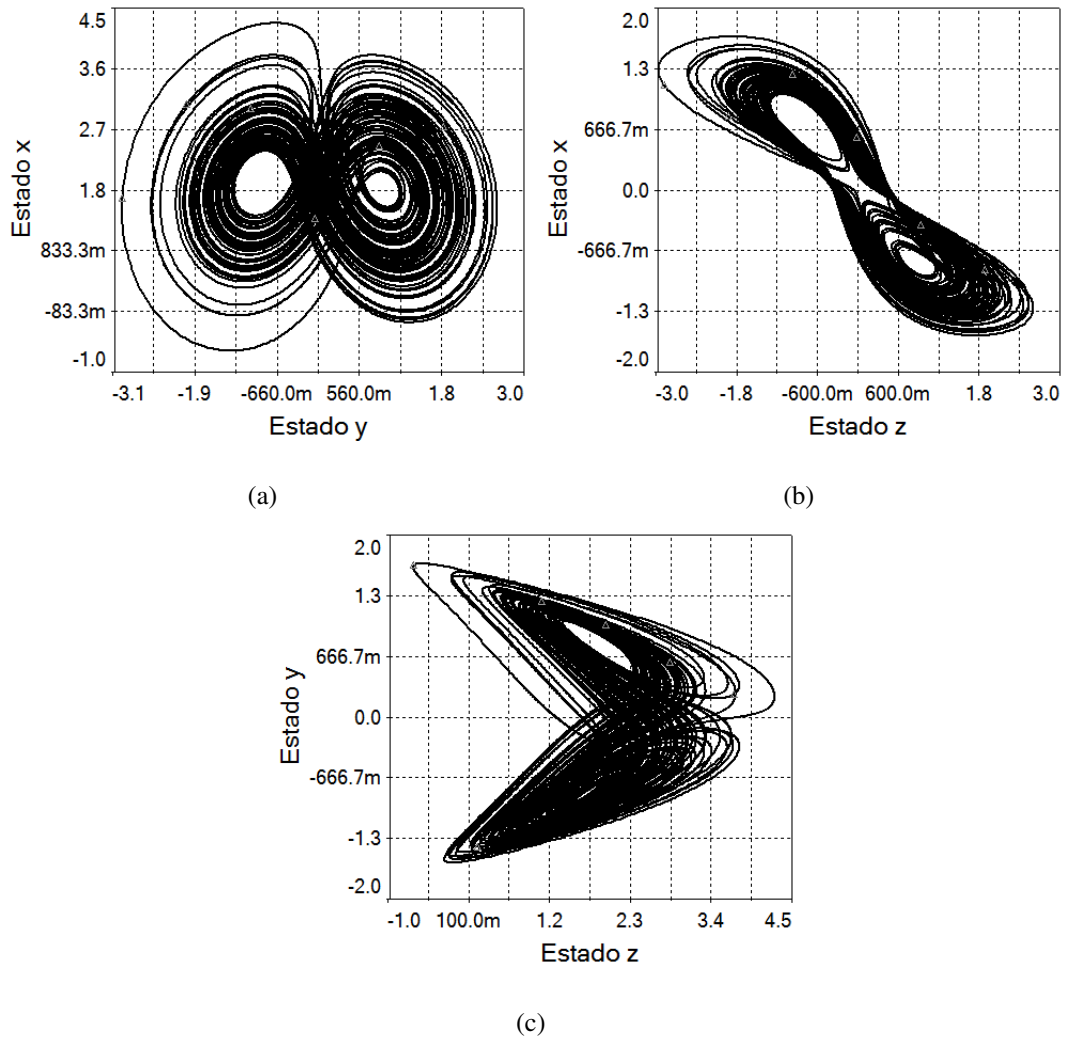


Figura 6.13: Planos de fase del oscilador Financiero de orden fraccionario. a) Atractor de los estados  $x - y$ , b) atractor de los estados  $x - z$ , c) atractor de los estados  $y - z$ .

### Red con acoplamiento anillo.

A partir del circuito del oscilador Financiero de orden fraccionario de la Fig. 6.12, se elaboran 4 osciladores idénticos para la sincronización en una red anillo. Esta red es ilustrada en la Fig. 6.14.

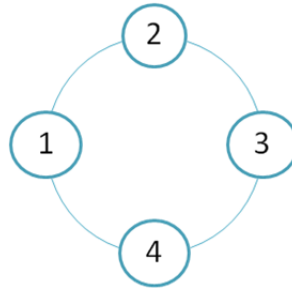


Figura 6.14: Red compleja de 4 osciladores con acoplamiento anillo.

De acuerdo con (2.2.3) en el capítulo 4, la matriz de acoplamiento resultante para  $N = 4$  es

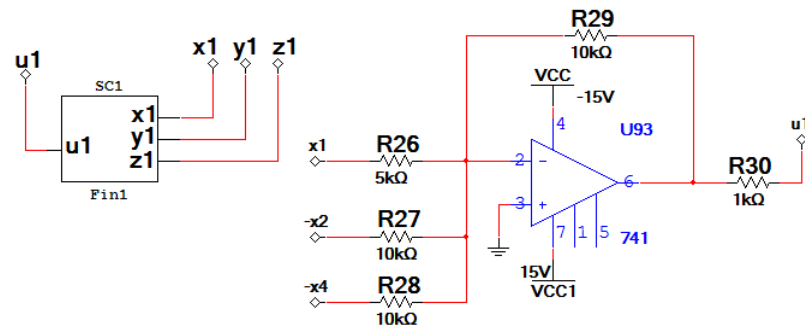
$$A_{gc} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (6.2.8)$$

De la matriz de acoplamiento se obtienen las leyes de control a implementar en el circuito

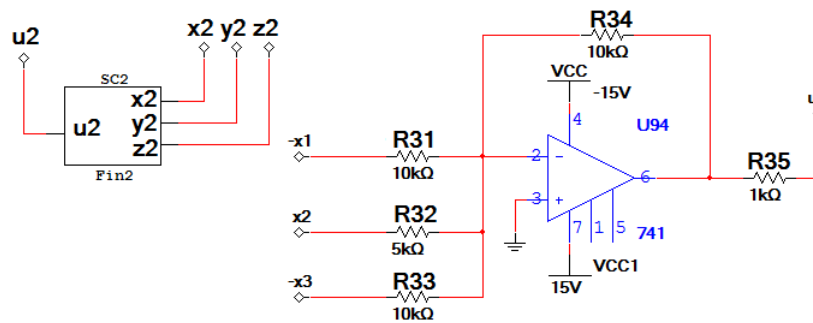
$$\begin{aligned} u_1 &= c(-2y_1 + y_2 + y_4), \\ u_2 &= c(y_1 - 2y_2 + y_3), \\ u_3 &= c(y_2 - 2y_3 + y_4), \\ u_4 &= c(y_1 + y_3 - 2y_4). \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

Se implementaron los osciladores fraccionarios en subcircuitos y las leyes de control por medio de amplificadores operacionales. En la Fig. 6.15 se encuentran los cuatro osciladores de la red con sus respectivas leyes de control. Las leyes de control  $u_1, u_2, u_3, u_4$  tienen resistencias con valor de  $R_{27} = R_{28} = R_{29} = R_{31} = R_{33} = R_{34} = R_{36} = R_{38} = R_{39} = R_{41} = R_{43} = R_{44} = 10k\Omega$ ,  $R_{26} = R_{32} = R_{37} = R_{42} = 5k\Omega$ ,  $R_{35} = R_{40} = R_{45} = 1k\Omega$ .

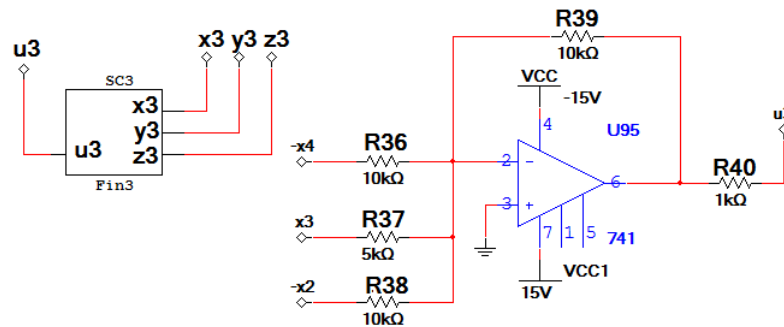




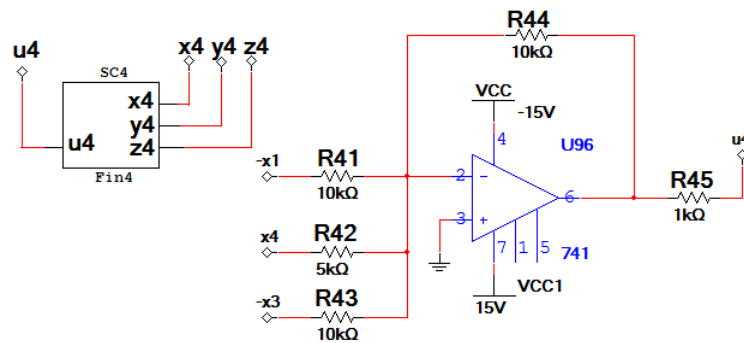
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.15: Circuitos eléctricos de los osciladores Financieros de orden fraccionario que conforman la red anillo. a) Oscilador 1 y ley de control  $u_1$ , b) oscilador 2 y ley de control  $u_2$ , c) oscilador 3 y ley de control  $u_3$ , d) oscilador 4 y ley de control  $u_4$ .

Las condiciones iniciales que se propusieron para esta simulación son  $(x_1, y_1, z_1) = (0.1, 0.1, 0.1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2) = (2.1, 1.2, 3.1)$ ,  $(x_3, y_3, z_3) = (1, 0.5, 2)$ ,  $(x_4, y_4, z_4) = (2, 1.8, 0.2)$ .

