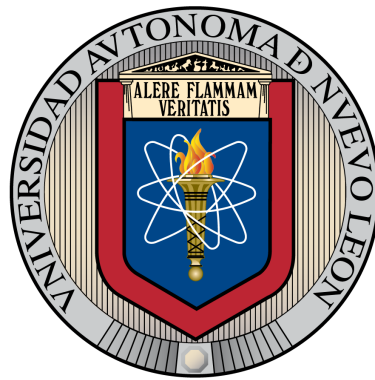


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN  
INGENIERÍA AERONÁUTICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELADO, ANÁLISIS Y CONTROL DE CUADRIRROTORES:  
UN ENFOQUE DE CONTROL CLÁSICO

POR

MARIO FRANCISCO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA

EN

INGENIERÍA AERONÁUTICA

CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

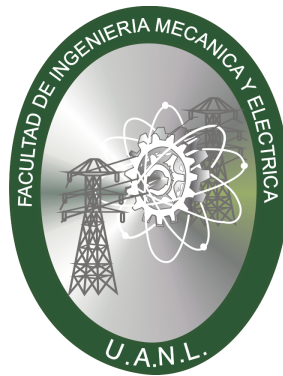
NOVIEMBRE 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN  
INGENIERÍA AERONÁUTICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELADO, ANÁLISIS Y CONTROL DE CUADRIRROTORES:  
UN ENFOQUE DE CONTROL CLÁSICO

POR

MARIO FRANCISCO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA

EN

INGENIERÍA AERONÁUTICA

CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO

SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2014

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

CENTRO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN EN  
INGENIERÍA AERONÁUTICA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



MODELADO, ANÁLISIS Y CONTROL DE CUADRIRROTORES:  
UN ENFOQUE DE CONTROL CLÁSICO

POR

MARIO FRANCISCO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRÍA

EN

INGENIERÍA AERONÁUTICA

CON ORIENTACIÓN EN DINÁMICA DE VUELO

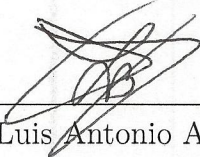
SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN

NOVIEMBRE 2014

**Universidad Autónoma de Nuevo León**  
**Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica**  
**Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica**  
**División de Estudios de Posgrado**

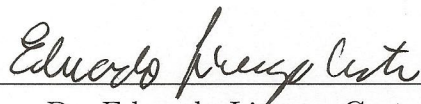
Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Modelado, Análisis y Control de Cuadrirrotores: un Enfoque de Control Clásico», realizada por el alumno Mario Francisco González Sánchez, con número de matrícula 1651407, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ingeniería Aeronáutica.

El Comité de Tesis



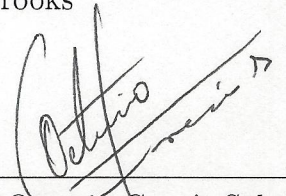
Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks

Asesor



Dr. Eduardo Liceaga Castro

Revisor



Dr. Octavio García Salazar

Revisor

Dr. Jesús Ulises Liceaga Castro

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, julio 2014

*A mis padres, Francisco y Alma Rosa*  
*A mis hermanos, Alma Gabriela y Fernando*  
*A mis tíos y padrinos, Javier y Juana María*  
*A mi novia, Daniela*

*«A helicopter is a collection of vibrations held together by differential equations.»*

John Watkinson

# ÍNDICE GENERAL

---

Índice de figuras	XIII
Índice de tablas	XV
Agradecimientos	XVI
Resumen	XVII
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	1
1.1.1. Historia de los cuadrirrotos . . . . .	4
1.2. Justificación . . . . .	10
1.3. Objetivos . . . . .	13
1.4. Estado del arte . . . . .	13
1.5. Objetivos específicos . . . . .	14
1.6. Hipótesis . . . . .	15
1.7. Límites de estudio . . . . .	15
1.8. Metodología . . . . .	15

---

<b>2. Modelado Dinámico del Cuadrirrotor</b>	<b>17</b>
2.1. Modelos matemáticos no lineales . . . . .	17
2.1.1. Marco de referencia inercial . . . . .	18
2.1.2. Marco de referencia del cuerpo (CR) . . . . .	18
2.1.3. Planteamiento del problema . . . . .	19
2.1.4. Hélices y motores eléctricos . . . . .	20
2.1.5. Modelo con señales externas . . . . .	23
2.1.6. Modelo con momento de precesión giroscópica . . . . .	23
2.2. Modelos dinámicos simplificados para el diseño de controladores . . .	26
2.3. Modelos dinámicos Propuestos . . . . .	30
2.3.1. Dinámicas traslacionales . . . . .	31
2.3.2. Dinámicas rotacionales . . . . .	32
2.3.3. Fuerzas externas y momentos . . . . .	33
2.4. Modelo de diseño cuasi-lineal . . . . .	35
2.4.1. Puntos de equilibrio . . . . .	35
2.4.2. Linealización y función de entrada no lineal . . . . .	36
2.4.3. Modelo cuasi-lineal . . . . .	40
2.5. Comparación de modelos . . . . .	42
2.5.1. Comparación en distintas condiciones de simulación . . . . .	48
2.6. Conclusiones . . . . .	50
<b>3. Control</b>	<b>52</b>



---

3.1. Diseño de controladores . . . . .	52
3.2. Rechazo a perturbaciones . . . . .	58
3.3. Diseño con incertidumbre . . . . .	60
3.4. Validación del esquema de control . . . . .	65
3.5. Conclusiones . . . . .	67
<b>4. Conclusiones</b>	<b>68</b>
4.1. Trabajo futuro . . . . .	69
<b>A. Matrices de Rotación y Dinámica de Cuerpo Rígido</b>	<b>70</b>
A.1. Matrices de rotación . . . . .	70
A.1.1. Formula de rotación . . . . .	73
A.2. Dinámica de cuerpo rígido . . . . .	75
A.2.1. Ecuación de Coriolis . . . . .	75
A.2.2. Dinámica traslacional . . . . .	77
A.2.3. Dinámica rotacional . . . . .	77
<b>B. Simulaciones Digitales</b>	<b>80</b>
<b>C. Tablas-Simulaciones Digitales</b>	<b>108</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>144</b>
<b>Publicaciones</b>	<b>145</b>
<b>Ficha autobiográfica</b>	<b>148</b>

# ÍNDICE DE FIGURAS

---

1.1. UAV's de ala fija. . . . .	2
1.2. UAV's de ala batiente. . . . .	2
1.3. Dirigibles. . . . .	3
1.4. UAV's de ala rotatoria. . . . .	3
1.5. Primer CR, « Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 » [5]. . . . .	5
1.6. « de Bothezat helicopter » [8, 20]. . . . .	6
1.7. « Oemichen No. 2 helicopter» [9, 20]. . . . .	7
1.8. « Convertawings Model A » [6]. . . . .	8
1.9. « Convertawings Model F » [10]. . . . .	9
1.10. « Curtiss-Wright VZ-7» [7]. . . . .	10
2.1. Marcos de referencia del CR y configuración de hélices. . . . .	18
2.2. Movimientos del CR. . . . .	22
2.3. Modelos dinámicos del CR. . . . .	25
2.4. Diagrama de bloques del modelo de diseño cuasi-lineal. . . . .	42
2.5. Trayectoria de referencia para el sistema de control del CR. . . . .	43

---

2.6. Comparación de lazo abierto de los modelos NLT y CL. . . . .	44
2.7. Comparación de las variables de salida de varios modelos. . . . .	44
2.8. Error de salida del modelo. . . . .	45
2.9. Error de entrada del modelo. . . . .	46
2.10. Error de seguimiento. . . . .	46
3.1. $G(s)_{xy} = 2002/s^4$ , Ancho de Banda=6.69 rad/s. . . . .	53
3.2. $G(s)_{\psi} = 2.137/s^2$ , Ancho de Banda=1.46 rad/s. . . . .	53
3.3. $G(s)_z = 113.6/s^2$ , Ancho de Banda=10.7 rad/s. . . . .	54
3.4. Diagrama de Bode en lazo abierto de $C_{xy}G(s)_{xy}$ . . . . .	55
3.5. Diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado de $G(s)_{xy}$ . . . . .	55
3.6. Diagrama de Bode en lazo abierto de $C_zG(s)_z$ . . . . .	56
3.7. Diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado de $G(s)_z =$ $113.6/s^2$ . . . . .	56
3.8. Diagrama de Bode en lazo abierto de $C_{\psi}G(s)_{\psi}$ . . . . .	57
3.9. Diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado de $G(s)_{\psi}$ . . . . .	57
3.10. Estructura de lazo cerrado. . . . .	58
3.11. Sensibilidad y sensibilidad complementaria, $G(s)_{xy}$ . . . . .	59
3.12. Sensibilidad y sensibilidad complementaria, $G(s)_z$ . . . . .	59
3.13. Sensibilidad y sensibilidad complementaria, $G(s)_{\psi}$ . . . . .	60
3.14. Incertidumbre en $g(s)_{xy}$ . . . . .	61
3.15. Incertidumbre en $g(s)_z$ . . . . .	62

---

3.16. Incertidumbre en $g(s)_{\psi}$ . . . . .	63
3.17. Diagramas de Bode en lazo abierto de $G_{\theta_0}(s)$ . . . . .	64
3.18. Seguimiento modelo CL . . . . .	65
3.19. Seguimiento en los modelos NLRG, NLT y NLR. . . . .	66
A.1. Rotación en 2 dimensiones sobre el eje $z$ . . . . .	70
A.2. Rotación en 2 dimensiones sobre el eje $y$ . . . . .	72
A.3. Rotación en 2 dimensiones sobre el eje $x$ . . . . .	72
A.4. Rotación izquierda del vector $p$ alrededor del vector unitario $\hat{n}$ por un ángulo $\mu$ obteniendo el vector $q$ . . . . .	73
A.5. Rotación de $p$ sobre el eje $z$ . . . . .	75
A.6. Diagrama de la ecuación de Coriolis. . . . .	76
B.1. Simulaciones MDS1, MDS2, MDS3, MDS4 y MDS5, guiñada alta. . .	81
B.2. Simulaciones CL, guiñada alta. . . . .	82
B.3. Simulaciones CL, guiñada baja. . . . .	83
B.4. Simulaciones NLR, guiñada baja. . . . .	84
B.5. Simulaciones CL, guiñada cero. . . . .	85
B.6. Simulaciones NLR, guiñada cero. . . . .	86
B.7. Simulaciones MDS6, guiñada alta. . . . .	87
B.8. Simulaciones MDS7, guiñada alta. . . . .	88
B.9. Simulaciones MDS1, guiñada baja. . . . .	89
B.10. Simulaciones MDS2, guiñada baja. . . . .	90

---

B.11.Simulaciones MDS3, guiñada baja. . . . .	91
B.12.Simulaciones MDS4, guiñada baja. . . . .	92
B.13.Simulaciones MDS5, guiñada baja y guiñada cero. . . . .	93
B.14.Simulaciones MDS6, guiñada baja. . . . .	94
B.15.Simulaciones MDS7, guiñada baja. . . . .	95
B.16.Simulaciones MDS1, guiñada cero. . . . .	96
B.17.Simulaciones MDS2, guiñada cero. . . . .	97
B.18.Simulaciones MDS3, guiñada cero. . . . .	98
B.19.Simulaciones MDS4, guiñada cero. . . . .	99
B.20.Simulaciones MDS6, guiñada cero. . . . .	100
B.21.Simulaciones MDS7, guiñada cero. . . . .	101
B.22.Voltajes modelo NLT, guiñada alta . . . . .	102
B.23.Voltajes modelo NLT, guiñada baja . . . . .	103
B.24.Voltajes modelo NLT, guiñada cero . . . . .	104
B.25.Simulaciones NLRG, guiñada alta. . . . .	105
B.26.Simulaciones NLRG, guiñada bajo. . . . .	106
B.27.Simulaciones NLRG, guiñada cero. . . . .	107

# ÍNDICE DE TABLAS

---

2.1. Parámetros para un CR . . . . .	42
C.1. Resultados de simulación, NLT-CL, guiñada alta . . . . .	109
C.2. Resultados de simulación, NLT-CL, guiñada baja . . . . .	110
C.3. Resultados de simulación, NLT-CL, guiñada cero . . . . .	111
C.4. Resultados de simulación, NLT-MDS1, guiñada baja . . . . .	112
C.5. Resultados de simulación, NLT-MDS1, guiñada cero . . . . .	113
C.6. Resultados de simulación, NLT-MDS2, guiñada baja . . . . .	114
C.7. Resultados de simulación, NLT-MDS2, guiñada cero . . . . .	115
C.8. Resultados de simulación, NLT-MDS3, guiñada baja . . . . .	116
C.9. Resultados de simulación, NLT-MDS3, guiñada cero . . . . .	117
C.10. Resultados de simulación, NLT-MDS4, guiñada baja . . . . .	118
C.11. Resultados de simulación, NLT-MDS4, guiñada cero . . . . .	119
C.12. Resultados de simulación, NLT-MDS5, guiñada baja . . . . .	120
C.13. Resultados de simulación, NLT-MDS5, guiñada cero . . . . .	120
C.14. Resultados de simulación, NLT-MDS6, guiñada alta . . . . .	121

---

C.15.Resultados de simulación, NLT-MDS6, guiñada baja . . . . .	122
C.16.Resultados de simulación, NLT-MDS6, guiñada cero . . . . .	123
C.17.Resultados de simulación, NLT-MDS7, guiñada alta . . . . .	124
C.18.Resultados de simulación, NLT-MDS7, guiñada baja . . . . .	125
C.19.Resultados de simulación, NLT-MDS7, guiñada cero . . . . .	126
C.20.Resultados de simulación, NLRG-NLT, guiñada alta . . . . .	127
C.21.Resultados de simulación, NLRG-NLT, guiñada baja . . . . .	128
C.22.Resultados de simulación, NLRG-NLT, guiñada cero . . . . .	129

# AGRADECIMIENTOS

---

Quisiera agradecer a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica de la Universidad Autónoma de Nuevo León por su apoyo en la beca otorgada durante mi primer semestre de maestría, así como por proporcionarme los medios para asistir a dos congresos de control, tanto nacional (Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2013) como internacional (IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control, CDC 2013), a su vez quisiera agradecer a la Dra. Patricia del Carmen Zambrano Robledo por todo su apoyo en el transcurso de la realización de la maestría.

Quiero expresar mi agradecimiento a mi mentor, el Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks, por permitirme realizar la presente tesis bajo su dirección. Gracias por su apoyo, confianza y paciencia, por compartir conmigo parte de su conocimiento y, con ello, permitirme crecer profesionalmente.

Al Dr. Eduardo Liceaga Castro, Dr. Jesús Ulises Liceaga Casto y Dr. Octavio García Salazar por su apoyo, por la atenta lectura a mi tesis y por sus comentarios y enseñanzas durante todo el proceso de elaboración de la misma.

A CONACyT por haberme otorgado la beca para el estudio de mi maestría y además la beca mixta para realizar mi estancia en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco

Igualmente, deseo agradecer a mi familia por su apoyo incondicional.



# RESUMEN

---

Mario Francisco González Sánchez.

Candidato para el grado de Maestría en Ingeniería Aeronáutica  
con Orientación en Dinámica de Vuelo.

Universidad Autónoma de Nuevo León.

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica.

Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica.

Título del estudio:

## MODELADO, ANÁLISIS Y CONTROL DE CUADRIRROTORES: UN ENFOQUE DE CONTROL CLÁSICO

Número de páginas: 148.

**OBJETIVOS Y MÉTODO DE ESTUDIO:** La presente tesis se enfoca en el modelado dinámico del cuadirrotor. Actualmente se pueden encontrar en la literatura una variedad de modelos dinámicos de cuadirrotores con distintas características y estructuras, y no es posible encontrar un modelo de diseño estándar que englobe las principales dinámicas del cuadirrotor y permita el diseño de controladores simples basados en análisis frecuencial, lineales, grado bajo, de fase mínima y estables.

Se representó el modelo del cuadirrotor en una estructura de espacio de estados y después mediante un análisis tipo entrada-salida se obtiene un sistema que en su

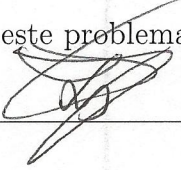
mayor parte está representado por funciones de transferencia. Esta representación conlleva diversas ventajas, como el tener una estructura sencilla y que esto a la vez permita que controladores simples puedan ser diseñados.

Se diseñaron controladores con el modelo propuesto, que cumplieran con especificaciones de diseño y orientados a controlar la trayectoria del cuadrirrotor. Se hará uso de los controladores diseñados con el modelo propuesto en los distintos modelos encontrados en la literatura, además de un análisis de rechazo a perturbaciones e incertidumbre.

CONTRIBUCIONES Y CONCLUSIONES: Se presentan 2 modelos propuestos uno en espacio de estados y otro llamado « cuasi lineal ». Con el propósito de diseño de controladores, se realizó un extenso análisis mediante simulaciones digitales en la cual se verificó la efectividad de los controladores ante distintos modelos dinámicos, ya que fueron controlados en un amplio rango de operación.

Los controladores propuestos estabilizaron de buena manera, inclusive con perturbaciones estructurales y se determinaron especificaciones de diseño mediante el uso de la técnica de rechazo a perturbaciones.

Se observó que no cualquier modelo dinámico simplificado puede ser utilizado para diseñar controladores que estabilicen las dinámicas complejas del cuadrirrotor. El proceso de modelado es una parte fundamental para el desarrollo de sistemas de control, ya que de eso depende la complejidad del controlador y su rendimiento. El modelo propuesto ataca este problema y se observó que dio buenos resultados.

Firma del asesor:  \_\_\_\_\_

Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks

## CAPÍTULO 1

# INTRODUCCIÓN

---

### 1.1 ANTECEDENTES

En la última década se ha dado un progreso significativo en cuanto a los vehículos aéreos no tripulados (UAV's, por sus siglas en inglés), y se han convertido en parte normal de los procesos de operación de organismos públicos y privados. Los UAV's son comúnmente utilizados para fines militares y civiles, tales como vigilancia, asistencia en desastres (ambientales, industriales y urbanos), búsqueda y rescate, investigación y adquisición de datos e imágenes de áreas afectadas, entre muchas otras aplicaciones [43], incluso la « FAA » (Federal Aviation Administration) aprobó los primeros vuelos comerciales de un UAV [51]. El crecimiento de estas aplicaciones ha brindado desarrollo tecnológicos en distintas áreas como sensores, técnicas de programación, unidades de procesamiento digital, almacenamiento de energía, etc [70].

Los UAV's pueden clasificarse de acuerdo a su configuración física en: ala fija, ala rotatoria, ala batiente y dirigibles [27], además se pueden realizar combinaciones de las distintas características físicas y generar diferentes configuraciones para los UAV's.

Los UAV's de ala fija (Fig. 1.1), son utilizados principalmente para operaciones en las que se requieren recorrer largas distancia y grandes altitudes. Su tamaño varía dependiendo de la aplicación para el cual se diseñe, ya sea en el campo de la milicia

---

<sup>1</sup><http://www.af.mil/AboutUs/FactSheets/Display/tabid/224/Article/104470/mq-9-reaper.aspx>

<sup>2</sup><http://www.northropgrumman.com/Capabilities/X47BUCAS/Pages/default.aspx>

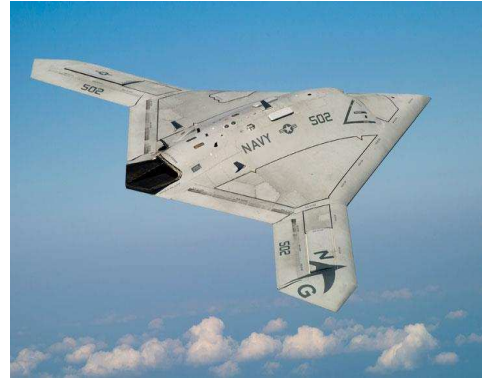
(a) MQ-9 Reaper.<sup>1</sup>(b) Northrop Grumman X-47B.<sup>2</sup>

Figura 1.1: UAV's de ala fija.

o de la investigación, por ejemplo.

(a) SmartBird de Festo.<sup>3</sup>(b) BionicOpter de Festo.<sup>4</sup>

Figura 1.2: UAV's de ala batiente.

Por otro lado los UAV's de ala batiente (Fig. 1.2), imitan el modo en que los pájaros o insectos vuelan, poseen una capacidad de carga muy baja y características de vuelo limitadas, ya que actualmente esta configuración física de UAV's se encuentra en desarrollo.

<sup>3</sup>[http://www.festo.com/cms/en\\_corp/11369.htm](http://www.festo.com/cms/en_corp/11369.htm)

<sup>4</sup>[http://www.festo.com/cms/en\\_corp/13165.htm](http://www.festo.com/cms/en_corp/13165.htm)

<sup>5</sup>[http://www.festo.com/cms/en\\_corp/9780.htm](http://www.festo.com/cms/en_corp/9780.htm)

<sup>6</sup>[http://www.festo.com/cms/en\\_corp/9771.htm](http://www.festo.com/cms/en_corp/9771.htm)

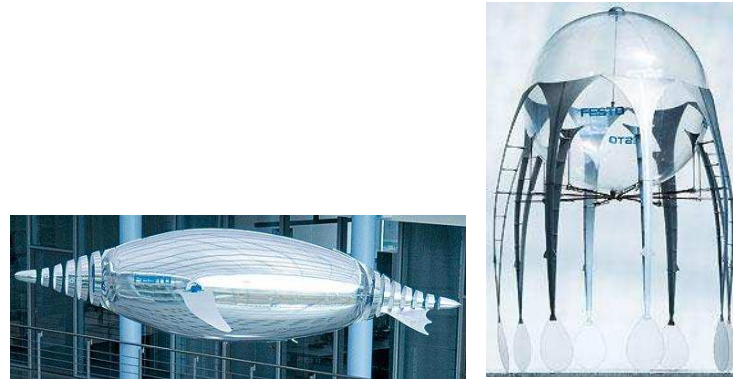
(a) AirPenguin de Festo.<sup>5</sup>(b) AirJelly de Festo.<sup>6</sup>

Figura 1.3: Dirigibles.

Los dirigibles (Fig. 1.3) o UAV's más ligeros que el aire, funcionan bajo el principio de mantener la sustentación mediante un globo lleno de helio, lo que permite no utilizar energía en la sustentación y aprovecharla para los actuadores de orientación y movimiento.

Finalmente los UAV de ala rotatoria (Fig. 1.4) tienen la capacidad de despegue/aterrizaje vertical (VTOL, por sus siglas en inglés) y pueden mantenerse en vuelo estacionario.

(a) Northrop Grumman MQ-8B.<sup>7</sup>(b) Cuadrirrotor.<sup>8</sup>

Figura 1.4: UAV's de ala rotatoria.

<sup>7</sup><http://www.northropgrumman.com/Capabilities/firescout/Pages/default.aspx>

<sup>8</sup><http://www.xproheli.com/collections/multirotors/products/xp2-quadcopter>

Existen diferentes tipos de propulsión para los UAV's de ala rotatoria, la configuración « tradicional » consiste en una aeronave con un rotor principal para lograr la sustentación y un rotor de cola para cancelar el momento de fuerza generado por el rotor principal (1.4(a)). Otras configuraciones se muestran a continuación:

- Trirrotores [92, 104, 113].
- Cuadrirrotores [26, 61, 80].
- Hexarrotores [13, 78].
- Octorrotores [48].
- UAV de ducto [89].
- UAV con inclinación de rotores [3, 47, 65, 102, 118].
- UAV con rotores coaxiales [99, 107].
- Ciclocópteros [19, 71].

Finalmente, el tema principal de la presente tesis es el cuadrirrotor (**CR**), el cual es el primer paso de un línea de investigación más profunda que pretende estudiar UAV's, sus sistemas aviónicos, su dinámica de vuelo y sistemas de propulsión, que está siendo desarrollado por el Cuerpo Académico de « **Propulsión y Guiado de Sistemas Aeronáuticos** ».

### 1.1.1 HISTORIA DE LOS CUADRIRROTORES

La configuración mecánica del CR fue una de las primeras utilizadas para la invención de una aeronave con habilidad de despegue/aterrizaje vertical. En 1907, Louis y Jacques Bréguet en conjunto con el profesor Charles Richet construyeron la primer aeronave capaz de alzarse verticalmente con un piloto mediante un sistema de ala rotatoria [77]. Fue llamado « Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 ». El primer requerimiento para la aeronave era levantarse por si misma, con un piloto abordo,

por lo que el problema de estabilidad del « Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 » (Fig. 1.5) no fue considerado, siendo este de importancia para la aeronave.

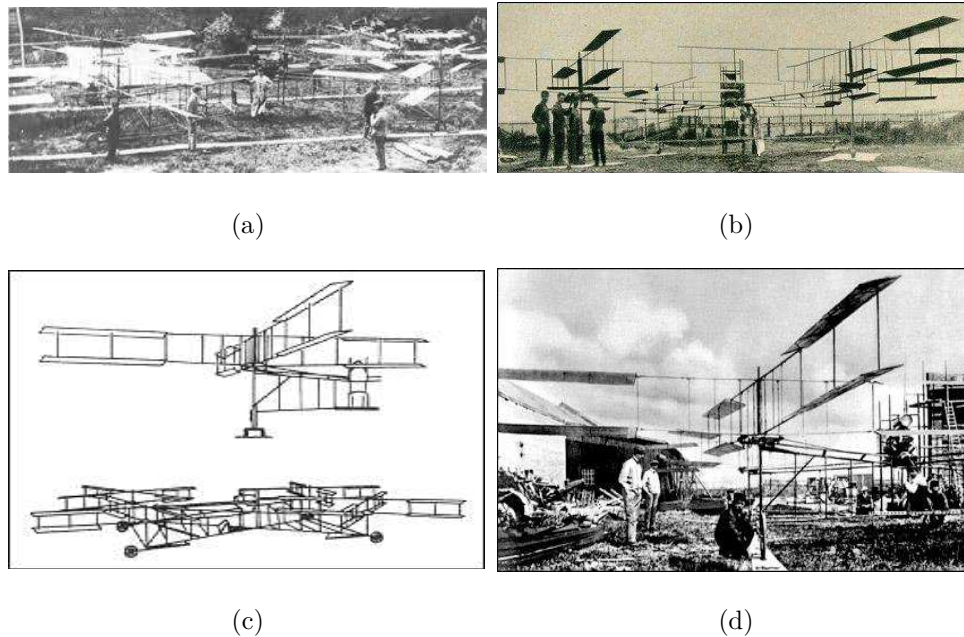


Figura 1.5: Primer CR, « Bréguet-Richet Gyroplane No. 1 » [5].

En enero de 1921 el servicio aéreo de los Estados Unidos contrató al Dr. George de Bothezat y a Ivan Jerome para el desarrollo de una máquina de vuelo vertical. El helicóptero de « de Bothezat » o « Flying Octopus » (Fig. 1.6) tenía 4 rotores con seis hélices cada uno, con un diámetro de 8.1 metros, ubicados en una geometría de « X », una distancia de rotor a rotor de 20 metros y utilizaba un motor Bentley BR-2 de 220 hp y un peso de 1700 kg.

El 18 de diciembre de 1922 logró su primer vuelo con una duración de 1 minuto 42 segundos y se alzó 1.8 metros del suelo. De Bothezat demostró que su vehículo podía ser bastante estable y que el helicóptero era teóricamente posible pero se requería de un viento a favor para alcanzar un vuelo hacia delante y además de su falta de respuesta, complejidad de los controles para el piloto y la falta de potencia, el proyecto fue cancelado.

En Francia, Etienne Oemichen, un joven ingeniero de « Peugeot motor car

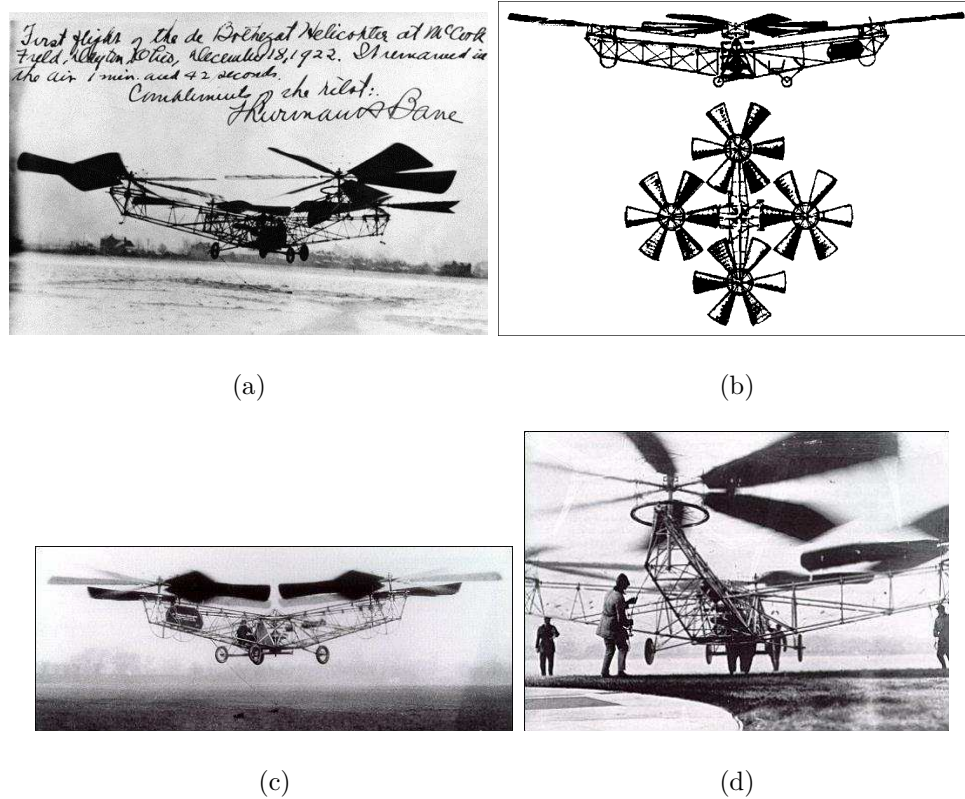


Figura 1.6: « de Bothezat helicopter » [8, 20].

company », comenzó experimentos de alas giratorias en 1920, construyendo un total de seis máquinas diferentes. Su segunda máquina voló sin ayuda el 11 de noviembre 1922. El « Oemichen No. 2 » (Fig. 1.7) tenía forma de rombo, estructura tubular con un amplio rotor de dos palas en el extremo de cada brazo. Para el control y el movimiento lateral, se utilizaron ocho pequeñas hélices: cinco hélices horizontales con paso variable y reversible para la estabilidad lateral, otra hélice en la nariz para la dirección, y otro par más para el movimiento hacia adelante. El 4 de mayo de 1924, se completó el primer vuelo de 1 kilómetro de circuito cerrado por un vehículo de ala rotativa, en 7 minutos 40 segundos. La duración máxima fue de 14 minutos. A pesar del hecho de que era capaz de demostrar capacidad de control y el poder suficiente sobre el efecto tierra para este vuelo histórico, no era una máquina voladora práctica.

Un diseño significativo fue el « Convertawings Model A » (Fig. 1.8), volado en



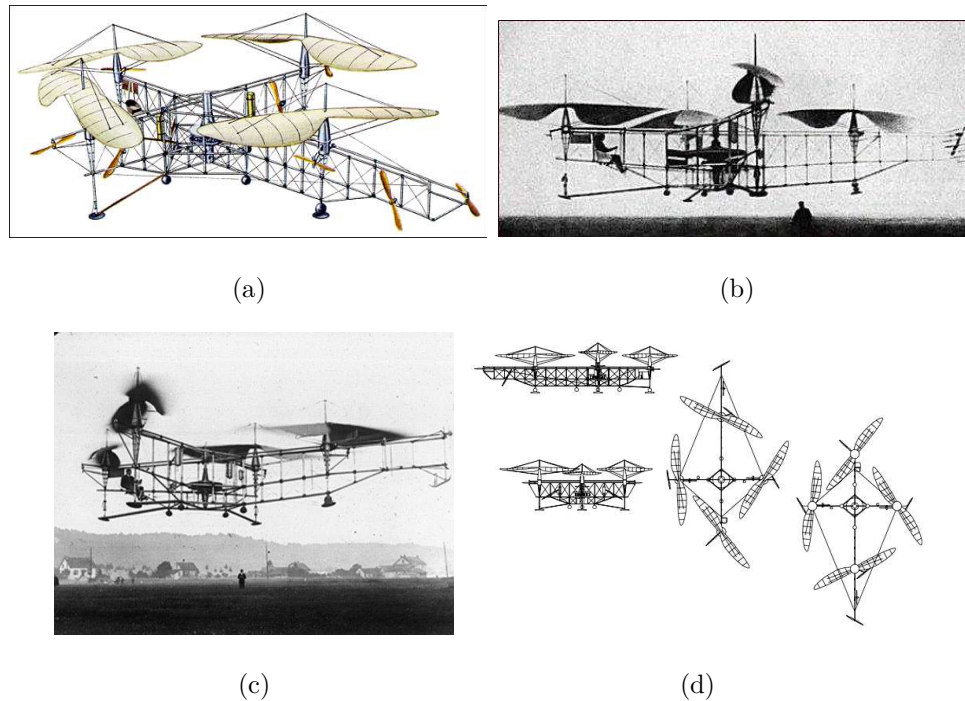


Figura 1.7: « Oemichen No. 2 helicopter » [9,20].

Long Island en marzo de 1956 por su diseñador y piloto de pruebas D.H. Kaplan. Contaba con una disposición doble, de lado a lado, de cuatro rotores. Los cuatro rotores de este helicóptero se encontraban montados lateralmente sobre estabilizadores en dos pares tándem. El mecanismo de control estaba muy simplificado y era obtenido por el diferencial de empuje entre los rotores. No contaba con control cíclico, sólo control colectivo. La diferencia más notable de este diseño con respecto a los anteriores es que no contaba con rotores auxiliares para el movimiento en distintos ejes de traslación o rotación, por lo tanto corroboró el funcionamiento del CR, con el diseño mecánico utilizado actualmente en los UAV's.

En el prototipo experimental, el fuselaje era de acero tubular, los brazos que soportaban los rotores eran de una aleación de aluminio. La potencia era proporcionada por dos motores conectados al sistema de transmisión del rotor por medio de múltiples correas en « V ». Contaba con un tren de aterrizaje con dos ruedas en la parte trasera y una rueda en la nariz que podía girar, fue el primer helicóptero de cuatro rotores en demostrar un vuelo hacia adelante exitoso.

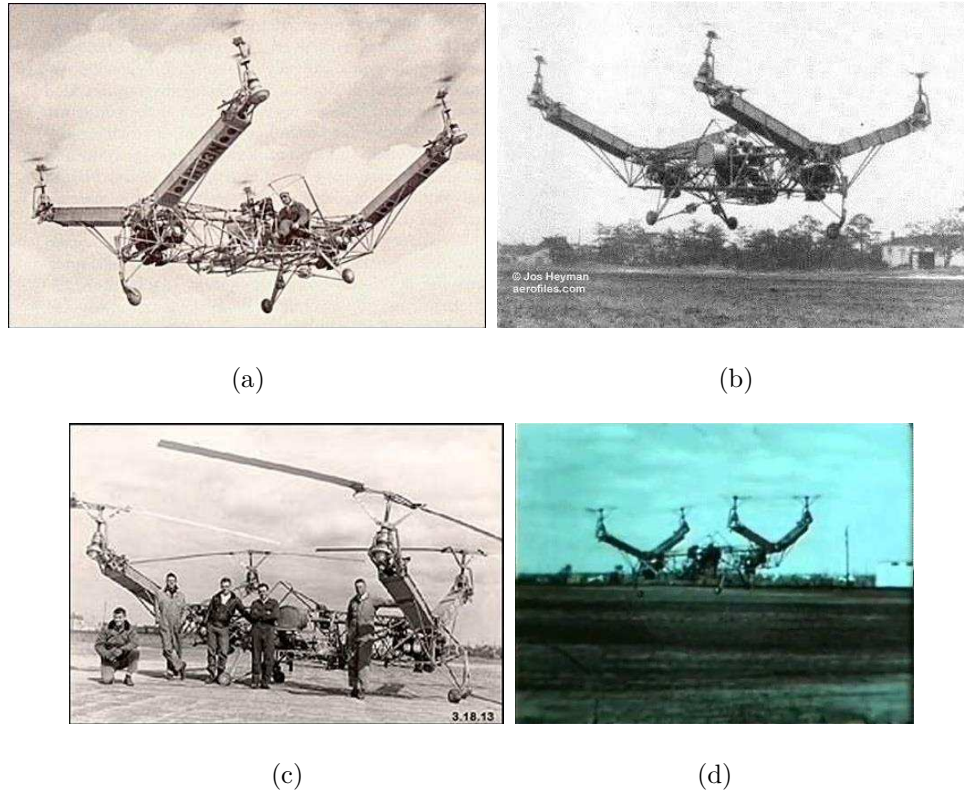


Figura 1.8: « Convertawings Model A » [6].

El proyecto del « Convertawings Model F » (Fig. 1.9), consistía en un helicóptero monoplaza que constaba de cuatro rotores con palas entrelazadas y cuya potencia era proporcionada por cuatro motores franceses « turboshaft » Artouste II, sin embargo, este proyecto nunca vio la luz.

Finalmente el « Curtiss-Wright VZ-7 » (Fig. 1.10) se entregó al Ejército de Estados Unidos a mediados de 1958. El diseño demostró ser incapaz de cumplir los requisitos de altitud y velocidad especificados y fue posteriormente retirado del servicio y devuelto al fabricante, a mediados de 1960.

El diseño del « Curtiss-Wright VZ-7 » era sumamente sencillo, consistía esencialmente de un fuselaje central rectangular en el cual fueron montadas verticalmente cuatro hélices en un patrón cuadrado. El fuselaje central llevaba tanques de seguridad, controles de vuelo, tanques de combustible y lubricantes y un motor Turbomeca

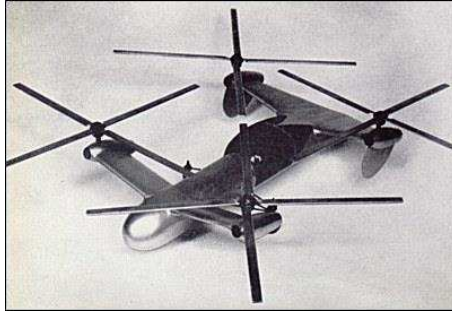


Figura 1.9: « Convertawings Model F » [10].

Artouste IIB de 425shp. El sistema de control del « Curtiss-Wright VZ-7 » también era muy simple; el movimiento direccional era controlado mediante la variación del empuje de cada hélice individual, con control adicional de guiñada proporcionada por paletas móviles fijadas sobre el escape del motor. La nave era capaz de realizar vuelo estacionario y vuelo hacia delante, y fue relativamente estable y fácil de operar.

Recientemente ha surgido un enorme interés en el uso de los CR's, debido al avance que existe en áreas como la electrónica, programación, control, procesamiento digital, etc. Permitiendo el uso de CR's pequeños, a diferencia de los diseños mostrados anteriormente, otorgando un sinnúmero de posibilidades en aplicaciones y desarrollo de plataformas experimentales [115].

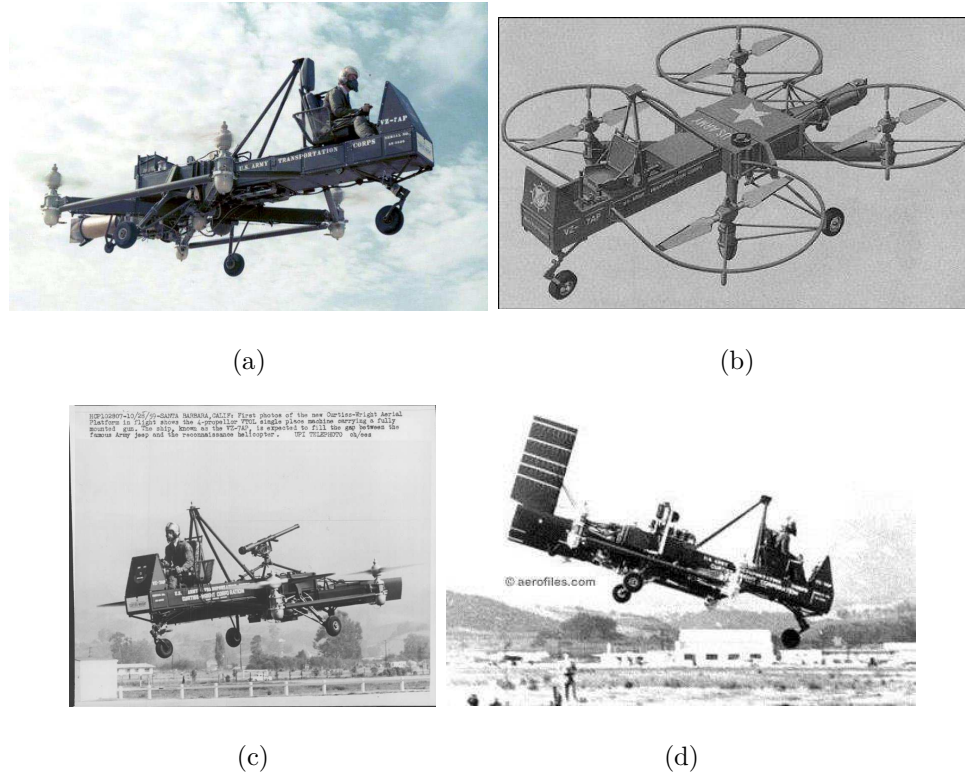


Figura 1.10: « Curtiss-Wright VZ-7» [7].

## 1.2 JUSTIFICACIÓN

Como se mencionó anteriormente (§1.1), se pretende trabajar en el modelado dinámico y control de UAV's. Se decidió, entonces, empezar los estudios con los CR's (1.4(b)) ya que pueden soportar una carga útil mayor a los helicópteros y demás configuraciones con menor número de rotores. además, los CR's poseen una gran maniobrabilidad y su manufactura es más sencilla, debido a esto, son un tema de interés para las líneas de investigación del cuerpo académico de « **Propulsión y Guiado de Sistemas Aeronáuticos** » y la comunidad científica en general.

La mayoría de los artículos que reportan el modelado y control de CR's carecen de un modelo dinámico estándar. Existen distintos modelos aeronáuticos para configuraciones de ala fija y ala rotatoria, estos modelos son muy útiles para simulaciones y la evaluación de variables aeronáuticas. No obstante, no son los más

apropiados para el diseño de controladores ya que estos modelos están fijos a marcos de referencia típicamente usados en la aeronáutica y son diferentes a los utilizados en aplicaciones de control. La mayoría de los reportes sobre el control del CR comienzan con un procedimiento de modelado. Desde el punto de vista del control basado en modelos, la preexistencia de un modelo teórico viable consiste en uno de los pasos más importantes en el diseño de controladores adecuados.

Los distintos esquemas de control reportados en la literatura están basados en diversos modelos dinámicos de CR's, lo cual conlleva a limitaciones debido a la precisión de los modelos de CR's empleados. Entonces, se requiere un modelo de diseño que contenga las dinámicas más relevantes y que permita el diseño de controladores simples y efectivos para el seguimiento de trayectorias.

En el contexto de las aplicaciones aeronáuticas, existen modelos de diseño estándar y ampliamente aceptados para las configuraciones de ala fija o rotatoria. Un problema con estos modelos es que están bloqueados a los marcos de referencia utilizados tradicionalmente para aplicaciones aeronáuticas. Estos sistemas de referencia no son necesariamente los más beneficiosos para el diseñador de controladores.

El diseñador de controladores a menudo busca estructuras de espacio de estados estandarizadas, tales como:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}\tag{1.1}$$

Esta estructura permite el uso de métodos bien definidos, tales como linealización por retroalimentación de entrada-salida, control por modos deslizantes y control lineal robusto [74]. En contraste, los modelos aeronáuticos existentes a menudo resultan en la siguiente estructura [14, 90, 111, 112]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \tilde{x}_2) + g_1(x_1, \tilde{x}_2, u_1) \\ x_1 &= r_1(\tilde{x}_1) \quad x_2 = r_2(\tilde{x}_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(\tilde{x}_1, x_2) + g_2(\tilde{x}_1, x_2, u_2) \\ y &= h(x_1, x_2)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Cabe mencionar, que métodos como el paso-atrás se utilicen para estos sistemas, que están claramente divididos en dos subsistemas acoplados. Aunque es posible diseñar otros controladores utilizando la estructura (1.2), pueden ser necesarias ciertas etapas de transformaciones complicadas o manejo de acoplamientos.

Debido a lo anterior, en la presente tesis se desarrollará un modelo no lineal del CR, equivalente a los modelos aeronáuticos, que cumpla con la estructura típica de un modelo en espacio de estados. Este modelo incluye las dinámicas que comúnmente son reportadas. Así mismo, se simplificará este modelo para el diseño de controladores en el dominio de la frecuencia. El modelo resultante se validará mediante simulaciones digitales.