El plano de fase de la sincronización de la red anillo se encuentra en la Fig. 6.16 donde se observa una línea con inclinación de  $45^\circ$  al centro de cada gráfica lo que significa que la sincronización ha sido lograda. Se utilizó una fuerza de acoplamiento de  $c = 10$ . Los estados se muestran en las gráficas de las figuras Fig. 6.17, en la primer figura se muestra un acercamiento a las condiciones iniciales en los estados  $x_i$  de los osciladores Financieros, y en la segunda figura se encuentran los estados en una escala de tiempo mayor, donde se observa que todos los estados siguen en una misma trayectoria.

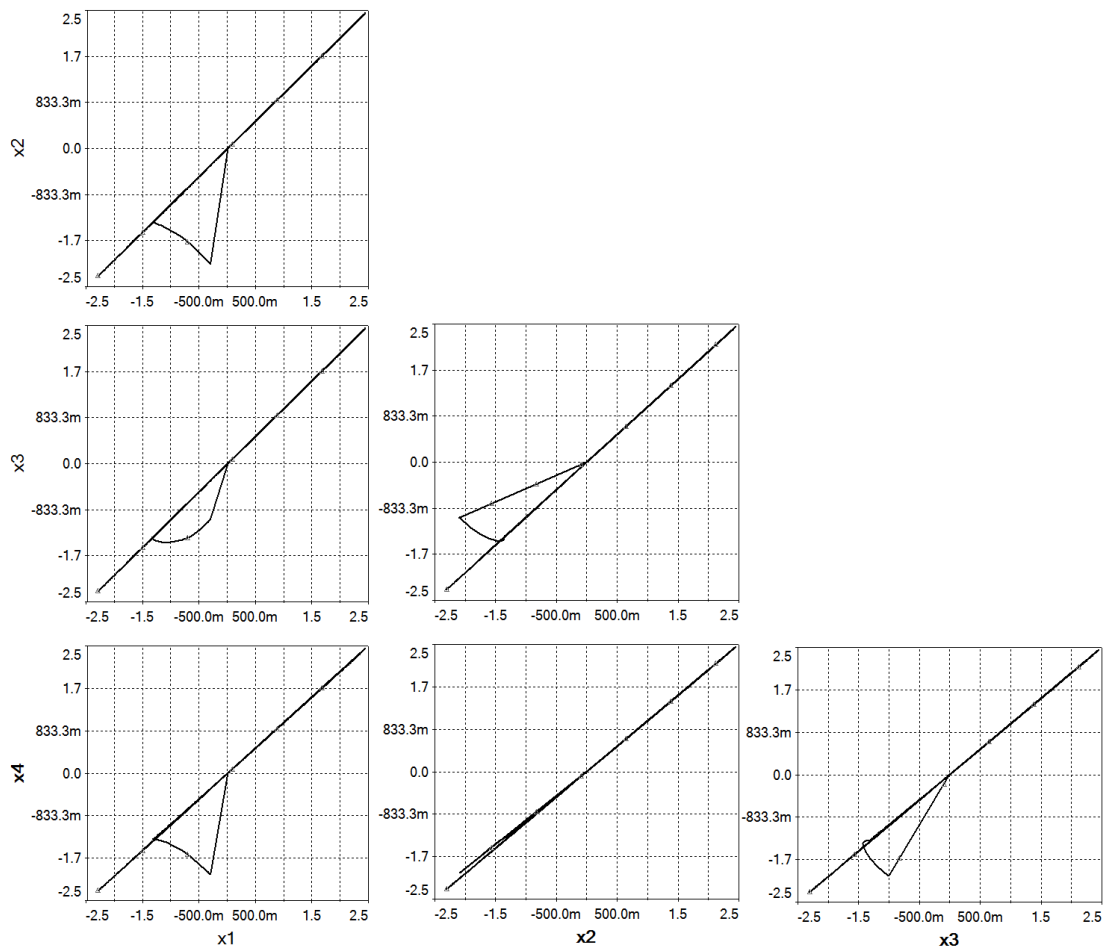
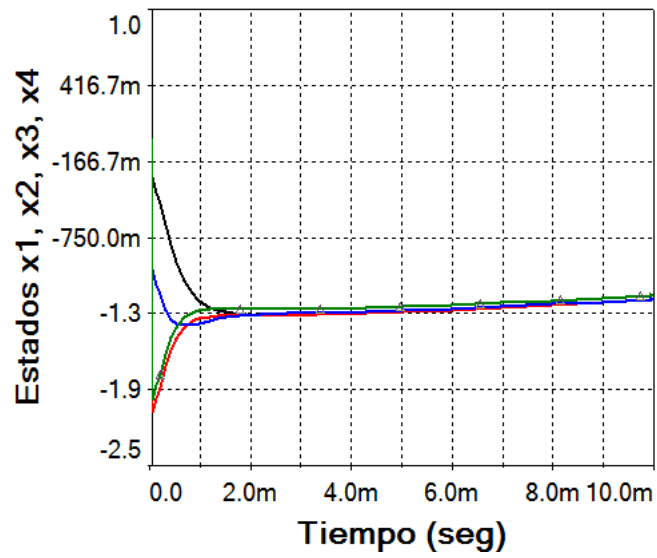
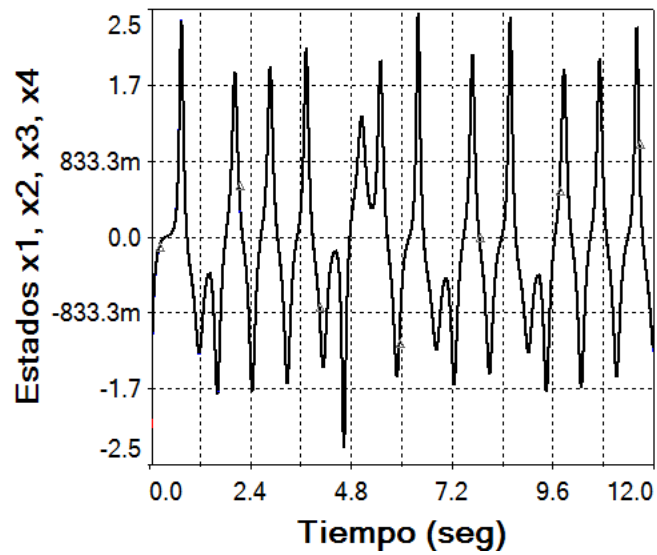


Figura 6.16: Plano de fase con los estados  $x_i$ , donde  $i = 1, 2, 3, 4$ , de la red con acoplamiento anillo.  $x_1 - x_2$ ,  $x_1 - x_3$ ,  $x_1 - x_4$ ,  $x_2 - y_3$ ,  $x_2 - x_4$ ,  $x_3 - x_4$ .



(a)



(b)

Figura 6.17: Estados  $x_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  de los osciladores Financiero que conforman la red anillo. a) Estados  $x_1, x_2, x_3, x_4$  simulados en un tiempo de 2 ms, b) estados  $x_1, x_2, x_3, x_4$  simulados en un tiempo de 12 s.

El plano de fase con los atractores de los cuatro osciladores se presenta en la Fig. 6.18.