Los controladores comúnmente reportados son complejos y se basan en metodologías que no permiten la integración de especificaciones de desempeño y robustez orientadas a aplicaciones de ingeniería. Es decir, hace falta un análisis que permita el diseño de controladores con las características de desempeño y robustez requeridas para el CR.

Debido a esto, en esta tesis se diseñaran controladores basándose en el uso de herramientas de control clásico, con las cuales se pueden incluir especificaciones de desempeño y rechazo a perturbaciones (sensibilidad y sensibilidad complementaria), así como incertidumbre en la planta (CR). Las especificaciones de diseño se darán en términos frecuenciales, lo que permitirá el uso de distintos esquemas de control tales como « loop shaping », diseño de compensadores, etc. Esto implicará el análisis de las herramientas necesarias para poder aplicar estas técnicas de control a un proceso no lineal y altamente acoplado como lo es el CR. Se validará el esquema de control mediante simulaciones digitales, las cuales permitirán corroborar que el controlador propuesto cumple con las especificaciones de diseño.

### 1.3 OBJETIVOS

Se muestran a continuación los objetivos de la presente tesis:

- Obtener el modelo matemático de un CR a partir de leyes fundamentales, así como la validación del mismo.
- Obtener modelos simplificados que permitan el diseño de controladores lineales con un análisis frecuencial clásico para seguimiento de trayectorias.
- Diseño de controladores que cumplan con especificaciones de diseño y orientados a controlar la trayectoria del CR, con herramientas basadas en análisis frecuencial.
- Validación del esquema de control propuesto con simulaciones digitales.

### 1.4 ESTADO DEL ARTE

Existen varios reportes de plataformas experimentales de CR's en funcionamiento. Por ejemplo, en [41,44] el control basado en paso-atrás es utilizado con éxito. Otros enfoques tales como paso-atrás adaptativo y robusto se presentan en [37]. Técnicas como linealización por retroalimentación y control por modos deslizantes se presentan en [76, 85]. Otros esquemas de control no lineales se pueden encontrar en [70]. Además de esquemas de control no lineales, varias aplicaciones de CR's en funcionamiento utilizan controladores lineales PI-PID tradicionales, con excelentes resultados experimentales [81]. No obstante, el diseño de tales controladores PI-PID sigue siendo mayormente heurístico.

En el contexto de aplicaciones para CR's, existen diferentes métodos de control, las cuales pueden ser aplicadas para diferentes objetivos, por ejemplo:

- **Control de altitud:** Controladores lineales  $H_\infty$  [36], ubicación de polos [21, 22], linealización por retroalimentación [17, 83, 84] y otros métodos no lineales [67, 117].
- **Control de actitud:** Controladores PID [23, 96], LQR [96, 117], Controladores lineales  $H_\infty$  [36], linealización por retroalimentación [83, 84], compensador de adelanto doble [96] y otros métodos no lineales [21, 114].
- **Control de velocidad:** Controladores lineales  $H_\infty$  [36], ubicación de polos [116].

Estos enfoques de control están basados en distintos modelos de CR's, y tiene distintas limitantes debido a la precisión de los modelos dinámicos del los CR's. El estudio del estado de arte en modelado dinámico es uno de los objetivos principales de la tesis, debido a la variedad de características y estructuras que se pueden encontrar en la literatura (§2.2), debido a lo cual se dedica un capítulo para esto.

## 1.5 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Se exponen los objetivos específicos de la presente tesis:

- Obtener el modelo matemático no lineal de un CR a partir de las ecuaciones de Newton Euler y validar el modelo mediante simulaciones digitales.
- Obtener modelos simplificados, mediante el uso de la representación en espacio de estados y linealización.
- Diseño de controladores lineales con un análisis frecuencial clásico, generando compensadores para el análisis de los modelos simplificados.
- El diseño de controladores esta orientado al seguimiento de trayectorias del CR.



- Análisis de especificaciones de diseño tales como rechazo a perturbaciones e incertidumbre en la planta (CR).
- Validación del esquema de control propuesto con simulaciones digitales.

## 1.6 HIPÓTESIS

*« El modelo dinámico simplificado propuesto contendrá las dinámicas más relevantes para el diseño de controladores simples mediante el uso de esquemas de control en el dominio de la frecuencia. El diseño de controladores lineales con herramientas de análisis frecuencial, en conjunto con los modelos simplificados, permitirán un seguimiento efectivo de trayectorias sobre un amplio rango de operación. »*

## 1.7 LÍMITES DE ESTUDIO

- Solo contemplará el control de trayectorias sobre la posición y guiñada del CR.
- Solamente se plantean las simulaciones digitales como método de validación del modelo dinámico y esquema de control propuestos.
- Los controladores serán lineales.
- El análisis de sensibilidad e incertidumbre se realizará con el modelo lineal del CR, no se considera el sistema multivariable del CR.
- No se tomarán en cuenta los acoplamientos dinámicos debido a distintos puntos de operación del CR.

## 1.8 METODOLOGÍA

La metodología de la presente tesis, es la siguiente:

- Revisión bibliográfica.
- Desarrollar modelo del CR no lineal.
- Validación del modelo del CR no lineal mediante simulaciones digitales.
- Desarrollar modelo simplificado del CR.
- Comparación con distintos modelos dinámicos de CR's.
- Validación del modelo simplificado del CR mediante simulaciones digitales.
- Diseño de controladores basándose en el uso de herramientas de control clásico.
- Identificación y planteamiento de las especificaciones de desempeño y rechazo a perturbaciones (sensibilidad y sensibilidad complementaria), así como incertidumbre en la planta (CR).
- Validación del esquema de control propuesto mediante simulaciones digitales.
- Análisis de resultados.

En este trabajo, se presentó el desarrollo de un modelo cuasi lineal el cual permite el diseño de controladores simples basados en análisis frecuencial, lineales, grado bajo, de fase mínima y estables.

Se realizó un profundo estudio bibliográfico sobre modelos encontrados en la literatura, y se corroboró que los controladores diseñados con el modelo CL permiten estabilizar un gran número de modelos simplificados (MDS1-MDS7), además de estabilizar modelos con dinámicas más complejas y no lineales (NLRG, NLT, NLR). Esto demostró un gran nivel de robustez conservando un alto grado de simplicidad.

## CAPÍTULO 2

# MODELADO DINÁMICO DEL CUADRIRROTOR

---

### 2.1 MODELOS MATEMÁTICOS NO LINEALES

El procedimiento de modelado para el cuadrirrotor (**CR**) se basa en la mecánica clásica de cuerpo rígido y es típico, en estos modelos, el uso de marcos de referencia mixtos para la medición y manipulación de las variables. No obstante, el uso de marcos de referencia mixtos añade ecuaciones « sin-memoria » redundantes que complican aún más el proceso de diseño del controlador. Por lo tanto, en esta sección se deriva un modelo con la estructura de espacio de estados estandarizada, que es más adecuada en el contexto del diseño de controladores. El procedimiento de modelado del CR desarrollado en la presente tesis toma en cuenta las siguientes suposiciones [52]:

- El diseño mecánico del CR es simétrico.
- La estructura del CR es rígida.
- La velocidad del aire de flujo libre es cero.
- Las hélices son rígidas.
- El arrastre es lineal (obedeciendo a la ley de Stokes)

- El transitorio de los motores eléctricos es rápido y puede ser despreciado.

### 2.1.1 MARCO DE REFERENCIA INERCIAL

El marco de referencia inercial del CR  $\mathcal{F}^i : \{o_e; x_e, y_e, z_e\}$  (Fig. 2.1) es un sistema de coordenadas fijo a la Tierra conocido como norte-este-abajo (NED por sus siglas en ingles) [14, 112], el « norte » está definido como la dirección inercial  $x$ , el « este » como la dirección inercial  $y$  y « abajo » como la dirección inercial  $z$ .

### 2.1.2 MARCO DE REFERENCIA DEL CUERPO (CR)

El origen del marco de referencia del cuerpo  $\mathcal{F}^b : \{o_b; x_b, y_b, z_b\}$  (Fig. 2.1) está en el centro de masa del CR, también tiene una configuración NED, ya que esto permite que el plano  $x - y$  sea tangente a la superficie de la Tierra.

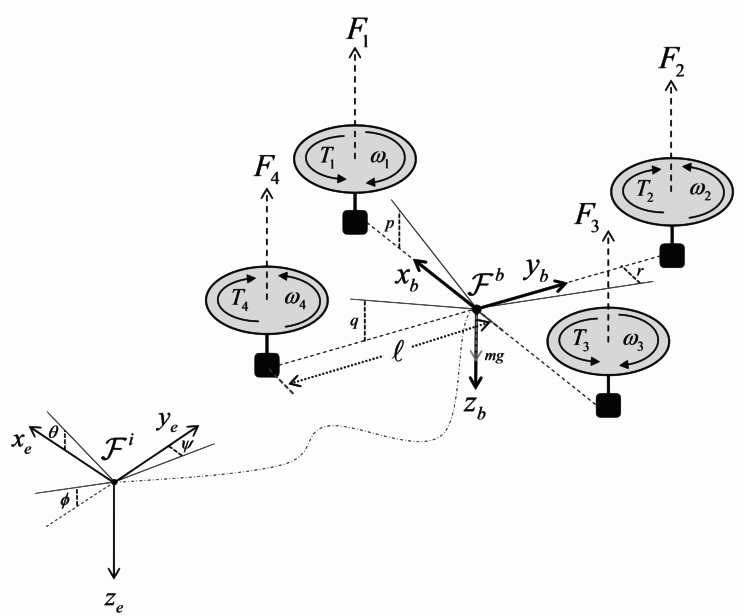


Figura 2.1: Marcos de referencia del CR y configuración de hélices.

### 2.1.3 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El CR puede ser modelado por la dinámica de cuerpo rígido en un marco de referencia inercial colocado y alineado con el vehículo (Fig. 2.1). En este caso las ecuaciones de Newton-Euler (desarrolladas en el apéndice A) están dadas por [14, 50, 56, 75, 90, 111, 112]:

$$m\dot{V}_b + m\omega_b \times V_b = F_b \quad (2.1)$$

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b) = M_b \quad (2.2)$$

Donde  $V_b = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$  y  $\omega_b = \begin{bmatrix} p_b & q_b & r_b \end{bmatrix}^T$  son los vectores de velocidades lineales y angulares,  $F_b$  es el vector de fuerzas externas,  $m$  es la masa,  $J$  es la matriz de momentos de inercia y  $M_b$  es el vector de momentos externos. Los ángulos del CR (alabeo, cabeceo y guiñada) en  $\mathcal{F}^b$  están definidos por  $\kappa = \begin{bmatrix} p & q & r \end{bmatrix}^T$

Para propósitos de seguimiento de trayectorias, es preferible expresar las velocidades lineales en un marco de referencia inercial fijo a la Tierra ( $\mathcal{F}^i$ ) denotado por  $V_e = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T$ . Teniendo en cuenta los ángulos de Euler  $\Omega = \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$  con secuencia  $\psi$ - $\theta$ - $\phi$  (guiñada-cabeceo-alabeo),  $V_e$  se puede expresar como:

$$V_e = R^T V_b \quad (2.3)$$

Donde  $R$  es una matriz de rotación ortogonal compuesta por la rotación sucesiva sobre los ángulos  $\psi$ - $\theta$ - $\phi$  [14, 90, 111, 112]:

$$R = R_\phi R_\theta R_\psi = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ c_\psi s_\theta s_\phi - s_\psi c_\phi & s_\psi s_\theta s_\phi + c_\psi c_\phi & c_\theta s_\phi \\ c_\psi s_\theta c_\phi + s_\psi s_\phi & s_\psi s_\theta c_\phi - c_\psi s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Con  $s_x = \sin(x)$  y  $c_x = \cos(x)$ .

De una manera similar las derivadas en el tiempo de los ángulos de Euler, que son útiles para derivar la actitud del vehículo, pueden obtenerse a partir de las velocidades angulares en  $\mathcal{F}^b$  con la siguiente relación [14, 90, 111, 112]:

$$\omega_b = \dot{\Phi} + R_\phi \dot{\Theta} + R_\phi R_\theta \dot{\Psi} = R_\alpha \dot{\Omega} \quad (2.5)$$

Donde:

$$R_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\phi & -s_\phi \\ 0 & s_\phi/c_\theta & c_\phi/c_\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \Phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Theta = \begin{bmatrix} 0 & \theta & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \psi \end{bmatrix}^T \end{matrix}$$

Con  $t_x = \tan(x)$ , la matriz  $R_\alpha$  es invertible si  $\theta \neq (2k-1)\phi/2$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

El conjunto de ecuaciones (2.1)-(2.2), (2.3) y (2.5) representa el modelo tradicional del CR sin tener en cuenta las fuerzas aerodinámicas. En los siguientes párrafos, este modelo se manipula con el fin de llegar a la estructura en espacio de estados. Además, algunas consideraciones respecto a las variables de entrada se introducen para simplificar el proceso de diseño del controlador.

#### 2.1.4 HÉLICES Y MOTORES ELÉCTRICOS

La fuerza de empuje de la hélice  $i$  puede ser aproximada por:

$$F_i = \frac{1}{2} \rho S C_T (kV_i)^2$$

Donde  $S$  es el área del disco de la hélice,  $C_T$  es el coeficiente de sustentación de la hélice,  $\rho$  es la densidad del aire y  $kV_i$  es la velocidad angular del motor  $i$  de la hélice con un voltaje  $V_i$  [12, 14, 63, 114]. Esta aproximación desprecia el transitorio del motor eléctrico que es más rápido que las dinámicas del cuerpo. Excluyendo el voltaje del motor, las variables de  $F_i$  se pueden considerar constantes en el tiempo, por lo tanto:

$$F_i = k_p V_i^2 \tag{2.6}$$

Donde la constante  $k_p$  puede ser caracterizada experimentalmente (pruebas de sustentación estática [66]) para cada combinación de motor y hélice. El voltaje  $V_i$  normalmente es aplicado vía un inversor de fuente de voltaje modulado por ancho de pulsos. De una manera similar, se puede demostrar que el momento de fuerza reactivo generado por una sola hélice puede ser aproximado por [12, 14, 63, 114]:

$$T_i = k_m V_i^2 \tag{2.7}$$

Donde la constante  $k_m$  puede ser caracterizada experimentalmente (pruebas de sustentación estática [66]) para cada combinación de motor y hélice.

Otras fuerzas y momentos de fuerza inducidos son [12, 25, 98, 108]

- Momentos de fuerza inducidos en los ejes locales  $x$  &  $y$  de cada hélice, debido a la velocidad traslacional. Este es un efecto bien conocido en los helicópteros llamado « blade flapping ».
- Fuerzas giroscópicas en cada hélice. La fuerza giroscopica inducida en el cuerpo del CR ya está incluida en las ecuaciones (2.1)-(2.2).
- Desequilibrio de arrastre aerodinámico inducido en cada hélice debido a la velocidad traslacional. Este también es un efecto bien conocido en los helicópteros llamado « lead-lag ».

No obstante, se ha observado que estos efectos son despreciables debido a la operación simétrica normalmente impuesta a las hélices del CR [68,94]. Esto significa, dos hélices rotan en una dirección y las otras dos en otra (Fig. 2.1). Esta simetría hace que las fuerzas y momentos de fuerza antes mencionados sean despreciables.

Para que el sistema de hélices pueda producir los momentos de fuerza y las fuerzas deseadas, teniendo en cuenta la configuración de las hélices de la Fig. 2.1, se establece la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} U_z \\ T_p \\ T_q \\ T_r \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \\ V_4^2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Donde:

$$P = \begin{bmatrix} k_p & k_p & k_p & k_p \\ 0 & -\ell k_p & 0 & \ell k_p \\ \ell k_p & 0 & -\ell k_p & 0 \\ -k_m & k_m & -k_m & k_m \end{bmatrix}$$

Basándonos en la ecuación anterior y la Fig. 2.2, se observa que la sustentación total, se consigue mediante la activación de todos los motores al mismo tiempo, y el momento de fuerza sobre el ángulo  $p$  (similar al ángulo de alabeo) se consigue mediante la disminución de la potencia del motor 2 y el aumento de la potencia del motor 4. De una manera similar se consigue el momento de fuerza sobre el ángulo  $q$  (similar al ángulo de cabeceo) por medio de los motores 1-3. Por último, el momento de fuerza sobre el ángulo  $r$  (similar al ángulo de guiñada) se consigue mediante el aumento de la potencia de los motores 2-4 y la disminución de la potencia de los motores 1-3.

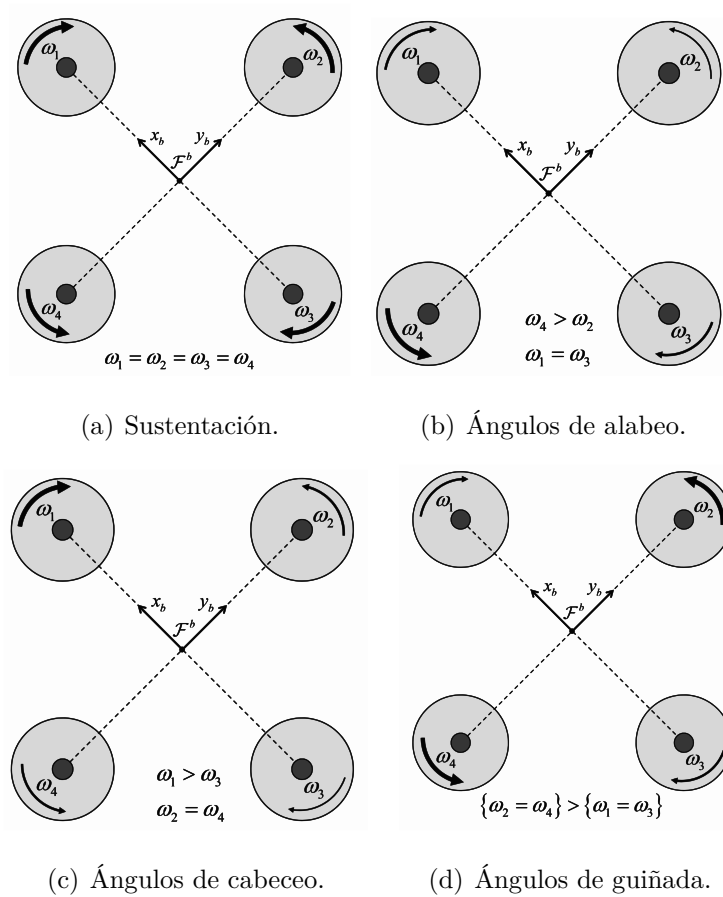


Figura 2.2: Movimientos del CR.

Finalmente, se obtiene la relación de los voltajes de los motores eléctricos con respecto a las fuerzas y momentos de fuerzas de entrada, mediante la siguiente rela-



ción:

$$\begin{bmatrix} V_1^2 \\ V_2^2 \\ V_3^2 \\ V_4^2 \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} U_z \\ T_p \\ T_q \\ T_r \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Donde:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4k_p} & 0 & \frac{1}{2\ell k_p} & -\frac{1}{4k_m} \\ \frac{1}{4k_p} & -\frac{1}{2\ell k_p} & 0 & \frac{1}{4k_m} \\ \frac{1}{4k_p} & 0 & -\frac{1}{2\ell k_p} & -\frac{1}{4k_m} \\ \frac{1}{4k_p} & \frac{1}{2\ell k_p} & 0 & \frac{1}{4k_m} \end{bmatrix}$$

Un hecho importante es que la matriz  $P^{-1}$  puede considerarse como una base ortogonal; por lo tanto, los efectos de las entradas deseadas  $\begin{bmatrix} U_z & T_p & T_q & T_r \end{bmatrix}^T$  son independientes y bien definidos con los voltajes de entrada.

### 2.1.5 MODELO CON SEÑALES EXTERNAS

Existen modelos de CR's que incluyen señales externas, tales como distintos efectos aerodinámicos (efecto tierra, « blade flapping », « lead-lag », etc.), arrastres inducidos en el cuerpo del CR y dinámicas externas que ocurren durante distintas operaciones del CR, como el descenso vertical [12, 94].

En las ecuaciones (2.10)-(2.11) se incluye este término ( $d(t)$ ) que normalmente se considera como perturbaciones en general al sistema del CR.

$$m\dot{V}_b + m\omega_b \times V_b + d(t) = F_b \quad (2.10)$$

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b) + d(t) = M_b \quad (2.11)$$

### 2.1.6 MODELO CON MOMENTO DE PRECESIÓN GIROSCÓPICA

El momento de fuerza  $M_\Gamma$  se obtiene a partir del diferencial de empuje asociado con el par de rotores en los ejes  $x$  y  $y$  conteniendo efectos aerodinámicos y

giroscópicos. El eje de rotación del rotor se mueve con la velocidad angular de  $\mathcal{F}^b$  (en este caso el eje  $z$  del rotor) produciendo el siguiente momento:

$$\begin{aligned} M_\Gamma &= -\sum_{i=1}^4 I_r (\omega_b \times z_b) (-1)^{i+1} \omega_i = -I_r (\omega_b \times z_b) \sum_{i=1}^4 (-1)^{i+1} \omega_i \\ &= -I_r (\omega_b \times z_b) (\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) = -I_r (\omega_b \times z_b) \omega_\Gamma \end{aligned}$$

Donde  $\omega_i$  denota la velocidad angular del rotor alrededor de su eje e  $I_r$  es el momento de inercia del rotor alrededor de su eje. Notando que  $\omega_b = R_\alpha \dot{\Omega}$  (ecuación (2.5)):

$$\begin{aligned} M_\Gamma &= -I_r (R_\alpha \dot{\Omega} \times z_b) \omega_\Gamma = \\ &-I_r \left( \begin{array}{c} \dot{\Phi} + R_\phi \dot{\Theta} + R_\phi R_\theta \dot{\Psi} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \omega_\Gamma \end{aligned} \quad (2.12)$$

Tomando en cuenta este momento en las ecuaciones de Newton-Euler (ecuaciones (2.1)-(2.2)) obtenemos:

$$m\dot{V}_b + m\omega_b \times V_b = F_b \quad (2.13)$$

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b) = M_b + M_\Gamma \quad (2.14)$$

Tomando en cuenta el desarrollo de las dinámicas rotacionales del CR (§2.3.2). La ecuación (2.14) puede ser reescrita como  $J \frac{d}{dt} \omega_b = M_b - \omega_b \times (J\omega_b) + M_\Gamma$  con:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega_b &= \frac{d}{dt} (\dot{\Phi} + R_\phi \dot{\Theta} + R_\phi R_\theta \dot{\Psi}) \\ &= (\ddot{\Phi} + R_\phi \ddot{\Theta} + R_\phi R_\theta \ddot{\Psi}) + \left( \frac{d}{dt} R_\phi \cdot \dot{\Theta} + \frac{d}{dt} R_\phi R_\theta \cdot \dot{\Psi} \right) \end{aligned}$$

Dado que  $(\ddot{\Phi} + R_\phi \ddot{\Theta} + R_\phi R_\theta \ddot{\Psi}) = R_\alpha \ddot{\Omega}$  (ecuación (2.5)) entonces la ecuación (2.14) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega} &= R_\alpha^{-1} J^{-1} M_b - R_\alpha^{-1} J^{-1} (\omega_b \times (J\omega_b)) \\ &+ R_\alpha^{-1} J^{-1} M_\Gamma - R_\alpha^{-1} \left( \frac{d}{dt} R_\phi \cdot \dot{\Theta} + \frac{d}{dt} R_\phi R_\theta \cdot \dot{\Psi} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Donde:

$$R_\alpha^{-1} J^{-1} M_\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{I_r \omega_\Gamma s_\phi s_\theta (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta)}{I_\alpha c_\theta} - \frac{I_r \omega_\Gamma (\dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi)}{I_\alpha} \\ \frac{I_r \omega_\Gamma c_\phi (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta)}{I_\alpha} \\ \frac{I_r \omega_\Gamma s_\phi (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta)}{I_\alpha c_\theta} \end{bmatrix}$$

Expresando el modelo no lineal con efectos giroscópicos de los pares de rotores con un vector de estados,  $X = [x \dot{x} y \dot{y} z \dot{z} \phi \dot{\phi} \theta \dot{\theta} \psi \dot{\psi}]^T$  y con todas las variables en  $\mathcal{F}^i$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -U_z (\cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \\ m\ddot{y} &= -U_z (\cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) - \sin(\phi) \cos(\psi)) \\ m\ddot{z} &= -U_z \cos(\phi) \cos(\theta) + mg \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{T_p + T_q s_\phi t_\theta}{I_\alpha} + \frac{T_r c_\phi t_\theta}{I_z} \\ \frac{T_q c_\phi}{I_\alpha} - \frac{T_r s_\phi}{I_z} \\ \frac{I_\alpha T_r c_\phi + I_z T_q s_\phi}{I_\alpha I_z c_\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{I_r \omega_\Gamma s_\phi s_\theta (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta)}{I_\alpha c_\theta} - \frac{I_r \omega_\Gamma (\dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} c_\theta s_\phi)}{I_\alpha} \\ \frac{I_r \omega_\Gamma c_\phi (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta)}{I_\alpha} \\ \frac{I_r \omega_\Gamma s_\phi (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta)}{I_\alpha c_\theta} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} s_\theta)}{c_\theta} \\ \dot{\phi} \dot{\psi} c_\theta \\ -\frac{\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi} s_\theta)}{c_\theta} \end{bmatrix} &- \begin{bmatrix} \frac{(I_z - I_\alpha) \dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}}{I_\alpha} (\dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} s_\phi c_\theta - \dot{\phi} s_\phi t_\theta + \dot{\psi} s_\phi s_\theta t_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) c_\phi}{I_\alpha} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) s_\phi}{I_\alpha c_\theta} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

En la literatura raramente se diseñan controladores con los modelos descritos anteriormente debido a su complejidad. En su lugar se utilizan simplificaciones que se aplican a la dinámica de las ecuaciones (2.1)-(2.2). La figura 2.3 muestra un diagrama con el desglose del proceso de modelado/simplificación que se utiliza actualmente. En la siguiente sección se revisarán las simplificaciones encontradas en la literatura.

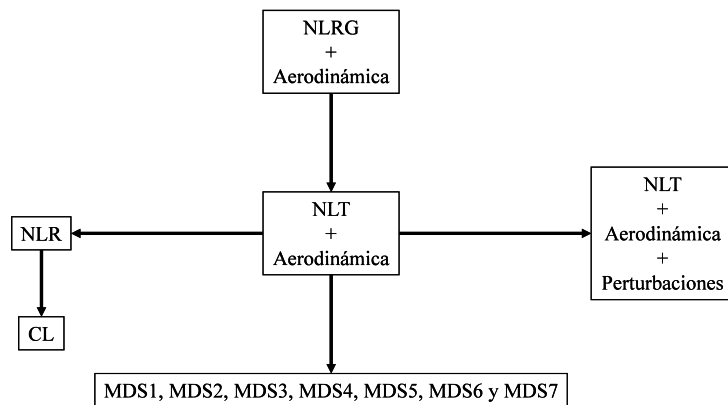


Figura 2.3: Modelos dinámicos del CR.

## 2.2 MODELOS DINÁMICOS SIMPLIFICADOS PARA EL DISEÑO DE CONTROLADORES

En esta sección se presentan distintos modelos dinámicos simplificados del CR. Estos modelos son el resultado de un profundo análisis del estado del arte. En total se revisaron mas de 50 referencias en las cuales se encontraron recurrentemente los siguientes modelos:

### MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 1 (MDS1)

Este modelo dinámico asume condiciones de vuelo estacionario ( $U_z \approx mg$  en la direcciones  $x$  y  $y$ ), sin guiñada ( $\psi = 0$ ) y la aproximación de ángulos pequeños de las funciones básicas de trigonometría ( $\sin(x) \approx x$ ,  $\cos(x) \approx 1$ ) en los ángulos de alabeo ( $\phi$ ) y cabeceo ( $\theta$ ), se empleo este modelo para la planeación de trayectorias del CR y sistemas de control tolerantes a fallas.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\theta g & \ddot{\phi} &= T_p/I_\alpha \\ \ddot{y} &= \phi g & \ddot{\theta} &= T_q/I_\alpha \\ \ddot{z} &= -\frac{U_z}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r/I_z \end{aligned} \quad (2.18)$$

**Referencias:** [4, 33–35]

### MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 2 (MDS2)

Se obtiene este modelo dinámico asumiendo  $\psi = 0$  y ángulos pequeños de alabeo ( $\phi$ ) y cabeceo ( $\theta$ ) en la direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente, algunos esquemas de control diseñados en conjunto con este modelo son: linealización por retroalimentación, control por modos deslizantes adaptivo y control robusto.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-U_z \sin \theta}{m} & \ddot{\phi} &= T_p/I_\alpha \\ \ddot{y} &= \frac{U_z \sin \phi}{m} & \ddot{\theta} &= T_q/I_\alpha \\ \ddot{z} &= \frac{-U_z \cos \phi \cos \theta}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r/I_z \end{aligned} \quad (2.19)$$

**Referencias:** [11, 76]

## MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 3 (MDS3)

Se considera la siguiente ecuación para obtener las dinámicas traslacionales del modelo en  $\mathcal{F}^i$ :

$$F_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg \end{bmatrix}^T - R \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_z \end{bmatrix}^T$$

Este modelo es utilizado en la literatura para una variedad de técnicas, tales como: control lineal, control de orden fraccional, control basado en visión, control de actitud, comparaciones de controladores no lineales, estabilización en tiempo real y generación de trayectorias.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-U_z \sin \theta}{m} & \ddot{\phi} &= T_p / I_\alpha \\ \ddot{y} &= \frac{U_z \cos \theta \sin \phi}{m} & \ddot{\theta} &= T_q / I_\alpha \\ \ddot{z} &= \frac{-U_z \cos \theta \cos \phi}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r / I_z \end{aligned} \quad (2.20)$$

**Referencias:** [15, 28–32, 39, 42, 45, 46, 49, 54, 57, 58, 62, 73, 86, 88, 95, 100, 101, 109]

## MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 4 (MDS4)

En este modelo se asume que el ángulo de guiñada ( $\psi$ ) es pequeño, solamente se emplea la expresión  $\sin(\delta_\psi) \approx 0$  para fines de simplificación y despreciar ciertos términos del modelo dinámico, las técnicas empleadas son control basado en visión, paso-atrás y linealización por retroalimentación.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{-U_z (\cos \phi \cos \psi \sin \theta)}{m} & \ddot{\phi} &= T_p / I_\alpha \\ \ddot{y} &= \frac{U_z (\cos \psi \sin \phi)}{m} & \ddot{\theta} &= T_q / I_\alpha \\ \ddot{z} &= \frac{-U_z \cos \theta \cos \phi}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r / I_z \end{aligned} \quad (2.21)$$

**Referencia:** [2]

## MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 5 (MDS5)

Se tomó en cuenta el ángulo de cabeceo ( $\theta$ ) pequeño para la obtención del modelo dinámico, el esquema de control empleado en este modelo es el paso-atrás.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-U_z \sin \psi \sin \phi}{m} & \ddot{\phi} &= T_p/I_\alpha \\ \ddot{y} &= \frac{U_z \cos \psi \sin \phi}{m} & \ddot{\theta} &= T_q/I_\alpha \\ \ddot{z} &= \frac{-U_z \cos \psi \cos \phi}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r/I_z\end{aligned}\quad (2.22)$$

**Referencia:** [82]

## MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 6 (MDS6)

Este modelo dinámico asume la aproximación de ángulos pequeños, tomando en cuenta los ángulos de alabeo ( $\phi$ ) y cabeceo ( $\theta$ ) del CR se obtiene el modelo dinámico. una de las aplicaciones es control tolerante a fallas.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-U_z(\theta \cos \psi + \phi \sin \psi)}{m} & \ddot{\phi} &= T_p/I_\alpha \\ \ddot{y} &= \frac{-U_z(\theta \sin \psi - \phi \cos \psi)}{m} & \ddot{\theta} &= T_q/I_\alpha \\ \ddot{z} &= \frac{-U_z}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r/I_z\end{aligned}\quad (2.23)$$

**Referencia:** [34]

## MODELO DINÁMICO SIMPLIFICADO 7 (MDS7)

Este modelo dinámico, denotado como MDS7, se obtiene a partir de métodos como lo son las ecuaciones de Newton-Euler y las ecuaciones de Euler-Lagrange, distintas técnicas de control fueron empleadas, como: control basado en visión, control de actitud, comparaciones de controladores no lineales, control robusto, control predictivo, control difuso, estabilización en tiempo real y generación de trayectorias.

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{-U_z(\sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta)}{m} & \ddot{\phi} &= T_p/I_\alpha \\ \ddot{y} &= \frac{-U_z(-\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi)}{m} & \ddot{\theta} &= T_q/I_\alpha \\ \ddot{z} &= \frac{-U_z \cos \phi \cos \theta}{m} + g & \ddot{\psi} &= T_r/I_z\end{aligned}\quad (2.24)$$

**Referencias:** [1, 2, 4, 11, 16–18, 24, 33, 38, 40, 52, 53, 55, 64, 69, 76, 79, 82, 83, 85, 87, 91, 103, 105, 106, 119, 120]

En general el estudio bibliográfico revela que los modelos utilizados en la actualidad para tratar con CR's se pueden clasificar como se muestra en la figura 2.3.

En esta figura se observa que el modelo más completo consiste en las dinámicas de cuerpo rígido no lineales considerando el momento de precesión giroscópica (**NLRG**) más las fuerzas aerodinámicas de los rotores. Este modelo se considerará como el mejor en esta tesis y se realizarán comparaciones cualitativas y cuantitativas con los modelos restantes para establecer los efectos que tiene el simplificarlo. A partir del modelo más completo se obtiene un modelo que contempla las dinámicas de CR más las fuerzas aerodinámicas (**NLT**). En las siguientes secciones se investigará el efecto que tiene el despreciar el momento de precesión en los modos de operación de seguimiento de trayectorias.

A partir del modelo NLT se pueden obtener las siguientes representaciones:

- No lineal reestructurado (NLR): Este modelo no se encuentra reportado en la literatura revisada, pero se desarrollará más adelante. Este modelo es la representación en espacio de estados del modelo NLT en el marco de referencia ( $\mathcal{F}^i$ ). En el contexto de diseño de controladores es más sencillo trabajar con este modelo dinámico, por tener la estructura en espacio de estados.
- NLT con perturbaciones: Se consideran fuerzas y momentos adicionales tales como efecto tierra, « blade flapping », etc. En dichas referencias estas fuerzas se consideran sólo como entradas de perturbación aditivas, sin mostrar de manera específica la estructura de estas fuerzas y momentos. En estos casos, dichas variables son en realidad entradas de perturbación. En esta clasificación se incluyen todos los casos que cumplen con esta característica.
- Simplificaciones para diseño de controladores: Los modelos anteriores normal-

mente resultan muy complejos para poder aplicar las técnicas de control tradicionales. Esto provoca que exista una gran variedad de modelos debido a que se realizan simplificaciones específicas a las necesidades de cada estrategia de control. En secciones posteriores se llevará a cabo una validación de estos modelos para determinar si realmente son apropiados para diseñar controladores que sean capaces de controlar al modelo original (NLRG).

- Cuasi-Lineal (**CL**). A lo largo de la tesis se observó que los modelos reportados anteriormente no tienen las características necesarias para diseñar controladores simples y lineales que estabilicen al modelo más completo (NLRG). Debido a esto se decidió proponer un nuevo modelo simplificado que cumpla con este propósito. Este modelo se presenta en la sección 2.4.3.

## 2.3 MODELOS DINÁMICOS PROPUESTOS

Como se observará más adelante los modelos reportados en la literatura tienen algunas deficiencias, tales como fallas en algunas condiciones, complejidad, etc. Un problema en particular grave es que los diferentes modelos no se desarrollaron específicamente para las aplicaciones del CR y en muchos casos no se utilizan en el contexto apropiado como se hará evidente en la sección de comparación de modelos.

En vista de esto, se decidió desarrollar un modelo nuevo con el objetivo específico de diseñar controladores simples para el seguimiento de trayectorias en el CR, es importante notar que la búsqueda bibliográfica revela que NO existe en la actualidad un modelo que cumpla con estas especificaciones. Primero se realizará la representación en espacio de estados de las dinámicas del CR y después se procede al desarrollo del modelo propuesto en esta tesis.



### 2.3.1 DINÁMICAS TRASLACIONALES

La ecuación (2.1) se puede reescribir como  $m\frac{d}{dt}V_b = -m\omega_b \times V_b + F_b$ , con  $\frac{d}{dt}V_b = \frac{d}{dt}RV_e$  y  $\frac{d}{dt}RV_e = R\dot{V}_e + \frac{d}{dt}R \cdot V_e$ , esto es:

$$m\dot{V}_e = -mR^T(\omega_b \times V_b) - mR^T\frac{d}{dt}R \cdot V_e + R^TF_b \quad (2.25)$$

Por otro lado, la matriz de rotación  $R$  de un vector tridimensional alrededor del eje dado por el vector unitario  $\begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix}$  puede ser expresado como una función en el tiempo usando la forma exponencial  $R_\gamma(t) = e^{-\Gamma_\gamma\chi_\gamma(t)}$  donde  $\chi_\gamma$  es el ángulo de rotación y  $\Gamma_\gamma$  es la matriz antisimétrica:

$$\Gamma_\gamma = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & 0 & -\gamma_x \\ -\gamma_y & \gamma_x & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R &= \frac{d}{dt} \left( e^{-\phi(t)\Gamma_\phi} e^{-\theta(t)\Gamma_\theta} e^{-\psi(t)\Gamma_\psi} \right) \\ &= -(\dot{\phi}R_\phi\Gamma_\phi R_\theta R_\psi + \dot{\theta}R_\phi R_\theta\Gamma_\theta R_\psi + \dot{\psi}R_\phi R_\theta R_\psi\Gamma_\psi) \end{aligned}$$

Con  $\gamma_x = 1$ ,  $\gamma_y = 0$  y  $\gamma_z = 0$  para el ángulo de Euler de rotación  $\phi$ ,  $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = 1$  y  $\gamma_z = 0$  para el ángulo de Euler de rotación  $\theta$  y  $\gamma_x = 0$ ,  $\gamma_y = 0$  y  $\gamma_z = 1$  para el ángulo de Euler de rotación  $\psi$ , considerando lo anterior,  $R^T\frac{d}{dt}R$  equivale a:

$$R^T\frac{d}{dt}R = -\left( (R_\theta R_\psi)^{-1}\dot{\phi}\Gamma_\phi R_\theta R_\psi + R_\psi^{-1}\dot{\theta}\Gamma_\theta R_\psi + \dot{\psi}\Gamma_\psi \right) \quad (2.26)$$

Por otro lado:

$$R^T\omega_b = (R_\phi R_\theta R_\psi)^{-1}\dot{\Phi} + (R_\theta R_\psi)^{-1}\dot{\Theta} + R_\psi^{-1}\dot{\Psi}$$

Se observa que  $R_\psi^{-1}\dot{\Psi} = \dot{\Psi}$ ,  $R_\theta^{-1}\dot{\Theta} = \dot{\Theta}$  y  $R_\phi^{-1}\dot{\Phi} = \dot{\Phi}$ , entonces:

$$R^T\omega_b = (R_\theta R_\psi)^{-1}\dot{\Phi} + R_\psi^{-1}\dot{\Theta} + \dot{\Psi} \quad (2.27)$$

Tomando en cuenta la propiedad distributiva del producto cruz con matrices ortonormales, *i.e.*  $A(\vec{v} \times \vec{u}) = (A\vec{v}) \times (A\vec{u})$  resulta en:

$$R^T(\omega_b \times V_b) = (R^T\omega_b) \times (R^TV_b) = (R^T\omega_b) \times V_e \quad (2.28)$$

Finalmente, tomando en cuenta la propiedad distributiva del producto cruz con matrices ortonormales y contando con que para cualquier matriz ortonormal  $A$  lo siguiente se sostiene  $(A\vec{v}) \times \vec{u} = S_k(A\vec{v})\vec{u} = AS_k(\vec{v})A^T\vec{u}$ , donde  $S_k \left( \begin{bmatrix} \gamma_x & \gamma_y & \gamma_z \end{bmatrix}^T \right) = \Gamma_\gamma$  es la matriz antisimétrica, comparando las ecuaciones (2.26), (2.27) y (2.28) entonces:

$$R^T(\omega_b \times V_b) = -R^T \frac{d}{dt} R \cdot V_e$$

Considerando esto en la ecuación (2.25) la ecuación de dinámicas traslacionales se define como:

$$m\dot{V}_e = R^T F_b = F_e \quad (2.29)$$

Donde  $F_e$  es el vector de fuerzas en  $\mathcal{F}^i$ .

### 2.3.2 DINÁMICAS ROTACIONALES

La ecuación (2.2) puede ser reescrita como  $J \frac{d}{dt} \omega_b = M_b - \omega_b \times (J\omega_b)$  con:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \omega_b &= \frac{d}{dt} (\dot{\Phi} + R_\phi \dot{\Theta} + R_\phi R_\theta \dot{\Psi}) \\ &= (\ddot{\Phi} + R_\phi \ddot{\Theta} + R_\phi R_\theta \ddot{\Psi}) + \left( \frac{d}{dt} R_\phi \cdot \dot{\Theta} + \frac{d}{dt} R_\phi R_\theta \cdot \dot{\Psi} \right) \end{aligned}$$

Dado que  $(\ddot{\Phi} + R_\phi \ddot{\Theta} + R_\phi R_\theta \ddot{\Psi}) = R_\alpha \ddot{\Omega}$  (ecuación (2.5)) entonces la ecuación (2.2) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega} &= R_\alpha^{-1} J^{-1} M_b - R_\alpha^{-1} J^{-1} (\omega_b \times (J\omega_b)) \\ &\quad - R_\alpha^{-1} \left( \frac{d}{dt} R_\phi \cdot \dot{\Theta} + \frac{d}{dt} R_\phi R_\theta \cdot \dot{\Psi} \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Retomando la forma exponencial de las matrices de rotación  $R_\gamma(t) = e^{-\Gamma_\gamma \chi_\gamma(t)}$  entonces:

$$\frac{d}{dt} R_\phi \cdot \dot{\Theta} + \frac{d}{dt} R_\phi R_\theta \cdot \dot{\Psi} = - \left( R_\phi \Gamma_\phi \dot{\phi} \dot{\Theta} + R_\phi \Gamma_\phi \dot{\phi} R_\theta \dot{\Psi} + R_\phi R_\theta \Gamma_\theta \dot{\theta} \dot{\Psi} \right) \quad (2.31)$$

Esto nos lleva a:

$$R_\alpha^{-1} \left( \frac{d}{dt} R_\phi \cdot \dot{\Theta} + \frac{d}{dt} R_\phi R_\theta \cdot \dot{\Psi} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\theta}(\psi + \phi s_\theta)}{c_\theta} \\ \dot{\phi} \dot{\psi} c_\theta \\ -\frac{\dot{\theta}(\phi + \psi s_\theta)}{c_\theta} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Por otro lado, teniendo en mente que el CR normalmente es simétrico sobre dos planos, la matriz de inercia se define como  $J = \text{diag} \left( I_x \quad I_y \quad I_z \right)$  y regularmente  $I_x = I_y = I_\alpha$ . Finalmente, notando que  $(\omega_b \times J\omega_b) = (R_\alpha \dot{\Omega}) \times (JR_\alpha \dot{\Omega})$ , lleva a:

$$R_\alpha J^{-1} (\omega_b \times (J\omega_b)) = \begin{bmatrix} \frac{(I_z - I_\alpha) \dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}}{I_\alpha} (\dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} s_\phi c_\theta - \dot{\phi} s_\phi t_\theta + \dot{\psi} s_\phi s_\theta t_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) c_\phi}{I_\alpha} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) s_\phi}{I_\alpha c_\theta} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

### 2.3.3 FUERZAS EXTERNAS Y MOMENTOS

La principal fuerza aerodinámica en el cuerpo del CR es la resistencia aerodinámica, incluye el arrastre generado por la estructura (marco) que une los componentes del CR, los motores eléctricos y el sistema de guiado y control ubicado en el centro del marco del CR. El arrastre puede ser aproximado por  $D_x = C_x \frac{1}{2} A_c \rho \dot{x} |\dot{x}|$ ,  $D_y = C_y \frac{1}{2} A_c \rho \dot{y} |\dot{y}|$  y  $D_z = C_z \frac{1}{2} A_c \rho \dot{z} |\dot{z}|$  donde  $C_x$ ,  $C_y$  y  $C_z$  son coeficientes experimentales,  $\rho$  es la densidad del aire y  $A_c$  es el área del perfil del CR [12, 94, 108]. No obstante, dado que el CR opera a velocidades traslacionales bajas, las fuerzas aerodinámicas del cuerpo pueden ser despreciadas [97]. En realidad, la mayoría de los modelos dinámicos de CR's desprecian esta fuerza aerodinámica. Por lo tanto, para el CR las fuentes más significativas de fuerzas y momentos de fuerzas externos son las hélices y la gravedad. Las fuerzas inducidas por velocidades de viento exógenas (ráfagas) pueden ser consideradas como perturbaciones de entrada.