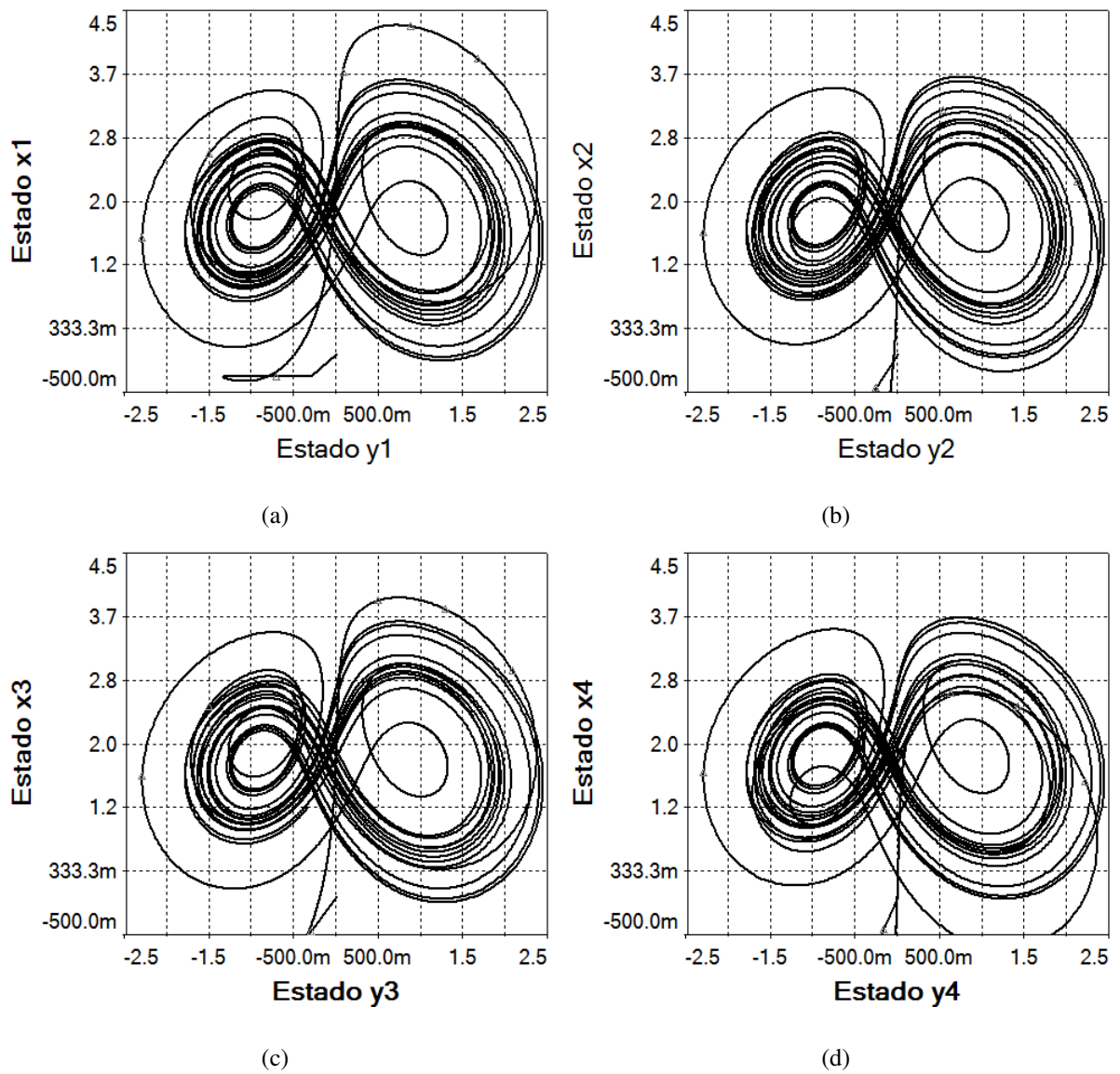


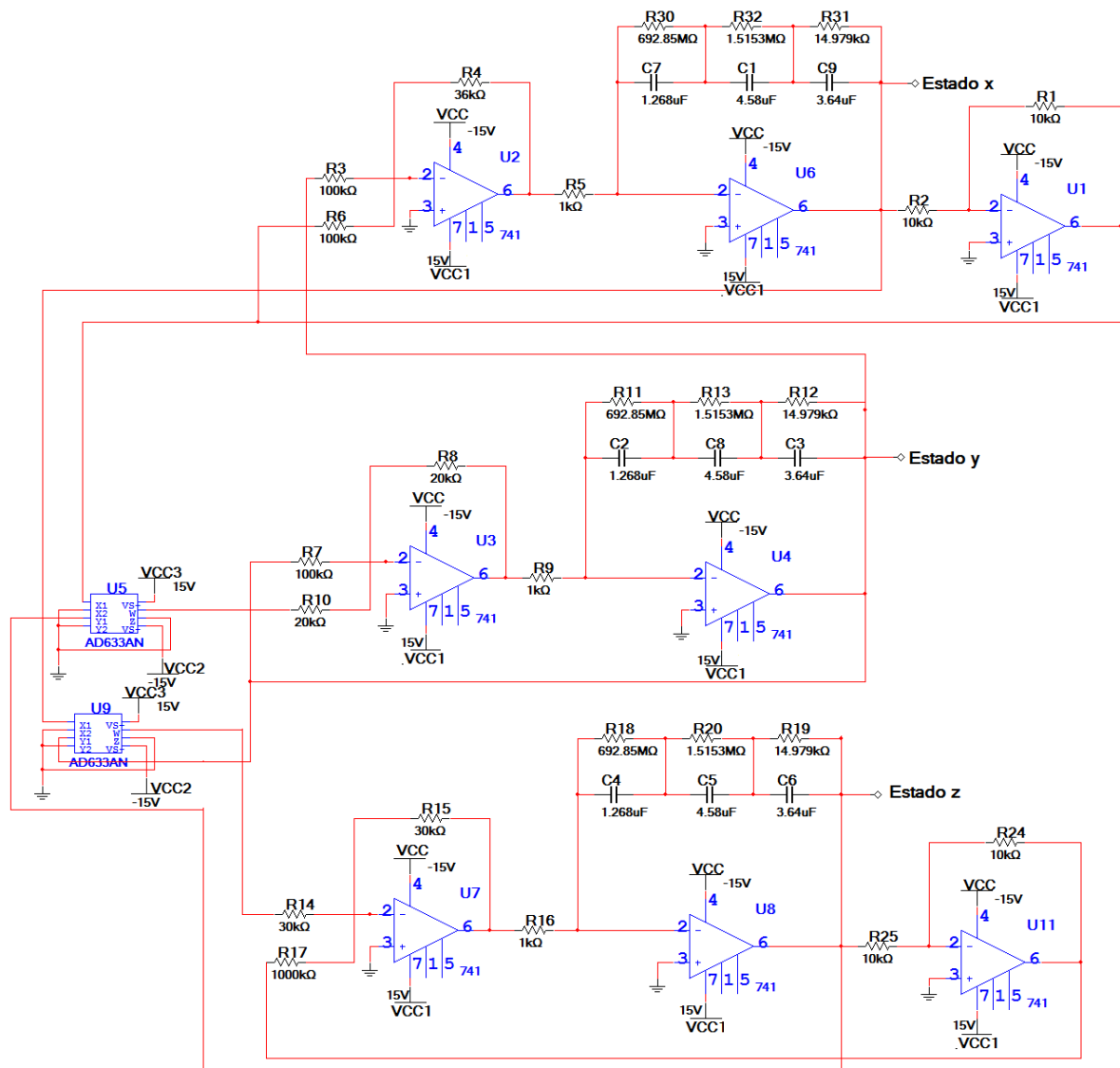
Figura 6.18: Atractores obtenidos con la red anillo con osciladores Financieros de orden fraccionario. a) Atractor de los estados  $x_1 - y_1$ , b) atractor de los estados  $x_2 - y_2$ , c) atractor de los estados  $x_3 - y_3$ , d) atractor de los estados  $x_4 - y_4$ .

### 6.2.3. Circuito analógico del oscilador Lü de orden fraccionario.

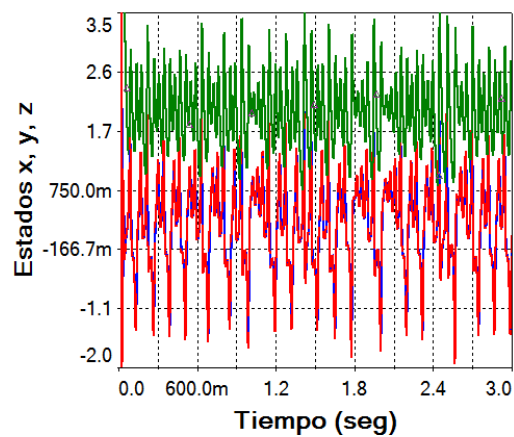
Se realiza la sincronización de una red en acoplamiento estrella conformada con 5 osciladores Lü de orden fraccionario. El oscilador se define por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1}x(t) &= a(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2}y(t) &= -x(t)z(t) + cy(t), \\ {}_0D_t^{q_3}z(t) &= x(t)y(t) - bz(t), \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

con los parámetros  $a = 36$ ,  $b = 3$ ,  $c = 20$  y con los órdenes fraccionarios  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.95$  el oscilador exhibe caos [37]. Se utilizó el mismo circuito de la Fig. 6.2 para representar a este sistema. Los valores de resistencias y capacitores en los derivadores son los mismos que en el caso de la red global ya que el orden del sistema es de  $q = 0.95$  en cada derivada. Se construyó el circuito con los siguientes valores en las resistencias  $R_3 = R_6 = R_7 = 100k\Omega$ ,  $R_1 = R_2 = R_{24} = R_{25} = 10k\Omega$ ,  $R_4 = 36k\Omega$ ,  $R_5 = R_9 = R_{16} = 1k\Omega$ ,  $R_{14} = R_{15} = 30k\Omega$ , y  $R_8 = R_{10} = 20k\Omega$ . El circuito se muestra en la Fig. 6.19 así como los estados del oscilador Lü de orden fraccionario a través del tiempo. Los planos de fase se presentan en la Fig. 6.20.



(a)



(b)

Figura 6.19: Circuito y estados  $x$ ,  $y$ ,  $z$  del oscilador Lü de orden fraccionario. a) Circuito eléctrico, b) evolución en el tiempo de los estados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