Las fuerzas generadas por las hélices y la gravedad en  $\mathcal{F}^b$  están dadas por:

$$F_b = R \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_z \end{bmatrix}^T \quad (2.34)$$

Donde  $U_z$  está definido como la suma de la fuerza de sustentación de todas las hélices. Por lo tanto las fuerzas generadas por las hélices y la gravedad en  $\mathcal{F}^i$  es:

$$F_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg \end{bmatrix}^T - R^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_z \end{bmatrix}^T \quad (2.35)$$

Considerando las ecuaciones (2.29) y (2.35), las dinámicas traslacionales pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -U_z (\cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \\ m\ddot{y} &= -U_z (\cos(\phi) \sin(\psi) \sin(\theta) - \sin(\phi) \cos(\psi)) \\ m\ddot{z} &= -U_z \cos(\phi) \cos(\theta) + mg \end{aligned} \quad (2.36)$$

Además, los momentos de fuerza externos en  $\mathcal{F}^i$  están dados por:

$$M_b = \begin{bmatrix} T_p & T_q & T_r \end{bmatrix}^T \quad (2.37)$$

Donde  $T_p$ ,  $T_q$  y  $T_r$  están definidos como el momento de fuerza resultante debido a las hélices en cada eje del CR. Considerando el vector (2.37) y las ecuaciones (2.30)-(2.33) las dinámicas rotacionales pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{T_p + T_q s_\phi t_\theta}{I_\alpha} + \frac{T_r c_\phi t_\theta}{I_z} \\ \frac{T_q c_\phi}{I_\alpha} - \frac{T_r s_\phi}{I_z} \\ \frac{I_\alpha T_r c_\phi + I_z T_q s_\phi}{I_\alpha I_z c_\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi} s_\theta)}{c_\theta} \\ \dot{\phi} \dot{\psi} c_\theta \\ -\frac{\dot{\theta}(\dot{\phi} + \dot{\psi} s_\theta)}{c_\theta} \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} \frac{(I_z - I_\alpha) \dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}}{I_\alpha} (\dot{\theta} c_\phi + \dot{\psi} s_\phi c_\theta - \dot{\phi} s_\phi t_\theta + \dot{\psi} s_\phi s_\theta t_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) c_\phi}{I_\alpha} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \\ -\frac{(I_z - I_\alpha) s_\phi}{I_\alpha c_\theta} (\dot{\psi} c_\phi c_\theta - s_\phi \dot{\theta}) (\dot{\phi} - \dot{\psi} s_\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Con  $s_x = \sin(x)$ ,  $c_x = \cos(x)$  y  $t_x = \tan(x)$ .

Las ecuaciones (2.36) y (2.38) completan el modelo dinámico en espacio de estados del CR, con un vector de estados,  $X = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$  y con todas las variables en  $\mathcal{F}^i$ . En la sección 2.1.4, las fuerzas y momentos de fuerzas de entrada fueron relacionados con los voltajes de los motores eléctricos.

## 2.4 MODELO DE DISEÑO CUASI-LINEAL

En esta sección se presenta el desarrollo del modelo de diseño CL. En este desarrollo se tiene como objetivo, obtener un modelo simple que permita diseñar controladores lineales con herramientas de análisis frecuencial clásico para seguimiento de trayectorias y que esté completamente expresado en un marco de referencia inercial ( $\mathcal{F}^i$ ).

Para lograr esto primero se obtuvo un modelo no lineal reestructurado en espacio de estados (§2.3.1,2.3.2) con el propósito de tener todas las variables en  $\mathcal{F}^i$ . Posteriormente se simplificará dicho modelo con base a un análisis de tipo entrada-salida para finalmente obtener un sistema representado en su mayor parte por funciones de transferencia.

### 2.4.1 PUNTOS DE EQUILIBRIO

Las ecuaciones (2.36) y (2.38), representan la dinámica del CR en  $\mathcal{F}^i$ , las cuales no pueden ser la mejor opción para el diseño de controladores debido a su complejidad. De hecho, muchos de los controladores basados en modelos propuestos en la literatura tienden a ser altamente no lineales debido a esta representación. No obstante, el proceso se mantiene normalmente a lo largo del punto de equilibrio definido por:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \psi_0 \end{bmatrix}^T \\ \dot{\Omega}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ V_{e0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{2.39}$$

Es decir, el CR se mantiene en vuelo estacionario, lo que implica que el cabeceo y alabeo se mantienen alrededor de cero grados y el rango de funcionamiento de estos ángulos es normalmente muy limitado. Esta condición de funcionamiento es obvia ya que ángulos de cabeceo y/o alabeo altos apuntarían las hélices hacia un lado, por

lo que es imposible mantener la altitud. Este hecho también limita la velocidad de traslación del vehículo, ya que la traslación se consigue a través de los ángulos de cabeceo y alabeo (inclinación lateral del CR). Además, los puntos de equilibrio que describen velocidades de traslación constantes producen las mismas aproximaciones lineales como (2.39), ya que las ecuaciones (2.36) y (2.38) no dependen de las velocidades de traslación (esto es por despreciar la resistencia aerodinámica del cuerpo del CR). Por lo tanto el punto de equilibrio (2.39) es, de hecho, una representación muy adecuada de la condición media de funcionamiento del CR.

Las entradas de equilibrio para el punto de equilibrio (2.39) pueden ser aclaradas considerando que  $0 = -U_{z0} \cos(\phi_0) \cos(\theta_0) + mg$  donde el subíndice « 0 » denota el valor de equilibrio de la variable. Las otras entradas de equilibrio se obtienen sustituyendo (2.39) y  $\ddot{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$  en (2.38). Por lo tanto, la entrada de equilibrio para (2.39) está dada por:

$$\begin{aligned} U_{z0} &= mg \\ T_{p0} = T_{q0} = T_{r0} &= 0 \end{aligned} \tag{2.40}$$

### 2.4.2 LINEALIZACIÓN Y FUNCIÓN DE ENTRADA NO LINEAL

A pesar de que es posible obtener directamente una aproximación lineal del sistema (2.36)-(2.38) alrededor del punto de equilibrio (2.39), ecuación (2.41), es posible llegar a una mayor simplificación mediante la introducción de un elemento no lineal a las entradas nominales.

En la sección 2.1.4, las señales de entrada virtuales  $\begin{bmatrix} U_z & T_p & T_q & T_r \end{bmatrix}^T$  fueron introducidas junto con su relación con los voltajes reales de los motores eléctricos. Es claro que el propósito de estas señales es simplificar el proceso de diseño del controlador mediante el establecimiento de entradas directas a las variables de estado,

esto permitirá una estrategia de control distribuido.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g \cos(\psi_0) & 0 & -g \sin(\psi_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g \sin(\psi_0) & 0 & g \cos(\psi_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\cos(\psi_0)}{I_\alpha} & \frac{-\sin(\psi_0)}{I_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sin(\psi_0)}{I_\alpha} & \frac{\cos(\psi_0)}{I_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_p \\ T_q \\ U_z \\ T_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Las señales de entrada  $\begin{bmatrix} U_z & T_p & T_q & T_r \end{bmatrix}^T$  fueron establecidas en  $\mathcal{F}^b$  y no están directamente relacionados con las variables de estado en  $\mathcal{F}^i$ . En el caso de la variable traslacional  $z$  (altitud), el canal de entrada-salida lógica se establece como:

$$c_z : U_z \rightarrow z \quad (2.42)$$

Recordando las ecuaciones (2.36), la entrada de control  $U_z$  puede ser propuesta como:

$$U_z(t) = \overline{mg} - \tilde{U}_z(t) \quad (2.43)$$

Donde  $\overline{mg} \approx mg$  y  $\tilde{U}_z(t)$  podrían calcularse con un controlador de retroalimentación apropiado, por ejemplo, la transformada de Laplace de  $\tilde{U}_z(t)$  se puede expresar como:

$$\tilde{U}_z(s) = C_z(s) e_z(s) \quad (2.44)$$

Donde  $C_z(s)$  es la función de transferencia del controlador lineal y  $e_z(s) = ref_z - z(s)$ .

Tomando en cuenta la dinámica de traslación  $x$  en (2.36) e introduciendo la entrada de control (2.43), da como resultado:

$$\ddot{x} = -\frac{\overline{mg} + \tilde{U}_z(t)}{m} (\cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \quad (2.45)$$

Si la señal  $\tilde{U}_z(t)$  se considera como un esfuerzo de control emparejado con  $z$  (2.44), para condiciones de operación cercanas a (2.39) se tiene que  $\tilde{U}_z(t) \approx 0$ , lo cual resulta en:

$$\ddot{x} \approx -\bar{g} (\cos(\phi) \cos(\psi) \sin(\theta) + \sin(\phi) \sin(\psi)) \quad (2.46)$$

Con  $\bar{g} \approx g$ .

Con el fin de analizar la dinámica de traslación de  $x$ , el sistema (2.36)-(2.38) puede ser reescrito en la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f_{x\theta}(X) + g_{x\theta}(X, T_p, T_q, T_r) \\ y_{x\theta} &= h_{x\theta}(X) = x \end{aligned} \quad (2.47)$$

Con un vector de estado  $X = [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T$ .

La expresión completa de  $f_{x\theta}(X)$  y  $g_{x\theta}(X, T_p, T_q, T_r)$  es un reordenamiento directo de (2.36) y (2.38). Sustituyendo (2.46) en (2.47), la dinámica de entrada-salida de  $x$  puede calcularse utilizando las derivadas de Lie como  $x^{IV} = L_f^4 h(x) + L_g L_f^3 h(x)$  lo que se traduce en:

$$x^{IV} = -\bar{g} (\sigma_x + \eta_x + u_x) \quad (2.48)$$

Con:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -c_\phi c_\psi s_\theta \dot{\phi}^2 + s_\phi s_\psi s_\theta \dot{\phi} \dot{\psi} - s_\phi c_\psi c_\theta \dot{\theta} \dot{\phi} + s_\phi s_\psi s_\theta \dot{\psi} \dot{\phi} \\ &\quad - c_\phi c_\psi s_\theta \dot{\psi}^2 - s_\phi c_\psi c_\phi \dot{\theta} \dot{\phi} - c_\phi c_\psi s_\theta \dot{\theta}^2 - s_\phi s_\psi \dot{\phi}^2 \\ &\quad - s_\phi s_\psi \dot{\psi}^2 - s_\phi c_\psi s_\theta \ddot{\phi} - c_\phi s_\psi s_\theta \ddot{\psi} + s_\phi c_\psi \ddot{\psi} \\ \eta_x &= -2c_\phi s_\psi c_\theta \dot{\theta} \dot{\psi} + 2c_\phi c_\psi \dot{\phi} \dot{\psi} \\ u_x &= c_\phi c_\theta c_\psi \ddot{\theta} + c_\phi s_\psi \ddot{\phi} \end{aligned}$$

Se puede notar que el sistema tiene un grado relativo de 4, por lo tanto existen 8 dinámicas internas, esto es obvio e indica que el proceso no puede ser completamente controlado solamente por el control de la variable  $x$ .



La discusión de la sección 2.4.1 destacó que el rango de operación del CR es aproximado de buena manera con  $\Omega = \begin{bmatrix} \delta_\phi & \delta_\theta & \psi \end{bmatrix}^T$  donde  $\delta_\phi$  y  $\delta_\theta$  son ángulos pequeños. Los elementos incluidos en  $\sigma_x$  tienen poco efecto sobre la dinámica de  $x$  si se toma en cuenta que  $\sin(\delta_\phi) \approx \sin(\delta_\theta) \approx 0$ . Por otra parte, los términos de  $\eta_x$  representan el acoplamiento dinámico entre los ángulos de Euler, sin embargo, este acoplamiento también es bajo si se considera que  $\dot{\theta}\dot{\psi} \approx \dot{\phi}\dot{\psi} \approx 0$ . Finalmente, los elementos de  $u_x$  representan los elementos de entrada. Estos elementos pueden ser aproximados por  $u_x = c_\psi\ddot{\theta} + s_\psi\ddot{\phi}$ , utilizando las ecuaciones (2.38) y  $\sin(\delta_\phi) \approx \sin(\delta_\theta) \approx 0$  como:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &\approx \frac{T_p}{I_\alpha} - \frac{I_z}{I_\alpha}\dot{\theta}\dot{\psi} + 2\dot{\theta}\dot{\psi} = \frac{T_p}{I_\alpha} \\ \ddot{\theta} &\approx \frac{T_q}{I_\alpha} + \dot{\psi}\dot{\phi} - 2\dot{\psi}\dot{\phi} = \frac{T_q}{I_\alpha} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Examinando las ecuaciones (2.48) y (2.49) se puede observar que la variable  $x$  puede ser actuada por  $T_q$  si  $\psi \approx 0^\circ$ , sin embargo, si  $\psi \approx 90^\circ$ , la variable  $x$  es ahora actuada por  $T_p$ . Por otra parte, la dinámica general de la variable  $x$  se puede aproximar con:

$$x^{IV} \approx -\bar{g} \left( c_\psi \frac{T_q}{I_\alpha} + s_\psi \frac{T_p}{I_\alpha} \right) \quad (2.50)$$

Es decir, un integrador cuádruple con una entrada no lineal. Un resultado similar se puede derivar para la variable  $y$ , por razones de brevedad, sólo se indica la derivada de Lie y la aproximación resultante, (2.51)-(2.52):

$$y^{IV} = -\bar{g} (\sigma_y + \eta_y + u_y) \quad (2.51)$$

Con:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -c_\phi s_\psi s_\theta \dot{\phi}^2 - s_\phi c_\psi s_\theta \dot{\phi}\dot{\psi} - s_\phi s_\psi c_\theta \dot{\theta}\dot{\phi} - s_\phi c_\psi s_\theta \dot{\psi}\dot{\phi} \\ &\quad - c_\phi s_\psi s_\theta \dot{\psi}^2 - s_\phi s_\psi c_\phi \dot{\theta}\dot{\phi} - c_\phi s_\psi s_\theta \dot{\theta}^2 + s_\phi c_\psi \dot{\phi}^2 \\ &\quad + s_\phi c_\psi \dot{\psi}^2 - s_\phi s_\psi s_\theta \ddot{\phi} - c_\phi c_\psi s_\theta \ddot{\psi} + s_\phi c_\psi \ddot{\psi} \\ \eta_y &= 2c_\phi c_\psi c_\theta \dot{\theta}\dot{\psi} + 2c_\phi s_\psi \dot{\phi}\dot{\psi} \\ u_y &= c_\phi c_\theta s_\psi \ddot{\theta} - c_\phi c_\psi \ddot{\phi} \\ y^{IV} &\approx -\bar{g} \left( s_\psi \frac{T_q}{I_\alpha} - c_\psi \frac{T_p}{I_\alpha} \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Este comportamiento de entrada-salida se puede entender fácilmente en términos físicos. Considere la disposición de la figura 2.1. Es fácil ver que cuando  $\psi = 0^\circ$ ,

entonces,  $\phi = \delta_\phi$  inducirá un movimiento positivo en  $y$  y  $\theta = \delta_\theta$  inducirá un movimiento negativo en  $x$ . Por otro lado, cuando  $\psi = 90^\circ$ , entonces,  $\phi = \delta_\phi$  inducirá un movimiento negativo en  $x$  y  $\theta = \delta_\theta$  inducirá un movimiento negativo en  $y$ . Para efectos de control, esto actúa efectivamente como un acoplamiento no lineal entre las entradas  $\delta_\phi$ - $\delta_\theta$  y las salidas  $x$ - $y$ .

Este análisis permite proponer la siguiente definición de entrada virtual:

$$\begin{bmatrix} T_p \\ T_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & -\sin(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} = R_U \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

La ecuación (2.53) se compone de una rotación con una compensación de signo adicional para la entrada  $U_x$ . Esta definición de entrada virtual establece canales de entrada  $\rightarrow$  salida definidos por  $U_x \rightarrow x$  y  $U_y \rightarrow y$  sin acoplamiento. Finalmente, considerando todo el procesamiento hasta los voltajes de los motores electricos actuales, las entradas virtuales estan dadas por (2.9) y (2.53).

### 2.4.3 MODELO CUASI-LINEAL

El objetivo de control típico del CR es el seguimiento de trayectorias. Por lo tanto, las variables más relevantes son los vectores de posición tridimensional. Además, la guiñada del vehículo también puede ser modificada libremente sin alterar la trayectoria. Se debe tener en cuenta que el punto de equilibrio (2.39) está definido para valores arbitrarios de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $\psi$ . Por otra parte, las variables de « actitud »  $\theta$  y  $\phi$ , así como las derivadas de estas variables deben mantenerse cerca de cero para tener equilibrio estático (esto incluye también operación a velocidades constantes), lo que permite definir un vector de salida adecuado para la aproximación lineal deseada. En particular, es posible calcular la aproximación lineal alrededor del punto de equilibrio (2.39) de las ecuaciones (2.36), (2.38), (2.43) y (2.53) tomando en cuenta

los siguientes vectores de estado de entrada y de salida:

$$\begin{aligned} U &= [U_x \ U_y \ \tilde{U}_z \ T_r]^T \\ Y &= [x \ y \ z \ \psi]^T \\ X &= [x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z} \ \phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi}]^T \end{aligned} \quad (2.54)$$

De una manera compacta, la matriz función de transferencia de tal sistema está dada por  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ :

$$G(s) = \text{diag} \left[ \frac{g}{I_\alpha s^4} \quad \frac{g}{I_\alpha s^4} \quad \frac{1}{ms^2} \quad \frac{1}{I_z s^2} \right] \quad (2.55)$$

Nótese que la aproximación lineal fue calculada sin ninguna suposición. Esta aproximación lineal coincide con las dinámicas de entrada-salida aclaradas mediante las derivadas de Lie (§2.4.2). Además, esto demuestra que con el uso de entradas definidas por las ecuaciones (2.9) y (2.53) las dinámicas están localmente desacopladas.

El subsistema lineal resultante posee algunas características muy interesantes:

- El vector de estado contiene 12 estados y la matriz de función de transferencia  $G(s)$  es de orden 12 (de la forma de Smith-MacMillan se puede demostrar que hay 12 polos **diferentes** en el origen [110]). Por lo tanto, ninguna dinámica interna fue cancelada por la introducción de las transformaciones de entrada (2.43) y (2.53).
- El sistema no tiene ceros de transmisión finitos. Por lo tanto, la estabilización de las salidas del sistema (2.55) garantiza la estabilización local del sistema. Es decir, no es **necesario** controlar directamente la actitud del CR.
- Las 4 salidas están totalmente desacopladas (§2.4.2).

El modelo aproximado resultante se define entonces por las ecuaciones (2.43), (2.53) y (2.55). Un diagrama de bloques de este sistema se muestra en la figura 2.4.

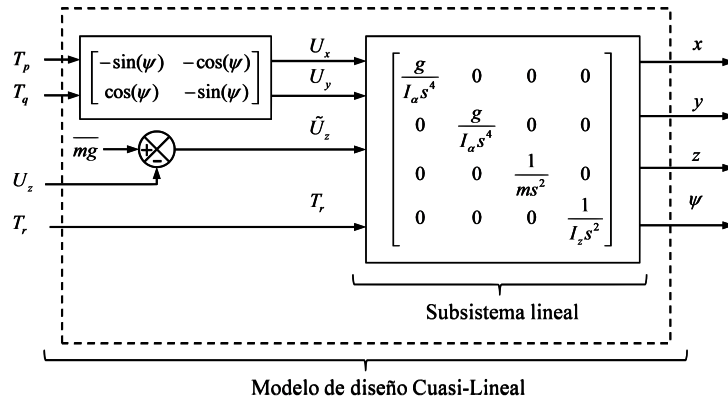


Figura 2.4: Diagrama de bloques del modelo de diseño cuasi-lineal.

## 2.5 COMPARACIÓN DE MODELOS

En esta sección se implementaron una serie de simulaciones con el fin de comparar los diferentes modelos. Primeramente, se muestra que el NLT y el NLR son equivalentes mientras que el CL es adecuado para el diseño del controlador lineal en una amplia gama de condiciones de funcionamiento y en el siguiente paso se verificará que los distintos modelos sirvan para diseñar controladores y así poder controlar el modelo más completo (NLRG).

Un conjunto típico de parámetros para un CR se resume en la tabla 2.1 [114].

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
$g$	$9.81 \text{ m/s}^2$	$I_z$	$8.8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$m$	$0.468 \text{ kg}$	$k_p$	$2.9 \times 10^{-5}$
$\ell$	$0.225 \text{ m}$	$k_m$	$1.1 \times 10^{-6}$
$I_a$	$4.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$V_{\text{máx}}$	$10 \text{ V}$
$I_r$	$3.4 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$	$k_v$	$100.5309 \text{ rad/s/V}$

Tabla 2.1: Parámetros para un CR

Para que la comparación pueda ser numéricamente adecuada es necesario diseñar un controlador estabilizador (capítulo 3) debido a que el sistema es inestable en

lazo abierto. Además, esto permite probar la validez del modelo CL como un modelo de diseño adecuado.

Para todas las simulaciones la trayectoria de referencia se definió como una trayectoria « Lemniscata de Geronon » en el plano  $x-y$ , definido por  $x^4 - k_x x^2 + k_y y^2 = 0$ , una oscilación periódica en altura ( $z$ ) y una oscilación periódica en guiñada ( $\psi$ ). La forma básica de esta trayectoria se muestra en la figura 2.5.

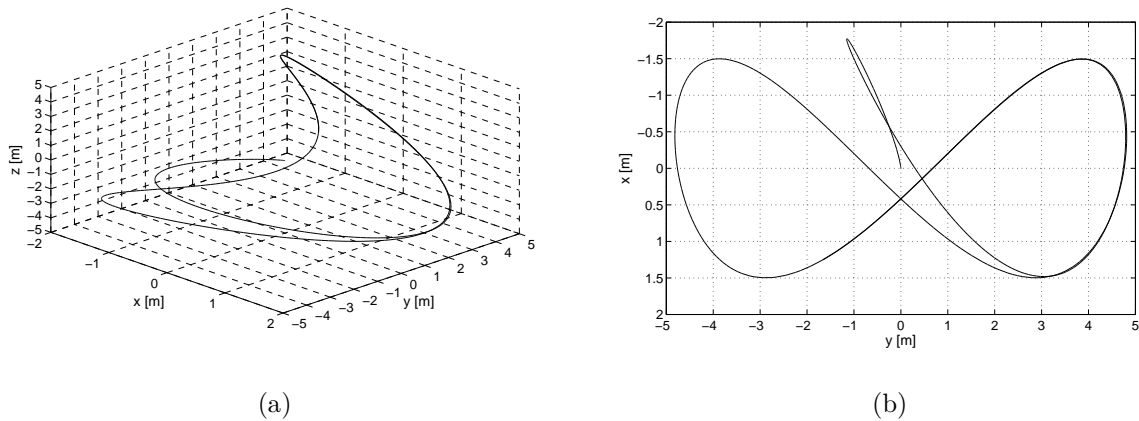


Figura 2.5: Trayectoria de referencia para el sistema de control del CR.

Una primera comparación se muestra en la figura 2.6. Esta comparación fue dispuesta utilizando el modelo NLT en lazo cerrado. Las entradas resultantes fueron luego utilizadas como entradas para el modelo CL. En esta configuración, el modelo CL funciona en lazo abierto, por lo tanto, la comparación es válida sólo por un breve tiempo. Se sabe que no es posible estabilizar un proceso inestable en lazo abierto. No obstante, está claro que la principal dinámica del modelo no lineal tradicional es capturada por el modelo simplificado CL.

Con el fin de ampliar el rango de tiempo de la comparación, más simulaciones se llevaron a cabo utilizando el controlador con ambos modelos. Es decir, todos los modelos fueron operados en lazo cerrado con el mismo controlador y referencia.

Una serie de pasos fueron llevados a cabo con el fin de validar los modelos. La primera etapa consiste en una comparación directa de las variables de salida de

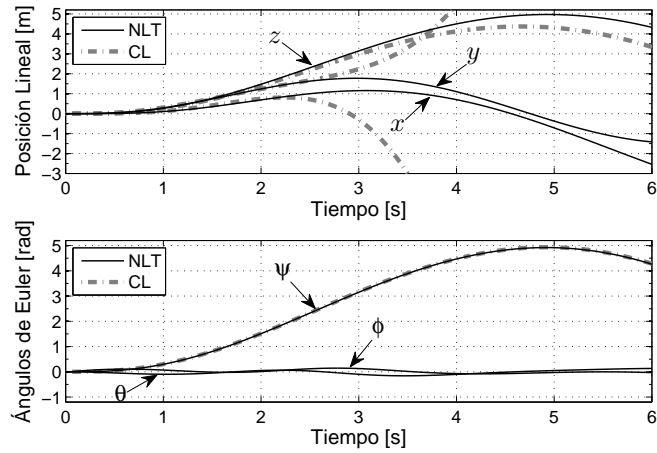


Figura 2.6: Comparación de lazo abierto de los modelos NLT y CL.

los modelos NLT, NLR y CL. La figura 2.7 muestra que todos los modelos son muy similares, de hecho, no es posible discernir ninguna diferencia directamente. Además, este paso permite establecer el rango de operación para las variables internas  $\phi$  y  $\theta$ . Este rango es importante ya que la aproximación CL se derivó de acuerdo a  $\phi \approx 0$  y  $\theta \approx 0$ . Por lo tanto, es relevante para dilucidar la extensión del rango en el que el modelo CL sigue siendo exacto. Este rango se muestra en la figura 2.7.

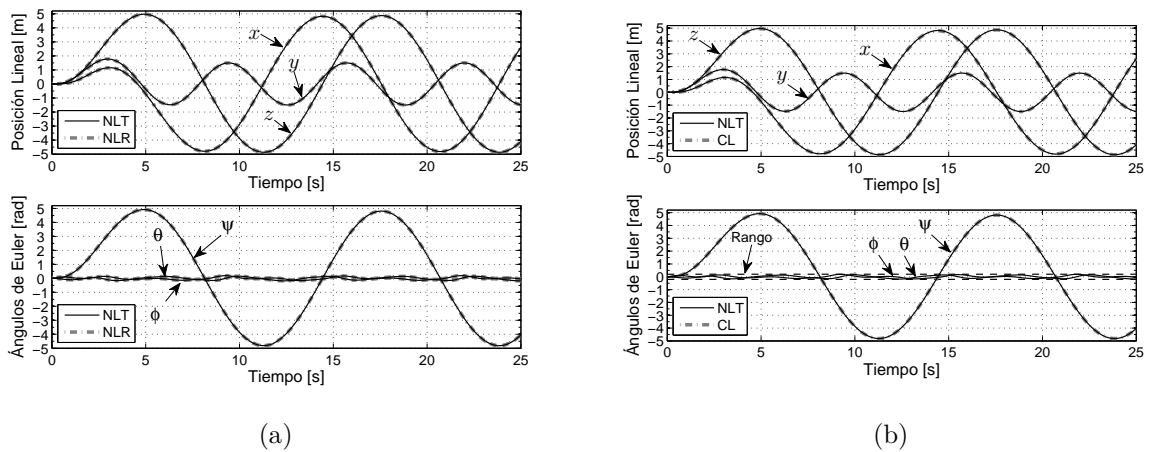


Figura 2.7: Comparación de las variables de salida de varios modelos.

Con el fin de aclarar aún más las diferencias entre las variables, se calculó el error entre los modelos y es presentado en la figura 6. En todos los casos se supone

que el modelo NLT es el más exacto. A partir de esta figura es evidente que el nivel de error del NLR es debido a la resolución numérica del software. Por otra parte, el error de la aproximación CL es debido a la aproximación lineal, sin embargo, es muy bajo.

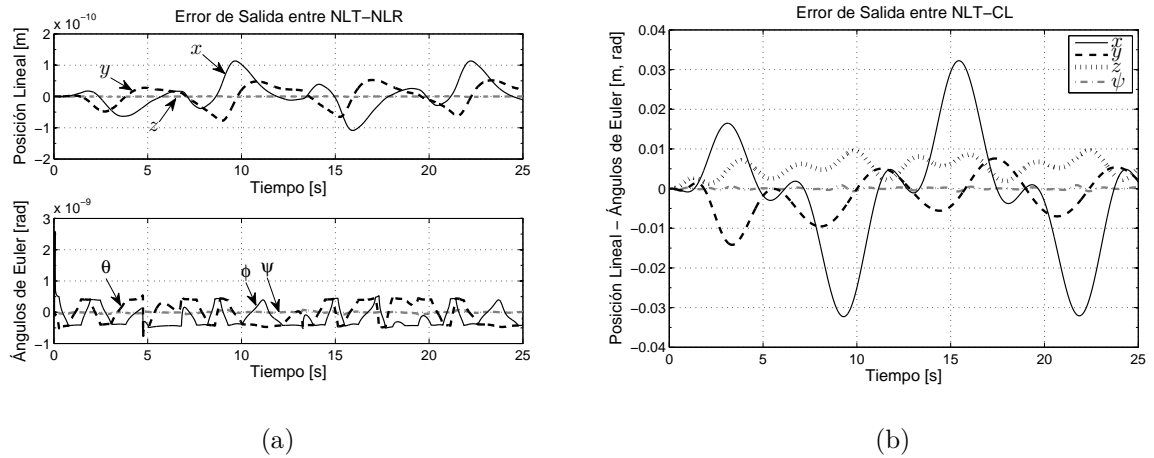


Figura 2.8: Error de salida del modelo.

La validación de este rango de operación se ha completado mediante la comparación de las entradas de los modelos. Es decir, el esfuerzo de control del controlador. Esta comparación se requiere con el fin de reducir el efecto del controlador de lazo cerrado sobre la comparación. La idea detrás de esto es: « si las salidas de los dos sistemas son las mismas y las entradas son las mismas, entonces, los sistemas son equivalentes dentro del rango de funcionamiento ». La figura 2.8 muestra el error de las entradas del modelo al considerar los datos del modelo tradicional no lineal como referencia. Una vez más los errores de la señal de entrada para el modelo NLR son debido a la precisión de la simulación numérica. Esto confirma que el modelo NLR y el modelo NLT son de hecho equivalentes. El bajo nivel de error de entrada-salida del modelo CL permite afirmar que el modelo CL representa con precisión el proceso a lo largo del rango de los ángulos de actitud que se muestran en la figura 2.7.

Una validación adicional de la eficacia de usar el modelo CL para fines de diseño del controlador es el error de seguimiento resultante. Este error se obtiene utilizando el modelo NLT con el controlador descrito en el capítulo 3. El error de seguimiento

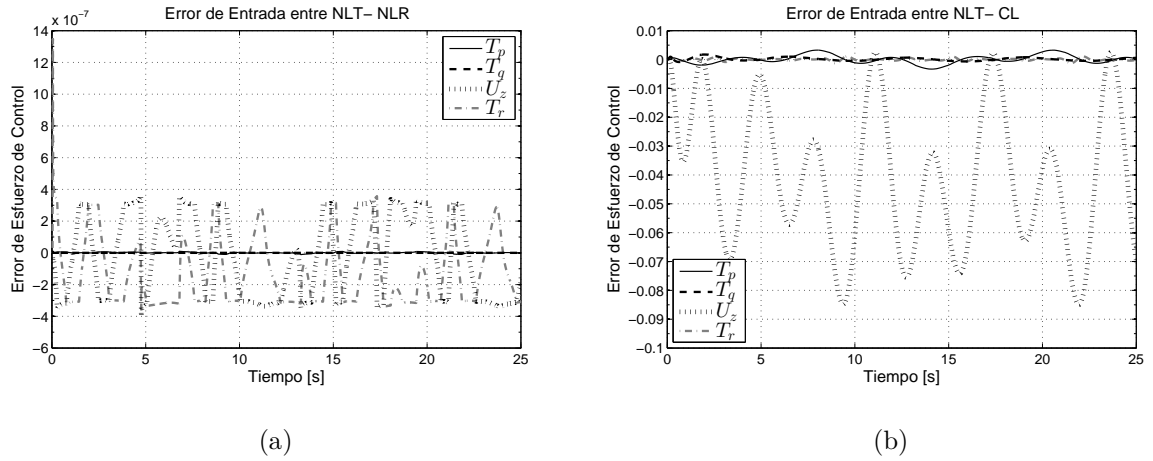


Figura 2.9: Error de entrada del modelo.

es presentado en la figura 2.10 y muestra que el controlador diseñado, utilizando sólo el modelo CL, logra un buen rendimiento de seguimiento de trayectorias incluso con el modelo NLT, además se muestra el error de seguimiento del modelo CL.

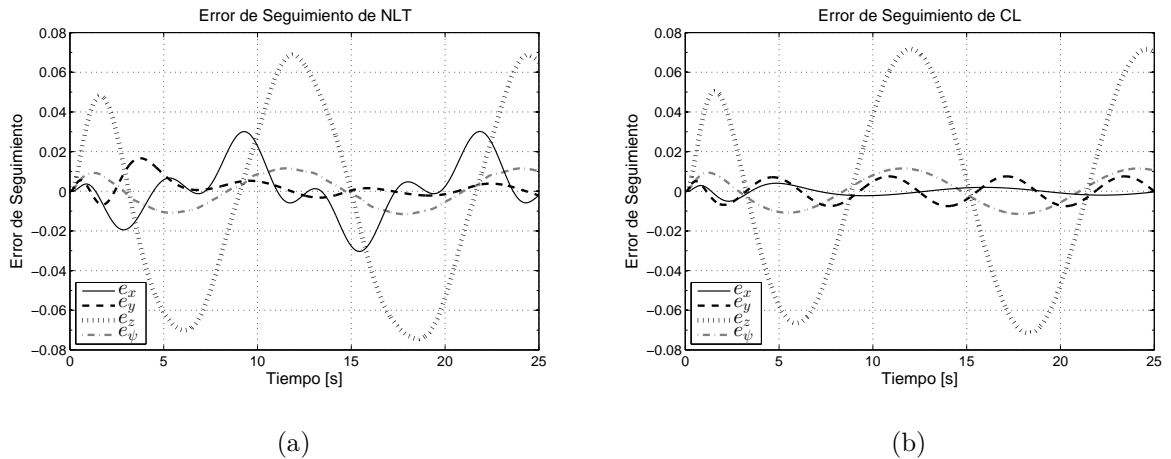


Figura 2.10: Error de seguimiento.

Es posible dilucidar todo el rango de validez para el modelo CL repitiendo el procedimiento de simulaciones descrito anteriormente para diferentes rangos de funcionamiento. Los resultados se resumen en la tabla C.1. En esta tabla se presenta el intervalo de funcionamiento para todas las variables y las velocidades de trayectoria a lo largo de su correspondiente « error promedio del modelo (EPM) », se define



por  $\sum_{i=1}^n \frac{\|e(i)\|}{n}$ , donde  $e(i)$  es el error de la  $i$ -ésima muestra y  $n$  es el número total de muestras. Tenga en cuenta que el EPM en la salida debe ser evaluado en relación con los márgenes de funcionamiento de las variables de salida correspondientes.

De la tabla C.1 es posible notar que el modelo CL es bastante exacto incluso hasta en ángulos de alabeo y cabeceo cerca de  $\pi/2$ . De hecho, es bien sabido que el enfoque de modelado de los ángulos de Euler sufre de la singularidad de « gimbal-lock » que se produce cuando  $\theta = \pi/2$ . Por lo tanto, se puede decir que la aproximación CL es válida en todo el rango del modelo no lineal. Este intervalo es suficiente para la mayoría de las maniobras no acrobáticas incluso a altas velocidades y seguimiento de trayectorias de alto desempeño. La variable con el mayor nivel de error de modelado es la entrada  $U_z$ , que está relacionada con el lazo de control de altitud. Por lo tanto, se puede decir que para los propósitos de diseño de control el modelo CL puede ser utilizado con un mayor nivel de especificaciones de rechazo a perturbaciones para el eje  $z$ .

En la figura B.2 se muestran las mismas simulaciones descritas anteriormente pero la amplitud de referencia se aumentó para excitar aún más al proceso y así lograr que la actitud del CR se desvíe más del punto de equilibrio (2.39), el error en el modelo CL aumentó pero en proporción con la amplitud de referencia, el modelo CL aproxima correctamente al modelo NLT. Además se muestran las simulaciones entre los modelos NLT y NLR y se observa que son equivalentes.

Por último, se realizó una evaluación de los voltajes necesarios para los rangos de operación definidos en la tabla C.1. Esta evaluación es importante ya que con ella es posible definir un rango de operación realista. Es decir, un rango en el que CR logre operar en aplicaciones reales. La figura B.22 muestra los voltajes necesarios para la operación de los motores, calculados según 2.9, para los experimentos de la tabla C.1. Está claro que hasta el caso del rango D, el CR estaría operando dentro de sus capacidades físicas máximas, restringido por sus actuadores.

### 2.5.1 COMPARACIÓN EN DISTINTAS CONDICIONES DE SIMULACIÓN

Debido a que la validez del proceso de comparación propuesto depende de las condiciones de la simulación, en particular del rango de movimiento de los ángulos de alabeo, cabeceo y guiñada se realizan simulaciones en diferentes rangos de operación. A lo largo del estudio se detectó que el rango del ángulo de guiñada era especialmente importante para la estabilidad de muchos modelos, debido a esto se propuso hacer pruebas con diferentes niveles de guiñada (cero, bajo y alto) y en cada caso, diferentes rangos de amplitud para el resto de las variables. La combinación de diversos modelos descritos en esta tesis con los diferentes rangos de operación y los diferentes niveles de guiñada resultan en una gran cantidad de simulaciones, de las cuales se realizaron observaciones importantes para entender el comportamiento del CR.

Siguiendo la metodología descrita en la sección §2.5 se realizaron simulaciones comparando los diferentes modelos en diferentes condiciones. A continuación se enumeran los distintos resultados.

#### GUIÑADA ALTA

En estas condiciones de simulación los modelos MSD1 al MSD5 se inestabilizaron debido a que no poseían un término de guiñada en su estructura, en tanto los modelos MDS6 y MDS7 sí se estabilizaron aunque el MDS6 careció de un buen rendimiento.

- **CL** y **NLR**: El modelo CL, en esta condición de operación, ya fue analizado en la sección anterior.
- **MDS1**: Se inestabilizó este modelo, figura B.1.
- **MDS2**: Se inestabilizó este modelo, figura B.1.
- **MDS3**: Se inestabilizó este modelo, figura B.1.
- **MDS4**: Se inestabilizó este modelo, figura B.1.

- **MDS5**: Se inestabilizó este modelo, figura B.1.
- **MDS6**: figura B.7
- **MDS7**: figura B.8
- **NLRG**: figura B.25

#### GUIÑADA BAJA

En estas condiciones de simulación todos los modelos simplificados se estabilizaron, solamente el MSD5 careció de buen rendimiento ya que la variable  $\theta$  no convergía ( $\theta$  se mantenía rotando) y las demás variables sí, provocando un mal seguimiento.

- **CL**: figura B.3, tabla C.2
- **NLR**: figura B.4
- **MDS1**: figura B.9, tabla C.4
- **MDS2**: figura B.10, tabla C.6
- **MDS3**: figura B.11, tabla C.8
- **MDS4**: figura B.12, tabla C.10
- **MDS5**: figura B.13, tabla C.12
- **MDS6**: figura B.14, tabla C.15
- **MDS7**: figura B.15, tabla C.18
- **NLRG**: figura B.26, tabla C.21

## GUIÑADA CERO

En estas condiciones de simulación todos los modelos simplificados se estabilizaron, solamente el MSD5 careció de buen rendimiento ya que la variable  $\theta$  no convergía ( $\theta$  se mantenía rotando) y las demás variables sí, provocando un mal seguimiento.

- **CL**: figura B.5, tabla C.3
- **NLR**: figura B.6
- **MDS1**: figura B.16, tabla C.5
- **MDS2**: figura B.17, tabla C.7
- **MDS3**: figura B.18, tabla C.9
- **MDS4**: figura B.19, tabla C.11
- **MDS5**: figura B.13, tabla C.13
- **MDS6**: figura B.20, tabla C.15
- **MDS7**: figura B.21, tabla C.19
- **NLRG**: figura B.27, tabla C.22

## 2.6 CONCLUSIONES

En este capítulo se realizó un estudio a profundidad del modelado de CR. Es importante recordar que en la presente tesis se define como hipótesis que un modelo simplificado puede ser utilizado para diseñar controladores simples que controlen las dinámicas aparentemente complejas (al menos en su forma matemática) de un CR. En este sentido, la comparación realizada muestra que esta hipótesis no siempre es

cierta, es decir, no cualquier modelo simplificado cumple con esta característica. Debido a esto, se puede concluir que el proceso de modelado es crítico para el desarrollo de sistemas de control efectivos, ya que de esta etapa dependen: la complejidad del controlador resultante y su rendimiento cuando se consideran las dinámicas completas.

En lo particular, el desarrollo del modelo CL fue enfocado hacia el diseño de controladores y se cumplió el fin de este modelo ya que los controladores diseñados funcionaron para una gran variedad de modelos dinámicos. Se observó que los modelos dinámicos simplificados funcionan de muy buena manera siempre y cuando se mantenga la guiñada en amplitudes bajas. Esto quedó demostrado al ver que los modelos MDS1-MDS5 se inestabilizaron mientras tanto el MDS6, MDS7 y CL respondieron de buena manera, otro factor importante fueron los distintos rangos usados durante las simulaciones las cuales permitieron observar los límites de funcionamiento de los modelos. Lo más notable fue que, a pesar de la gran diferencia entre la complejidad del modelo MDS7 y el CL, ambos tuvieron un rendimiento muy similar.

## CAPÍTULO 3

# CONTROL

---

En esta sección se diseñan controladores para el CR con los siguientes objetivos:

- Controladores simples basados en análisis frecuencial: Lineales, grado bajo, de fase mínima y estables.
- Que sirvan para seguimiento de trayectorias.

### 3.1 DISEÑO DE CONTROLADORES

Evaluando los parámetros de la tabla 2.1 en la matriz de funciones de transferencia (2.55) obtenemos:

$$G(s) = \text{diag} \left[ \frac{2002}{s^4} \quad \frac{2002}{s^4} \quad \frac{2.137}{s^2} \quad \frac{113.6}{s^2} \right]$$

Los diagramas de Bode de cada función de transferencia en lazo abierto son mostrados en la figuras 3.1, 3.2 y 3.3

Para definir el ancho de banda de lazo cerrado se decidió que este debería ser 3 veces el ancho de banda del lazo abierto. El razonamiento detrás de esto es que el controlador resultante tenga una ganancia mayor a 0dB en todo el rango de frecuencias a las que el sistema responde en lazo abierto. Aunque esta consideración es heurística, mostró buenos resultados que se pueden corroborar con el análisis de rechazo a perturbaciones de la siguiente sección.

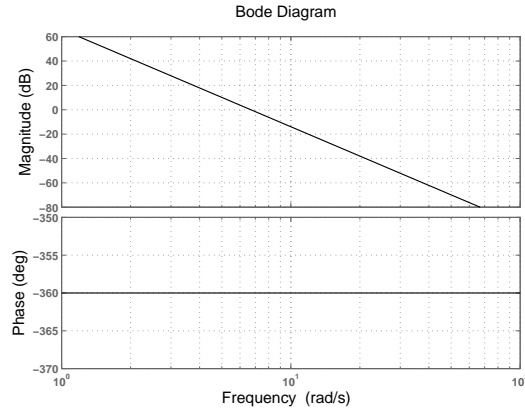


Figura 3.1:  $G(s)_{xy} = 2002/s^4$ , Ancho de Banda=6.69 rad/s.

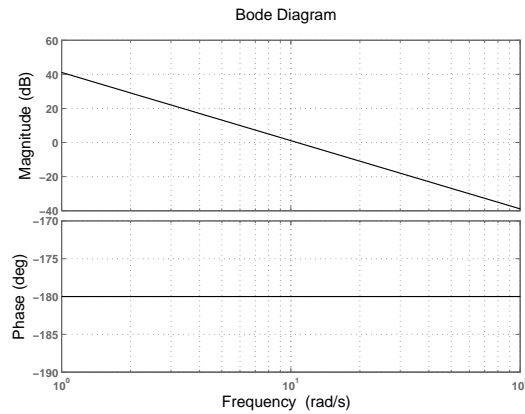


Figura 3.2:  $G(s)_{\psi} = 2.137/s^2$ , Ancho de Banda=1.46 rad/s.