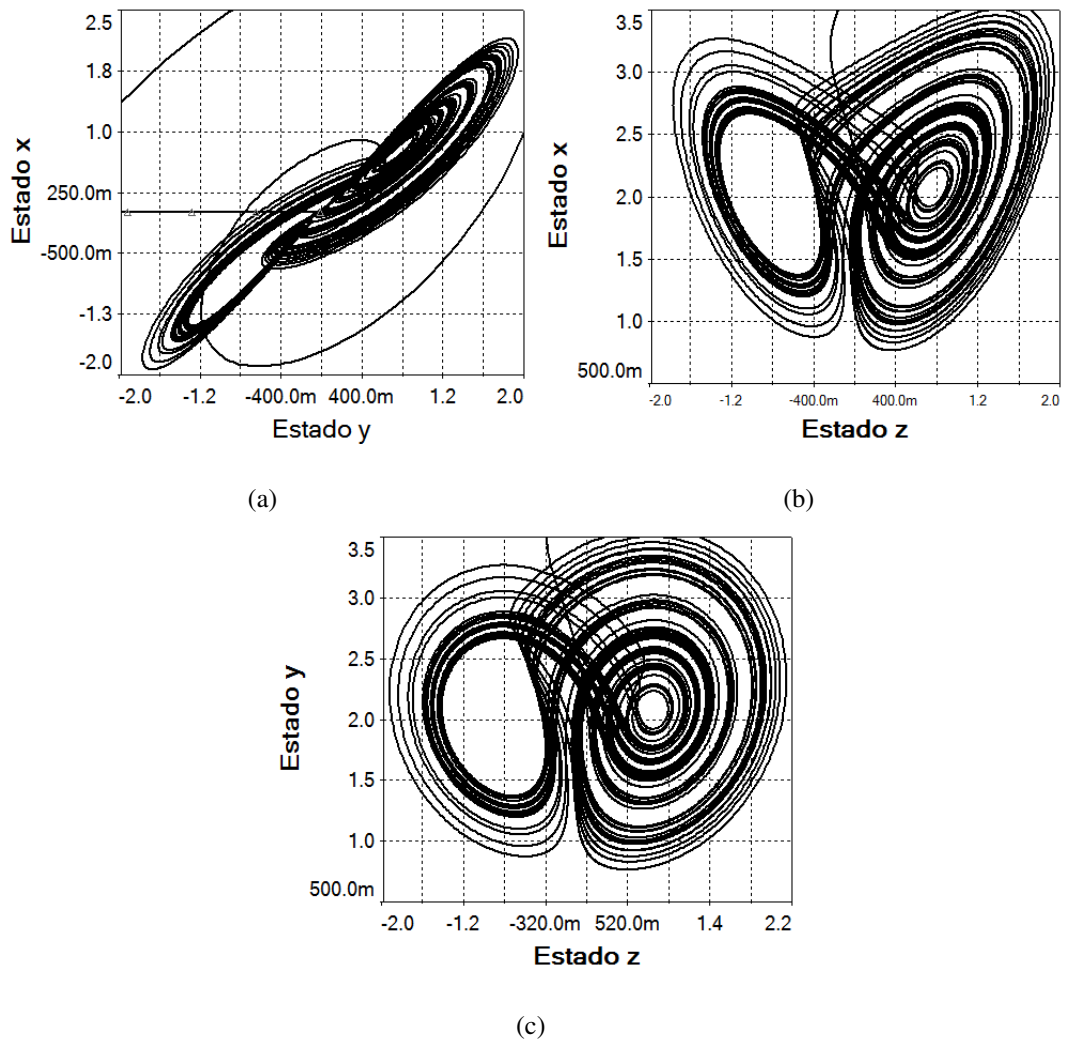


Figura 6.20: Planos de fase del oscilador Lü de orden fraccionario. a) Atractor de los estados  $x - y$ . b) Atractor de los estados  $y - z$ . c) Atractor de los estados  $x - z$ .

### Red con acoplamiento estrella.

Así como en el caso de simulación numérica, se busca realizar una sincronización en una red con acoplamiento estrella. Se plantean 5 osciladores Lü de orden fraccionario, con el acoplamiento mostrado en la Fig. 6.21.

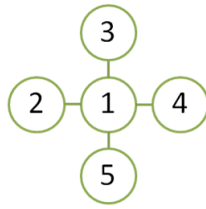


Figura 6.21: Red con acoplamiento estrella de 5 nodos.

La matriz de acoplamiento es calculada tal como se mostró en el capítulo 2, con (2.2.6); para 5 osciladores queda definida como:

$$A_{st} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.2.11)$$

Para el acoplamiento estrella se implementan las siguientes leyes de control

$$\begin{aligned} u_1 &= c(-3y_1 + y_2 + y_3 + y_4), \\ u_2 &= c(y_1 - y_2), \\ u_3 &= c(y_1 - y_3), \\ u_4 &= c(y_1 - y_4), \\ u_5 &= c(y_1 - y_5). \end{aligned} \quad (6.2.12)$$

Los osciladores se encapsularon dentro de subcircuitos y la ley de control se implementó fuera de estos. El diagrama conformado con osciladores Lü de orden fraccionario y las leyes de control correspondientes a cada oscilador se muestran en la Fig. 6.22. Los elementos resistivos para las leyes de control  $u_1, u_2, u_3, u_4$  tienen los valores  $R_{27} = R_{28} = R_{29} = R_{30} = R_{31} = R_{33} = R_{34} = R_{35} = R_{37} = R_{38} = R_{39} = R_{41} = R_{42} = R_{43} = 10k\Omega$ ,  $R_{26} = 2.5k\Omega$ ,  $R_{32} = R_{36} = R_{40} = R_{44} = 1k\Omega$ .



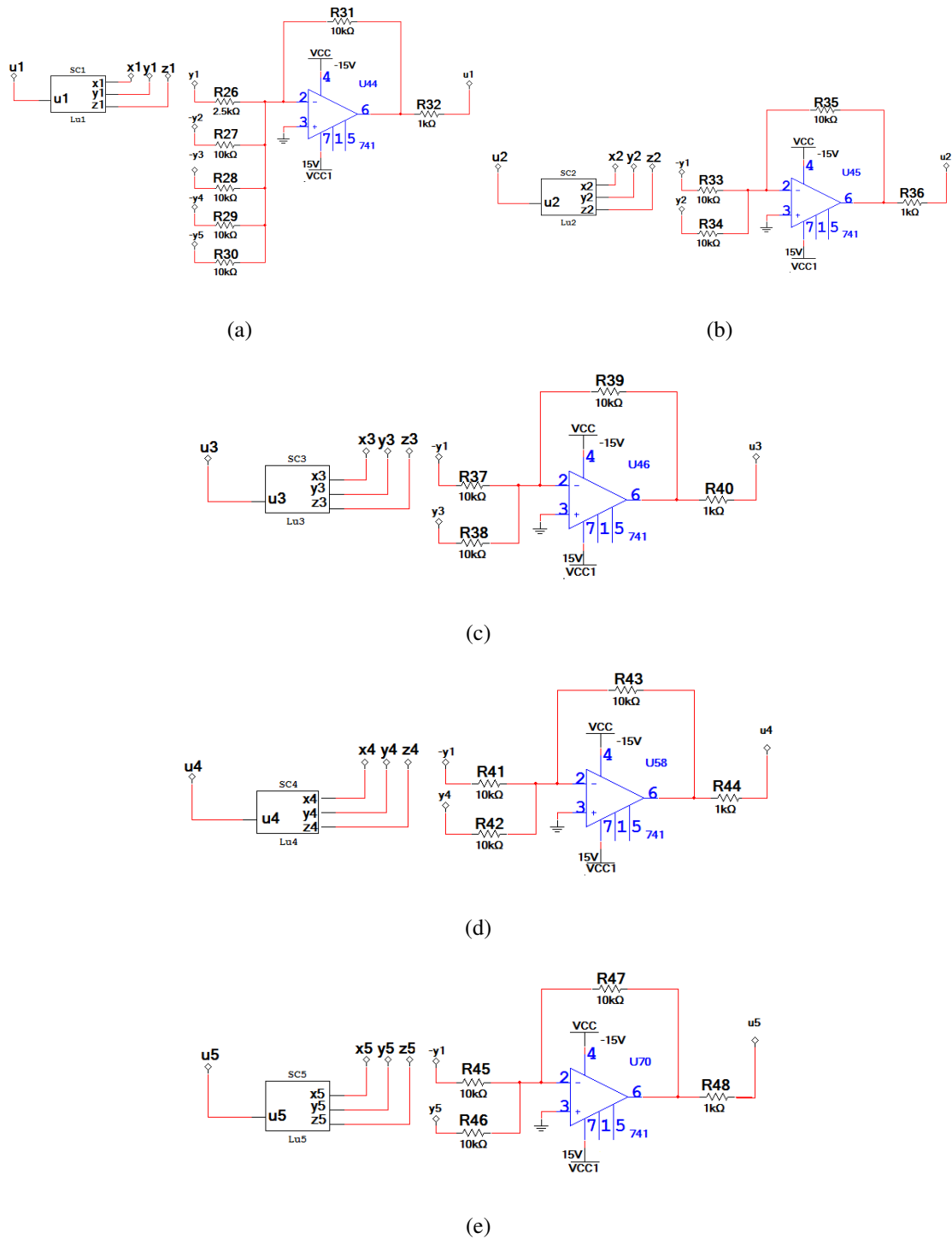


Figura 6.22: Circuito eléctrico de una red compleja en acoplamiento estrella formada con osciladores de Lü de orden fraccionario. a) Oscilador 1 y ley de control  $u_1$ , b) oscilador 2 y ley de control  $u_2$ , c) oscilador 3 y ley de control  $u_3$ , d) oscilador 4 y ley de control  $u_4$ , e) oscilador 55 y ley de control  $u_5$ .

Se consideraron las condiciones iniciales  $(x_1, y_1, z_1) = (1.5, 0.1, 0.5)$ ,  $(x_2, y_2, z_2) = (0.1, 1.2, 2.1)$ ,  $(x_3, y_3, z_3) = (3.1, 0.5, 1.2)$ ,  $(x_4, y_4, z_4) = (0.3, 0.3, 1.5)$ ,  $(x_5, y_5, z_5) = (2, 1.9, 1.7)$ . Se obtuvo sincronización con una fuerza de acoplamiento  $c = 20$  y esto puede ser observado en el plano de fase de los estados  $y_i$ , para  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , de la red estrella en la Fig. 6.23.

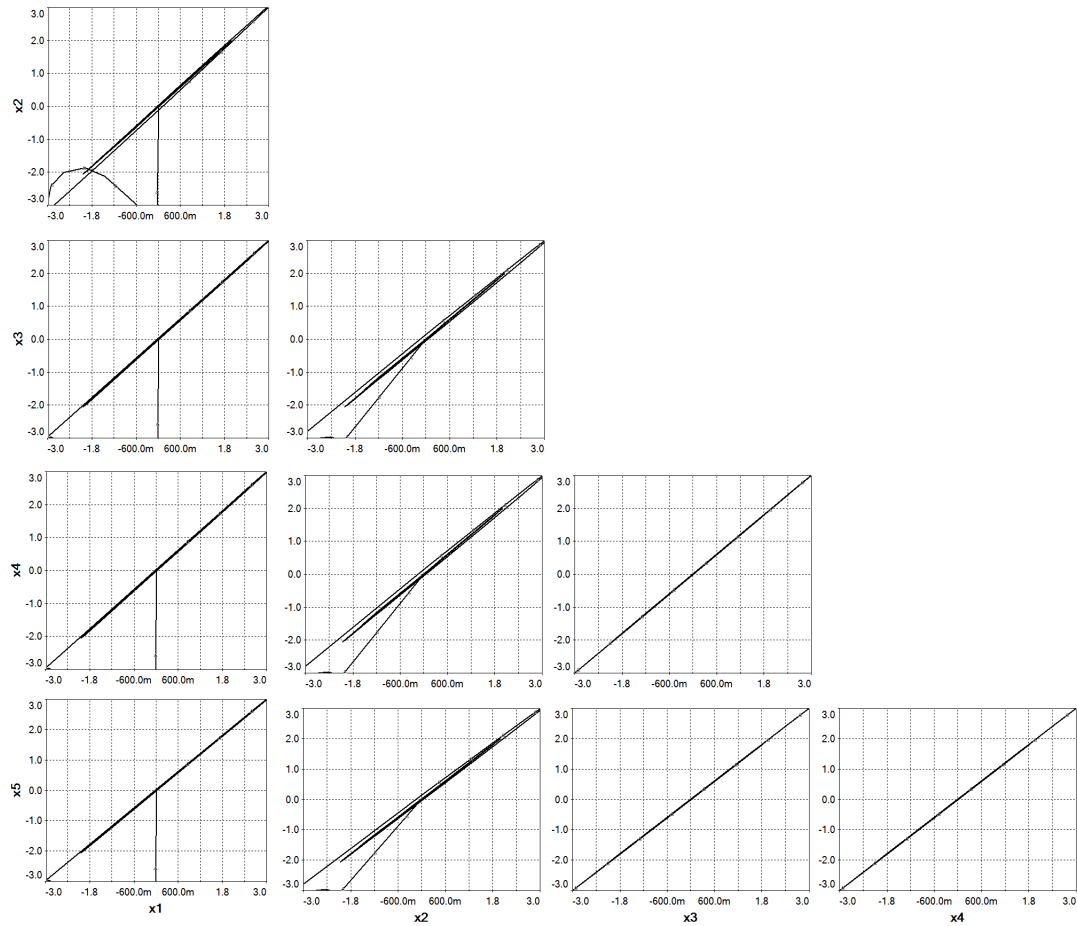


Figura 6.23: Plano de fase de la red estrella con osciladores Lü de orden fraccionario.  $x_1 - x_2$ ,  $x_1 - x_3$ ,  $x_1 - x_4$ ,  $x_1 - x_5$ ,  $x_2 - x_3$ ,  $x_2 - x_4$ ,  $x_2 - x_5$ ,  $x_3 - x_4$ ,  $x_3 - x_5$ ,  $x_4 - x_5$ .

Los atractores que se forman son mostrados en la Fig. 6.24 y corresponden a cada oscilador utilizado en la red compleja estrella.

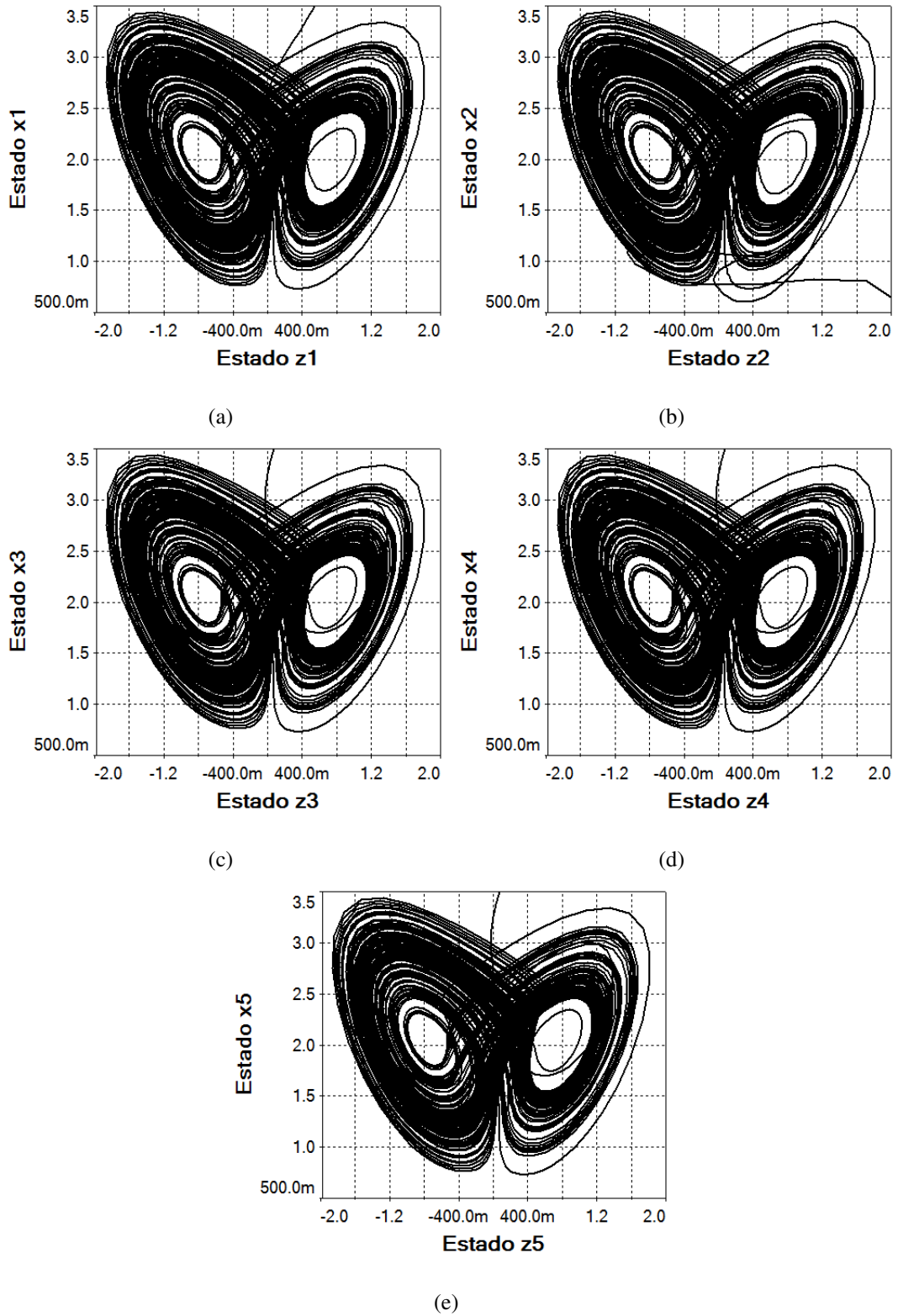


Figura 6.24: Atractores obtenidos en la red anillo con osciladores Lü de orden fraccionario. a) Atractor  $x_1 - z_1$ , b) atractor  $x_2 - z_2$ , c) atractor  $x_3 - z_3$ , d) atractor  $x_4 - z_4$ , d) atractor  $x_5 - z_5$ .

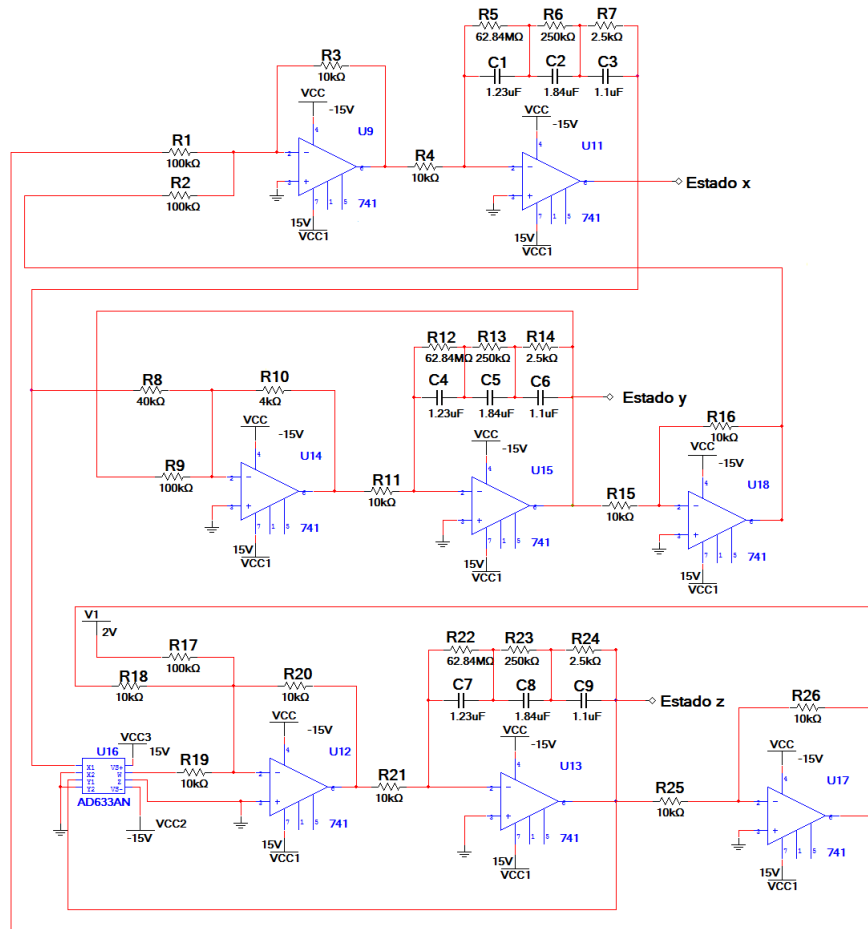
## 6.3. Simulación de redes complejas Irregulares.