Por otro lado, dado que la matriz función de transferencia (2.55) es diagonal, en el punto de operación (2.39) no existe acoplamiento. Debido a esto, se diseñarán controladores descentralizados con la siguiente configuración de canales:

$$\begin{aligned}
 U_x &\rightarrow x \\
 U_y &\rightarrow y \\
 \tilde{U}_z &\rightarrow z \\
 T_r &\rightarrow \psi
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Para la función de transferencia  $G(s)_{xy}$  un compensador de adelanto debe ser propuesto con el fin de ajustar la fase en un valor de 3 veces el ancho de banda (20.07 rad/s). En primer lugar el margen de fase deseado es  $60^\circ$ , y la fase de la función de

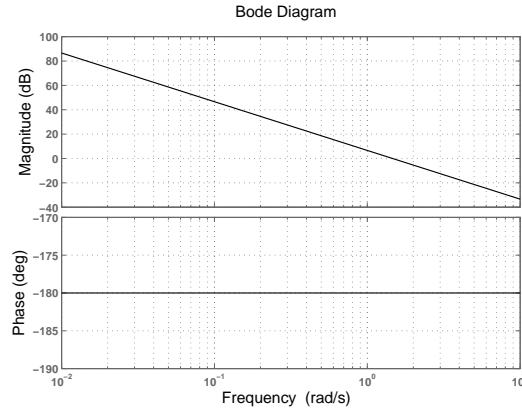


Figura 3.3:  $G(s)_z = 113.6/s^2$ , Ancho de Banda=10.7 rad/s.

transferencia en lazo abierto es de  $-360^\circ$ , la función de transferencia requiere 3 ceros (cada cero aumenta  $90^\circ$  a la fase de la función de transferencia) y 3 polos (haciendo el compensador propio). El compensador propuesto es:

$$C_{xy} = \frac{62882 (s + 2.007) (s + 1.8) (s + 1.9)}{(s + 200.7) (s + 180) (s + 190)} \quad (3.2)$$

Para el caso de la función de transferencia  $G(s)_z$  se propone un compensador de adelanto con el fin de ajustar la fase en un valor 3 veces el ancho de banda (4.38 rad/s), el compensador propuesto ajusta la fase en un valor de 12.2 rad/s, este valor es debido a que se observó en el análisis realizado a través de simulaciones digitales, la dinámica en  $z$  requería más ancho de banda en lazo cerrado para poder mantener su ganancia mayor a 0dB en el rango en el que responde el lazo abierto de  $G(s)_z$ .

$$C_z = \frac{2.476 (s + 1.3)}{(s + 130)} \quad (3.3)$$

Para el caso de la función de transferencia  $G(s)_\psi$  se propone un compensador de adelanto con el fin de ajustar la fase en un valor 3 veces el ancho de banda (32.1 rad/s), el compensador propuesto es:

$$C_\psi = \frac{48.4447 (s + 3.21)}{(s + 321)} \quad (3.4)$$

Enseguida, se muestra el diagrama de Bode en lazo abierto de  $C_{xy}G(s)_{xy}$  en la figura 3.4, el margen de ganancia equivale a 17.8 dB y el margen de fase equivale a



55.7° a 20.1 rad/s, También se puede observar que la ganancia en la región de alta frecuencia se atenúa para evitar los efectos del ruido, así como una pendiente de -20 dB/década para asegurar un margen de fase adecuado.

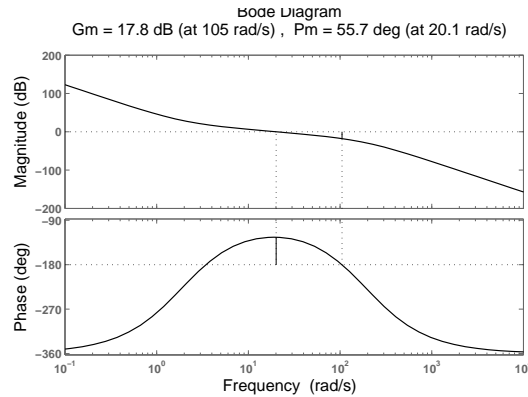


Figura 3.4: Diagrama de Bode en lazo abierto de  $C_{xy}G(s)_{xy}$

En la figura 3.5, se muestra el diagrama de Nyquist en lazo abierto de  $C_{xy}G(s)_{xy}$  y la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado de  $C_{xy}G(s)_{xy}$ , se puede observar un sobretiro de 24 % y un tiempo de establecimiento de 0,502 segundos.

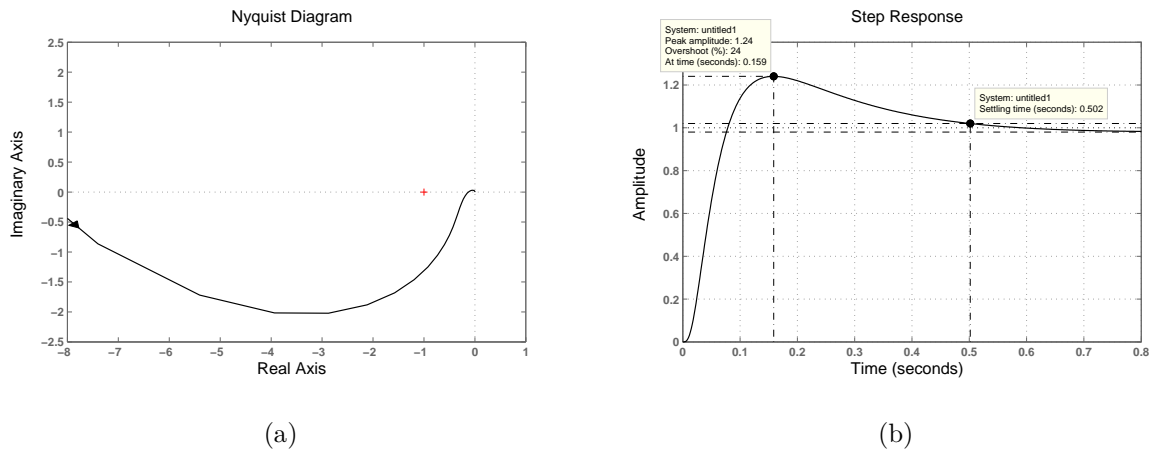


Figura 3.5: Diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado de  $G(s)_{xy}$ .

Para el caso de  $C_zG(s)_z$  se muestra el diagrama de Bode en lazo abierto, en la figura 3.6, el margen de ganancia equivale a  $\infty$  dB y el margen de fase equivale a 78.6° a 12.2 rad/s. También se puede observar que la ganancia en la región de alta

frecuencia se atenúa para evitar los efectos del ruido, así como una pendiente de  $-20$  dB/década para asegurar un margen de fase adecuado.

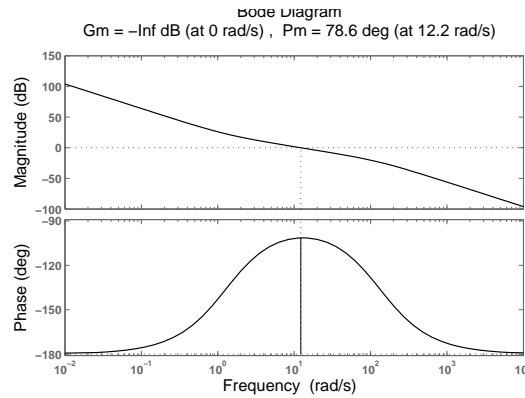


Figura 3.6: Diagrama de Bode en lazo abierto de  $C_z G(s)_z$

En la figura 3.7, se muestra el diagrama de Nyquist en lazo abierto y la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado de  $C_z G(s)_z$ , se puede observar un sobretiro de 7.63 % y un tiempo de establecimiento de 1.39 segundos.

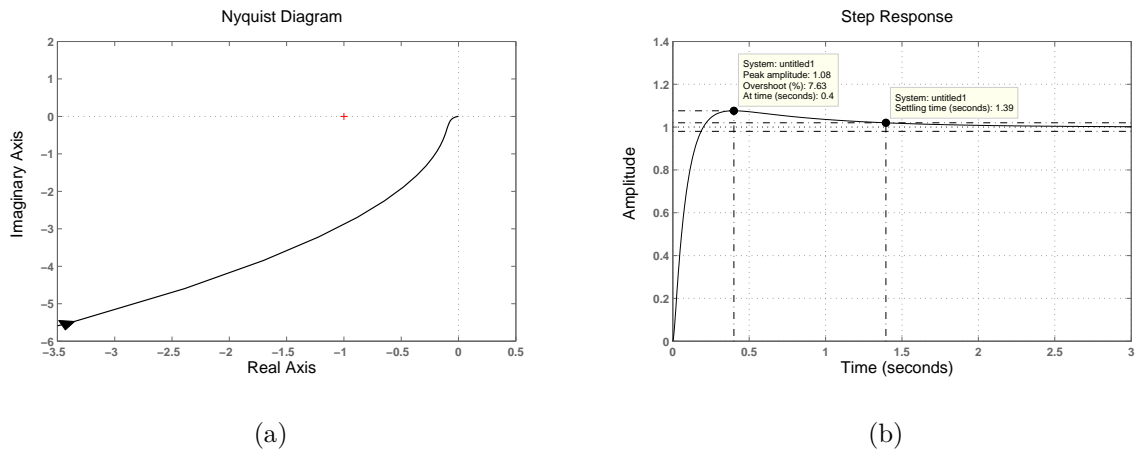


Figura 3.7: Diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado de  $G(s)_z = 113.6/s^2$ .

Finalmente para el caso de  $C_\psi G(s)_\psi$  se muestra el diagrama de Bode en lazo abierto, en la figura 3.8, el margen de ganancia equivale a  $\infty$  dB y el margen de fase equivale a  $78.6^\circ$  a  $32.2$  rad/s. También se puede observar que la ganancia en la

región de alta frecuencia se atenúa para evitar los efectos del ruido, así como una pendiente de -20 dB/década para asegurar un margen de fase adecuado.

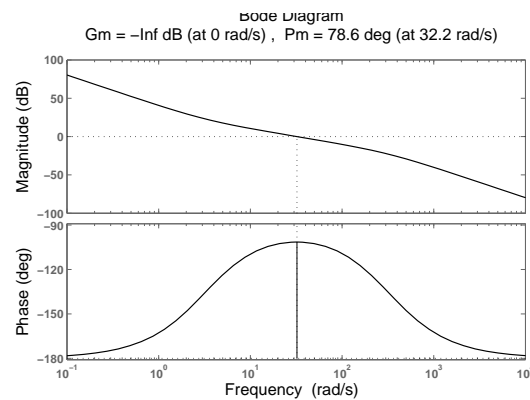


Figura 3.8: Diagrama de Bode en lazo abierto de  $C_\psi G(s)_\psi$

En la figura 3.9, se muestra el diagrama de Nyquist en lazo abierto y la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado de  $C_\psi G(s)_\psi$ , se puede observar un sobretiro de 7.25 % y un tiempo de establecimiento de 0.543 segundos.

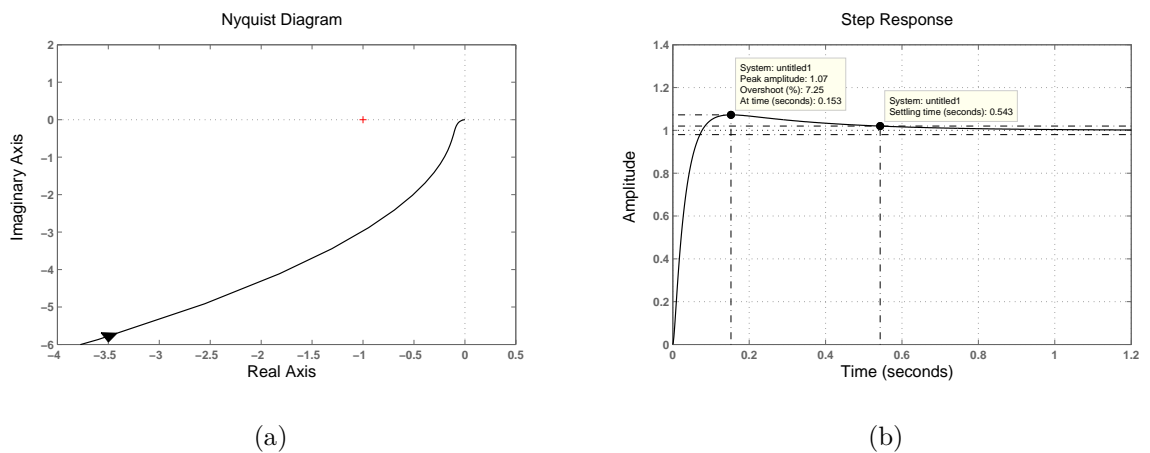


Figura 3.9: Diagrama de Nyquist y respuesta al escalón en lazo cerrado de  $G(s)_\psi$ .

## 3.2 RECHAZO A PERTURBACIONES

En esta sección se analizan las características de rechazo a perturbaciones. En particular se utilizan las herramientas clásicas de sensibilidad y sensibilidad complementaria. Cualquier planta física tiene una « capacidad » limitada, es decir, solamente puede absorber entradas de magnitud limitada, la estructura de retroalimentación negativa de un grado de libertad se muestra en la figura 3.10, en donde  $\delta_1$  es la perturbación (ruido del proceso) y  $\delta_2$  es el ruido en la medición.

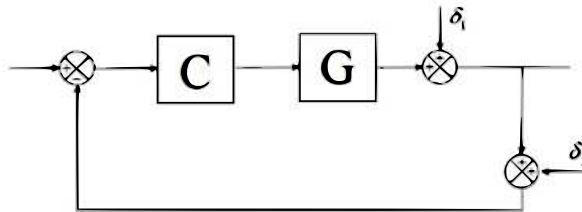


Figura 3.10: Estructura de lazo cerrado.

Las funciones de sensibilidad ( $S$ ) y sensibilidad complementaria ( $T$ ) se muestran en la ecuación (3.5)

$$\begin{aligned} T &= \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{y}{\delta_2} \\ S &= \frac{1}{1+C(s)G(s)} = \frac{e}{\delta_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

La sensibilidad y sensibilidad complementaria de los canales  $x - y$  se muestran en la figura 3.11, se puede observar que el sistema rechaza perturbaciones de la salida hasta la frecuencia de 70.6 rad/s, que resulta ser mayor que el ancho de banda de lazo abierto. Esto es algo importante para obtener un sistema capaz de rechazar perturbaciones no modeladas ya que se espera que dichas perturbaciones exciten al sistema dentro de su ancho de banda original. De lo contrario dichas perturbaciones deberían ser tomadas en cuenta en el proceso de modelado.

Por otro lado, en lo que respecta a la sensibilidad complementaria se puede observar que se requerirían sensores con un bajo nivel de ruido para frecuencias

menores a 3.83 rad/s.

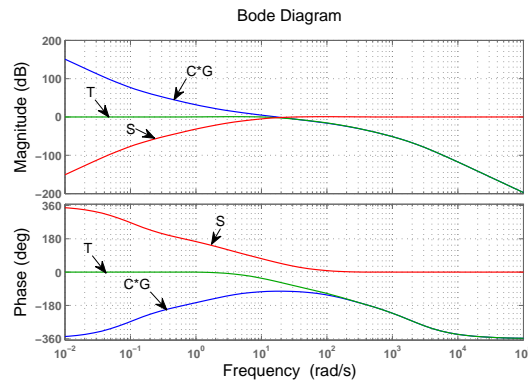


Figura 3.11: Sensibilidad y sensibilidad complementaria,  $G(s)_{xy}$

Para el caso del canal  $z$  (figura 3.12) y  $\psi$  (figura 3.13) se observa que el sistema rechaza perturbaciones de la salida hasta la frecuencia 50.9 rad/s y 130 rad/s respectivamente. Para la sensibilidad complementaria se observa que se requieren sensores con un bajo nivel de ruido para frecuencia menores a 2.84 rad/s y 6.99 rad/s respectivamente.

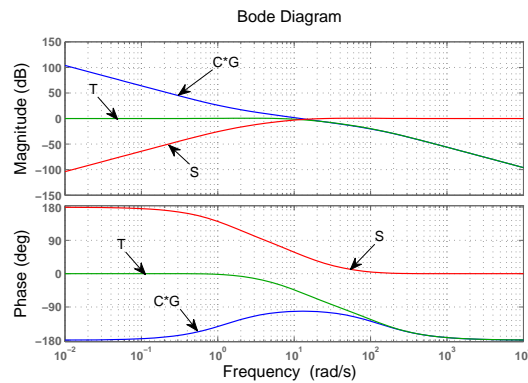


Figura 3.12: Sensibilidad y sensibilidad complementaria,  $G(s)_z$

Es importante notar que el utilizar herramientas de diseño de control clásicas permite definir especificaciones técnicas de los sensores y de las perturbaciones al CR. Así mismo, permite utilizar especificaciones como el ancho de banda que es muy utilizado en aplicaciones aeronáuticas. Cabe mencionar que en las referencias encontradas en la literatura no se hace mención a estas especificaciones.

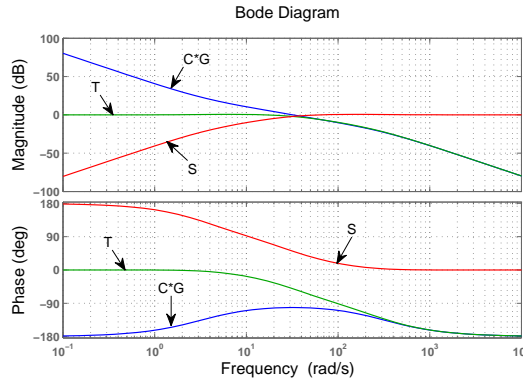


Figura 3.13: Sensibilidad y sensibilidad complementaria,  $G(s)_\psi$

### 3.3 DISEÑO CON INCERTIDUMBRE

Una primera aproximación a un estudio para la incertidumbre del CR consiste en considerar un cambio en la estructura de la planta, estas condiciones se pueden dar cuando el CR opera a mayores velocidades de desplazamiento traslacional o se ve sujeto a ráfagas externas. En este caso se consideran dos funciones de transferencia que representan dinámicas no modeladas de alta frecuencia, las funciones son:

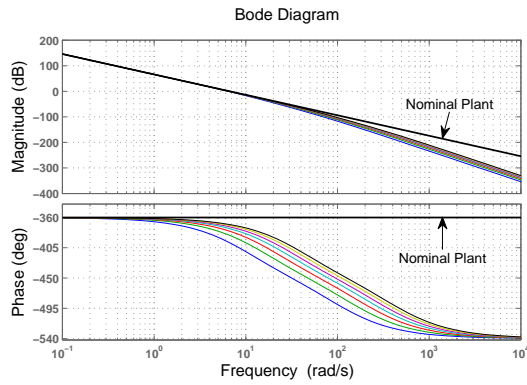
$$\begin{aligned} g(s)_p &= \frac{1}{s+i} \\ g(s)_{p1} &= \frac{1}{s+10i} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $i$  varía en un rango de 10 a 40 en pasos de 5.

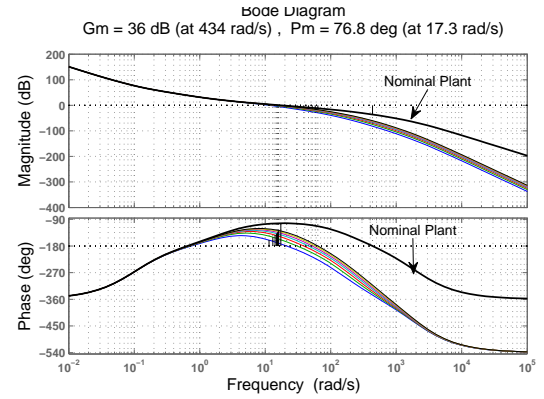
El diagrama de bode en lazo abierto de  $g(s)_{xy}g(s)_p g(s)_{p1}$  se muestra en la figura 3.14(a) en el cual se pueden apreciar cambios de ganancia después del ancho de banda y a altas frecuencias.

Posteriormente en las figuras 3.14(b) y 3.14(c) se muestra el diagrama de bode en lazo abierto y la respuesta al escalón de  $g(s)_{xy}g(s)_p g(s)_{p1} C_{xy}$  en el cual se aprecia que las respuestas en el tiempo son diferentes con respecto al sobretiro y relativamente similares en el tiempo de establecimiento.

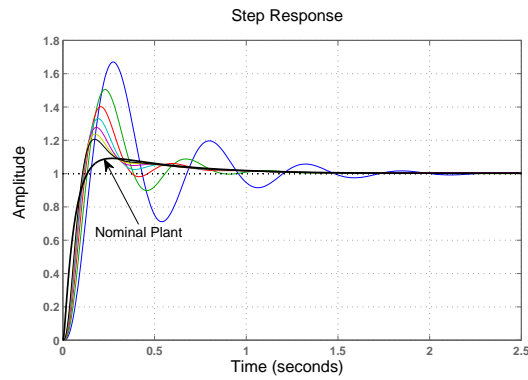
De igual manera para las funciones de transferencia  $g(s)_z g(s)_p g(s)_{p1}$  y  $g(s)_\psi g(s)_p g(s)_{p1}$  se muestra el diagrama de Bode en lazo abierto en las figuras 3.15(a) y 3.16(a).



(a)



(b)



(c)

Figura 3.14: Incertidumbre en  $g(s)_{xy}$ 

En las figuras 3.15(b) y 3.15(c) se muestra el diagrama de bode en lazo abierto y la respuesta al escalón de  $g(s)_z g(s)_p g(s)_{p1} C_z$  en el cual se aprecia que las respuestas en el tiempo son diferentes con respecto al sobretiro y relativamente similares en el tiempo de establecimiento.

Finalmente en las figuras 3.16(b) y 3.16(c) se muestra el diagrama de bode en lazo abierto y la respuesta al escalón de  $g(s)_\psi g(s)_p g(s)_{p1} C_\psi$  en el cual se aprecia que las respuestas en el tiempo son diferentes con respecto al sobretiro y relativamente similares en el tiempo de establecimiento, excepto en el caso donde  $i = 10$  en el cual se aprecia una respuesta oscilatoria.

Este análisis permite concluir que los controladores (3.2), (3.3) y (3.4) permiten

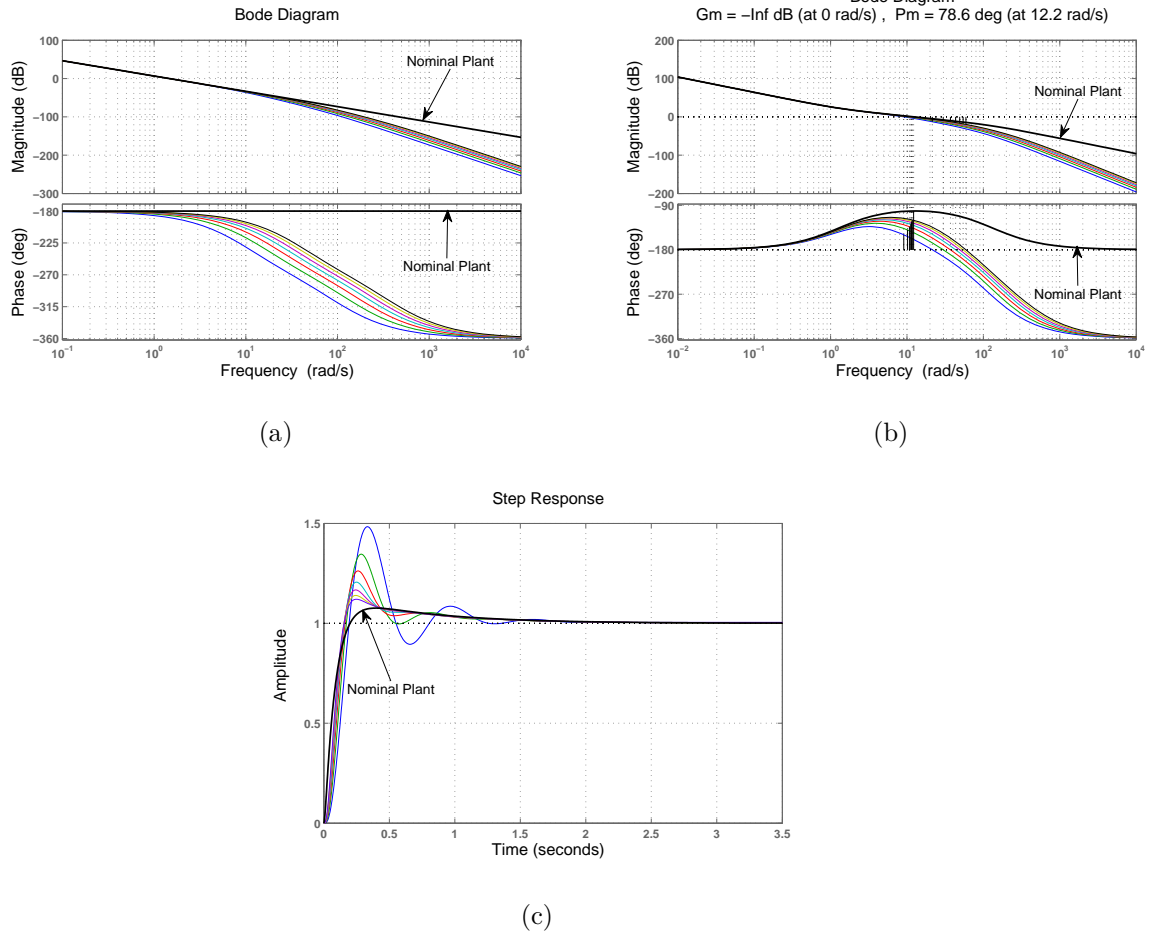


Figura 3.15: Incertidumbre en  $g(s)_z$

operar al CR en un rango de plantas debido al cambio estructural del CR en distintos puntos de operación.

Finalmente se obtiene la matriz de funciones de transferencia en un punto de operación distinto al vuelo estacionario, este punto está definido por el siguiente punto de equilibrio:

$$\begin{aligned}
 \Omega_0 &= \begin{bmatrix} 0 & \theta_0 & \psi_0 \end{bmatrix}^T \\
 \dot{\Omega}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
 V_{e0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
 & \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{3.7}$$



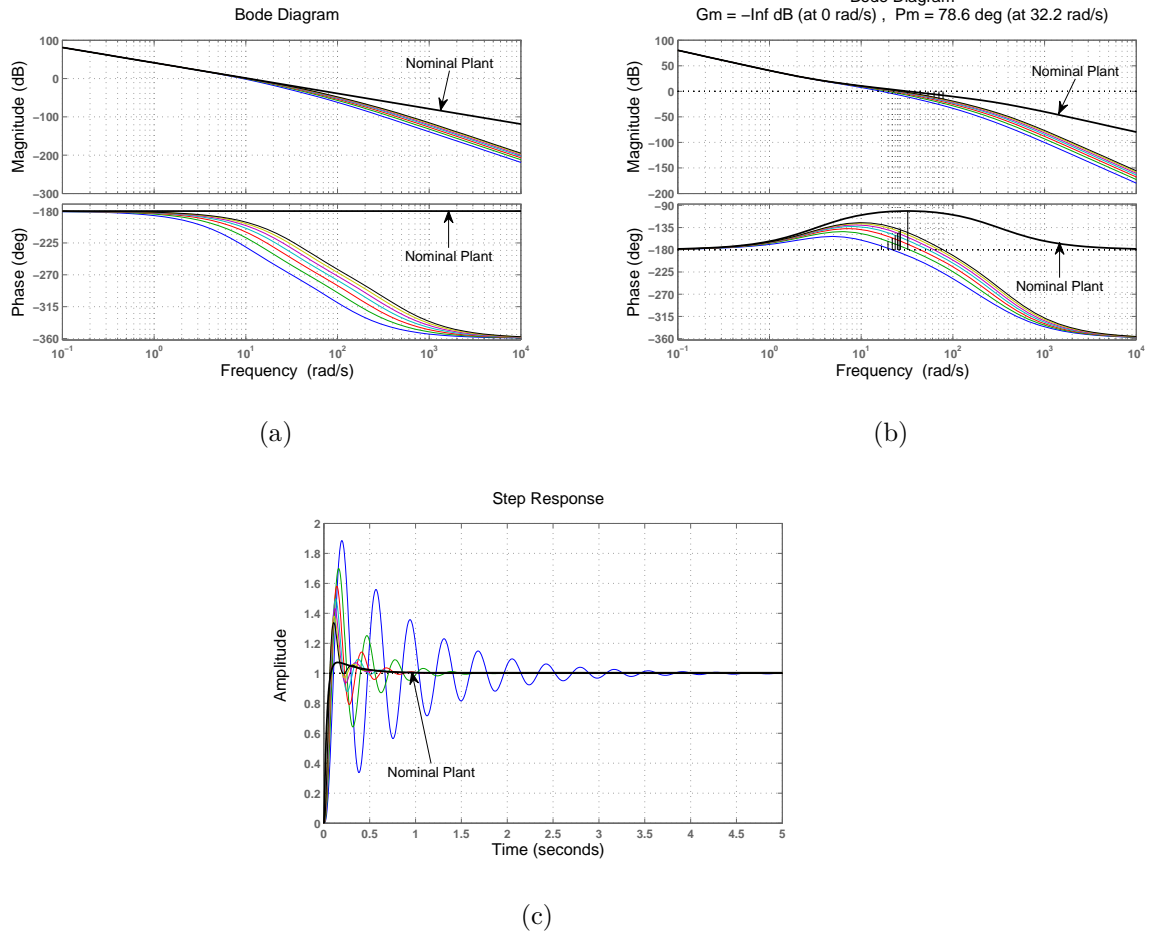


Figura 3.16: Incertidumbre en  $g(s)_\psi$

Los puntos de equilibrio (3.7) permiten un ángulo de cabeceo mayor en la operación del CR, por lo tanto representa un movimiento a mayores velocidades de desplazamiento o puede representar alguna ráfaga de viento.

La matriz de funciones de transferencia se muestra a continuación:

$$G_{\theta_0}(s) = \begin{bmatrix} \frac{g(\cos^2(\psi_0)\cos(\theta_0) - \cos^2(\psi_0) - 1)}{I_\alpha s^4 \cos(\theta_0)} & \frac{g \sin(2\psi_0)(\cos(\theta_0) - 1)}{2I_\alpha s^4 \cos(\theta_0)} & \frac{-\cos(\psi_0)\sin(\theta_0)}{m s^2} & 0 \\ \frac{g \sin(2\psi_0)(\cos(\theta_0) - 1)}{2I_\alpha s^4 \cos(\theta_0)} & \frac{(g \cos^2(\psi_0) - g \cos(\theta_0)(\cos^2(\psi_0) - 1))}{I_\alpha s^4 \cos(\theta_0)} & \frac{-\sin(\psi_0)\sin(\theta_0)}{m s^2} & 0 \\ \frac{-g \cos(\psi_0)\tan(\theta_0)}{I_\alpha s^4} & \frac{-g \sin(\psi_0)\cos(\theta_0)}{I_\alpha s^4} & \frac{-\cos(\theta_0)}{m s^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_z s^2 \cos(\theta_0)} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Se puede observar que existen elementos anti-diagonales que representan los acoplamientos dinámicos en el punto de operación (3.7) del CR.

En la figura 3.17(a), 3.17(b), 3.17(c) y 3.17(d) se muestran los diagramas de Bode en lazo abierto de los elementos diagonales de (3.8). Se toma en cuenta  $\psi_0 = 45^\circ$  y una iteración en el ángulo  $\theta_0$  de  $-15^\circ$  a  $15^\circ$  en pasos de  $4^\circ$ .

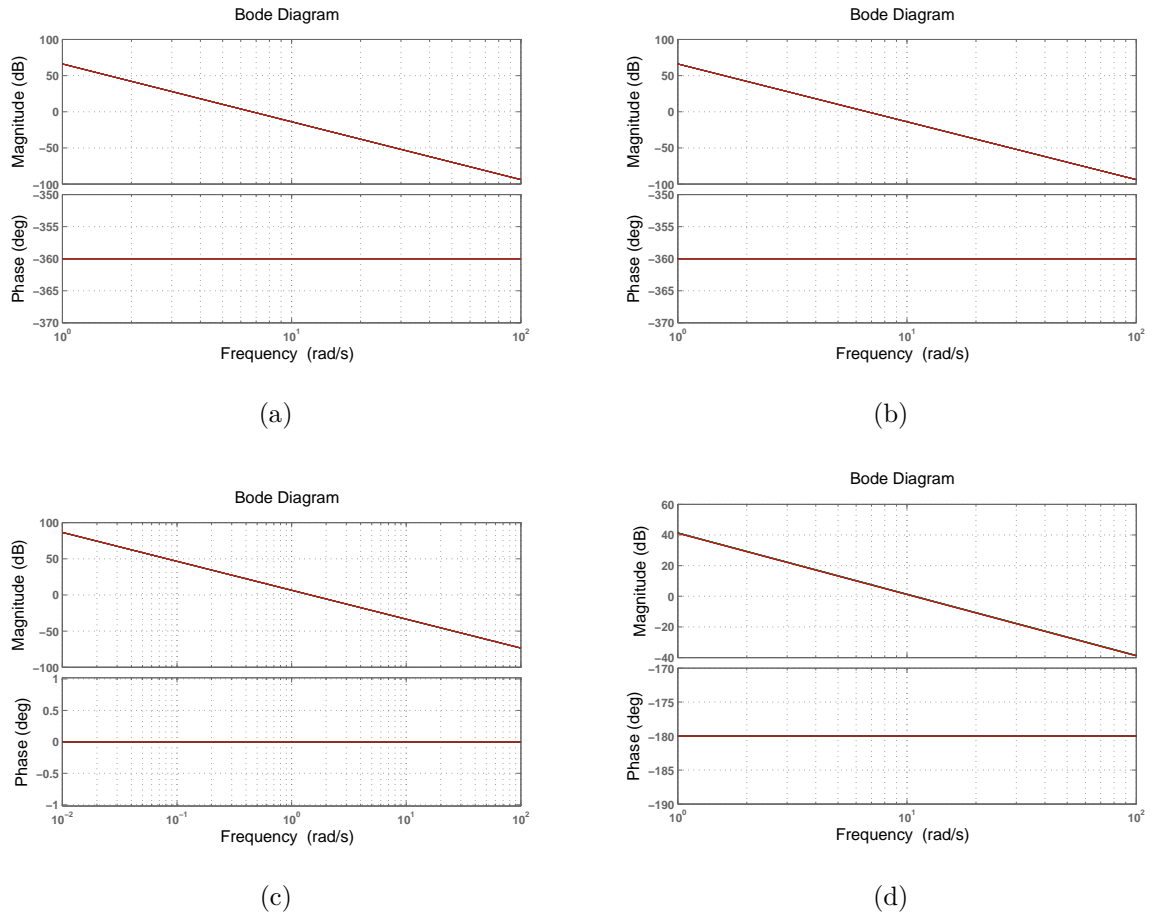


Figura 3.17: Diagramas de Bode en lazo abierto de  $G_{\theta_0}(s)$

A partir de esta figura se observa que el efecto del cambio en el punto de equilibrio consiste principalmente en cambios de ganancia mínimos, no apreciables en los diagramas de Bode. todo esto considerando solamente los elementos diagonales de la aproximación (3.8), para poder analizar completamente este sistema se requiere el uso de herramientas de control multivariable que quedan fuera de los límites de estudio de la presente tesis.

### 3.4 VALIDACIÓN DEL ESQUEMA DE CONTROL

Los controladores diseñados en las secciones anteriores se diseñaron utilizando el modelo de diseño del CL. Debido a esto, no existe garantía de que estos tendrán un desempeño adecuado si se consideran las dinámicas completas del CR. Debido a esto es necesario realizar un proceso de validación en el cual se confirme que el controlador es apropiado cuando se consideran las dinámicas completas del CR.

La señal de referencia para las simulaciones se definió en la sección 2.5 y está dada por:

$$\begin{aligned}x &= 12 \sin(0.5t + \pi/2) \\y &= 6 \sin(t) \\z &= 6 \sin(0.5t) \\ \psi &= 6 \sin(0.5t)\end{aligned}\tag{3.9}$$

Esta señal de referencia fue usada en todas las simulaciones realizadas en la sección 2.5, se vario la amplitud de las señales para obtener todos los casos mostrados en el apéndice B y C.

La figura 3.18 muestra el desempeño en seguimiento, considerando los controladores 3.2, 3.3 y 3.4 junto con el modelo CL para el rango de operación (3.9).

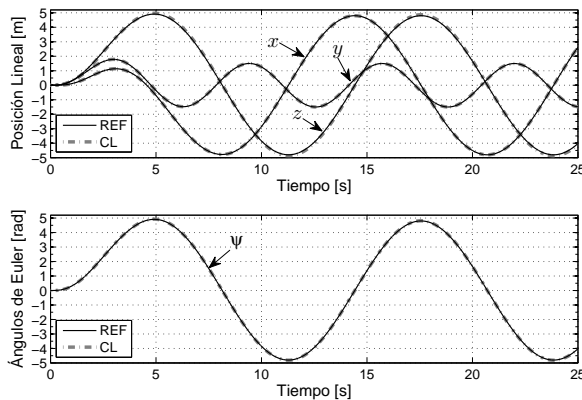


Figura 3.18: Seguimiento modelo CL

Se observa que el seguimiento es apropiado. Por otro lado, en el apéndice B se muestran también una serie de simulaciones en diversos rangos de operación que confirman el desempeño del controlador considerando el modelo CL.

La figura 3.19 muestra los desempeños en seguimiento considerando los controladores 3.2, 3.3 y 3.4 junto con los modelos NLR, NLT y NLR para el rango de operación (3.9).

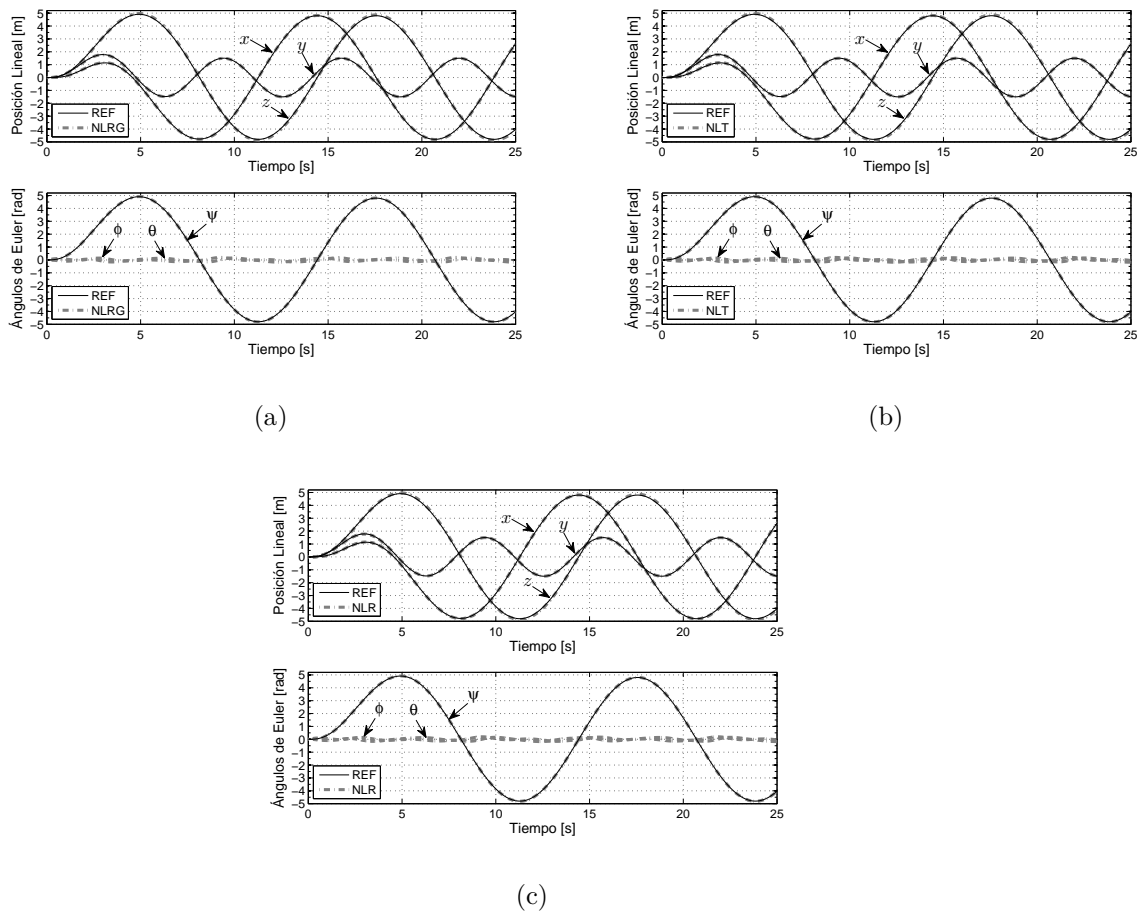


Figura 3.19: Seguimiento en los modelos NLRG, NLT y NLR.

Así mismo, se observa que el seguimiento es apropiado para los modelos NLRG, NLT y NLR. Por otra parte, en el apéndice B se muestran también una serie de simulaciones en diversos rangos de operación que confirman el desempeño del controlador considerando los modelos NLRG, NLT y NLT.

Se puede concluir que el controlador cumple con tener un excelente desempeño aun cuando se consideran dinámicas complejas incluyendo el efecto de momento de precesion giroscópica y amplios rangos de operación.

### 3.5 CONCLUSIONES

Se cumplió con diseñar un controlador simple, gracias a que se tenía un modelo adecuado. Más aún este controlador funciona cuando se considera el modelo más completo del CR. Los controladores cumplieron con los márgenes de fase y ganancia así como los anchos de banda especificados.

Así, el controlador fue capaz de estabilizar una gran serie de modelos simplificados a pesar de que no son representativos del modelo completo en algunas condiciones de operación. Esto muestra un gran nivel de robustez a pesar de conservar un alto grado de simplicidad.

Se realizó un estudio de rechazo a perturbaciones, en el cual se obtuvieron especificaciones para las perturbaciones que pudiera llegar a recibir el CR, así como especificaciones de sensores que pudieran ser usados en la implementación del mismo. Así mismo, se realizó un análisis de incertidumbre en la planta con dinámicas no modeladas de alta frecuencia, en el cual se observó que los controladores son capaces de estabilizar al CR incluso con cambios estructurales en la planta.

## CAPÍTULO 4

# CONCLUSIONES

---

En este trabajo, se presentó el desarrollo de un modelo cuasi lineal el cual permite el diseño de controladores simples basados en análisis frecuencial, lineales, grado bajo, de fase mínima y estables.

Se realizó un profundo estudio bibliográfico sobre modelos encontrados en la literatura, y se corroboró que los controladores diseñados con el modelo CL permiten estabilizar un gran número de modelos simplificados (MDS1-MDS7), además de estabilizar modelos con dinámicas más complejas y no lineales (NLRG, NLT, NLR). Esto demostró un gran nivel de robustez con un alto grado de simplicidad. Se observó que no cualquier modelo simplificado puede ser utilizado para diseñar controladores que estabilicen las dinámicas complejas del CR. Debido a esto, se concluye que el proceso de modelado es crítico para el desarrollo de sistemas de control efectivos, ya que de esta etapa dependen la complejidad del controlador resultante y su rendimiento cuando se consideran las dinámicas completas.

Los controladores obtenidos a partir del modelo CL mostraron ser apropiados para el seguimiento de trayectorias en el CR, tal como se puede observar en los apéndices B y C, en las cuales se aprecian los amplios rangos de operación y distintos niveles de guiñada que estabilizaron estos controladores. Además de los diversos modelos dinámicos en los cuales los controladores fueron puestos a prueba.

Además, se utilizaron herramientas de control tales como el rechazo a perturbaciones e incertidumbre en la planta, para obtener valores en los cuales el CR no

rechaza perturbaciones y los niveles de ruido que los sensores tendrían que rechazar. Todas especificaciones técnicas son muy útiles al momento de implementar alguna plataforma experimental del CR.

## 4.1 TRABAJO FUTURO

Como se ha mostrado en esta tesis, el modelo CL cumplió con las características deseadas, uno de los siguientes pasos en el desarrollo de este proyecto sería el análisis de los acoplamientos dinámicos en la matriz de función de transferencia del CR, linealizado en distintos puntos de equilibrio, ya que se podrían entender las dinámicas del CR cuando existen ráfagas externas o velocidades de traslación altas.

Otro punto importante sería el desarrollo de la plataforma experimental del CR, diseñar los controladores con los parámetros de esta plataforma y verificar el rendimiento con pruebas en tiempo real.

## APÉNDICE A

# MATRICES DE ROTACIÓN Y DINÁMICA DE CUERPO RÍGIDO

---

## A.1 MATRICES DE ROTACIÓN

Considerando el sistema de dos coordenadas mostrado en la Fig. A.1. El vector

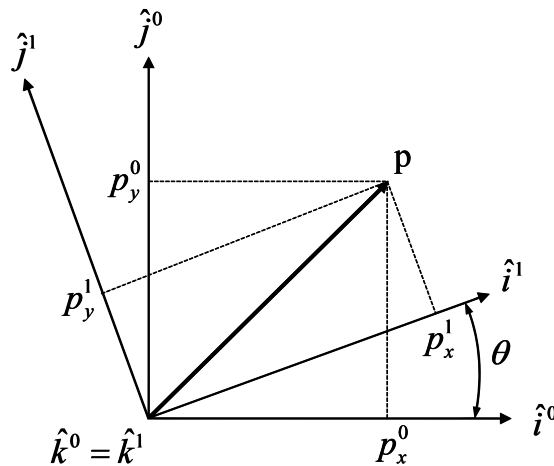


Figura A.1: Rotación en 2 dimensiones sobre el eje  $z$ .