### 6.3.1. Circuito analógico del osciladora Rössler de orden fraccionario

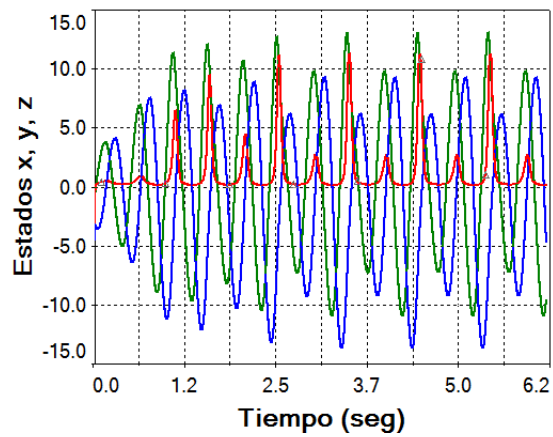
Las ecuaciones que definen al oscilador en orden fraccionario son las siguientes y tomando en cuenta los parámetros  $a = 0.4$ ,  $b = 0.2$ , y  $c = 10$  así como  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$  el sistema exhibe dinámicas caóticas [31], [34]

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= -(y(t) + z(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) + ay(t) + u_{i2}, \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= b + z(t)(x(t) - c). \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

En este caso, el orden del sistema es proporcionado, es decir, cada derivada tiene la misma fraccionalidad y al ser de 0.9 el circuito puede realizarse mediante la aproximación vista en (6.2.7). El circuito que representa a este sistema se muestra en la Fig. 6.25 (a). Los elementos resistivos tienen los valores  $R_1 = R_2 = R_9 = R_{17} = 100k\Omega$ ,  $R_3 = R_{11} = R_{15} = R_{15} = R_{16} = R_{18} = R_{19} = R_{20} = R_{21} = R_{25} = R_{26} = 10k\Omega$ ,  $R_8 = 40k\Omega$ ,  $R = 10k\Omega$ ,  $R_5 = R_{12} = R_{22} = 62.8M\Omega$ ,  $R_6 = R_{13} = R_{23} = 250k\Omega$ ,  $R_7 = R_{14} = R_{24} = 2.5k\Omega$ , y los elementos capacitivos con valor de  $C_1 = C_4 = C_7 = 1.23\mu F$ ,  $C_2 = C_5 = C_8 = 1.84\mu F$  y  $C_3 = C_6 = C_9 = 1.1\mu F$ . La evolución de los estados  $x, y, z$  del oscilador Rössler a través del tiempo se presentan en la Fig. 6.25 (b).



(a)



(b)

Figura 6.25: Circuito y evolución de los estados del oscilador Rössler de orden fraccionario. a) Circuito eléctrico, b) estados  $x, y, z$  del oscilador Rössler de orden fraccionario.

Los planos de fase obtenidos para los estados  $x - y$ ,  $y - z$  y  $x - z$  se muestran en la Fig. 6.26.

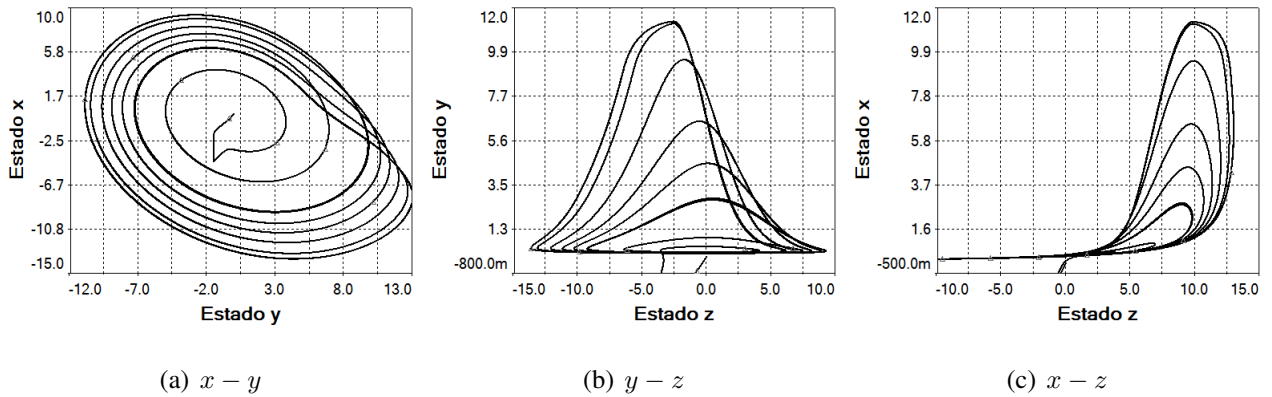


Figura 6.26: Planos de fase del oscilador Rössler de orden fraccionario.

### Red Irregular con oscilador maestro.

Se considera una red irregular con cinco osciladores, mostrada en la Fig. 6.27, en este caso se considera el escenario donde existe un oscilador maestro, el cual dictará la dinámica a los cuatro osciladores restantes en la red irregular.

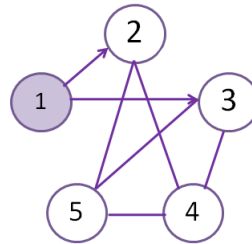


Figura 6.27: Red irregular con 5 nodos donde el oscilador maestro es el oscilador 1.

De acuerdo con la teoría vista en el capítulo 4 de Redes, para formar la matriz de acoplamiento en redes irregulares no existe una forma predeterminada ya que las conexiones entre sus nodos no tienen un patrón definido, por lo que para este caso, la matriz de acoplamiento queda definida de la siguiente

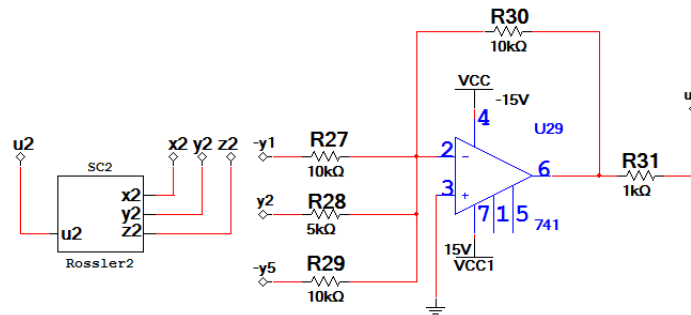
forma:

$$A_{ir} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}. \quad (6.3.2)$$

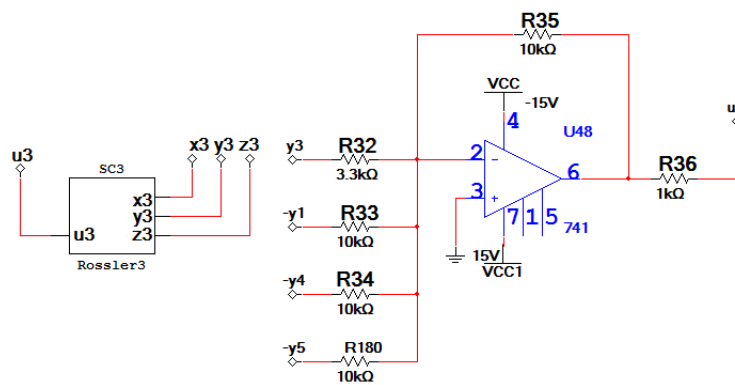
Se implementan las siguientes leyes de control, tomando como ley de control para el oscilador 1 que  $u_1 = 0$  ya que es el oscilador maestro:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= c(2y_2 - y_1 - y_5), \\ u_3 &= c(3y_3 - y_1 - y_4 - y_5), \\ u_4 &= c(2y_4 - y_3 - y_5), \\ u_5 &= c(3y_5 - y_2 - y_3 - y_4). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

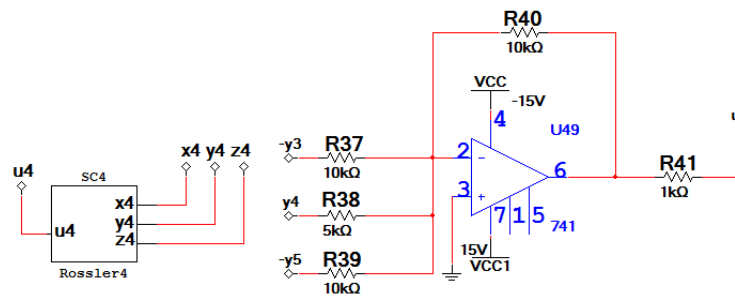
La circuitería se muestra en la Fig. 6.28, donde se encuentra el oscilador Rössler de orden fraccionario en subcircuitos y la ley de control que corresponde a cada oscilador. Se omite el circuito eléctrico para el oscilador maestro correspondiente al oscilador 1, ya que la ley de control para este es igual a cero.



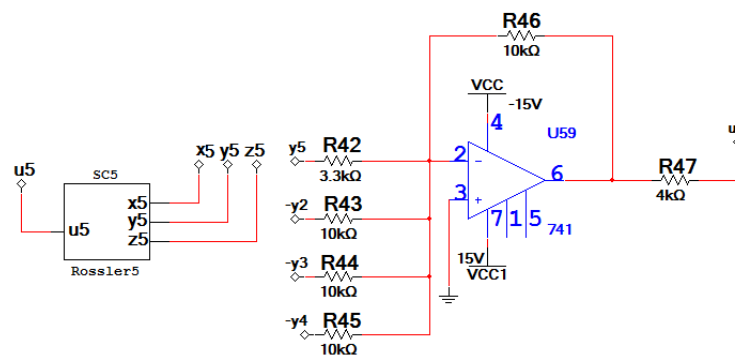
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.28: Circuito eléctrico de una red compleja en acoplamiento irregular formada con osciladores de Rössler de orden fraccionario. a) Oscilador 2 y ley de control  $u_2$ , b) oscilador 3 y ley de control  $u_3$ , c) oscilador 4 y ley de control  $u_4$ , d) oscilador 5 y ley de control  $u_5$ .



Las condiciones iniciales se consideran todas diferentes siendo  $(x_1, y_1, z_1) = (0.5, 1.5, 1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2) = (0.8, 0.5, 0.7)$ ,  $(x_3, y_3, z_3) = (1.2, 2.5, 1.2)$ ,  $(x_4, y_4, z_4) = (3.1, 2.9, 0.3)$ ,  $(x_5, y_5, z_5) = (0.1, 0.3, 2.5)$ . La sincronización se obtiene con una fuerza de acoplamiento  $c = 2$  y el plano de fase comprueba esta sincronización al obtener una línea de  $45^\circ$  al centro de las gráficas, esto se encuentra en la Fig. 6.29.

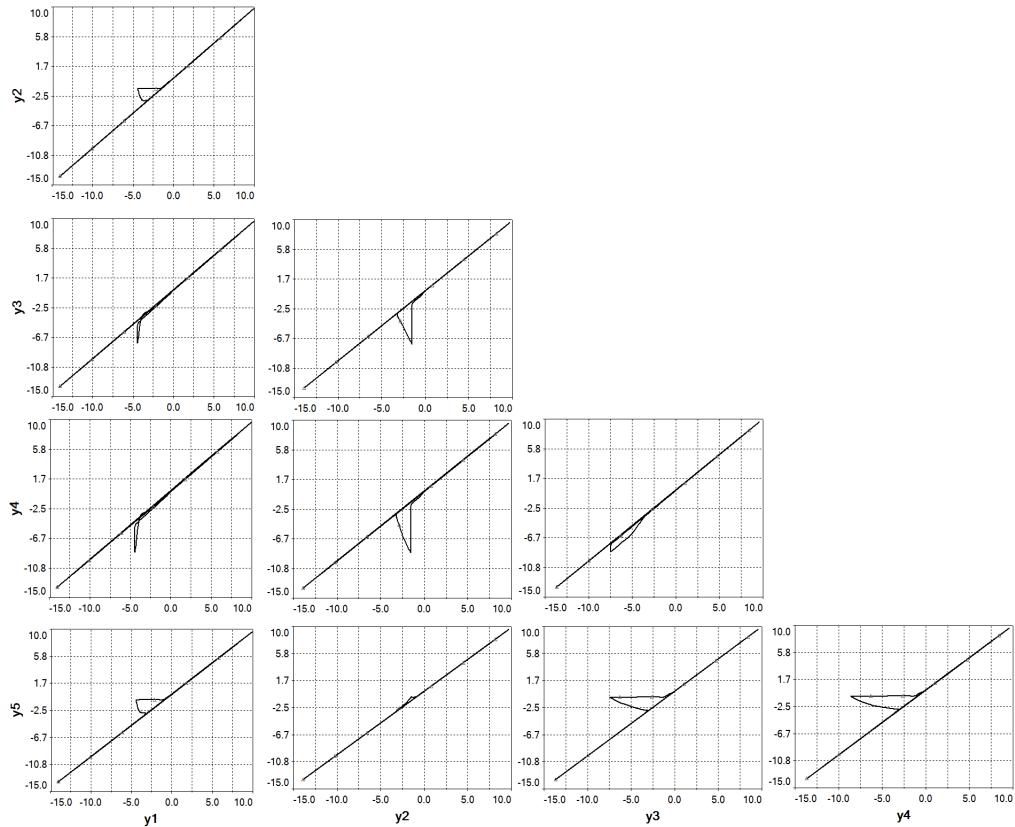


Figura 6.29: Plano de fase para la red compleja irregular con osciladores Rössler de orden fraccionario.  $y_1 - y_2$ ,  $y_1 - y_3$ ,  $y_1 - y_4$ ,  $y_1 - y_5$ ,  $y_2 - y_3$ ,  $y_2 - y_4$ ,  $y_2 - y_5$ ,  $y_3 - y_4$ ,  $y_3 - y_5$ ,  $y_4 - y_5$ .

Debido a que en el osciloscopio del programa *Multisim* solo pueden compararse dos estados a la vez y no tres como en la simulación numérica, solo se pueden observar los planos de fase que corresponde a cada oscilador en Fig. 6.30 por separado.

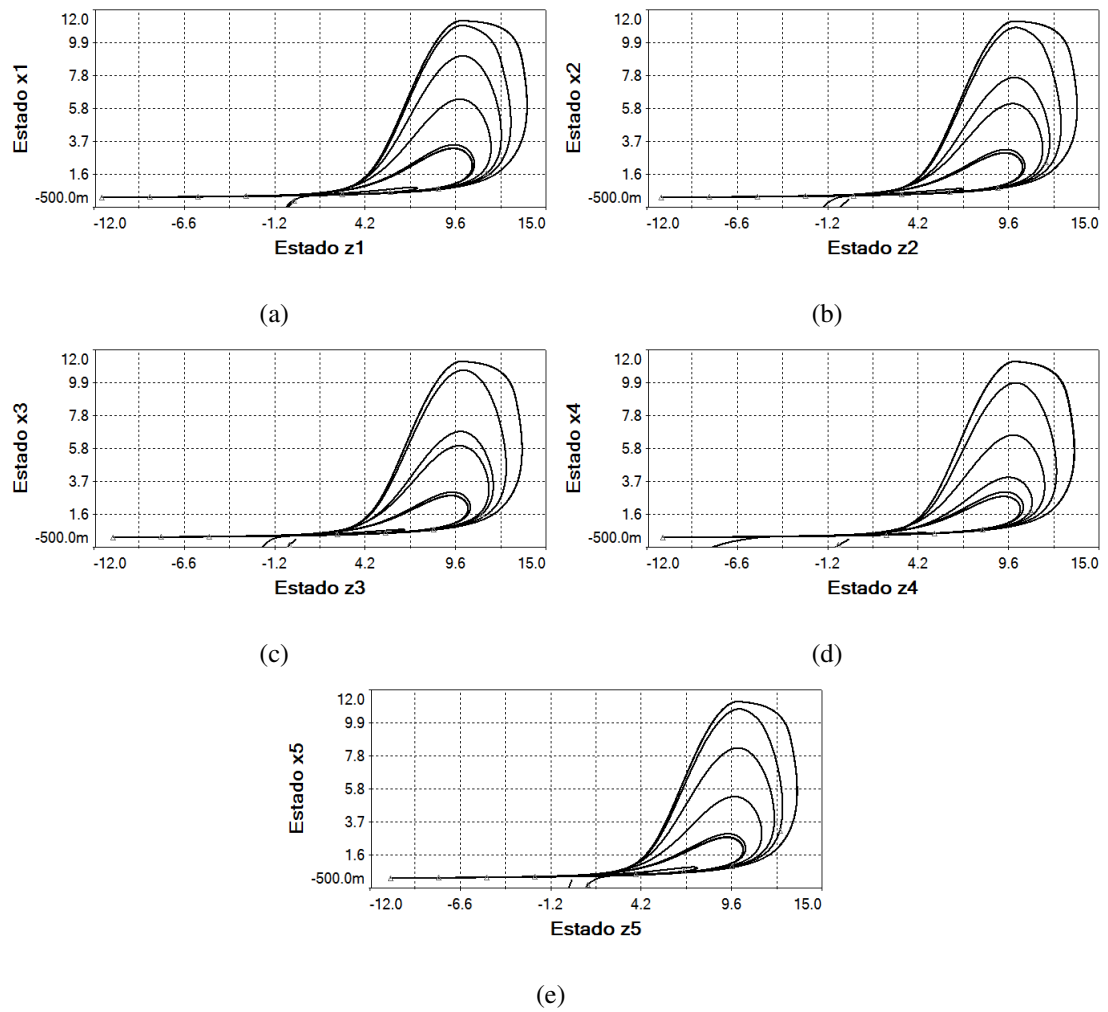


Figura 6.30: Atractores obtenidos en la red irregular con osciladores Rössler de orden fraccionario. a) Atractor  $x_1 - z_1$ , b) atractor  $x_2 - z_2$ , c) atractor  $x_3 - z_3$ , d) atractor  $x_4 - z_4$ , d) atractor  $x_5 - z_5$ .

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajo futuro

En este trabajo de tesis se exploró el tema de sincronización de redes complejas utilizando osciladores de orden fraccionario como nodos. Se seleccionaron diferentes osciladores para realizar la sincronía en las redes como por ejemplo: oscilador Lorenz, Rössler, Volta, Arneodo, Lü, Liu, Financiero y oscilador Chen, todos de orden fraccionario. Se logró sincronizar tanto redes regulares con distintos acoplamientos así como redes irregulares. En la bibliografía se encontraban reportados únicamente sincronizaciones con osciladores de orden fraccionario que consideran dos de ellos. En esta tesis se realizó una revisión bibliográfica acerca de las principales propiedades de estos sistemas, cómo se encuentran presentes en la naturaleza y cómo pueden utilizarse.

Se dedica un capítulo de esta tesis al tema de sincronización y redes complejas donde se precisan las condiciones de sincronización para dichas redes así como las propiedades de redes tanto regulares como irregulares. La metodología que se utilizó para sincronizar los osciladores complejos de orden fraccionario es la establecida por X. F. Wang y G. Chen, en donde a partir de las propiedades de estos osciladores, pueden tener sincronía completa utilizando una ley de control en un estado de cada oscilador que conforma la red. Por medio de una variable de peso, conocida como fuerza de acoplamiento, la red puede llevarse a sincronizar de forma lenta o rápida variando por medio de ésta el tiempo de sincronización.

La simulación numérica de los osciladores de orden fraccionario se basó en una de las soluciones numéricas para estos sistemas definida por Grunwald-Letnikov. Se consideró la sincronización en sistemas idénticos y bajo los mismos parámetros. Se observó también que el esfuerzo computacional para la solución de las ecuaciones de cada sistema de orden fraccionario es alto.