$p$  puede ser expresado en ambos marcos de referencia, el marco de referencia  $\mathcal{F}^0$  ( $\hat{i}^0, \hat{j}^0, \hat{k}^0$ ) y el marco de referencia  $\mathcal{F}^1$  ( $\hat{i}^1, \hat{j}^1, \hat{k}^1$ ). En el marco de referencia  $\mathcal{F}^0$  el vector  $p$  está definido como  $p = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0$  y en el marco de referencia  $\mathcal{F}^1$  se



define como  $p = p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1$  igualando estas dos expresiones obtenemos:

$$p_x^1 \hat{i}^1 + p_y^1 \hat{j}^1 + p_z^1 \hat{k}^1 = p_x^0 \hat{i}^0 + p_y^0 \hat{j}^0 + p_z^0 \hat{k}^0$$

Efectuando el producto punto en ambos lados de la igualdad anterior con  $\hat{i}^1$ ,  $\hat{j}^1$  y  $\hat{k}^1$ , la expresión en forma matricial es:

$$p^1 \triangleq \begin{bmatrix} p_x^1 \\ p_y^1 \\ p_z^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{i}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{i}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{j}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{j}^1 \cdot \hat{k}^0 \\ \hat{k}^1 \cdot \hat{i}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{j}^0 & \hat{k}^1 \cdot \hat{k}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{bmatrix}$$

Observando la geometría de la Figura A.1 obtenemos:

$$p^1 = R_0^1 p^0 \tag{A.1}$$

Donde:

$$R_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

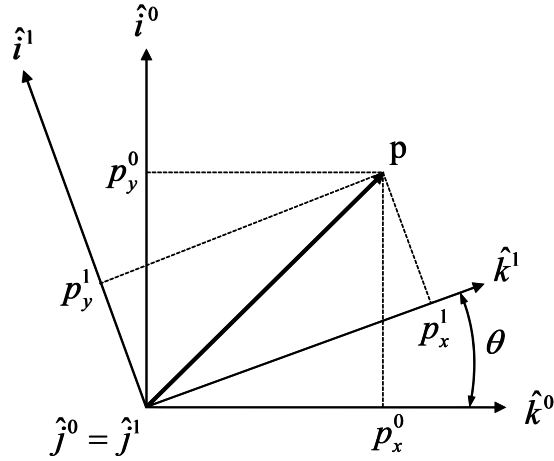
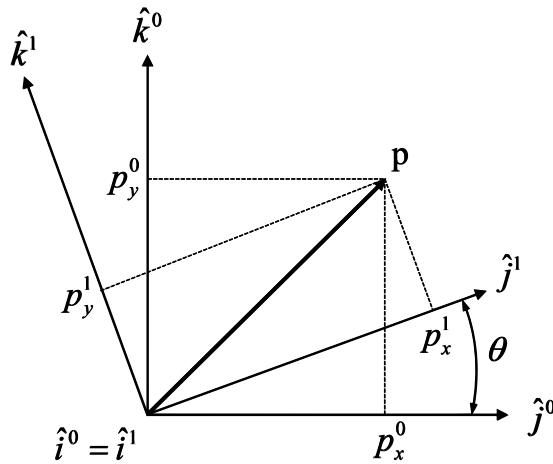
La ecuación anterior representa la rotación « derecha » del marco de referencia sobre el eje  $z$  (Fig. A.1). La notación  $R_0^1$  denota una matriz de rotación del marco de referencia  $\mathcal{F}^0$  al marco de referencia  $\mathcal{F}^1$  [14, 112]. De manera similar la rotación « derecha » del marco de referencia sobre el eje  $y$  da (Fig. A.2):

$$R_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Finalmente la rotación « derecha » del marco de referencia sobre el eje  $x$  resulta (Fig. A.3):

$$R_0^1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

La matriz  $R_0^1$  tiene las siguientes propiedades (pertenece al grupo de matrices  $SO(3)$ ):


 Figura A.2: Rotación en 2 dimensiones sobre el eje  $y$ .

 Figura A.3: Rotación en 2 dimensiones sobre el eje  $x$ .

- $(R_a^b)^{-1} = (R_a^b)^T = R_b^a$
- $R_b^c R_a^b = R_a^c$
- $\det R_a^b = 1$

En la derivación de la ecuación (A.1) se observa que el vector  $p$  permanece constante y el nuevo marco de referencia  $\mathcal{F}^1$  se obtuvo mediante la rotación de  $\mathcal{F}^0$  a través de una rotación « derecha » del ángulo  $\theta$  [14, 112].

A.1.1 FORMULA DE ROTACIÓN

La **fórmula de rotación** efectúa una rotación « izquierda » del vector  $p$  alrededor del vector  $\hat{n}$  por un ángulo de  $\mu$  [112]. El vector  $p$  rota en un sentido «

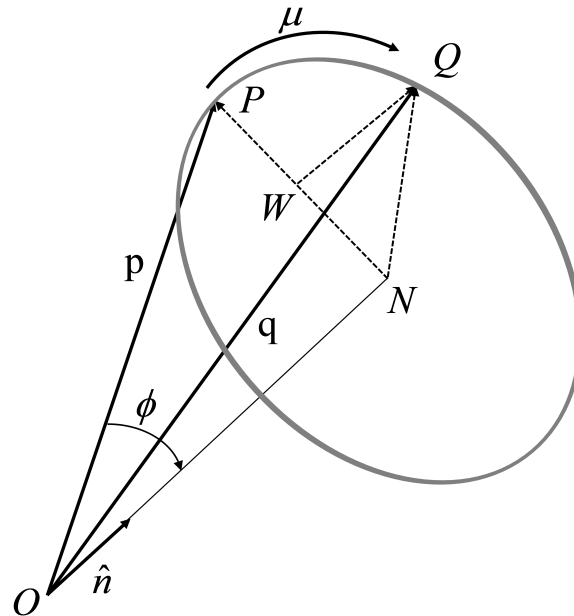


Figura A.4: Rotación izquierda del vector  $p$  alrededor del vector unitario  $\hat{n}$  por un ángulo  $\mu$  obteniendo el vector  $q$ .

izquierdo » alrededor del vector unitario  $\hat{n}$  un ángulo de  $\mu$  para producir el vector  $q$  (Fig. A.4). El ángulo entre  $p$  y  $\hat{n}$  es  $\phi$ , por geometría obtenemos:

$$q = O\vec{N} + N\vec{W} + W\vec{Q} \tag{A.2}$$

Donde:

- El vector  $O\vec{N}$  es la proyección de  $p$  sobre el vector unitario  $\hat{n}$ :

$$O\vec{N} = (p \cdot \hat{n}) \hat{n}$$

- El vector  $N\vec{W}$  esta en la dirección de  $p - O\vec{N}$  con una longitud de  $NQ \cos \mu$ . Se puede observar (Fig. A.4) que la longitud  $NQ$  iguala a la longitud  $NP =$

$$\|\mathbf{p} - ON\vec{W}\|:$$

$$N\vec{W} = \frac{\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n}) \hat{n}}{\|\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n}) \hat{n}\|} NQ \cos \mu = (\mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{n}) \hat{n}) \cos \mu$$

- El vector  $W\vec{Q}$  es perpendicular a  $\mathbf{p}$  y  $\hat{n}$  y tiene una longitud de  $NQ \sin \mu = \|\mathbf{p}\| \sin \phi$ :

$$W\vec{Q} = \frac{\mathbf{p} \times \hat{n}}{\|\mathbf{p}\| \sin \phi} NQ \sin \mu = -\vec{n} \times \mathbf{p} \sin \mu$$

Substituyendo en la ecuación (A.2) obtenemos la **fórmula de rotación**:

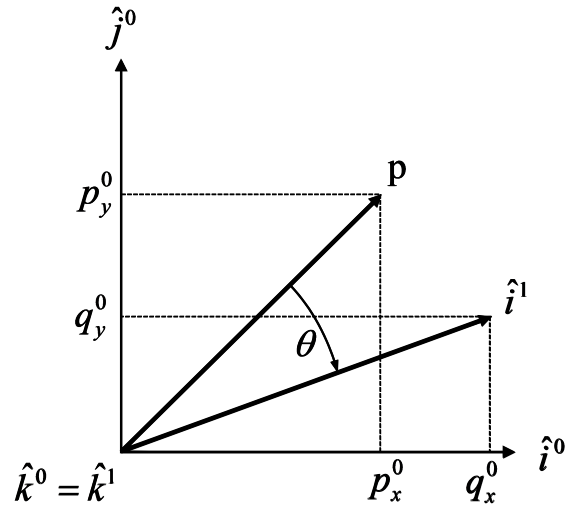
$$\mathbf{q} = (1 - \cos \mu) (\mathbf{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} + \cos \mu \mathbf{p} - \sin \mu (\vec{n} \times \mathbf{p}) \quad (\text{A.3})$$

Ejemplificando el uso de la ecuación (A.3) se considera una rotación « izquierda » del vector  $\mathbf{p}^0$  en el marco de referencia  $\mathcal{F}^0$  alrededor del eje  $z$  (Fig. A.5).

Utilizando la **fórmula de rotación** obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0 &= (1 - \cos \theta) (\mathbf{p} \cdot \hat{n}) \hat{n} + \cos \theta \mathbf{p} - \sin \theta \hat{n} \times \mathbf{p} \\ &= (1 - \cos \theta) p_z^0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \cos \theta \begin{bmatrix} p_x^0 \\ p_y^0 \\ p_z^0 \end{bmatrix} - \sin \theta \begin{bmatrix} -p_y^0 \\ p_x^0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}^0 \\ &= R_1^0 \mathbf{p}^0 \end{aligned}$$

La matriz de rotación  $R_0^1$  puede ser interpretada de dos maneras. la primera es que transforma el vector fijo  $\mathbf{p}$  de una expresión en el marco de referencia  $\mathcal{F}^0$  a una expresión en el marco de referencia  $\mathcal{F}^1$  donde  $\mathcal{F}^1$  se obtuvo a partir de  $\mathcal{F}^0$  mediante una rotación « derecha ». la segunda interpretación es que rota el vector  $\mathbf{p}$ , a través de una rotación « izquierda », a un nuevo vector  $\mathbf{q}$  en el mismo marco de referencia. Las rotaciones « derechas » de vectores se obtienen a partir de  $(R_0^1)^T$ .


 Figura A.5: Rotación de  $\mathbf{p}$  sobre el eje  $z$ .

## A.2 DINÁMICA DE CUERPO RÍGIDO

### A.2.1 ECUACIÓN DE CORIOLIS

En esta sección obtendremos la derivación de la ecuación de Coriolis [112]. Se tiene dos marcos de referencia  $\mathcal{F}^i$  y  $\mathcal{F}^b$  (Fig. A.6). Donde  $\mathcal{F}^i$  representa un marco de referencia inercial y  $\mathcal{F}^b$  representa el marco de referencia del cuerpo en movimiento. Suponiendo que el vector  $\mathbf{p}$  se está moviendo en  $\mathcal{F}^b$  y que  $\mathcal{F}^b$  se está trasladando y rotando con respecto a  $\mathcal{F}^i$ , se busca encontrar la derivada de  $\mathbf{p}$  vista desde el marco de referencia  $\mathcal{F}^i$ . Asumiendo que  $\mathcal{F}^b$  no está rotando con respecto a  $\mathcal{F}^i$ , la derivada en el tiempo de  $\mathbf{p}$  en el marco de referencia  $\mathcal{F}^i$  es:

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \frac{d}{dt_b} \mathbf{p} \quad (\text{A.4})$$

Por otro lado asumiendo que  $\mathbf{p}$  está fijo en  $\mathcal{F}^b$  pero  $\mathcal{F}^b$  está rotando con respecto a  $\mathcal{F}^i$  y  $\hat{\mathbf{s}}$  es el eje de rotación instantáneo con un ángulo de rotación « derecho »  $\delta\phi$ . la **fórmula de rotación** ((A.3)) da:

$$\mathbf{p} + \delta\mathbf{p} = (1 - \cos(-\delta\phi)) \hat{\mathbf{s}} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{p}) + \cos(-\delta\phi) \mathbf{p} - \sin(-\delta\phi) \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{p}$$

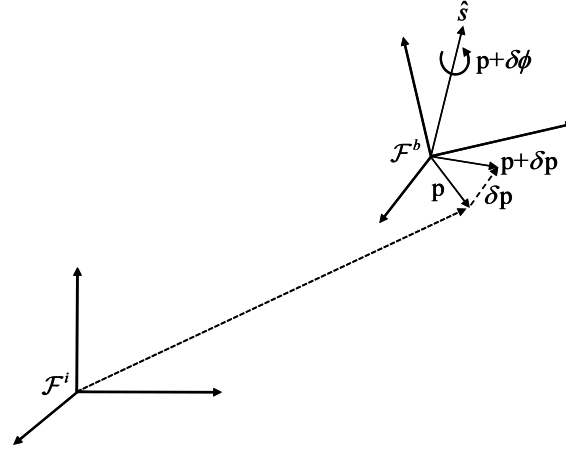


Figura A.6: Diagrama de la ecuación de Coriolis.

Usando la aproximación de ángulos pequeños y dividiendo ambos lados por  $\delta t$  obtenemos:

$$\frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} \approx \frac{\delta \phi}{\delta t} \hat{\mathbf{s}} \times \mathbf{p}$$

Tomando el límite como  $\delta t \rightarrow 0$  y definiendo la velocidad angular de  $\mathcal{F}^b$  con respecto a  $\mathcal{F}^i$  como  $\omega_{b/i} \triangleq \dot{\hat{\mathbf{s}}}$  da:

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \omega_{b/i} \times \mathbf{p} \quad (\text{A.5})$$

Dado que la diferenciación es un operador lineal se combinan las ecuaciones (A.4) y (A.5):

$$\frac{d}{dt_i} \mathbf{p} = \frac{d}{dt_b} \mathbf{p} + \omega_{b/i} \times \mathbf{p} \quad (\text{A.6})$$

Obteniendo la ecuación de Coriolis.

Para derivar las ecuaciones dinámicas de un cuerpo rígido, se aplica la segunda ley de Newton, primeramente a los grados de libertad traslacionales y después a los grados de libertad rotacionales. Las leyes de Newton están implícitas en marcos de referencia inerciales, esto significa que el movimiento del cuadrirrotor está referenciado a un marco fijo de referencia, en este caso es la Tierra ( $\mathcal{F}^i$ ). Se asumirá un modelo de Tierra-plana, que es apropiado para vehículos aéros pequeños.

### A.2.2 DINÁMICA TRASLACIONAL

Sea  $V$  el vector de velocidad de un cuerpo rígido en movimiento traslacional. Aplicando la segunda ley de Newton, la dinámica traslacional es:

$$m \frac{dV}{dt_i} = f$$

Donde  $m$  es la masa del cuerpo rígido,  $\frac{d}{dt_i}$  es la derivada en el tiempo en el marco de referencia inercial, y  $f$  es la suma de todas las fuerzas externas actuando en el cuerpo rígido. La derivada de la velocidad en el marco de referencia inercial puede ser escrita en términos de la derivada en el marco de referencia del cuerpo rígido y la velocidad angular de acuerdo con la ecuación de Coriolis ((A.6)):

$$\frac{dV}{dt_i} = \frac{dV}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos una representación alternativa de la segunda ley de Newton con la diferenciación llevada a cabo en el marco de referencia del cuerpo rígido [14, 112]:

$$m \left( \frac{dV}{dt_b} + \omega_{b/i} \times V \right) = f$$

Expresando las fuerzas y velocidades en el marco de referencia del cuerpo rígido (cuadrirrotor) obtenemos:

$$m \dot{V}_b + m \omega_b \times V_b = F_b \quad (\text{A.7})$$

### A.2.3 DINÁMICA ROTACIONAL

Aplicando la segunda ley de Newton, La dinámica rotacional es:

$$\frac{dh}{dt_i} = m$$

Donde  $h$  es el momento angular en forma vectorial,  $m$  es la sumatoria de momentos de externos y  $\frac{d}{dt_i}$  es la derivada en el tiempo en el marco de referencia

inercial. La derivada de la velocidad en el marco de referencia inercial puede ser escrita en términos de la derivada en el marco de referencia del cuerpo rígido y la velocidad angular de acuerdo con la ecuación de Coriolis ((A.6)):

$$\frac{dh}{dt_i} = \frac{dh}{dt_b} + \omega_{b/i} \times h$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos una representación alternativa de la segunda ley de Newton con la diferenciación llevada a cabo en el marco de referencia del cuerpo rígido [14, 112]:

$$\frac{dh}{dt_i} = \frac{dh}{dt_b} + \omega_{b/i} \times h = m$$

Para un cuerpo rígido, el momento angular está definido como:

$$h \triangleq J\omega_{b/i}$$

donde  $J$  está dado por:

$$J = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int xy dm & -\int xz dm \\ -\int xy dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int yz dm \\ -\int xz dm & -\int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

$$\triangleq \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

Los términos diagonales de  $J$  son los « momentos de inercia » y los términos no diagonales son los « productos de inercia ». Los momentos de inercia miden la tendencia del cuerpo rígido a oponerse a la aceleración sobre un eje específico de rotación. En la práctica, la matriz de inercia no es calculada usando la ecuación anterior, sino que es calculada numéricamente utilizando las propiedades de masa usando modelos CAD (Computer-Aided-Design) o es medido experimentalmente usando un péndulo bifilar [72, 93].



Debido a que las integrales de la matriz de inercia están calculadas con respecto al marco de referencia del cuerpo,  $\mathcal{F}^b$ ,  $J$  es constante visto desde el « cuerpo » ( $\frac{dJ}{dt_b} = 0$ ). Por lo tanto substituyendo y expresando los momentos y velocidades angulares en el marco de referencia del cuerpo rígido (cuadrirrotor) obtenemos:

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \times (J\omega_b) = M_b \quad (\text{A.8})$$

Con esto concluye la derivación de las ecuaciones de Newton-Euler, las cuales serán empleadas para la obtención del modelo dinámico del cuadrirrotor.

## APÉNDICE B

# SIMULACIONES DIGITALES

---

En este apéndice se muestran todas las simulaciones digitales realizadas con los distintos modelos presentados a lo largo de esta tesis.

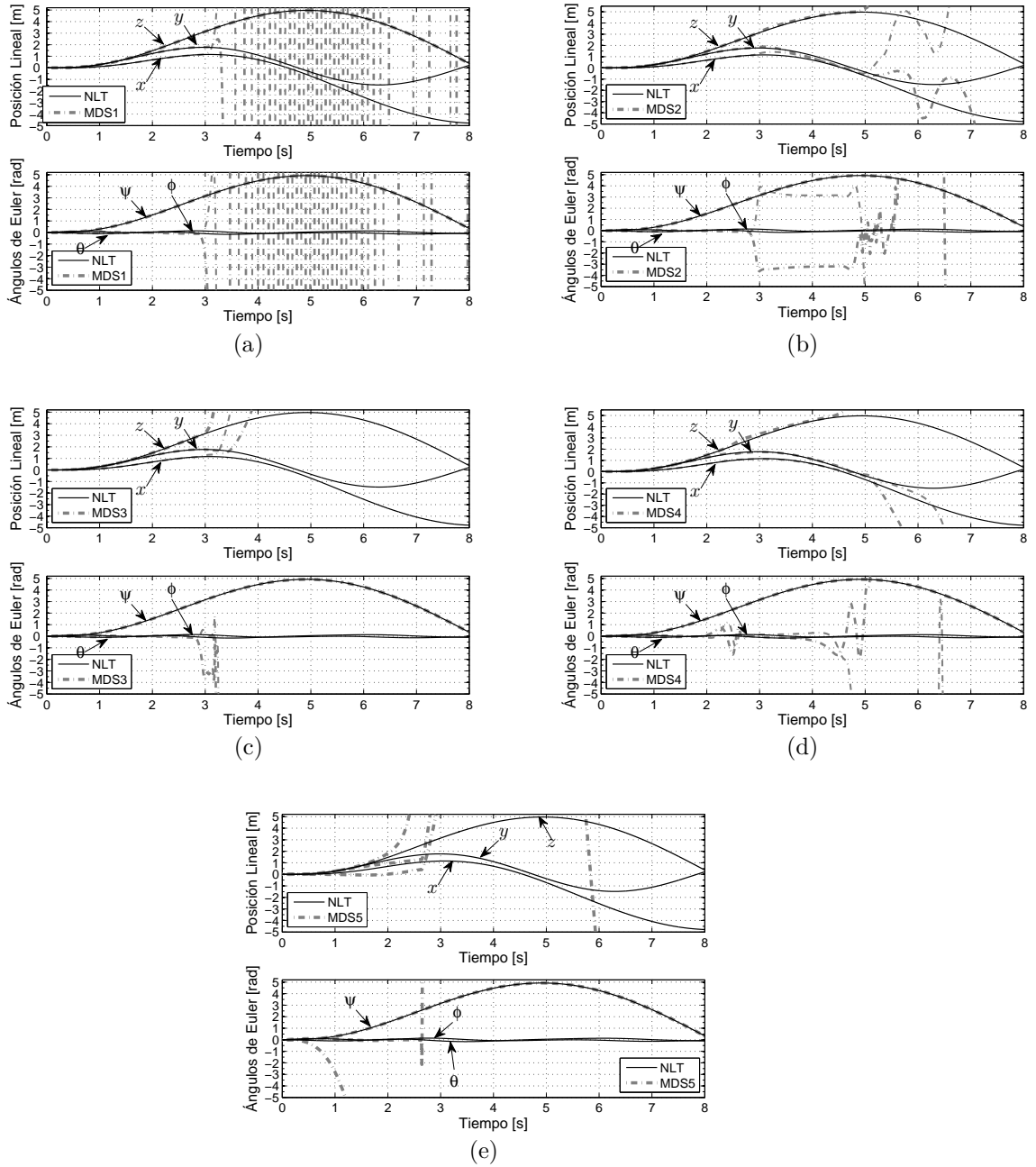


Figura B.1: Simulaciones MDS1, MDS2, MDS3, MDS4 y MDS5, guiñada alta.

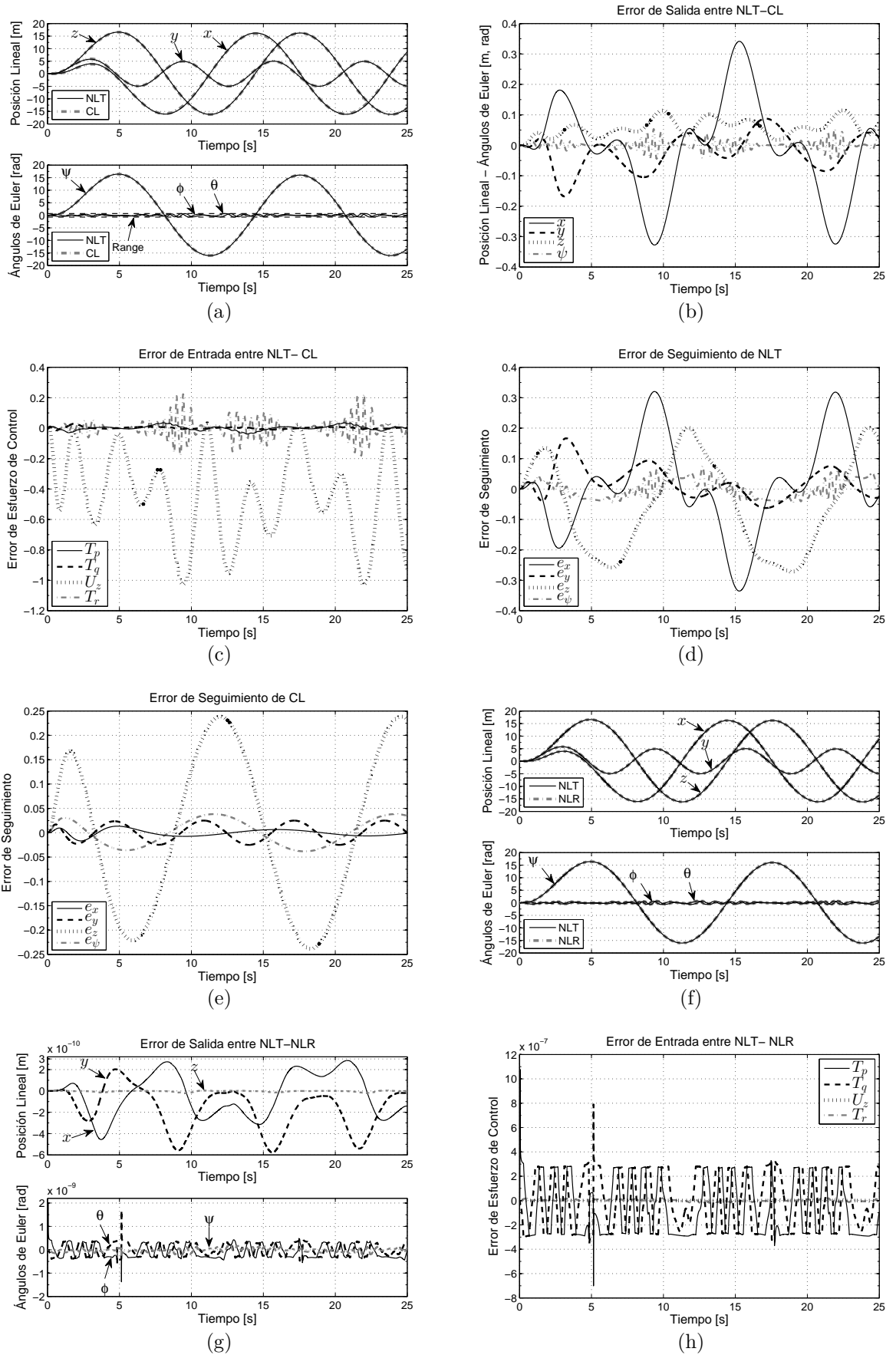


Figura B.2: Simulaciones CL, guiñada alta.

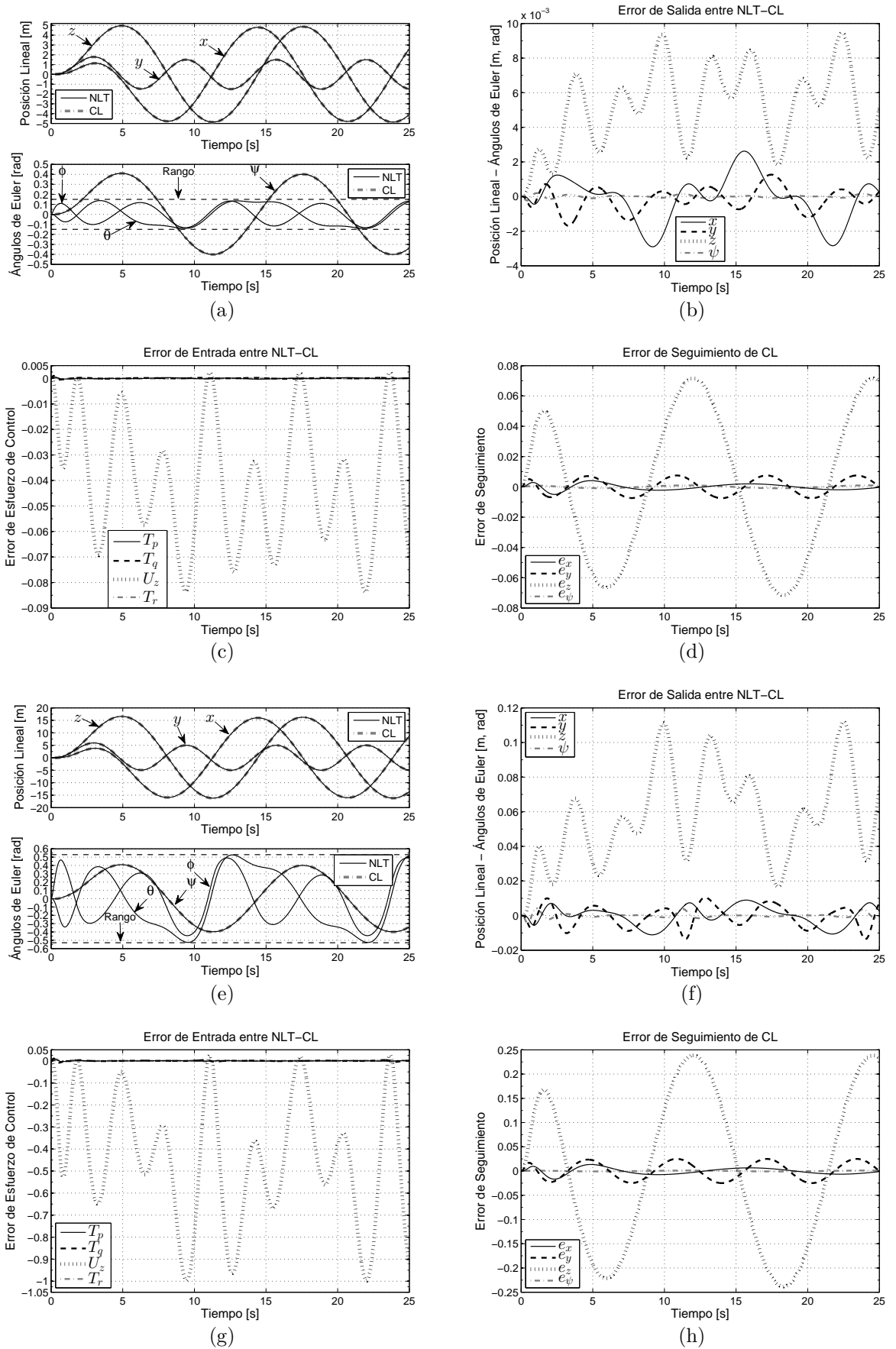


Figura B.3: Simulaciones CL, guiñada baja.

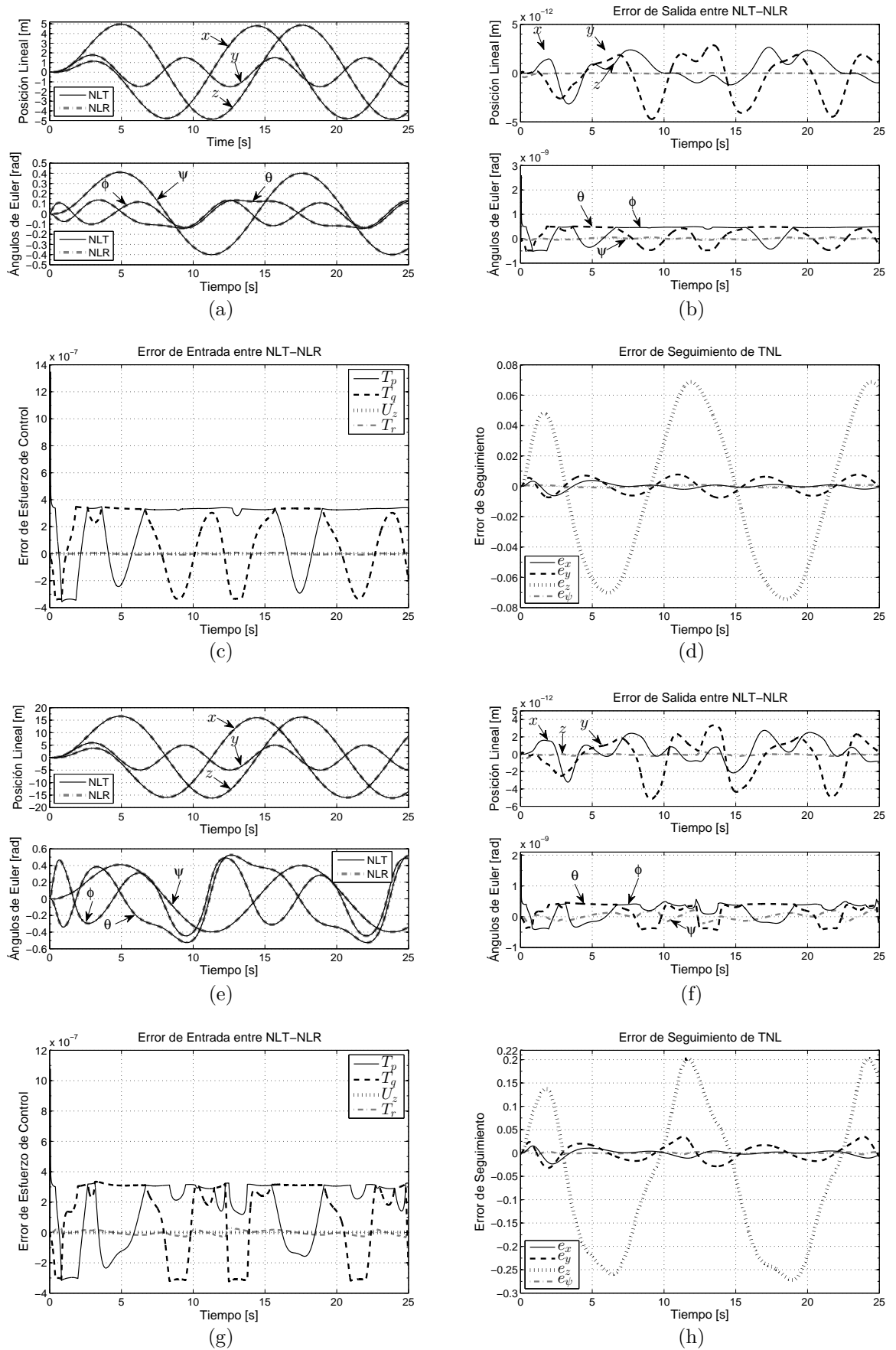


Figura B.4: Simulaciones NLR, guiñada baja.

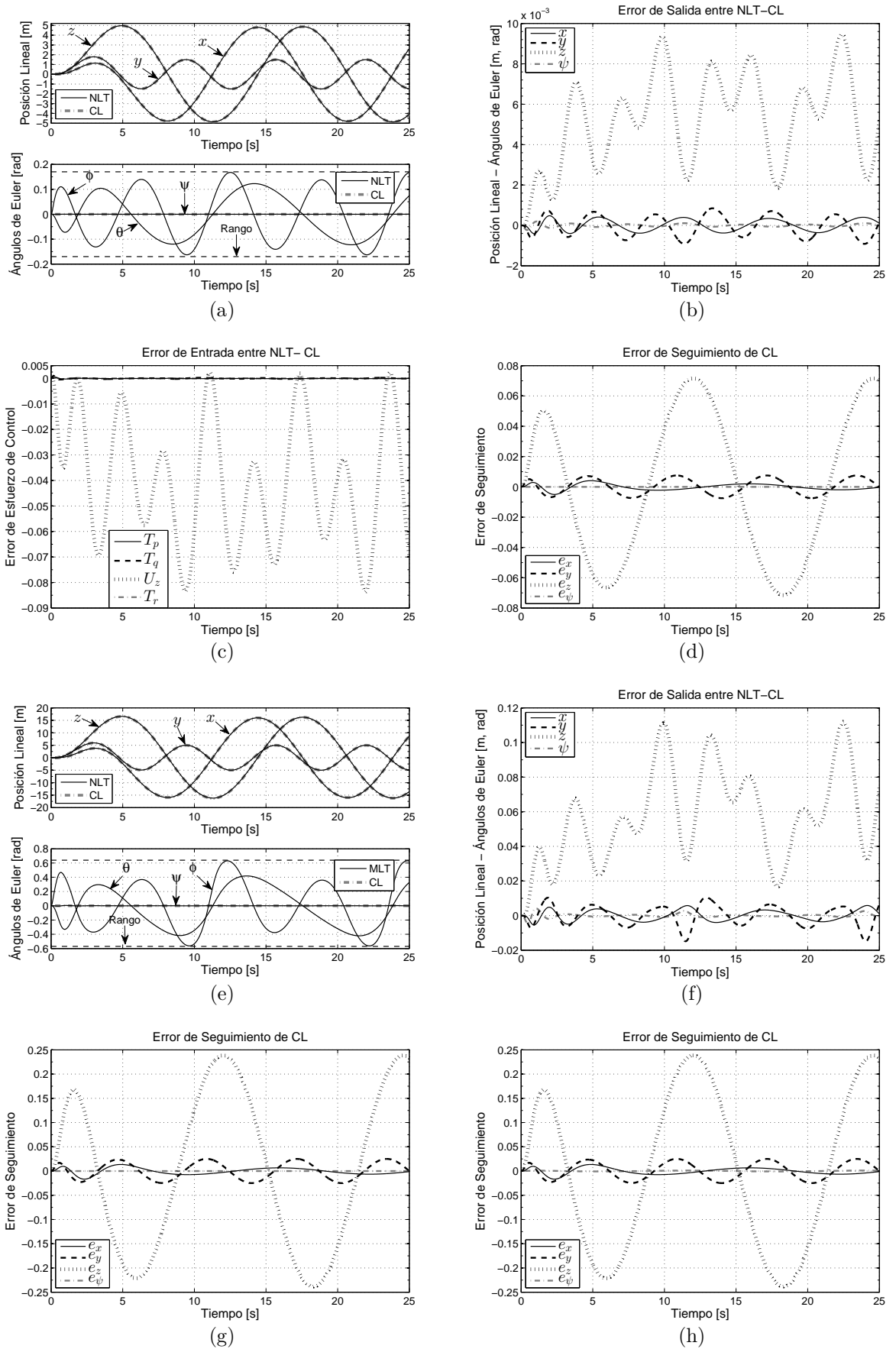


Figura B.5: Simulaciones CL, guiñada cero.

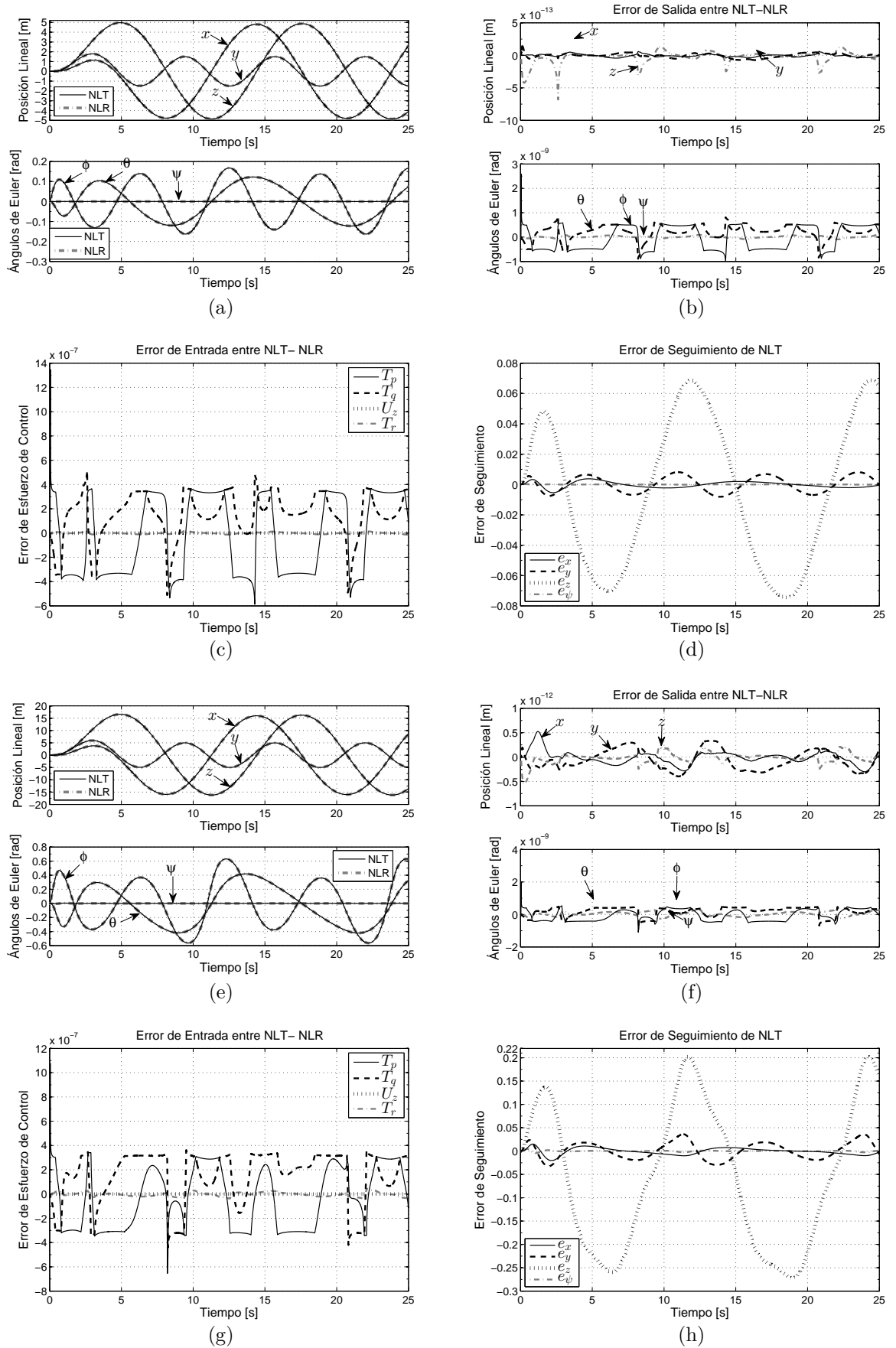


Figura B.6: Simulaciones NLR, guiñada cero.



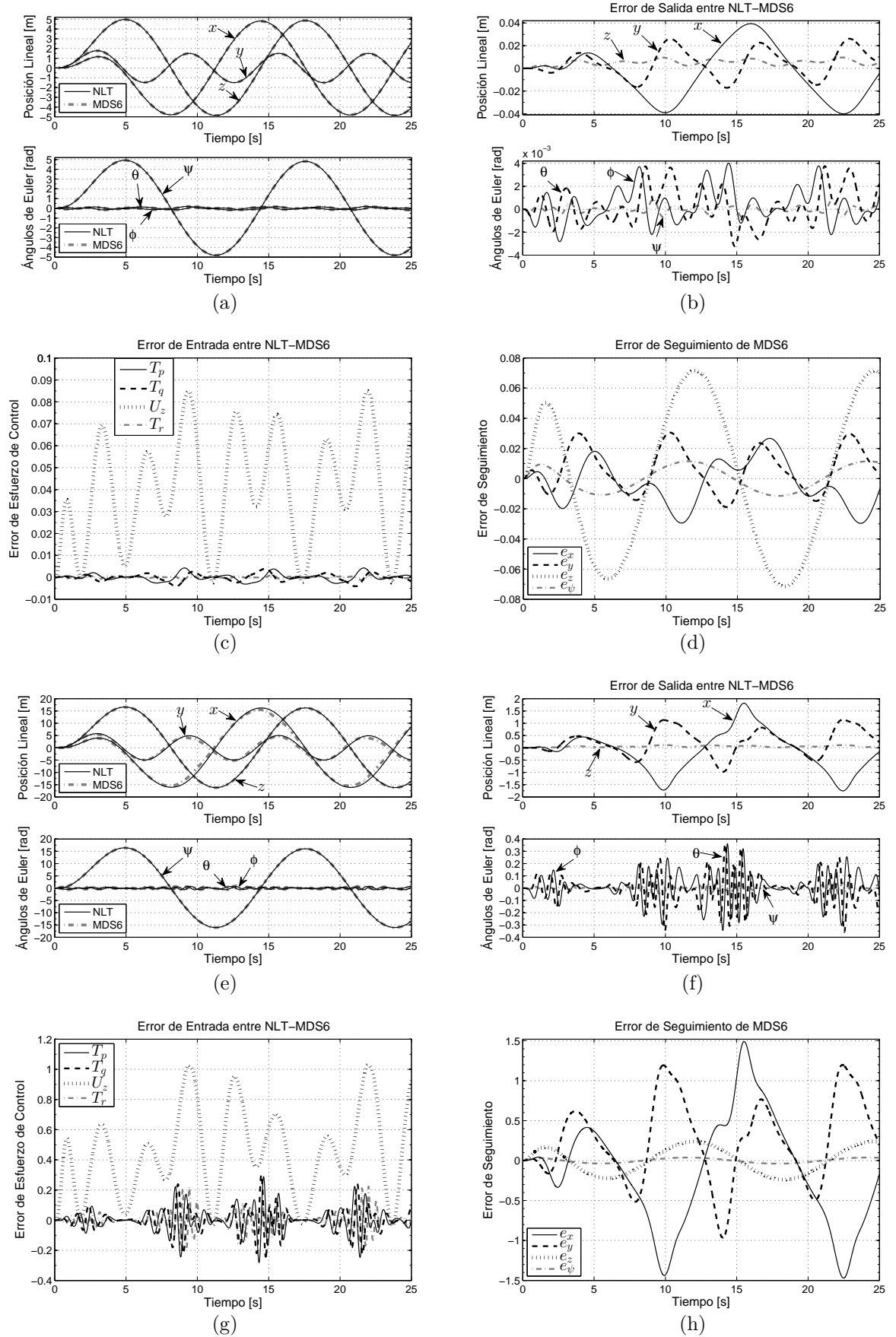
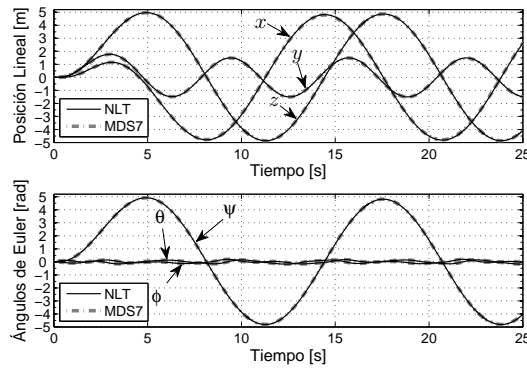
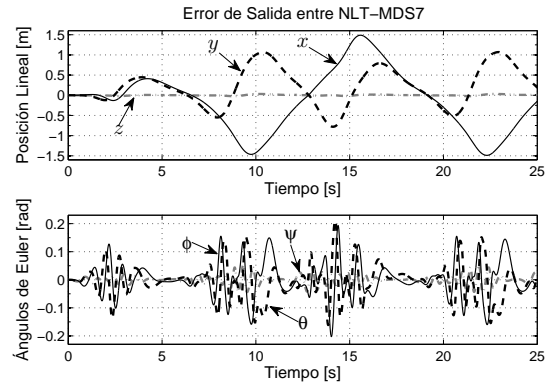


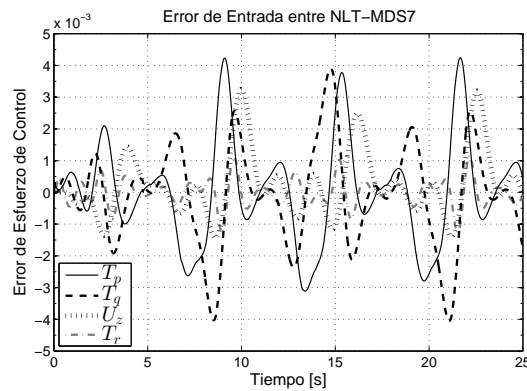
Figura B.7: Simulaciones MDS6, guiñada alta.