Además, se realizaron algunas simulaciones con osciladores de orden fraccionario pero utilizando circuitos electrónicos y su implementación en redes regulares e irregulares en las cuales se obtuvo sincronización completa. Se consideran pocos osciladores debido al esfuerzo computacional que implican las simulaciones. Esto permite una visión más real de cómo sería su comportamiento si estas llegaran a implementarse por medio de circuitería.

## 7.1. Principales contribuciones de este trabajo de tesis

Las principales contribuciones de este trabajo de tesis son las siguientes

- Extensión de un método de sincronización para redes complejas donde estas incluyen nodos de orden fraccionario, cuando sólo han reportado sincronizaciones de redes incluyendo dos osciladores de este tipo.
- Sincronización de redes complejas regulares e irregulares con oscilador maestro y sin oscilador maestro conformadas por osciladores de orden fraccionario idénticos.
- Sincronización de redes complejas con osciladores de orden fraccionario por medio de circuitos analógicos.
- Se reporta un artículo en congreso

1. Angulo-Guzmán S. Y., Posadas-Castillo C., Díaz-Romero D. A., López-Gutiérrez R. M. and Cruz-Hernández C., Chaotic synchronization of regular complex networks with fractional-order

oscillators, The 20th Mediterranean Conference on Control and Automation. (MED 2011), 03-06 Julio, 2012, Barcelona, España.

## 7.2. Trabajo a futuro

Algunos problemas abiertos en relación al tema de tesis que se desarrolló y que pueden ser considerados como trabajo a futuro son los siguientes:

- Investigar sobre el caso discreto de sistemas de orden fraccionario y llevar a cabo la sincronización de redes complejas pero en tiempo discreto.
- Aplicar la sincronía de osciladores caóticos de orden fraccionario al encriptamiento de información ya que estos brindan ventajas en este tipo de aplicaciones.
- Implementar físicamente los sistemas de orden fraccionario, ya sea por medio de circuitería analógica o por medio de microprocesadores.
- Establecer condiciones de robustez para la sincronía de sistemas de orden fraccionario ante variaciones paramétricas, ruido en señal acoplante o retrasos de la misma.
- Aplicación de la sincronía de redes complejas con nodos de orden fraccionario a robots manipuladores u otro equipo de trabajo.
- Aplicación de los sistemas de orden fraccionario al modelado de redes biológicas, químicas, sociales y de la ingeniería.
- Mejorar el algoritmo de simulación de los sistemas caóticos de orden fraccionario y que el tiempo computacional disminuya.

# Bibliografía

- [1] Cruz-Hernández C. and Sira-Ramírez H., “Synchronization of Chaotic Systems: A Generalized Hamiltonian System Approach”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 11(5), pp. 1381-1395, (2001).
- [2] Pecora, L.M. y Carroll, T.L., “Synchronization in chaotic systems”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, pp. 821-824, (1990).
- [3] Cruz-Hernandez, C., “Synchronization of time-delay Chua’s oscillator with application to secure communication”, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, pp. 1-13, (2004).
- [4] Cuomo, K. M. y Oppenheim, A. V., “Circuit implementation of synchronized chaos with application to communication”, *Physics Letters*, vol. 70, 3031-3035, (1993).
- [5] L. Huang, R. Feng and M. Wang, “Synchronization of chaotic systems via nonlinear control”, *Physics Letters A*, vol. 320, pp. 271-275, (2004).
- [6] H.N. Agiza, M.T. Yassen, “Synchronization of Rossler and Chen chaotic dynamical systems using active control”, *Physics Letters A*, pp. 191-197, (2001).
- [7] C. Li, X. Liao, J. Yu “Synchronization of fractional order chaotic systems”, *Physical Review E*, pp. 68-72, (2003).
- [8] Y. Yu, S. Zhang, “Adaptive backstepping synchronization of uncertain chaotic system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, pp. 643-649, (2004).

- [9] T. Liao, S. Tsai, "Adaptive synchronization of chaotic systems and its application to secure communications", *Chaos, Solitons and Fractals*, pp. 1387-1396, (2000).
- [10] C. Posadas-Castillo, C. Cruz-Hernández, R. M. López-Gutierrez, "Synchronization of Chaotic Neural Networks with Delay in Irregular Networks ", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 205, 487-496, (2008).
- [11] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.U. Hwang, "Complex networks: Structure and dynamics ", *Physics Reports*, vol. 424, 175-308, (2006).
- [12] R. De Castro, J. W. Grossman, "Famous trails to Paul Erdős ", *The Mathematical Intelligencer*, vol. 21, 51-63, (1999).
- [13] C. Posadas-Castillo, "Sincronización de sistemas complejos ", *Tesis doctoral*, (2008).
- [14] Li Ying Cui, S. Kumara, R. Albert, "Complex Networks: An Engineering View ", *Circuits and Systems Magazine, IEEE*, vol. 10, 10-25, (2010).
- [15] J. N. Maina, "Is the sheet-flow design a frozen core (a Bauplan) of the gas exchangers: Comparative functional morphology of the respiratory microvascular systems: illustration of the geometry and rationalization of the fractal properties ", *Comparative Biochemistry and Physiology-Part A: Molecular and Integrative Physiology*, vol. 126, 491-515, (2000).
- [16] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. Oltvai, A. L. Barabási, "The large scale organization of metabolic networks. ", *Nature*, vol. 407, 407-654, (2000).
- [17] A. L. Barabási, R. Albert, "Emergence of scaling in random networks ", *Science*, 509-512, (1997).
- [18] F. d'Alché-Buc, V. Schachter, "Modeling and identification of biological networks ", *Proc. Intl. Symposium on Applied Stochastic Models and Data Analysis (ASMDA)*, 167-179, (2005).

- [19] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, "On power-law relationships of the Internet topology ", *Proc. of the Conference on Applications, Technologies, Architectures, and Protocols for Computer Communication*, 251-262, (1999).
- [20] B. M. Vinagre, C. A. Monje, "Introducción al Control Fraccionario ", *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. 3, pp. 5-23, (2006).
- [21] I. Podlubny, "Fractional Differential Equations ", *Academic Press*, San Diego, (1999).
- [22] I. Petrás, "Fractional-Order Nonlinear Systems ", *Springer*, (2011).
- [23] K. B. Oldham, J. Spanier , "The Fractional Calculus ", *Academic Press*, Nueva York, (1974).
- [24] H. K. Khalil, "Nonlinear system ", *Prentice Hall*, (1996).
- [25] I. Petrás, "Stability of Fractional-Order Systems with Rational Orders: A Survey ", *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 12, pp. 269-298, (2009).
- [26] D. Schleicher, "Hausdorff Dimension, It's Properties, and It's Surprises ", *The Mathematical Association of America*, pp. 509-528, (2009).
- [27] A. Kiani, K. Fallahi, N. Pariz, H. Leung, "A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional Kalman filter ", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, pp. 1-17, (2007).
- [28] R. J. Field, L. Györgyi, "Chaos in Chemistry and Biochemistry ", *World Scientific*, (1993).
- [29] E. N. Lorenz, "Deterministic Nonperiodic Flow Journal of the Atmospheric Sciences ", *World Scientific*, vol. 20, pp. 130-141, (1963).
- [30] J. G. Lu, G. Chen, "A note on the fractional-order Chen system ", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 27, pp. 685-688, (2006).



- [31] Z. M. Odibat, N. Corson, M. A. Aziz Alaoui, C. Bertelle, “Synchronization of Chaotic Fractional-Order Systems via Linear Control ”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 20, pp. 81-97, (2010).
- [32] T. T. Hartley, C. F. Lorenzo, and H. K. Qammer, “Chaos in a Fractional Order Chua’s System ”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 42, pp. 485-490, (1995).
- [33] I. Grigorenko and E. Grigorenko, “Chaotic Dynamics of the Fractional Lorenz System ”, *Physical Review Letters*, vol. 91, (2003).
- [34] C. Li and G. Chen, “Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rössler equations ”, *Physica A*, pp. 55-61, vol. 341, (2004).
- [35] C. Zheng-Fu and S. Dong-Ping, “Chaos in a Fractional-Order Nonlinear Financial System ”, *IEEE Intelligent Systems and Applications (ISA), 2010 2nd International Workshop on*, 1-3, (2010).
- [36] J. G. Lu, G. Chen, “A note on the fractional-order Chen system ”, *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 27, 685-688, (2006).
- [37] J. G. Lu, “Chaotic dynamics of the fractional-order Lü system and its synchronization ”, *Physics Letters A*, vol. 354, 305-311, (2006).
- [38] Bai-Lin Hao, “Elementary Symbolic Dynamics and Chaos in Dissipative Systems”, *World Scientific Publishing Co.*, 337-339, (1989).
- [39] H. Fujisaka, T. Yamada, “Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems ”, *Prog. Theor. Phys.*, vol. 69(1), 32-47, (1983).
- [40] C. Wah Wu, L. O. Chua, “Synchronization in an Array of Linearly Coupled Dynamical Systems ”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I Fundamental Theory and Applications*, 42, 430-447, (1995).

- [41] X. F. Wang, G. Chen “Synchronization in Small-World Dynamical Networks ”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 12, 187-192, (2002).
- [42] H. D. Davis, “The Theory of Linear Operators ”, *Principia Press*, Bloomington Indiana, (1936).
- [43] A. Charef, “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation ”, *Nonlinear Dynamics, Springer*, vol. 46, 195-210, (2006).
- [44] Z. Ruo-Xun, Y. Shi-Ping, “Chaos in fractional-order generalized Lorenz system and its synchronization circuit simulation ”, *Chinese Physics B*, vol. 18, 3295-3303, (2009).
- [45] A. Charef, “Fractal system as represented by singularity function. ”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37, 1465-1470, (1992).