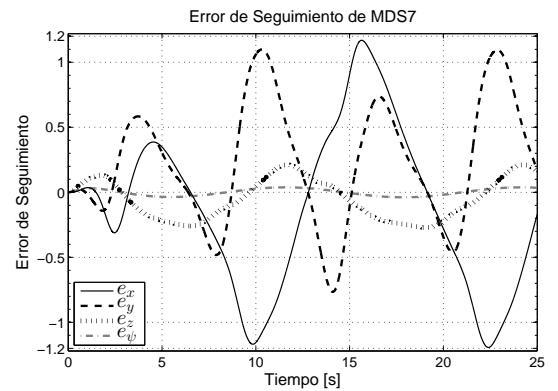
(a)



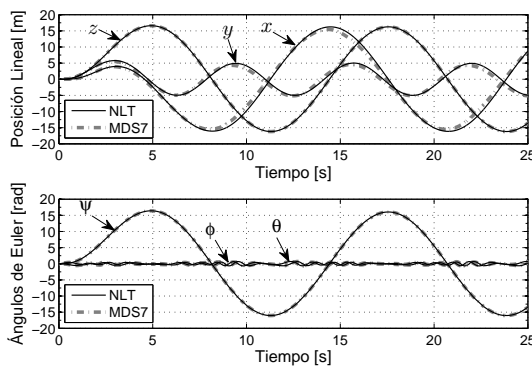
(b)



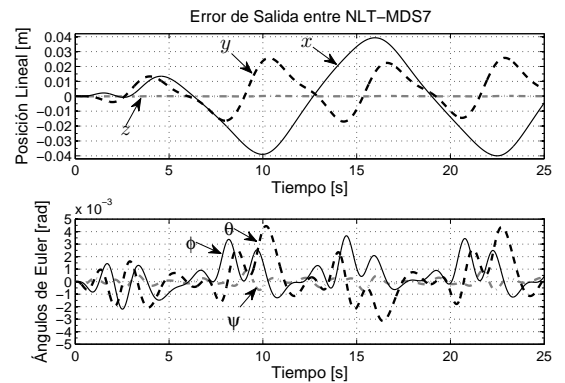
(c)



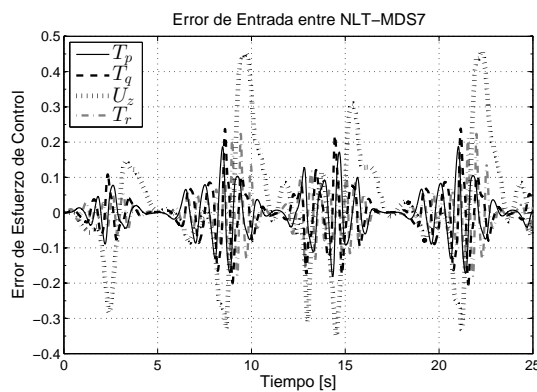
(d)



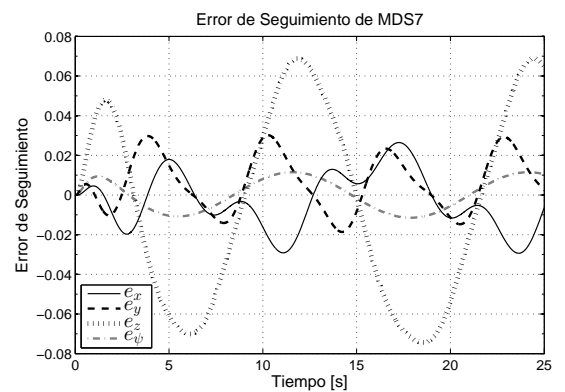
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura B.8: Simulaciones MDS7, guiñada alta.

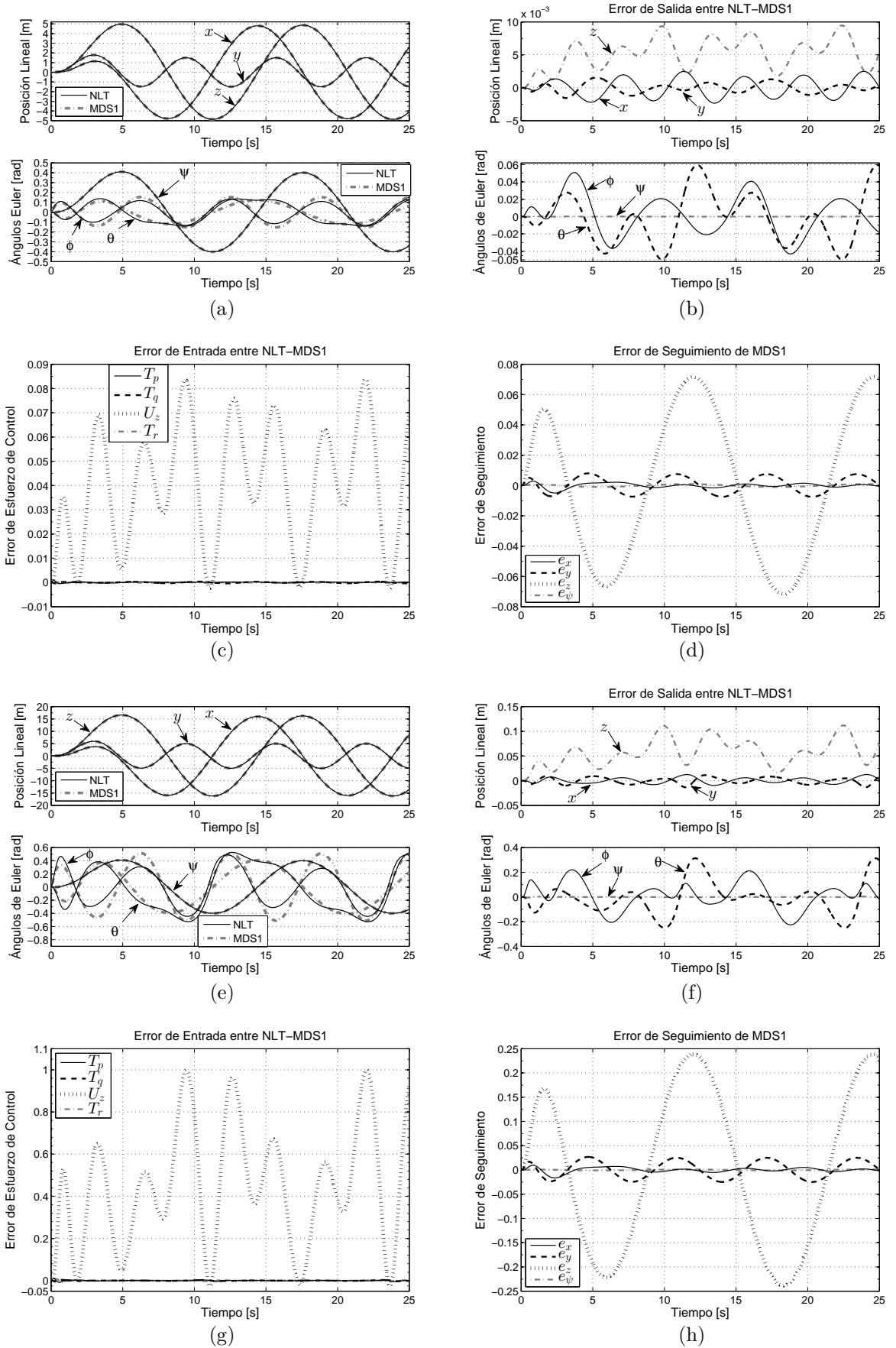


Figura B.9: Simulaciones MDS1, guiñada baja.

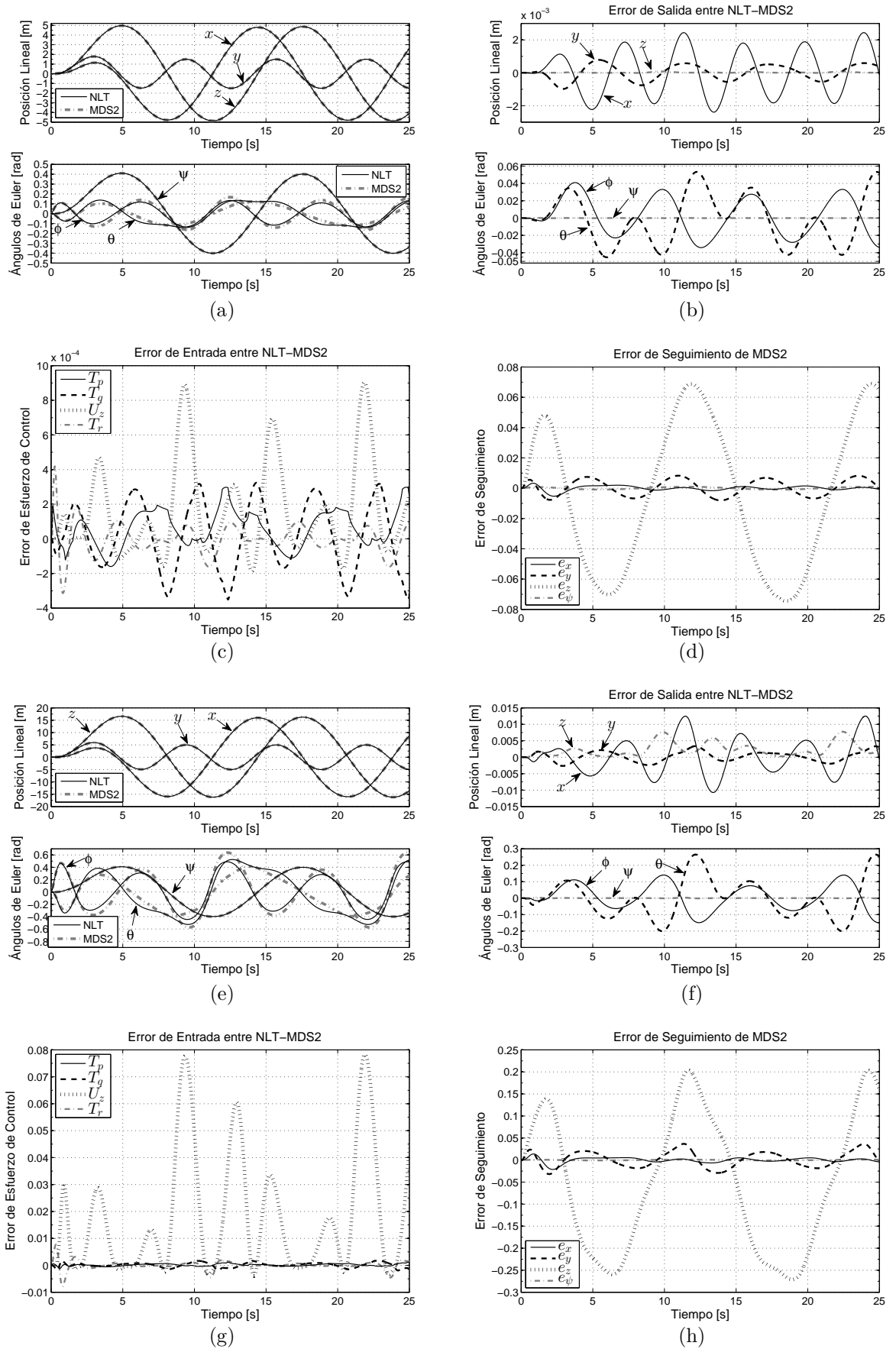


Figura B.10: Simulaciones MDS2, guiñada baja.

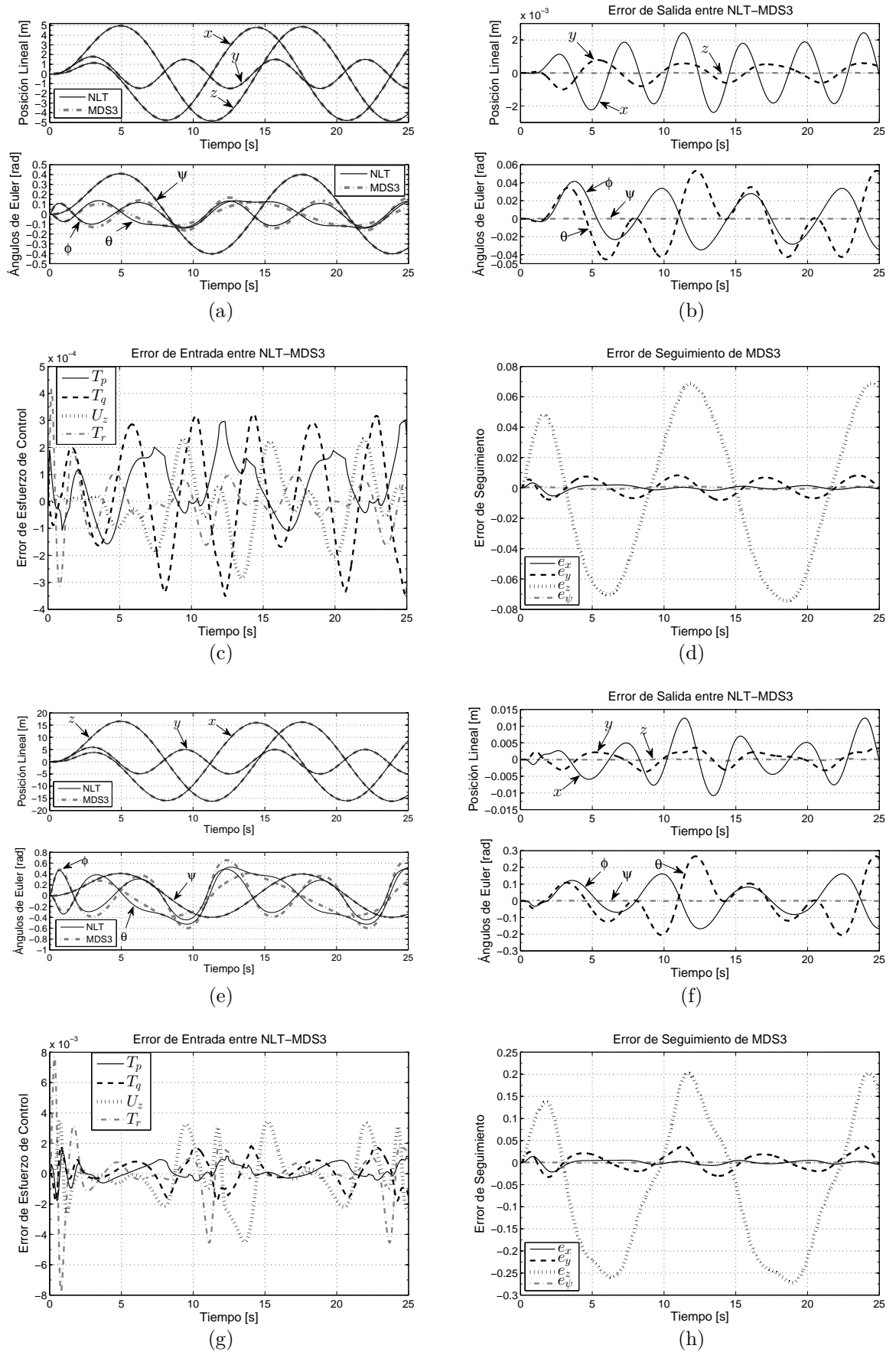


Figura B.11: Simulaciones MDS3, guiñada baja.

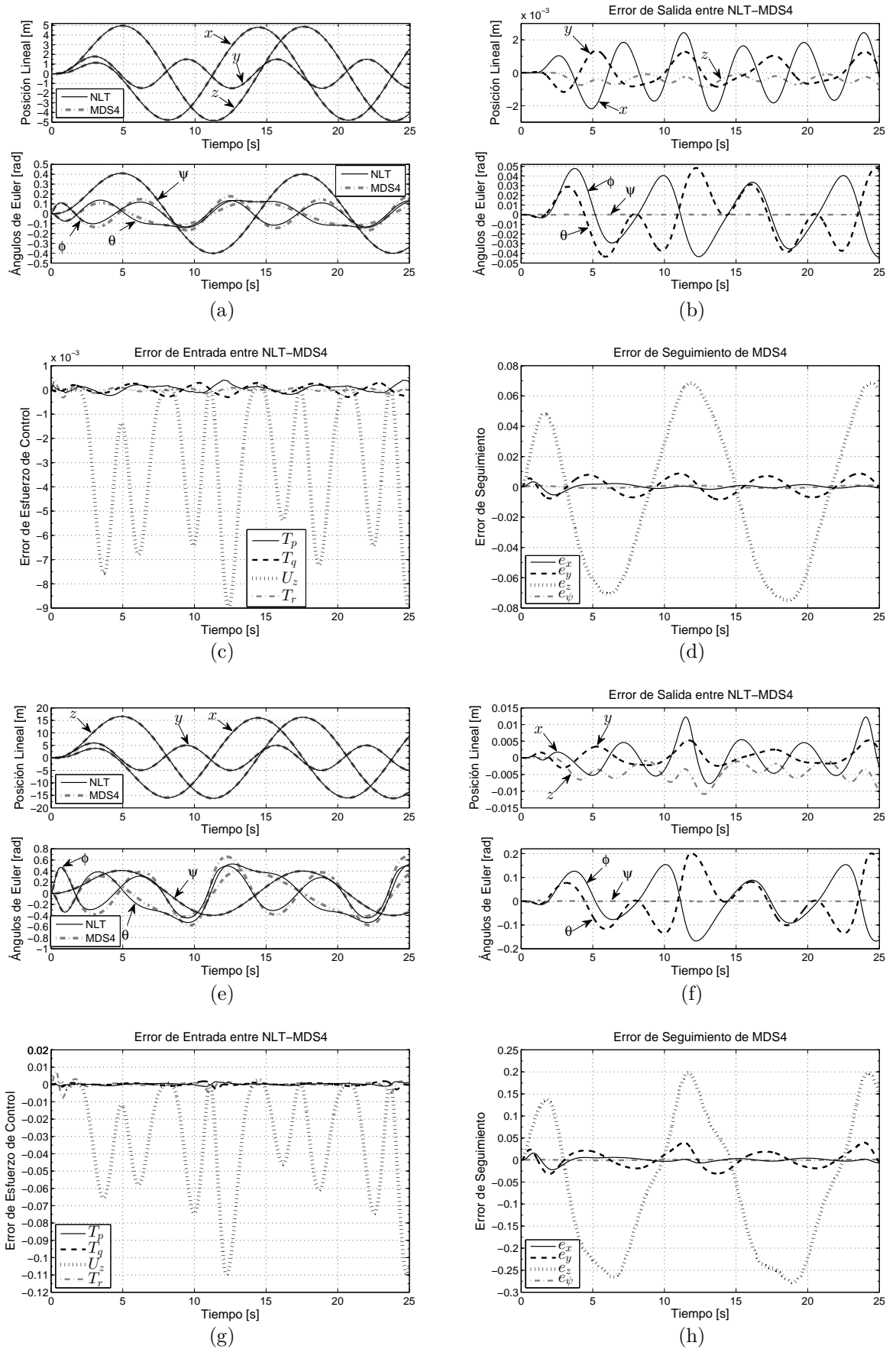


Figura B.12: Simulaciones MDS4, guiñada baja.

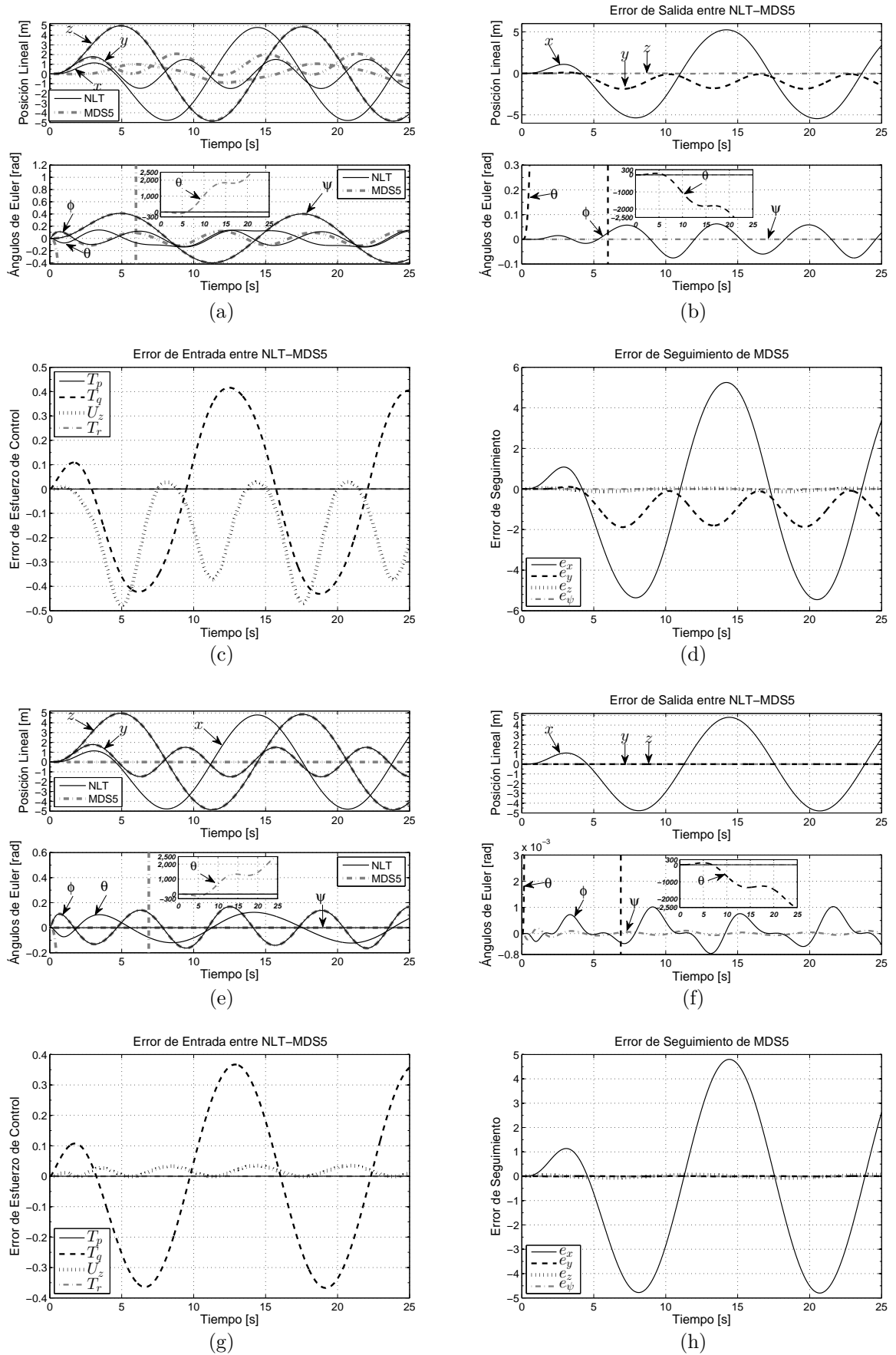
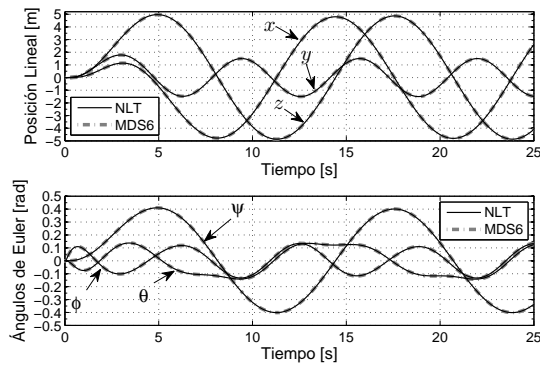
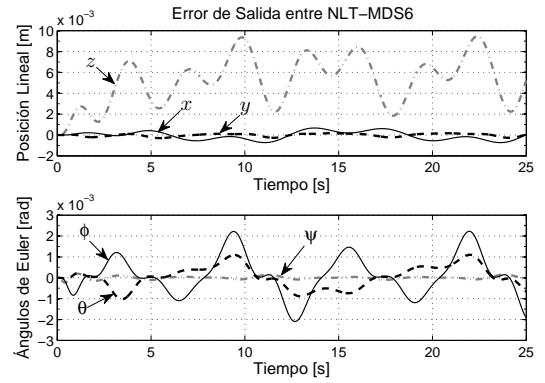


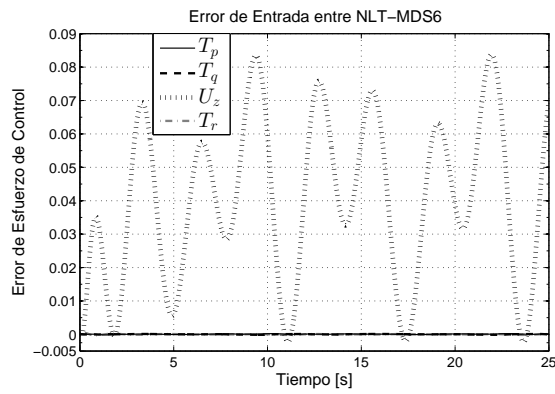
Figura B.13: Simulaciones MDS5, guiñada baja y guiñada cero.



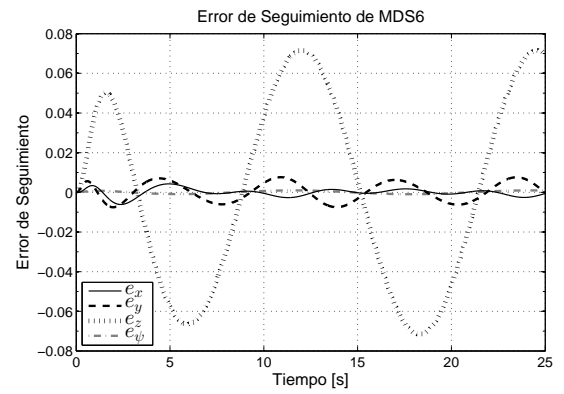
(a)



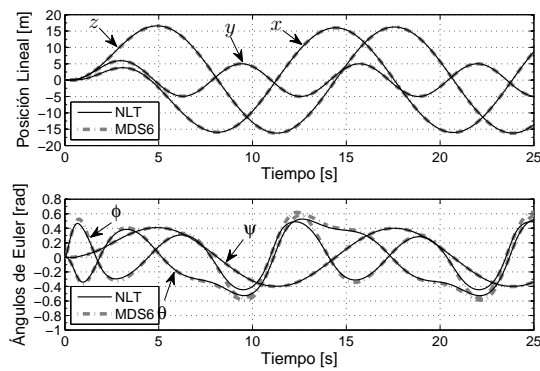
(b)



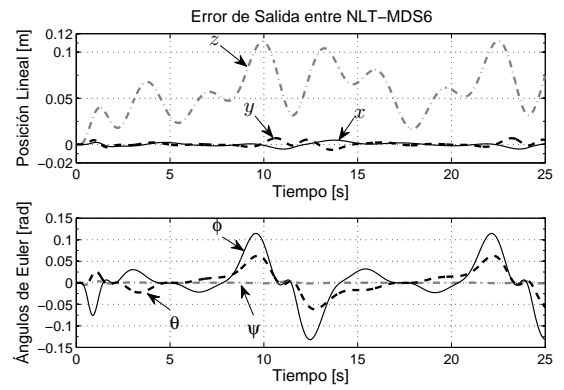
(c)



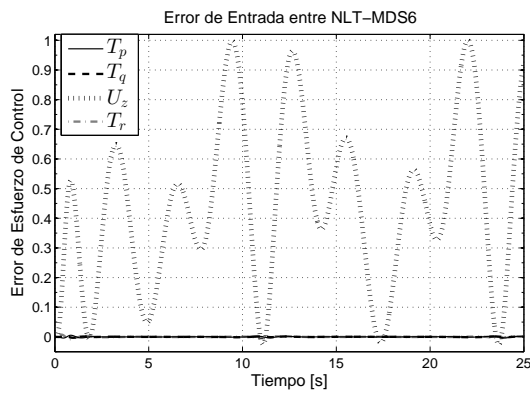
(d)



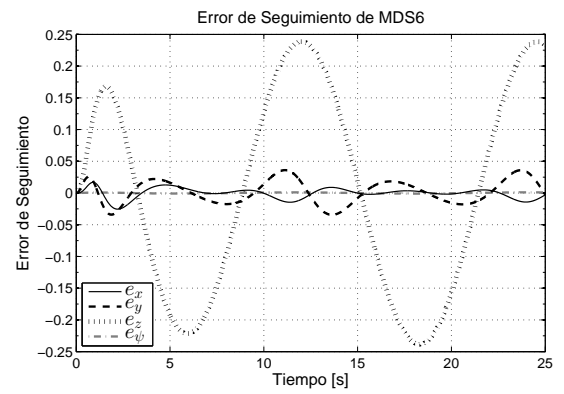
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura B.14: Simulaciones MDS6, guiñada baja.



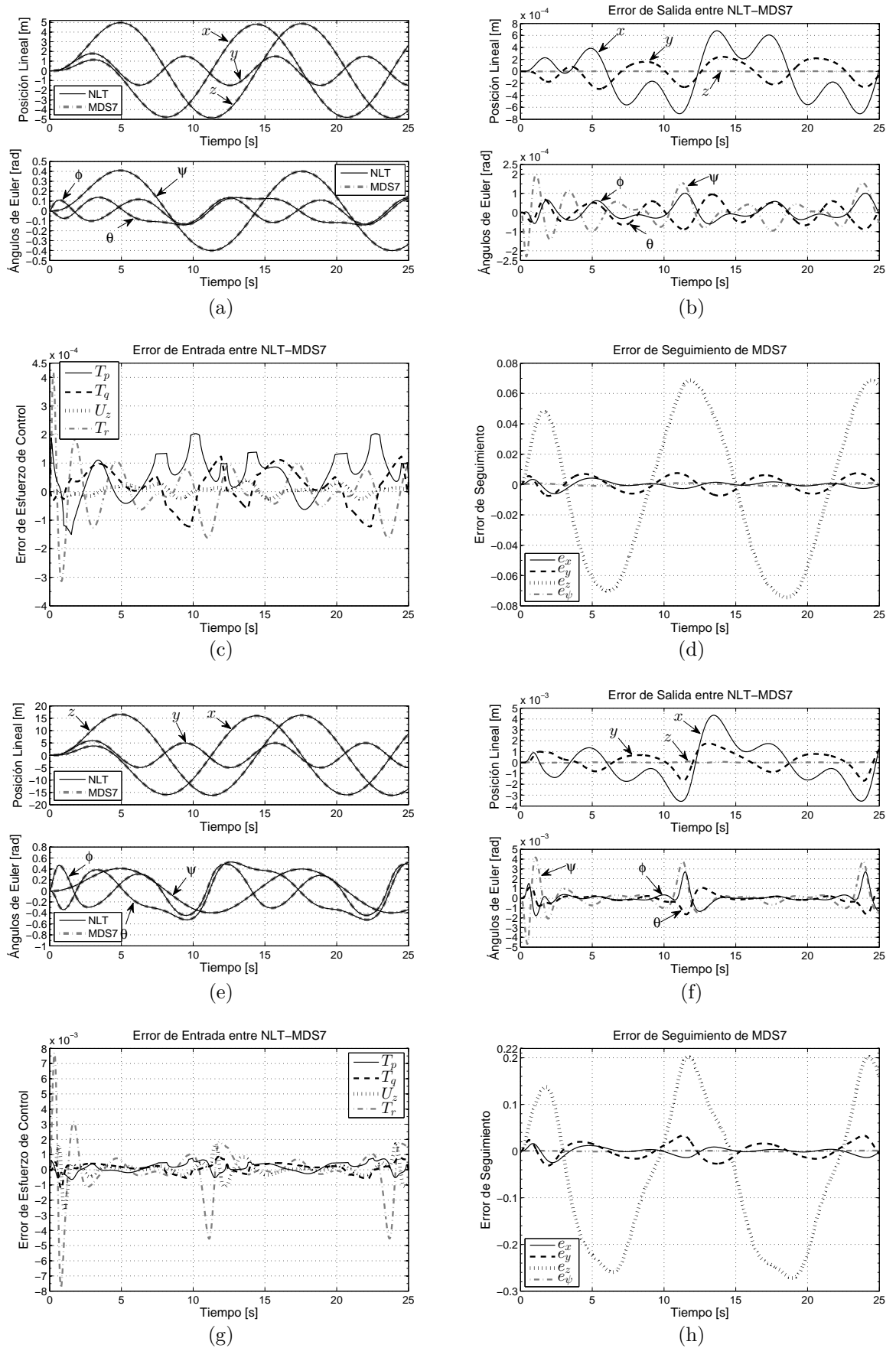


Figura B.15: Simulaciones MDS7, guiñada baja.

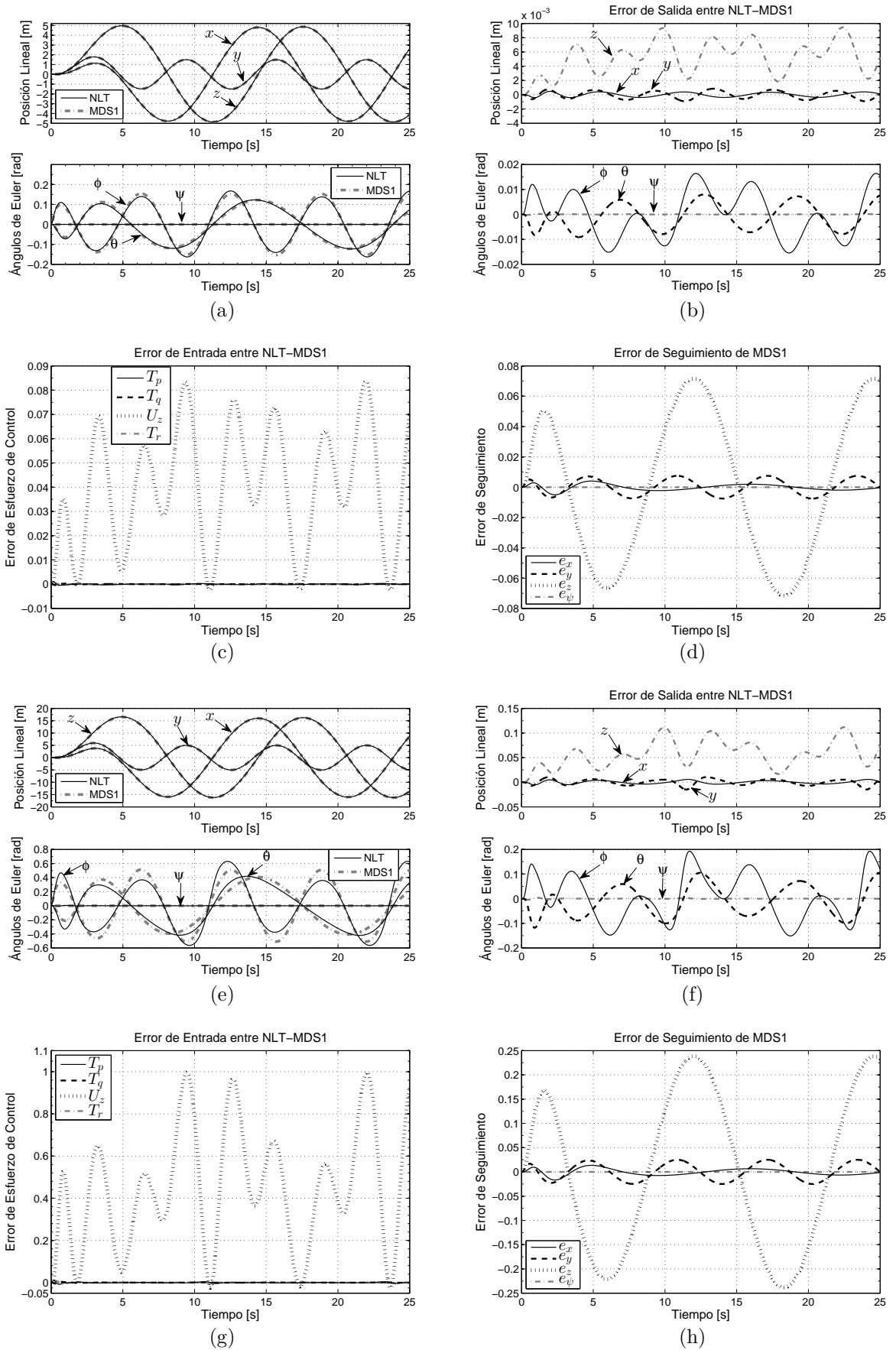


Figura B.16: Simulaciones MDS1, guiñada cero.

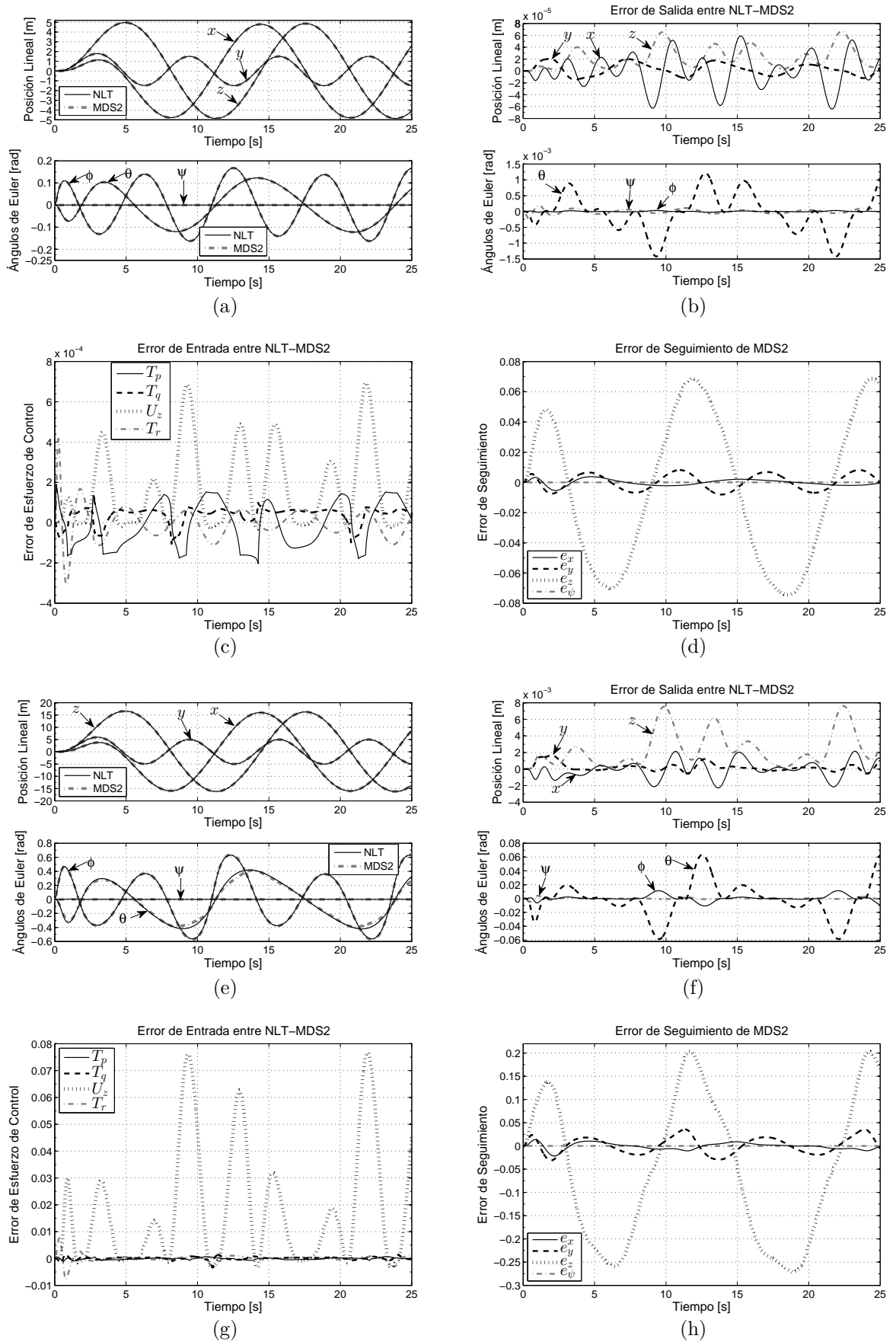


Figura B.17: Simulaciones MDS2, guiñada cero.

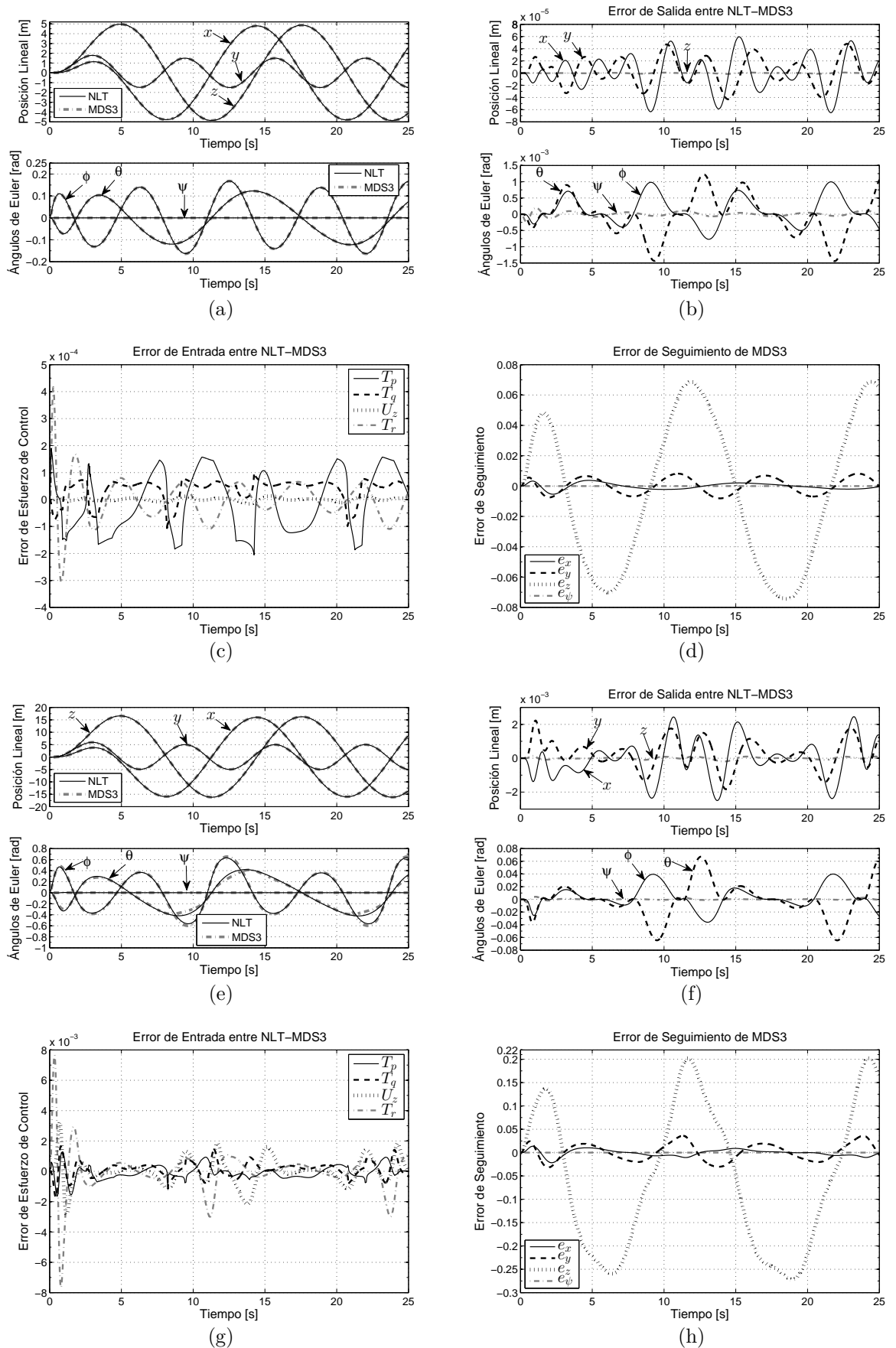


Figura B.18: Simulaciones MDS3, guiñada cero.

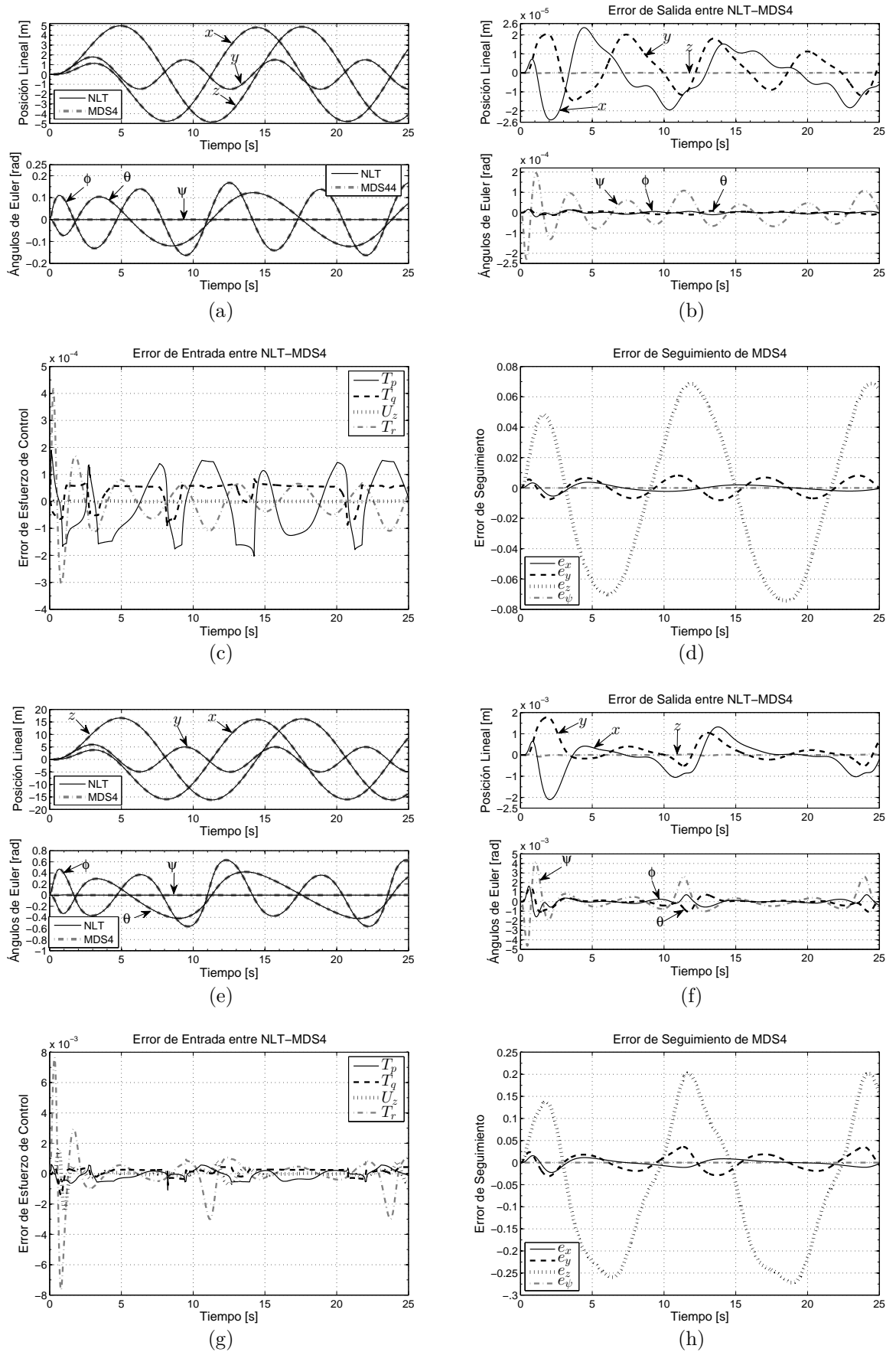


Figura B.19: Simulaciones MDS4, guiñada cero.

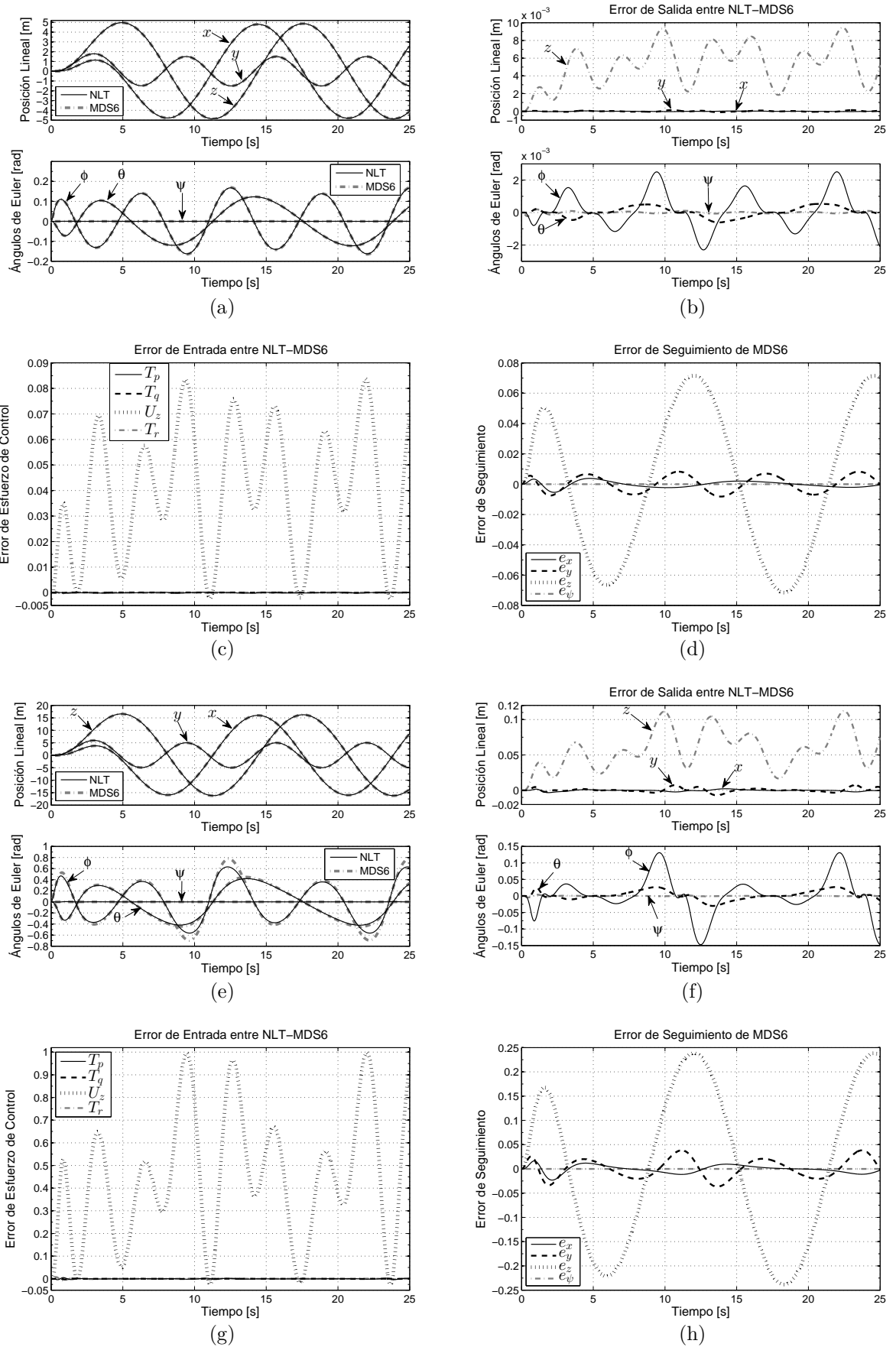


Figura B.20: Simulaciones MDS6, guiñada cero.

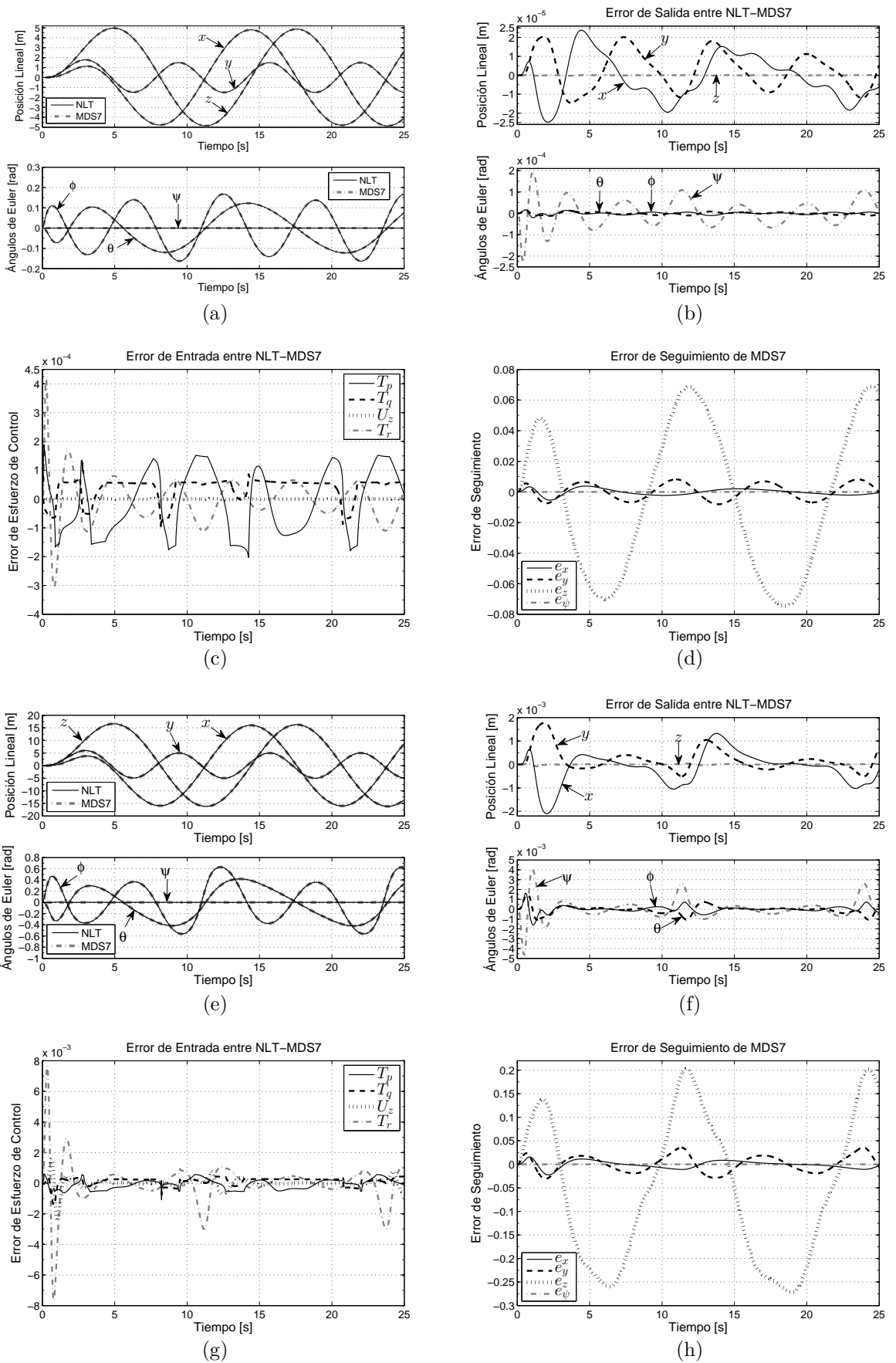


Figura B.21: Simulaciones MDS7, guiñada cero.

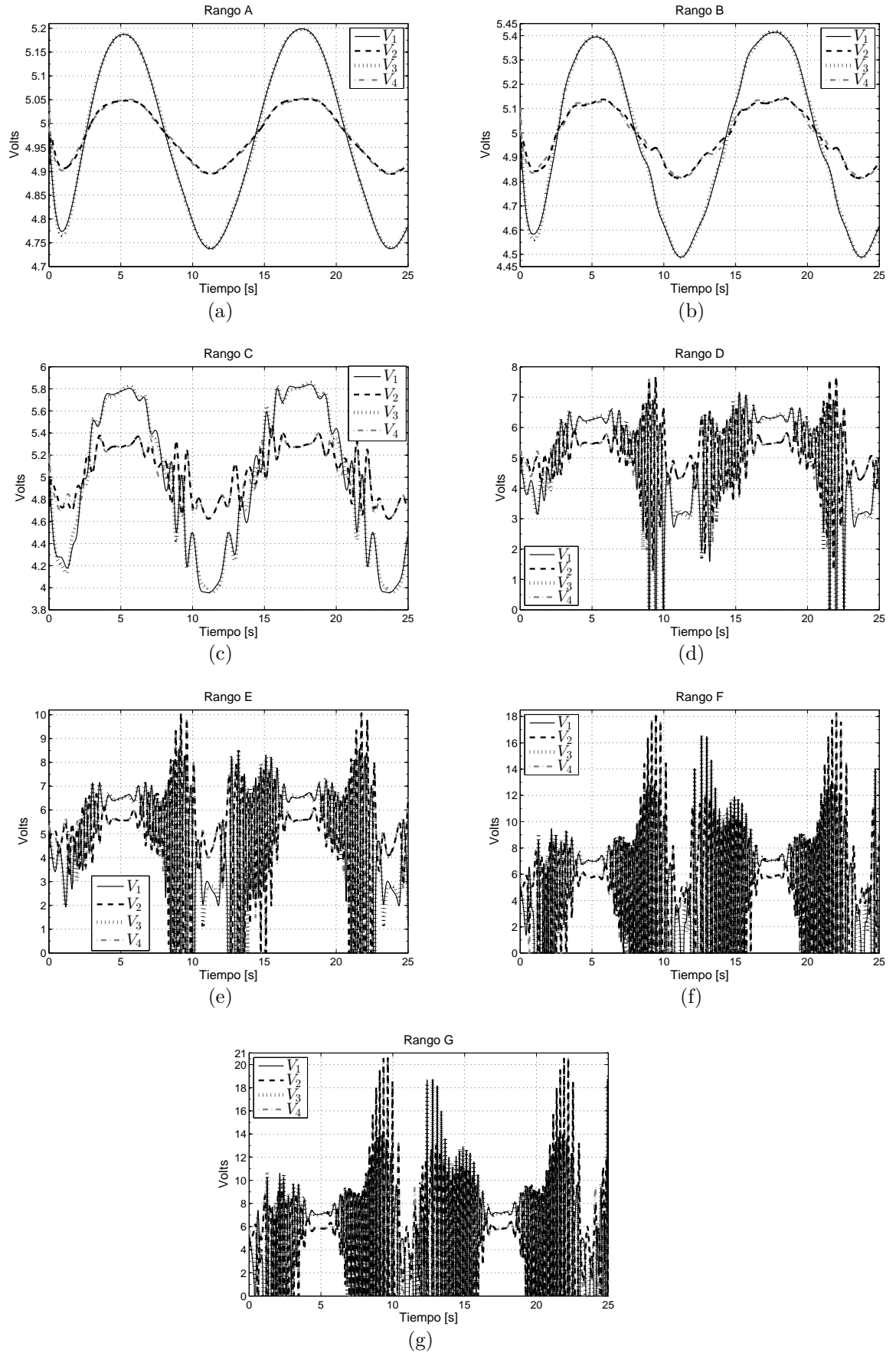


Figura B.22: Voltajes modelo NLT, guiñada alta



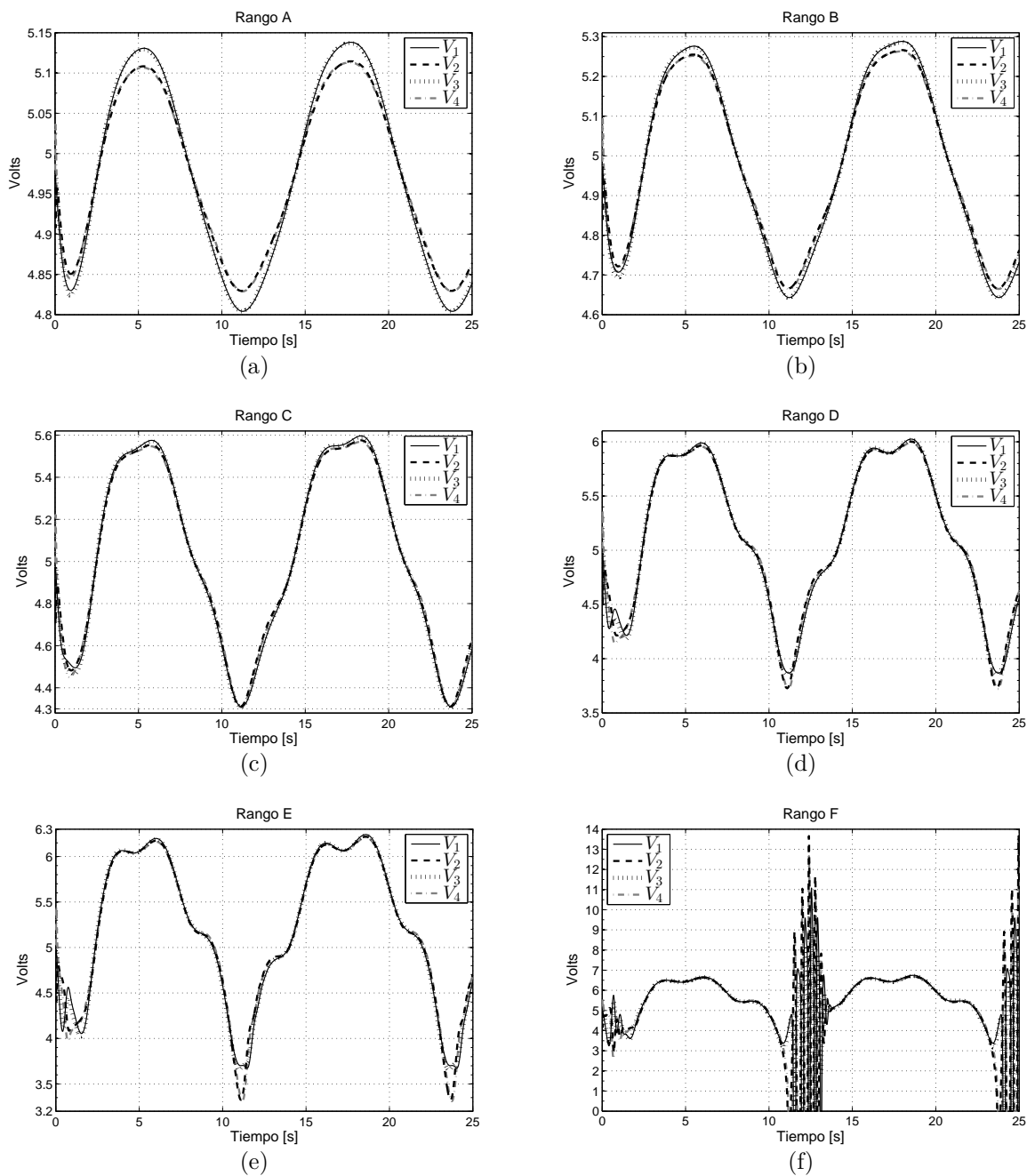


Figura B.23: Voltajes modelo NLT, guiñada baja

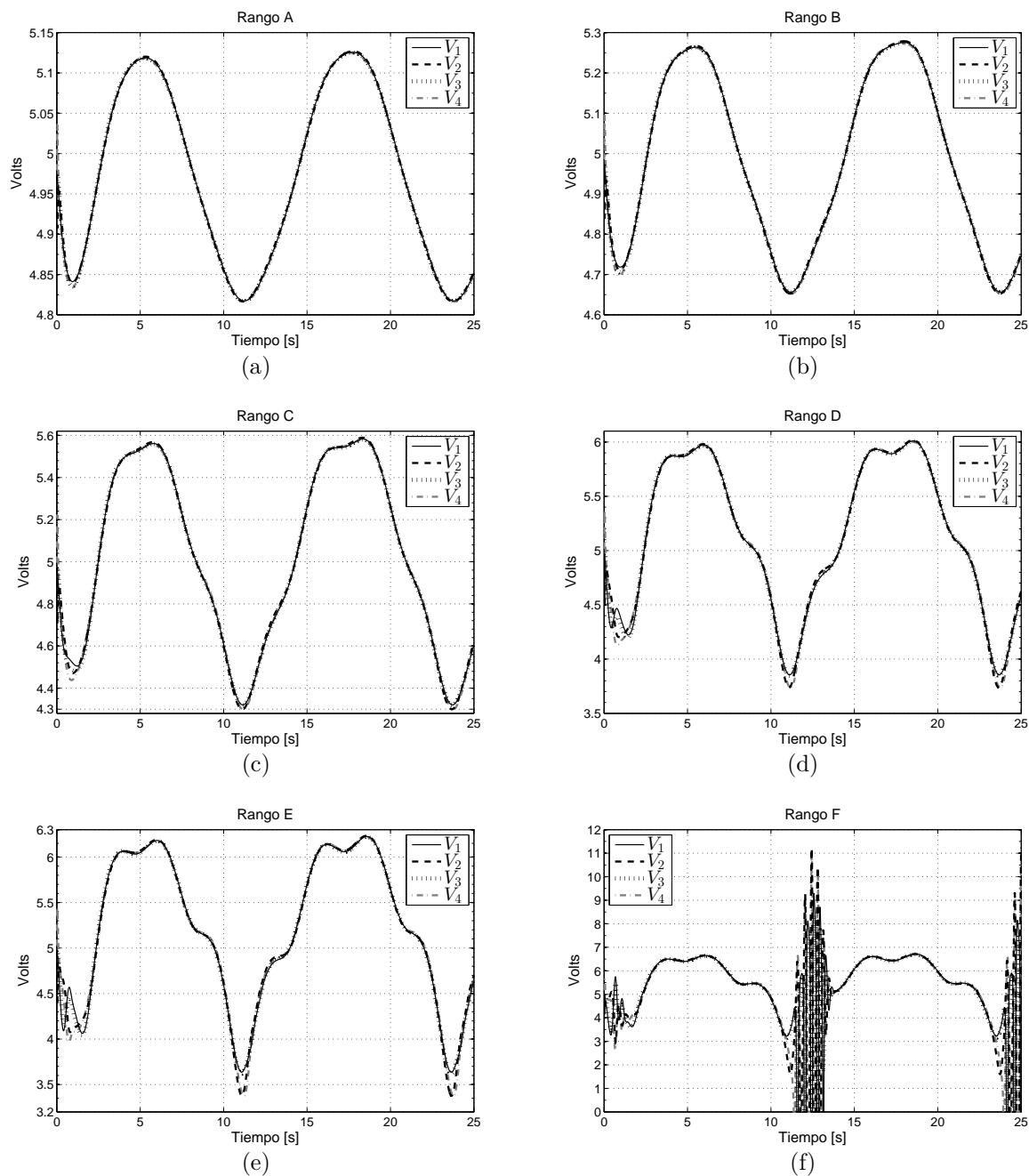


Figura B.24: Voltajes modelo NLT, guiñada cero

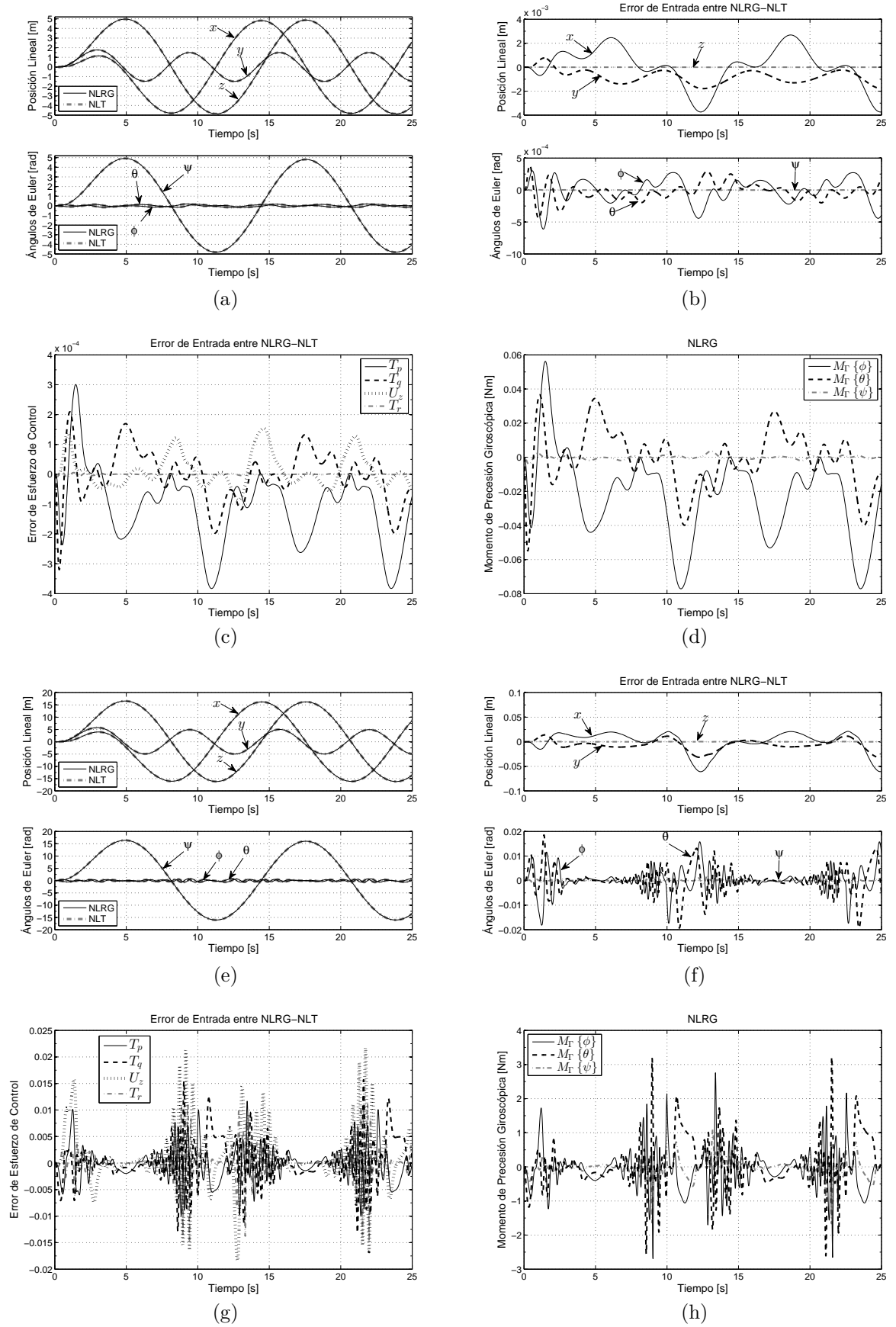


Figura B.25: Simulaciones NLRG, guiñada alta.

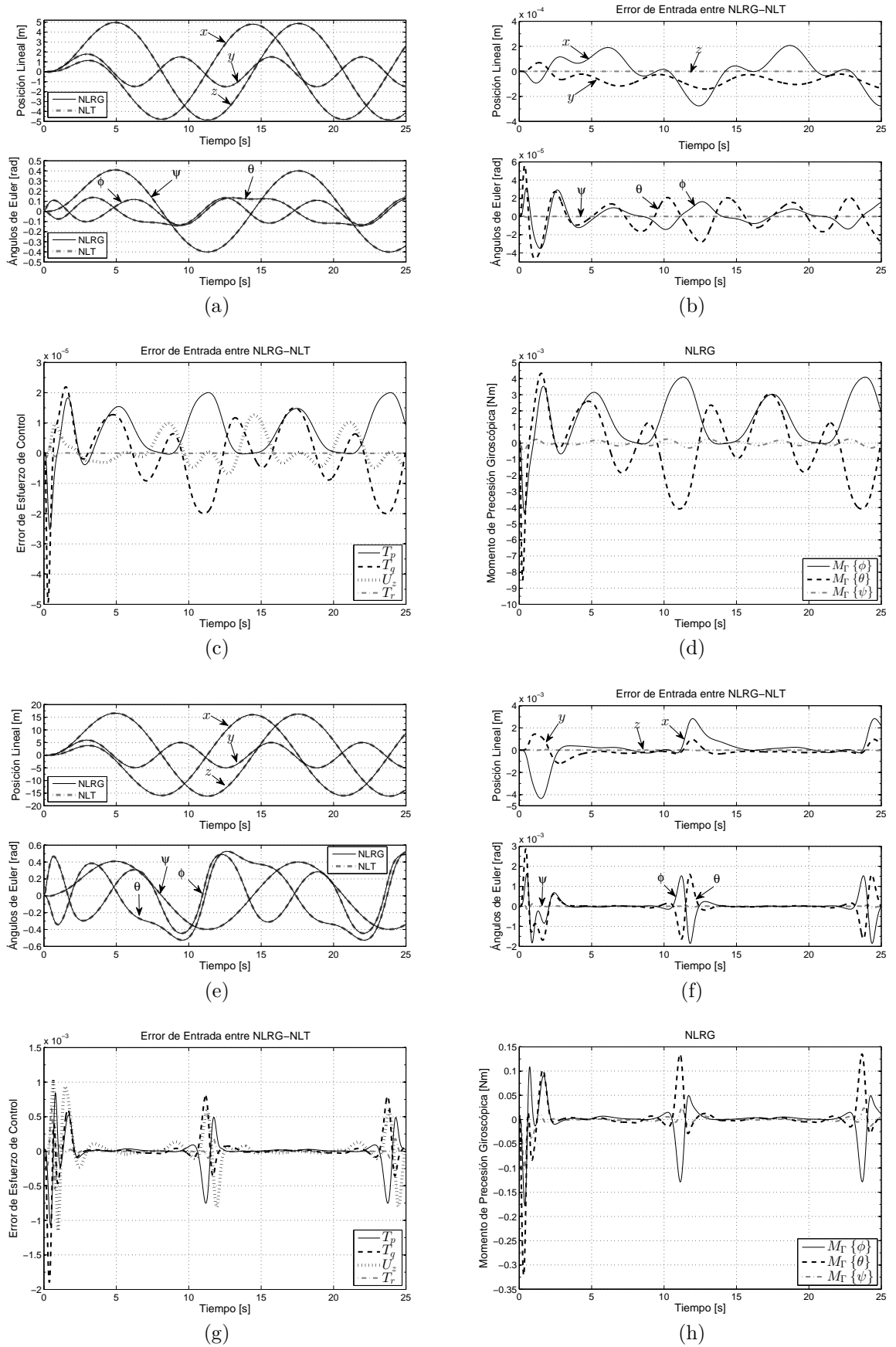


Figura B.26: Simulaciones NLRG, guiñada bajo.

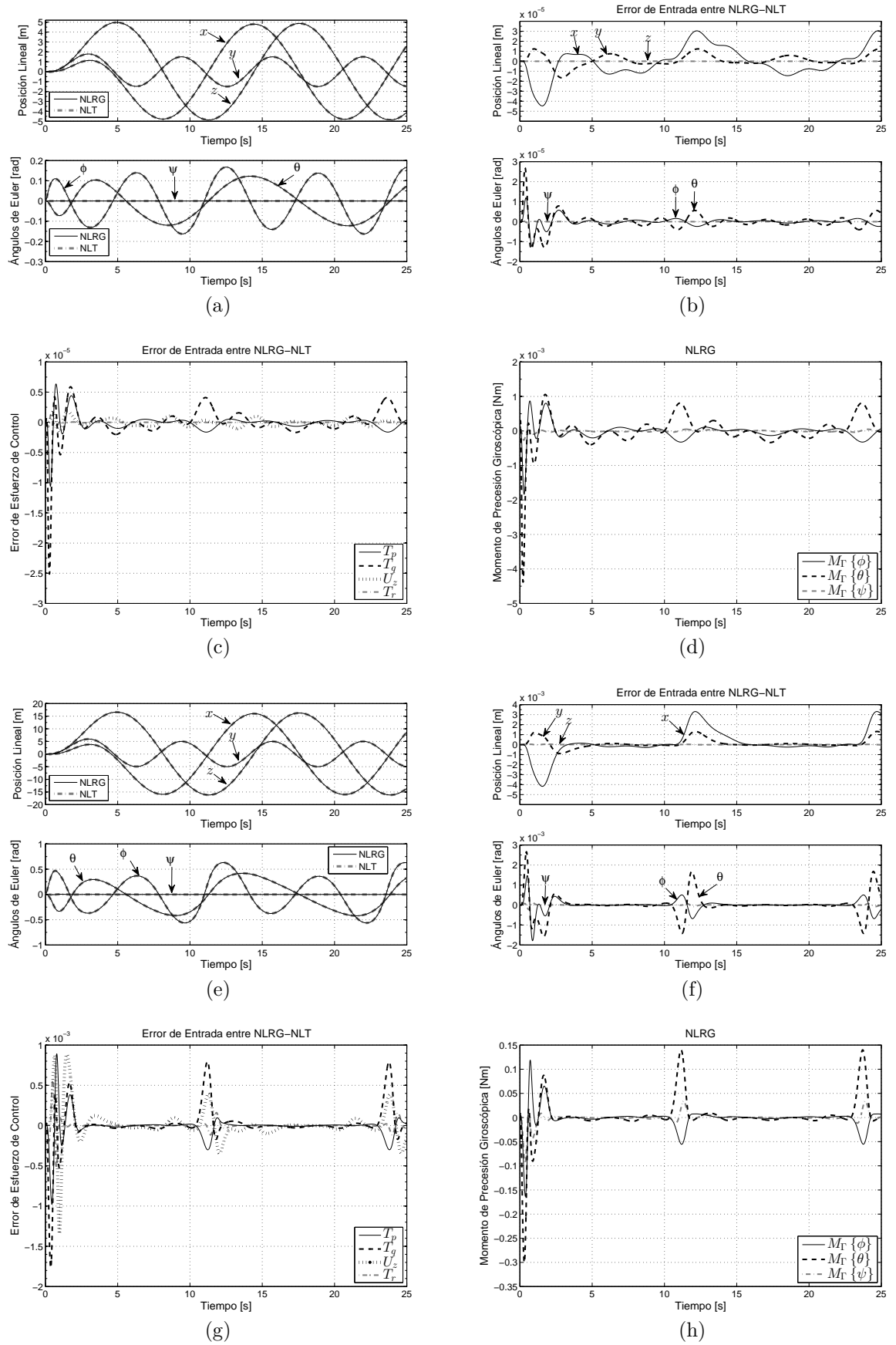


Figura B.27: Simulaciones NLRG, guiñada cero.

## APÉNDICE C

# TABLAS-SIMULACIONES DIGITALES

---

En este apéndice se muestran todas las tablas de resultados obtenidas con los distintos modelos presentados a lo largo de esta tesis.

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades CL
<b>A</b>	$x \in [-2.4036, 2.4039]$ $y \in [-0.7493, 0.8898]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0666, 0.0745]$ $\theta \in [-0.0916, 0.0867]$ $\psi \in [-2.4057, 2.4605]$	$x = 0.0029$ $y = 0.0011$ $z = 0.0013$ $\psi = 2.5547 \times 10^{-5}$	$T_p = 2.9856 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.2268 \times 10^{-4}$ $U_z = 0.0107$ $T_r = 3.0962 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1996, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.7821, 0.7495]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\psi} \in [-1.2059, 1.2028]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8149, 4.8179]$ $y \in [-1.4979, 1.773]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1605, 0.1947]$ $\theta \in [-0.1767, 0.1551]$ $\psi \in [-4.8114, 4.9211]$	$x = 0.0115$ $y = 0.0046$ $z = 0.0054$ $\psi = 2.2194 \times 10^{-4}$	$T_p = 0.0012$ $T_q = 4.6088 \times 10^{-4}$ $U_z = 0.0414$ $T_r = 3.2188 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-2.3993, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5642, 1.499]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\psi} \in [-2.4118, 2.4057]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6559, 9.6794]$ $y \in [-2.993, 3.5172]$ $z \in [-9.7213, 9.9467]$ $\phi \in [-0.4065, 0.3531]$ $\theta \in [-0.3797, 0.3962]$ $\psi \in [-9.6222, 9.8417]$	$x = 0.0451$ $y = 0.0182$ $z = 0.0218$ $\psi = 0.0023$	$T_p = 0.0049$ $T_q = 0.0019$ $U_z = 0.1694$ $T_r = 0.0051$	$\dot{x} \in [-4.7986, 4.7986]$ $\dot{y} \in [-3.1285, 2.998]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\psi} \in [-4.8235, 4.8113]$
<b>D</b>	$x \in [-16.1385, 16.2352]$ $y \in [-4.9816, 5.7875]$ $z \in [-16.1847, 16.5883]$ $\phi \in [-0.6644, 0.6768]$ $\theta \in [-0.6425, 0.6943]$ $\psi \in [-16.0353, 16.4025]$	$x = 0.1218$ $y = 0.0497$ $z = 0.0604$ $\psi = 0.0115$	$T_p = 0.013$ $T_q = 0.0053$ $U_z = 0.4738$ $T_r = 0.0398$	$\dot{x} \in [-7.9976, 7.9976]$ $\dot{y} \in [-5.2141, 4.9966]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\psi} \in [-8.0392, 8.0188]$
<b>E</b>	$x \in [-19.3881, 19.542]$ $y \in [-5.974, 6.8939]$ $z \in [-19.4095, 19.9113]$ $\phi \in [-0.8232, 0.7804]$ $\theta \in [-0.8388, 0.7862]$ $\psi \in [-19.2396, 19.6829]$	$x = 0.1719$ $y = 0.0705$ $z = 0.0866$ $\psi = 0.0197$	$T_p = 0.0181$ $T_q = 0.0075$ $U_z = 0.6805$ $T_r = 0.0811$	$\dot{x} \in [-9.5972, 9.5972]$ $\dot{y} \in [-6.2569, 5.996]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7336]$ $\dot{\psi} \in [-9.647, 9.6226]$
<b>F</b>	$x \in [-26.7138, 27.0314]$ $y \in [-8.2037, 9.3078]$ $z \in [-26.6452, 27.3922]$ $\phi \in [-1.099, 1.1026]$ $\theta \in [-1.1413, 1.1806]$ $\psi \in [-26.4608, 27.0667]$	$x = 0.3064$ $y = 0.1269$ $z = 0.1611$ $\psi = 0.0483$	$T_p = 0.0351$ $T_q = 0.0177$ $U_z = 1.2705$ $T_r = 0.2737$	$\dot{x} \in [-13.1961, 13.1961]$ $\dot{y} \in [-8.6033, 8.2444]$ $\dot{z} \in [-13.4135, 13.3836]$ $\dot{\psi} \in [-13.2647, 13.2311]$
<b>G</b>	$x \in [-28.3437, 28.6872]$ $y \in [-8.6977, 9.8351]$ $z \in [-28.2502, 29.0554]$ $\phi \in [-1.4947, 1.2635]$ $\theta \in [-1.1797, 1.5567]$ $\psi \in [-28.0508, 28.7046]$	$x = 0.3272$ $y = 0.139$ $z = 0.1801$ $\psi = 0.0543$	$T_p = 0.0474$ $T_q = 0.0299$ $U_z = 1.4304$ $T_r = 0.3324$	$\dot{x} \in [-13.9958, 13.9959]$ $\dot{y} \in [-9.1247, 8.7441]$ $\dot{z} \in [-14.2264, 14.1948]$ $\dot{\psi} \in [-14.0686, 14.033]$

Tabla C.1: Resultados de simulación, NLT-CL, guiñada alta

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades CL
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 4.7704 \times 10^{-4}$ $y = 2.0055 \times 10^{-4}$ $z = 0.0013$ $\psi = 1.3147 \times 10^{-5}$	$T_p = 5.4587 \times 10^{-5}$ $T_q = 4.7836 \times 10^{-5}$ $U_z = 0.0104$ $T_r = 1.4616 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1996, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.7821, 0.7495]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 9.8256 \times 10^{-4}$ $y = 5.4314 \times 10^{-4}$ $z = 0.0052$ $\psi = 5.5102 \times 10^{-5}$	$T_p = 1.1516 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.1505 \times 10^{-4}$ $U_z = 0.0404$ $T_r = 6.163 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.3993, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5642, 1.499]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 0.0022$ $y = 0.0019$ $z = 0.0206$ $\psi = 2.4396 \times 10^{-4}$	$T_p = 2.7883 \times 10^{-4}$ $T_q = 3.8151 \times 10^{-4}$ $U_z = 0.1572$ $T_r = 2.8027 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.7986, 4.7986]$ $\dot{y} \in [-3.1284, 2.998]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.0044$ $y = 0.0051$ $z = 0.0566$ $\psi = 8.1493 \times 10^{-4}$	$T_p = 6.8545 \times 10^{-4}$ $T_q = 0.0012$ $U_z = 0.4284$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-7.9976, 7.9976]$ $\dot{y} \in [-5.2141, 4.9966]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0058$ $y = 0.0074$ $z = 0.081$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.001$ $T_q = 0.002$ $U_z = 0.6108$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.5972, 9.5972]$ $\dot{y} \in [-6.2569, 5.9959]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7335]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.0173$ $y = 0.0349$ $z = 0.1544$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0279$ $T_q = 0.0345$ $U_z = 1.2126$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.1961, 13.1961]$ $\dot{y} \in [-8.6033, 8.2444]$ $\dot{z} \in [-13.4135, 13.3836]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.2: Resultados de simulación, NLT-CL, guiñada baja



Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades CL
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 6.0929 \times 10^{-5}$ $y = 1.1399 \times 10^{-4}$ $z = 0.0013$ $\psi = 1.3125 \times 10^{-5}$	$T_p = 2.5054 \times 10^{-5}$ $T_q = 5.3211 \times 10^{-5}$ $U_z = 0.0097$ $T_r = 1.4408 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1996, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.7821, 0.7495]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 2.4405 \times 10^{-4}$ $y = 4.5627 \times 10^{-4}$ $z = 0.0051$ $\psi = 5.3651 \times 10^{-5}$	$T_p = 5.9699 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.2714 \times 10^{-4}$ $U_z = 0.0385$ $T_r = 5.8593 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.3993, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5642, 1.499]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 9.7206 \times 10^{-4}$ $y = 0.0018$ $z = 0.0204$ $\psi = 2.2892 \times 10^{-4}$	$T_p = 1.7263 \times 10^{-4}$ $T_q = 3.9959 \times 10^{-4}$ $U_z = 0.1536$ $T_r = 2.5665 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.7986, 4.7986]$ $\dot{y} \in [-3.1285, 2.998]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 0.0027$ $y = 0.0051$ $z = 0.0565$ $\psi = 7.387 \times 10^{-4}$	$T_p = 4.9304 \times 10^{-4}$ $T_q = 0.0012$ $U_z = 0.424$ $T_r = 8.8168 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-7.9976, 7.9976]$ $\dot{y} \in [-5.2141, 4.9966]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.0038$ $y = 0.0074$ $z = 0.081$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 7.5783 \times 10^{-4}$ $T_q = 0.002$ $U_z = 0.607$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5972, 9.5972]$ $\dot{y} \in [-6.2569, 5.9959]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7335]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.0095$ $y = 0.0179$ $z = 0.154$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0153$ $T_q = 0.0236$ $U_z = 1.1868$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.1961, 13.1961]$ $\dot{y} \in [-8.6033, 8.2444]$ $\dot{z} \in [-13.4135, 13.3836]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.3: Resultados de simulación, NLT-CL, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS1
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 0.0006$ $y = 0.0002$ $z = 0.0013$ $\phi = 0.0093$ $\theta = 0.0114$ $\psi = 0$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.0104$ $T_r = 0$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.7822, 0.7496]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\phi} \in [-0.0766, 0.1596]$ $\dot{\theta} \in [-0.0551, 0.0554]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 0.0012$ $y = 0.0006$ $z = 0.0052$ $\phi = 0.0188$ $\theta = 0.0230$ $\psi = 0.0001$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0.0002$ $U_z = 0.0404$ $T_r = 0.0001$	$\dot{x} \in [-2.4, 2.4]$ $\dot{y} \in [-1.5644, 1.4992]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\phi} \in [-0.1532, 0.3193]$ $\dot{\theta} \in [-0.1102, 0.1107]$ $\dot{\psi} \in [-0.2010, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 0.0027$ $y = 0.0020$ $z = 0.0206$ $\phi = 0.0411$ $\theta = 0.0490$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0004$ $T_q = 0.0004$ $U_z = 0.1572$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.8, 4.8]$ $\dot{y} \in [-3.1288, 2.9984]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\phi} \in [-0.3064, 0.6386]$ $\dot{\theta} \in [-0.2205, 0.2215]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.005$ $y = 0.0053$ $z = 0.0566$ $\phi = 0.0853$ $\theta = 0.0956$ $\psi = 0.0008$	$T_p = 0.0011$ $T_q = 0.001$ $U_z = 0.4284$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-8, 8]$ $\dot{y} \in [-5.2147, 4.9974]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\phi} \in [-0.5107, 1.0637]$ $\dot{\theta} \in [-0.3674, 0.3691]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0064$ $y = 0.0077$ $z = 0.081$ $\phi = 0.1161$ $\theta = 0.1264$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.0019$ $T_q = 0.0014$ $U_z = 0.6108$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.6, 9.6]$ $\dot{y} \in [-6.2577, 5.9968]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7336]$ $\dot{\phi} \in [-0.6128, 1.2771]$ $\dot{\theta} \in [-0.4409, 0.4429]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.0168$ $y = 0.0353$ $z = 0.1544$ $\phi = 0.2114$ $\theta = 0.2507$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0268$ $T_q = 0.0339$ $U_z = 1.2126$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.2, 13.2]$ $\dot{y} \in [-8.6043, 8.2457]$ $\dot{z} \in [-13.4134, 13.3836]$ $\dot{\phi} \in [-0.8426, 1.7561]$ $\dot{\theta} \in [-0.6063, 0.6091]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.4: Resultados de simulación, NLT-MDS1, guiñada baja

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS1
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 0.0001$ $y = 0.0001$ $z = 0.0013$ $\phi = 0.002$ $\theta = 0.0012$ $\psi = 0$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0$ $U_z = 0.0097$ $T_r = 0$	$\dot{x} \in [-1.1996, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.7821, 0.7495]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\phi} \in [-0.0766, 0.1596]$ $\dot{\theta} \in [-0.0551, 0.0554]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 0.0002$ $y = 0.0005$ $z = 0.0051$ $\phi = 0.0078$ $\theta = 0.0047$ $\psi = 0.0001$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.0385$ $T_r = 0.0001$	$\dot{x} \in [-2.3993, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5642, 1.499]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\phi} \in [-0.1532, 0.3193]$ $\dot{\theta} \in [-0.1103, 0.1109]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 0.001$ $y = 0.0018$ $z = 0.0204$ $\phi = 0.0303$ $\theta = 0.0188$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0004$ $T_q = 0.0002$ $U_z = 0.1536$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.7986, 4.7986]$ $\dot{y} \in [-3.1285, 2.998]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\phi} \in [-0.3063, 0.6386]$ $\dot{\theta} \in [-0.2205, 0.2218]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 0.0027$ $y = 0.0051$ $z = 0.0565$ $\phi = 0.0787$ $\theta = 0.0537$ $\psi = 0.0007$	$T_p = 0.0012$ $T_q = 0.0005$ $U_z = 0.424$ $T_r = 0.0009$	$\dot{x} \in [-7.9976, 7.9976]$ $\dot{y} \in [-5.2141, 4.9966]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\phi} \in [-0.5105, 1.0638]$ $\dot{\theta} \in [-0.3675, 0.3696]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.0038$ $y = 0.0074$ $z = 0.081$ $\phi = 0.1095$ $\theta = 0.0789$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 0.002$ $T_q = 0.0008$ $U_z = 0.607$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5972, 9.5972]$ $\dot{y} \in [-6.2569, 5.9959]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7336]$ $\dot{\phi} \in [-0.6126, 1.2771]$ $\dot{\theta} \in [-0.4411, 0.4436]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.0095$ $y = 0.0179$ $z = 0.154$ $\phi = 0.2$ $\theta = 0.1685$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0235$ $T_q = 0.0152$ $U_z = 1.1868$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.1961, 13.1961]$ $\dot{y} \in [-8.6033, 8.2444]$ $\dot{z} \in [-13.4134, 13.3836]$ $\dot{\phi} \in [-0.8424, 1.756]$ $\dot{\theta} \in [-0.6065, 0.6099]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.5: Resultados de simulación, NLT-MDS1, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS2
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 5.936 \times 10^{-4}$ $y = 2.022 \times 10^{-4}$ $z = 2.7 \times 10^{-6}$ $\phi = 0.0092$ $\theta = 0.0114$ $\psi = 0$	$T_p = 4.928 \times 10^{-5}$ $T_q = 8.295 \times 10^{-5}$ $U_z = 2.767 \times 10^{-5}$ $T_r = 1.462 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.782, 0.7498]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0771, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0584, 0.0567]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 0.0012$ $y = 0.0004$ $z = 0$ $\phi = 0.0183$ $\theta = 0.0229$ $\psi = 0.0001$	$T_p = 9.59 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.674 \times 10^{-4}$ $U_z = 2.123 \times 10^{-4}$ $T_r = 6.16 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.4001, 2.4]$ $\dot{y} \in [-1.5638, 1.5]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1556, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1238, 0.1168]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 0.0025$ $y = 0.0008$ $z = 0.0003$ $\phi = 0.0365$ $\theta = 0.0482$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0002$ $T_q = 0.0004$ $U_z = 0.0027$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.8004, 4.8003]$ $\dot{y} \in [-3.1269, 3.0013]$ $\dot{z} \in [-4.8781, 4.8611]$ $\dot{\phi} \in [-0.3418, 0.6587]$ $\dot{\theta} \in [-0.2775, 0.2536]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.0046$ $y = 0.0013$ $z = 0.0023$ $\phi = 0.0634$ $\theta = 0.0909$ $\psi = 0.0008$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0007$ $U_z = 0.018$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-8.001, 8.0017]$ $\dot{y} \in [-5.2108, 5.0039]$ $\dot{z} \in [-8.1277, 8.0929]$ $\dot{\phi} \in [-0.6553, 1.1314]$ $\dot{\theta} \in [-0.5273, 0.4911]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0059$ $y = 0.0017$ $z = 0.0045$ $\phi = 0.0792$ $\theta = 0.1175$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.0005$ $T_q = 0.0011$ $U_z = 0.0339$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.6014, 9.6026]$ $\dot{y} \in [-6.2528, 6.0054]$ $\dot{z} \in [-9.751, 9.706]$ $\dot{\phi} \in [-0.8426, 1.387]$ $\dot{\theta} \in [-0.6647, 0.6427]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.0156$ $y = 0.0256$ $z = 0.0139$ $\phi = 0.1359$ $\theta = 0.2202$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0142$ $T_q = 0.0349$ $U_z = 0.1178$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.2023, 13.2053]$ $\dot{y} \in [-8.5973, 8.2584]$ $\dot{z} \in [-13.3999, 13.3286]$ $\dot{\phi} \in [-3.2481, 3.2926]$ $\dot{\theta} \in [-1.8359, 2.0236]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.6: Resultados de simulación, NLT-MDS2, guiñada baja

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS2
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 2.614 \times 10^{-6}$ $y = 1.083 \times 10^{-6}$ $z = 1.397 \times 10^{-6}$ $\phi = 6.2 \times 10^{-7}$ $\theta = 5.107 \times 10^{-5}$ $\psi = 1.313 \times 10^{-5}$	$T_p = 4.982 \times 10^{-5}$ $T_q = 2.453 \times 10^{-5}$ $U_z = 1.043 \times 10^{-5}$ $T_r = 1.442 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1997, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.782, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0771, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0584, 0.0568]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 2.081 \times 10^{-5}$ $y = 8.36 \times 10^{-6}$ $z = 2.215 \times 10^{-5}$ $\phi = 8.3 \times 10^{-6}$ $\theta = 4.106 \times 10^{-4}$ $\psi = 5.37 \times 10^{-5}$	$T_p = 9.8 \times 10^{-5}$ $T_q = 5.31 \times 10^{-5}$ $U_z = 1.651 \times 10^{-4}$ $T_r = 5.86 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.3994, 2.3994]$ $\dot{y} \in [-1.5637, 1.4998]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1555, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1238, 0.117]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 1.661 \times 10^{-4}$ $y = 6.38 \times 10^{-5}$ $z = 3.409 \times 10^{-4}$ $\phi = 0.0002$ $\theta = 0.0034$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0002$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.0025$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.7992, 4.7998]$ $\dot{y} \in [-3.1268, 3.0009]$ $\dot{z} \in [-4.8781, 4.8611]$ $\dot{\phi} \in [-0.3414, 0.6588]$ $\dot{\theta} \in [-0.2776, 0.2541]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 0.0008$ $y = 0.0003$ $z = 0.0024$ $\phi = 0.0022$ $\theta = 0.016$ $\psi = 0.0007$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0004$ $U_z = 0.0175$ $T_r = 0.0009$	$\dot{x} \in [-7.9995, 8.0062]$ $\dot{y} \in [-5.2108, 5.0035]$ $\dot{z} \in [-8.1277, 8.0931]$ $\dot{\phi} \in [-0.6542, 1.1314]$ $\dot{\theta} \in [-0.5275, 0.4927]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.0014$ $y = 0.0007$ $z = 0.0045$ $\phi = 0.0051$ $\theta = 0.028$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 0.0004$ $T_q = 0.0007$ $U_z = 0.0332$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5998, 9.6152]$ $\dot{y} \in [-6.2528, 6.0049]$ $\dot{z} \in [-9.7511, 9.7062]$ $\dot{\phi} \in [-0.841, 1.387]$ $\dot{\theta} \in [-0.665, 0.6454]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.0056$ $y = 0.0069$ $z = 0.0131$ $\phi = 0.263$ $\theta = 0.0854$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0112$ $T_q = 0.0152$ $U_z = 0.1065$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.2006, 13.264]$ $\dot{y} \in [-8.5975, 8.258]$ $\dot{z} \in [-13.4, 13.3294]$ $\dot{\phi} \in [-1.7357, 3.2537]$ $\dot{\theta} \in [-0.9783, 1.4086]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.7: Resultados de simulación, NLT-MDS2, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS3
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 5.934 \times 10^{-4}$ $y = 2.042 \times 10^{-4}$ $z = 2.1 \times 10^{-6}$ $\phi = 0.0093$ $\theta = 0.0114$ $\psi = 0$	$T_p = 4.933 \times 10^{-5}$ $T_q = 8.295 \times 10^{-5}$ $U_z = 2.219 \times 10^{-5}$ $T_r = 1.462 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.782, 0.7498]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0773, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0584, 0.0567]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 0.0012$ $y = 0.0004$ $z = 0$ $\phi = 0.0186$ $\theta = 0.0229$ $\psi = 0.0001$	$T_p = 9.58 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.674 \times 10^{-4}$ $U_z = 8.72 \times 10^{-5}$ $T_r = 6.16 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.4001, 2.4]$ $\dot{y} \in [-1.5637, 1.5001]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1568, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1237, 0.1168]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 0.0025$ $y = 0.0009$ $z = 0$ $\phi = 0.0388$ $\theta = 0.0483$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 1.896 \times 10^{-4}$ $T_q = 3.569 \times 10^{-4}$ $U_z = 3.646 \times 10^{-4}$ $T_r = 2.803 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.8004, 4.8005]$ $\dot{y} \in [-3.1267, 3.0017]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8608]$ $\dot{\phi} \in [-0.3441, 0.6587]$ $\dot{\theta} \in [-0.2775, 0.2537]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.0046$ $y = 0.0017$ $z = 0.0001$ $\phi = 0.0726$ $\theta = 0.0921$ $\psi = 0.0008$	$T_p = 0.0004$ $T_q = 0.0007$ $U_z = 0.0013$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-8.0011, 8.0029]$ $\dot{y} \in [-5.2103, 5.0056]$ $\dot{z} \in [-8.1281, 8.0907]$ $\dot{\phi} \in [-0.6771, 1.1315]$ $\dot{\theta} \in [-0.5269, 0.4929]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.006$ $y = 0.0023$ $z = 0.0002$ $\phi = 0.0935$ $\theta = 0.1203$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.0006$ $T_q = 0.0011$ $U_z = 0.0024$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.6016, 9.605]$ $\dot{y} \in [-6.252, 6.0081]$ $\dot{z} \in [-9.7517, 9.7017]$ $\dot{\phi} \in [-0.8883, 1.3873]$ $\dot{\theta} \in [-0.6636, 0.6476]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.0159$ $y = 0.0262$ $z = 0.0037$ $\phi = 0.1692$ $\theta = 0.2307$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0492$ $T_q = 0.0506$ $U_z = 0.0848$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.2026, 13.2063]$ $\dot{y} \in [-8.5961, 8.2645]$ $\dot{z} \in [-13.4014, 13.3014]$ $\dot{\phi} \in [-20.6521, 7.4078]$ $\dot{\theta} \in [-7.376, 6.2043]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.8: Resultados de simulación, NLT-MDS3, guiñada baja

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS3
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 2.62 \times 10^{-6}$ $y = 2.289 \times 10^{-6}$ $z = 2.4 \times 10^{-8}$ $\phi = 3.697 \times 10^{-5}$ $\theta = 5.118 \times 10^{-5}$ $\psi = 1.313 \times 10^{-5}$	$T_p = 4.985 \times 10^{-5}$ $T_q = 2.453 \times 10^{-5}$ $U_z = 3 \times 10^{-7}$ $T_r = 1.442 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1997, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.7819, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0772, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0584, 0.0568]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 2.102 \times 10^{-5}$ $y = 1.828 \times 10^{-5}$ $z = 3.8 \times 10^{-7}$ $\phi = 2.965 \times 10^{-4}$ $\theta = 4.139 \times 10^{-4}$ $\psi = 5.37 \times 10^{-5}$	$T_p = 9.81 \times 10^{-5}$ $T_q = 5.314 \times 10^{-5}$ $U_z = 4.64 \times 10^{-6}$ $T_r = 5.859 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.3994, 2.3994]$ $\dot{y} \in [-1.5636, 1.4999]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1567, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1238, 0.117]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 1.724 \times 10^{-4}$ $y = 1.478 \times 10^{-4}$ $z = 6.1 \times 10^{-6}$ $\phi = 0.0024$ $\theta = 0.0035$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 1.828 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.224 \times 10^{-4}$ $U_z = 7.62 \times 10^{-5}$ $T_r = 2.566 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.7992, 4.7998]$ $\dot{y} \in [-3.1266, 3.0013]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8608]$ $\dot{\phi} \in [-0.3436, 0.6589]$ $\dot{\theta} \in [-0.2776, 0.2541]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 8.462 \times 10^{-4}$ $y = 7.001 \times 10^{-4}$ $z = 4.7 \times 10^{-5}$ $\phi = 0.0113$ $\theta = 0.0172$ $\psi = 0.0007$	$T_p = 3.481 \times 10^{-4}$ $T_q = 4.017 \times 10^{-4}$ $U_z = 6.38 \times 10^{-4}$ $T_r = 8.817 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-7.9995, 8.0067]$ $\dot{y} \in [-5.2102, 5.0052]$ $\dot{z} \in [-8.1281, 8.0908]$ $\dot{\phi} \in [-0.6765, 1.1315]$ $\dot{\theta} \in [-0.5271, 0.4945]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.0015$ $y = 0.0012$ $z = 0.0001$ $\phi = 0.0194$ $\theta = 0.0307$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 0.0006$ $T_q = 0.0007$ $U_z = 0.0014$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5998, 9.6164]$ $\dot{y} \in [-6.2519, 6.0077]$ $\dot{z} \in [-9.7518, 9.7019]$ $\dot{\phi} \in [-0.8879, 1.3872]$ $\dot{\theta} \in [-0.6638, 0.6505]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.006$ $y = 0.0075$ $z = 0.0007$ $\phi = 0.0521$ $\theta = 0.0958$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0089$ $T_q = 0.015$ $U_z = 0.0249$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.2006, 13.2679]$ $\dot{y} \in [-8.596, 8.2642]$ $\dot{z} \in [-13.4015, 13.3177]$ $\dot{\phi} \in [-1.972, 3.3485]$ $\dot{\theta} \in [-0.9747, 1.4463]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.9: Resultados de simulación, NLT-MDS3, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS4
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 5.774 \times 10^{-4}$ $y = 2.982 \times 10^{-4}$ $z = 9.52 \times 10^{-5}$ $\phi = 0.0111$ $\theta = 0.0104$ $\psi = 0$	$T_p = 6.29 \times 10^{-5}$ $T_q = 7.46 \times 10^{-5}$ $U_z = 7.568 \times 10^{-4}$ $T_r = 1.46 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.7823, 0.7495]$ $\dot{z} \in [-1.2196, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0773, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0585, 0.0571]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 0.0012$ $y = 0.0006$ $z = 0.0004$ $\phi = 0.022$ $\theta = 0.0206$ $\psi = 0.0001$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.003$ $T_r = 0.0001$	$\dot{x} \in [-2.4001, 2.4]$ $\dot{y} \in [-1.5643, 1.4995]$ $\dot{z} \in [-2.4394, 2.4319]$ $\dot{\phi} \in [-0.1562, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1247, 0.1174]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 0.0023$ $y = 0.0012$ $z = 0.0015$ $\phi = 0.0435$ $\theta = 0.0411$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0003$ $U_z = 0.0115$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.8002, 4.7995]$ $\dot{y} \in [-3.1277, 3.0003]$ $\dot{z} \in [-4.8791, 4.8595]$ $\dot{\phi} \in [-0.3424, 0.6587]$ $\dot{\theta} \in [-0.2884, 0.2529]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.0037$ $y = 0.0019$ $z = 0.0039$ $\phi = 0.0721$ $\theta = 0.0691$ $\psi = 0.0008$	$T_p = 0.0005$ $T_q = 0.0006$ $U_z = 0.0307$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-8.0004, 7.9964]$ $\dot{y} \in [-5.2119, 5.0027]$ $\dot{z} \in [-8.1305, 8.0876]$ $\dot{\phi} \in [-0.658, 1.1314]$ $\dot{\theta} \in [-0.6105, 0.4808]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0044$ $y = 0.0023$ $z = 0.0054$ $\phi = 0.0863$ $\theta = 0.0831$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.0006$ $T_q = 0.001$ $U_z = 0.0428$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.6005, 9.5916]$ $\dot{y} \in [-6.254, 6.0041]$ $\dot{z} \in [-9.7551, 9.6976]$ $\dot{\phi} \in [-0.8508, 1.4628]$ $\dot{\theta} \in [-0.8464, 0.6214]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.0131$ $y = 0.0258$ $z = 0.0092$ $\phi = 0.1265$ $\theta = 0.1298$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0165$ $T_q = 0.0303$ $U_z = 0.1150$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.2009, 13.1697]$ $\dot{y} \in [-8.5989, 8.257]$ $\dot{z} \in [-13.4072, 13.3107]$ $\dot{\phi} \in [-2.9463, 3.7752]$ $\dot{\theta} \in [-4.2287, 2.9818]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.10: Resultados de simulación, NLT-MDS4, guiñada baja



Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS4
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 1.242 \times 10^{-6}$ $y = 1.091 \times 10^{-6}$ $z = 4 \times 10^{-9}$ $\phi = 5 \times 10^{-7}$ $\theta = 5.7 \times 10^{-7}$ $\psi = 1.313 \times 10^{-5}$	$T_p = 4.982 \times 10^{-5}$ $T_q = 2.439 \times 10^{-5}$ $U_z = 6 \times 10^{-8}$ $T_r = 1.442 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1997, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.782, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0771, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0585, 0.0568]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 1.024 \times 10^{-5}$ $y = 8.61 \times 10^{-6}$ $z = 6 \times 10^{-8}$ $\phi = 4.03 \times 10^{-6}$ $\theta = 4.71 \times 10^{-6}$ $\psi = 5.365 \times 10^{-5}$	$T_p = 9.798 \times 10^{-5}$ $T_q = 5.232 \times 10^{-5}$ $U_z = 9.3 \times 10^{-7}$ $T_r = 5.859 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.3994, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5637, 1.4998]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1555, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1247, 0.1169]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 9.183 \times 10^{-5}$ $y = 6.903 \times 10^{-5}$ $z = 1.16 \times 10^{-6}$ $\phi = 3.6 \times 10^{-5}$ $\theta = 4.38 \times 10^{-5}$ $\psi = 2.289 \times 10^{-4}$	$T_p = 1.8 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.159 \times 10^{-4}$ $U_z = 1.78 \times 10^{-5}$ $T_r = 2.566 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.799, 4.799]$ $\dot{y} \in [-3.1268, 3.001]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8608]$ $\dot{\phi} \in [-0.3414, 0.6588]$ $\dot{\theta} \in [-0.2886, 0.2526]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 5.244 \times 10^{-4}$ $y = 3.457 \times 10^{-4}$ $z = 1.16 \times 10^{-5}$ $\phi = 2.127 \times 10^{-4}$ $\theta = 2.853 \times 10^{-4}$ $\psi = 7.387 \times 10^{-4}$	$T_p = 2.709 \times 10^{-4}$ $T_q = 2.437 \times 10^{-4}$ $U_z = 1.984 \times 10^{-4}$ $T_r = 8.817 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-7.9987, 8.0012]$ $\dot{y} \in [-5.211, 5.0035]$ $\dot{z} \in [-8.1282, 8.091]$ $\dot{\phi} \in [-0.656, 1.1314]$ $\dot{\theta} \in [-0.6109, 0.4818]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.001$ $y = 0.0007$ $z = 0$ $\phi = 0.0004$ $\theta = 0.0006$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0004$ $U_z = 0.0005$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5988, 9.6053]$ $\dot{y} \in [-6.2531, 6.005]$ $\dot{z} \in [-9.752, 9.7024]$ $\dot{\phi} \in [-0.8479, 1.387]$ $\dot{\theta} \in [-0.847, 0.6236]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.0053$ $y = 0.0064$ $z = 0.0005$ $\phi = 0.013$ $\theta = 0.0132$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0115$ $T_q = 0.0161$ $U_z = 0.0346$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.1991, 13.2321]$ $\dot{y} \in [-8.5984, 8.2582]$ $\dot{z} \in [-13.4022, 13.3188]$ $\dot{\phi} \in [-2.2082, 3.3687]$ $\dot{\theta} \in [-2.2106, 1.9328]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.11: Resultados de simulación, NLT-MDS4, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS5
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$	$x = 2.8849$		$\dot{x} \in [-0.5396, 0.547]$
	$y \in [-1.499, 1.7844]$	$y = 0.8135$	$T_p = 0.0002$	$\dot{y} \in [-1.1106, 1.0775]$
	$z \in [-4.864, 4.9705]$	$z = 0.0216$	$T_q = 0.2514$	$\dot{z} \in [-2.4526, 2.4229]$
	$\phi \in [-0.1331, 0.1336]$	$\phi = 0.0332$	$U_z = 0.1755$	$\dot{\phi} \in [-0.1639, 0.3238]$
	$\theta \in [-0.1418, 0.1376]$	$\theta = 1.3818 \times 10^3$	$T_r = 0.0001$	$\dot{\theta} \in [-39.6506, 347.0527]$
	$\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$\psi = 5.5102 \times 10^{-5}$		$\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.12: Resultados de simulación, NLT-MDS5, guiñada baja

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS5
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$	$x = 2.352$		$\dot{x} \in [0, 0]$
	$y \in [-1.4991, 1.7854]$	$y = 0$	$T_p = 0.0001$	$\dot{y} \in [-1.5636, 1.4999]$
	$z \in [-4.864, 4.9705]$	$z = 0.0019$	$T_q = 0.2095$	$\dot{z} \in [-2.4408, 2.4312]$
	$\phi \in [-0.1629, 0.1676]$	$\phi = 0.0003$	$U_z = 0.0135$	$\dot{\phi} \in [-0.1567, 0.3238]$
	$\theta \in [-0.1227, 0.1227]$	$\theta = 949.9794$	$T_r = 0.0001$	$\dot{\theta} \in [-43.9353, 258.3454]$
	$\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$\psi = 0.0001$		$\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.13: Resultados de simulación, NLT-MDS5, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS6
<b>A</b>	$x \in [-2.4036, 2.4039]$ $y \in [-0.7493, 0.8898]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0666, 0.0745]$ $\theta \in [-0.0916, 0.0867]$ $\psi \in [-2.4057, 2.4605]$	$x = 0.0026$ $y = 0.0011$ $z = 0.0013$ $\phi = 1.595 \times 10^{-4}$ $\theta = 1.667 \times 10^{-4}$ $\psi = 2.55 \times 10^{-5}$	$T_p = 0.0002$ $T_q = 0.0002$ $U_z = 0.0107$ $T_r = 0$	$\dot{x} \in [-1.2002, 1.2004]$ $\dot{y} \in [-0.7783, 0.7499]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\phi} \in [-0.0825, 0.1607]$ $\dot{\theta} \in [-0.0736, 0.1001]$ $\dot{\psi} \in [-1.2059, 1.2028]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8149, 4.8179]$ $y \in [-1.4979, 1.7730]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1605, 0.1947]$ $\theta \in [-0.1767, 0.1551]$ $\psi \in [-4.8114, 4.9211]$	$x = 0.0189$ $y = 0.0106$ $z = 0.0054$ $\phi = 0.0012$ $\theta = 0.0013$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0013$ $T_q = 0.0012$ $U_z = 0.0414$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-2.3933, 2.3946]$ $\dot{y} \in [-1.5461, 1.5033]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\phi} \in [-0.2699, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.3168, 0.361]$ $\dot{\psi} \in [-2.4118, 2.4057]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6559, 9.6794]$ $y \in [-2.993, 3.5172]$ $z \in [-9.7213, 9.9467]$ $\phi \in [-0.4065, 0.3531]$ $\theta \in [-0.3797, 0.3962]$ $\psi \in [-9.6222, 9.8417]$	$x = 0.1406$ $y = 0.0941$ $z = 0.0218$ $\phi = 0.0112$ $\theta = 0.0102$ $\psi = 0.0023$	$T_p = 0.0103$ $T_q = 0.0099$ $U_z = 0.1694$ $T_r = 0.0051$	$\dot{x} \in [-4.7087, 4.7079]$ $\dot{y} \in [-3.0339, 3.0407]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\phi} \in [-1.6819, 1.2453]$ $\dot{\theta} \in [-1.5508, 1.5671]$ $\dot{\psi} \in [-4.8235, 4.8113]$
<b>D</b>	$x \in [-16.1385, 16.2352]$ $y \in [-4.9816, 5.7875]$ $z \in [-16.1847, 16.5883]$ $\phi \in [-0.6644, 0.6768]$ $\theta \in [-0.6425, 0.6943]$ $\psi \in [-16.0353, 16.4025]$	$x = 0.6468$ $y = 0.4582$ $z = 0.0604$ $\phi = 0.0824$ $\theta = 0.0799$ $\psi = 0.0115$	$T_p = 0.0561$ $T_q = 0.0548$ $U_z = 0.4738$ $T_r = 0.0398$	$\dot{x} \in [-7.5845, 7.5892]$ $\dot{y} \in [-4.8875, 5.3292]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\phi} \in [-5.897, 6.275]$ $\dot{\theta} \in [-5.9897, 5.8851]$ $\dot{\psi} \in [-8.0392, 8.0188]$
<b>E</b>	$x \in [-16.9505, 17.0603]$ $y \in [-5.2301, 6.066]$ $z \in [-16.9914, 17.419]$ $\phi \in [-0.7111, 0.699]$ $\theta \in [-0.6681, 0.7306]$ $\psi \in [-16.8391, 17.2235]$	$x = 0.7458$ $y = 0.5299$ $z = 0.0663$ $\phi = 0.1289$ $\theta = 0.1229$ $\psi = 0.0131$	$T_p = 0.0773$ $T_q = 0.0758$ $U_z = 0.5203$ $T_r = 0.0482$	$\dot{x} \in [-7.9706, 8.0599]$ $\dot{y} \in [-5.1564, 5.7351]$ $\dot{z} \in [-8.5358, 8.5169]$ $\dot{\phi} \in [-7.2772, 8.6425]$ $\dot{\theta} \in [-8.3706, 8.0142]$ $\dot{\psi} \in [-8.4412, 8.4198]$
<b>F</b>	$x \in [-18.5753, 18.7139]$ $y \in [-5.7257, 6.6193]$ $z \in [-18.604, 19.0804]$ $\phi \in [-0.7969, 0.7428]$ $\theta \in [-0.784, 0.7721]$ $\psi \in [-18.4434, 18.8638]$	$x = 0.9823$ $y = 0.7324$ $z = 0.0797$ $\phi = 0.3511$ $\theta = 0.3462$ $\psi = 0.0172$	$T_p = 0.1823$ $T_q = 0.1815$ $U_z = 0.6255$ $T_r = 0.0688$	$\dot{x} \in [-9.6647, 9.5164]$ $\dot{y} \in [-7.7818, 6.8309]$ $\dot{z} \in [-9.3488, 9.328]$ $\dot{\phi} \in [-20.7255, 19.3995]$ $\dot{\theta} \in [-20.415, 19.8223]$ $\dot{\psi} \in [-9.2451, 9.2217]$

Tabla C.14: Resultados de simulación, NLT-MDS6, guiñada alta

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS6
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 0.0002$ $y = 0.0001$ $z = 0.0013$ $\phi = 9.301 \times 10^{-5}$ $\theta = 5.75 \times 10^{-5}$ $\psi = 1.315 \times 10^{-5}$	$T_p = 0$ $T_q = 0$ $U_z = 0.0104$ $T_r = 0$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.7814, 0.7496]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\phi} \in [-0.0717, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0591, 0.0679]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 0.0003$ $y = 0.0001$ $z = 0.0052$ $\phi = 7.235 \times 10^{-4}$ $\theta = 4.179 \times 10^{-4}$ $\psi = 5.51 \times 10^{-5}$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.0404$ $T_r = 0.0001$	$\dot{x} \in [-2.4, 2.4001]$ $\dot{y} \in [-1.5626, 1.4996]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\phi} \in [-0.151, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1261, 0.1379]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 0.0007$ $y = 0.0003$ $z = 0.0206$ $\phi = 0.006$ $\theta = 0.0034$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0002$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.1572$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.8001, 4.8007]$ $\dot{y} \in [-3.1243, 3.0003]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\phi} \in [-0.344, 0.6586]$ $\dot{\theta} \in [-0.292, 0.308]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.0017$ $y = 0.0018$ $z = 0.0566$ $\phi = 0.0311$ $\theta = 0.0177$ $\psi = 0.0008$	$T_p = 0.0008$ $T_q = 0.0005$ $U_z = 0.4284$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-8.0005, 8.0032]$ $\dot{y} \in [-5.2056, 5.0025]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\phi} \in [-0.7435, 1.1309]$ $\dot{\theta} \in [-0.6196, 0.661]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0026$ $y = 0.0036$ $z = 0.081$ $\phi = 0.058$ $\theta = 0.0339$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.0017$ $T_q = 0.0009$ $U_z = 0.6108$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.6008, 9.6063]$ $\dot{y} \in [-6.2459, 6.0039]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7336]$ $\dot{\phi} \in [-1.081, 1.3867]$ $\dot{\theta} \in [-0.8623, 0.9284]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.014$ $y = 0.0325$ $z = 0.1544$ $\phi = 0.2266$ $\theta = 0.1417$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0273$ $T_q = 0.034$ $U_z = 1.2126$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.2021, 13.2301]$ $\dot{y} \in [-8.5853, 8.2577]$ $\dot{z} \in [-13.4134, 13.3836]$ $\dot{\phi} \in [-2.8599, 2.367]$ $\dot{\theta} \in [-1.8422, 2.1101]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.15: Resultados de simulación, NLT-MDS6, guiñada baja

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS6
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 0$ $y = 0$ $z = 0.0013$ $\phi = 9.562 \times 10^{-5}$ $\theta = 2.569 \times 10^{-5}$ $\psi = 1.313 \times 10^{-5}$	$T_p = 0$ $T_q = 0$ $U_z = 0.0097$ $T_r = 0$	$\dot{x} \in [-1.1997, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.7819, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2194, 1.2167]$ $\dot{\phi} \in [-0.0772, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0585, 0.0567]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 0$ $y = 0$ $z = 0.0051$ $\phi = 7.762 \times 10^{-4}$ $\theta = 2.067 \times 10^{-4}$ $\psi = 5.37 \times 10^{-5}$	$T_p = 0.0001$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.0385$ $T_r = 0.0001$	$\dot{x} \in [-2.3994, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5636, 1.4998]$ $\dot{z} \in [-2.4388, 2.4334]$ $\dot{\phi} \in [-0.1567, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1246, 0.1168]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 0.0001$ $y = 0.0004$ $z = 0.0204$ $\phi = 0.0066$ $\theta = 0.0017$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0002$ $T_q = 0.0001$ $U_z = 0.1536$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-4.7989, 4.7986]$ $\dot{y} \in [-3.1262, 3.0009]$ $\dot{z} \in [-4.8776, 4.8668]$ $\dot{\phi} \in [-0.3465, 0.6587]$ $\dot{\theta} \in [-0.288, 0.2527]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 0.0008$ $y = 0.0021$ $z = 0.0565$ $\phi = 0.0353$ $\theta = 0.0092$ $\psi = 0.0007$	$T_p = 0.0009$ $T_q = 0.0003$ $U_z = 0.424$ $T_r = 0.0009$	$\dot{x} \in [-7.9986, 7.9988]$ $\dot{y} \in [-5.2085, 5.0036]$ $\dot{z} \in [-8.1294, 8.1113]$ $\dot{\phi} \in [-0.7351, 1.1309]$ $\dot{\theta} \in [-0.609, 0.5003]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.0016$ $y = 0.004$ $z = 0.081$ $\phi = 0.0666$ $\theta = 0.0174$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 0.0018$ $T_q = 0.0005$ $U_z = 0.607$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5986, 9.6001]$ $\dot{y} \in [-6.2492, 6.0054]$ $\dot{z} \in [-9.7552, 9.7336]$ $\dot{\phi} \in [-1.0642, 1.3867]$ $\dot{\theta} \in [-0.8458, 0.6957]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.0077$ $y = 0.0155$ $z = 0.154$ $\phi = 0.2532$ $\theta = 0.0704$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0237$ $T_q = 0.0153$ $U_z = 1.1868$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.1993, 13.2162]$ $\dot{y} \in [-8.5897, 8.2601]$ $\dot{z} \in [-13.4134, 13.3836]$ $\dot{\phi} \in [-2.8215, 2.7861]$ $\dot{\theta} \in [-1.7972, 1.8106]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.16: Resultados de simulación, NLT-MDS6, guiñada cero

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS7
<b>A</b>	$x \in [-2.4036, 2.4039]$ $y \in [-0.7493, 0.8898]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0666, 0.0745]$ $\theta \in [-0.0916, 0.0867]$ $\psi \in [-2.4057, 2.4605]$	$x = 0.0026$ $y = 0.0011$ $z = 0$ $\phi = 1.478 \times 10^{-4}$ $\theta = 1.467 \times 10^{-4}$ $\psi = 2.55 \times 10^{-5}$	$T_p = 1.571 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.925 \times 10^{-4}$ $U_z = 4.79 \times 10^{-5}$ $T_r = 3.1 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.2002, 1.2005]$ $\dot{y} \in [-0.7783, 0.7499]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2165]$ $\dot{\phi} \in [-0.0826, 0.1607]$ $\dot{\theta} \in [-0.0735, 0.1001]$ $\dot{\psi} \in [-1.2059, 1.2028]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8149, 4.8179]$ $y \in [-1.4979, 1.773]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1605, 0.1947]$ $\theta \in [-0.1767, 0.1551]$ $\psi \in [-4.8114, 4.9211]$	$x = 0.0188$ $y = 0.0105$ $z = 0.0001$ $\phi = 0.0010$ $\theta = 0.0012$ $\psi = 0.0002$	$T_p = 0.0013$ $T_q = 0.0012$ $U_z = 0.0008$ $T_r = 0.0003$	$\dot{x} \in [-2.3934, 2.3947]$ $\dot{y} \in [-1.5464, 1.5034]$ $\dot{z} \in [-2.4391, 2.4324]$ $\dot{\phi} \in [-0.2650, 0.3239]$ $\dot{\theta} \in [-0.3172, 0.3617]$ $\dot{\psi} \in [-2.4118, 2.4057]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6559, 9.6794]$ $y \in [-2.9930, 3.5172]$ $z \in [-9.7213, 9.9467]$ $\phi \in [-0.4065, 0.3531]$ $\theta \in [-0.3797, 0.3962]$ $\psi \in [-9.6222, 9.8417]$	$x = 0.1375$ $y = 0.0904$ $z = 0.0012$ $\phi = 0.0097$ $\theta = 0.0089$ $\psi = 0.0023$	$T_p = 0.0099$ $T_q = 0.0099$ $U_z = 0.0140$ $T_r = 0.0051$	$\dot{x} \in [-4.7122, 4.7143]$ $\dot{y} \in [-3.037, 3.0434]$ $\dot{z} \in [-4.8761, 4.8647]$ $\dot{\phi} \in [-1.5602, 1.1760]$ $\dot{\theta} \in [-1.5159, 1.5685]$ $\dot{\psi} \in [-4.8235, 4.8113]$
<b>D</b>	$x \in [-16.1385, 16.2352]$ $y \in [-4.9816, 5.7875]$ $z \in [-16.1847, 16.5883]$ $\phi \in [-0.6644, 0.6768]$ $\theta \in [-0.6425, 0.6943]$ $\psi \in [-16.0353, 16.4025]$	$x = 0.6007$ $y = 0.4193$ $z = 0.0102$ $\phi = 0.0447$ $\theta = 0.046$ $\psi = 0.0115$	$T_p = 0.0465$ $T_q = 0.0468$ $U_z = 0.1182$ $T_r = 0.0398$	$\dot{x} \in [-7.5886, 7.5742]$ $\dot{y} \in [-4.9043, 5.2393]$ $\dot{z} \in [-8.1116, 8.1418]$ $\dot{\phi} \in [-4.7625, 4.2766]$ $\dot{\theta} \in [-4.8379, 4.8486]$ $\dot{\psi} \in [-8.0392, 8.0188]$
<b>E</b>	$x \in [-19.3881, 19.542]$ $y \in [-5.974, 6.8939]$ $z \in [-19.4095, 19.9113]$ $\phi \in [-0.8232, 0.7804]$ $\theta \in [-0.8388, 0.7862]$ $\psi \in [-19.2396, 19.6829]$	$x = 0.9781$ $y = 0.6955$ $z = 0.0193$ $\phi = 0.1163$ $\theta = 0.1234$ $\psi = 0.0197$	$T_p = 0.0928$ $T_q = 0.0961$ $U_z = 0.3152$ $T_r = 0.0811$	$\dot{x} \in [-9.0396, 9.3512]$ $\dot{y} \in [-5.9185, 6.5056]$ $\dot{z} \in [-9.7125, 9.8747]$ $\dot{\phi} \in [-7.4766, 7.9518]$ $\dot{\theta} \in [-7.7649, 8.4959]$ $\dot{\psi} \in [-9.647, 9.6226]$
<b>F</b>	$x \in [-21.0146, 21.2015]$ $y \in [-6.47, 7.4392]$ $z \in [-21.0205, 21.5732]$ $\phi \in [-0.8629, 0.9017]$ $\theta \in [-0.897, 0.8454]$ $\psi \in [-20.8563, 21.3256]$	$x = 1.1973$ $y = 0.8052$ $z = 0.0404$ $\phi = 0.1639$ $\theta = 0.1879$ $\psi = 0.0247$	$T_p = 0.1334$ $T_q = 0.1505$ $U_z = 0.5362$ $T_r = 0.1112$	$\dot{x} \in [-9.7399, 10.3539]$ $\dot{y} \in [-7.1337, 6.9355]$ $\dot{z} \in [-10.504, 10.6427]$ $\dot{\phi} \in [-11.8907, 9.2658]$ $\dot{\theta} \in [-15.4728, 15.8293]$ $\dot{\psi} \in [-10.451, 10.4245]$

Tabla C.17: Resultados de simulación, NLT-MDS7, guiñada alta

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS7
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7495, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 1.678 \times 10^{-4}$ $y = 6.82 \times 10^{-5}$ $z = 3 \times 10^{-7}$ $\phi = 1.527 \times 10^{-5}$ $\theta = 2.021 \times 10^{-5}$ $\psi = 1.315 \times 10^{-5}$	$T_p = 3.984 \times 10^{-5}$ $T_q = 2.672 \times 10^{-5}$ $U_z = 3.34 \times 10^{-6}$ $T_r = 1.462 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.7815, 0.7496]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0716, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0591, 0.0679]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.499, 1.7844]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 3.452 \times 10^{-4}$ $y = 1.396 \times 10^{-4}$ $z = 1.3 \times 10^{-6}$ $\phi = 3.195 \times 10^{-5}$ $\theta = 4.158 \times 10^{-5}$ $\psi = 5.51 \times 10^{-5}$	$T_p = 7.791 \times 10^{-5}$ $T_q = 5.58 \times 10^{-5}$ $U_z = 1.342 \times 10^{-5}$ $T_r = 6.163 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.4001, 2.4002]$ $\dot{y} \in [-1.5627, 1.4996]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1506, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1262, 0.1381]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6009, 9.5998]$ $y \in [-2.9982, 3.5675]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2905]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 7.472 \times 10^{-4}$ $y = 2.983 \times 10^{-4}$ $z = 5.6 \times 10^{-6}$ $\phi = 8.45 \times 10^{-5}$ $\theta = 9.8 \times 10^{-5}$ $\psi = 2.44 \times 10^{-4}$	$T_p = 1.497 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.287 \times 10^{-4}$ $U_z = 6.35 \times 10^{-5}$ $T_r = 2.803 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.8002, 4.801]$ $\dot{y} \in [-3.125, 3.0005]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8609]$ $\dot{\phi} \in [-0.3348, 0.6587]$ $\dot{\theta} \in [-0.2924, 0.3106]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0022, 15.9997]$ $y \in [-4.9971, 5.9434]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4903]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5266]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 0.0016$ $y = 0.0007$ $z = 0$ $\phi = 3.725 \times 10^{-4}$ $\theta = 3.504 \times 10^{-4}$ $\psi = 8.149 \times 10^{-4}$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0003$ $U_z = 0.0003$ $T_r = 0.001$	$\dot{x} \in [-8.0006, 8.0059]$ $\dot{y} \in [-5.2082, 5.0025]$ $\dot{z} \in [-8.1282, 8.0912]$ $\dot{\phi} \in [-0.6402, 1.1314]$ $\dot{\theta} \in [-0.6202, 0.6881]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2029, 19.2]$ $y \in [-5.9966, 7.131]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5899]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6546]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0022$ $y = 0.0011$ $z = 0$ $\phi = 0.0008$ $\theta = 0.0007$ $\psi = 0.0013$	$T_p = 0.0004$ $T_q = 0.0004$ $U_z = 0.0008$ $T_r = 0.0018$	$\dot{x} \in [-9.6009, 9.6124]$ $\dot{y} \in [-6.25, 6.0038]$ $\dot{z} \in [-9.7519, 9.7026]$ $\dot{\phi} \in [-0.8222, 1.387]$ $\dot{\theta} \in [-0.8601, 1.0048]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4046, 26.4482]$ $y \in [-8.2451, 9.8036]$ $z \in [-26.6524, 27.394]$ $\phi \in [-0.6341, 1.0495]$ $\theta \in [-0.9031, 1.4026]$ $\psi \in [-0.4885, 0.4087]$	$x = 0.0122$ $y = 0.0241$ $z = 0.0014$ $\phi = 0.0269$ $\theta = 0.0325$ $\psi = 0.0143$	$T_p = 0.0216$ $T_q = 0.0403$ $U_z = 0.0876$ $T_r = 0.0522$	$\dot{x} \in [-13.2017, 13.263]$ $\dot{y} \in [-8.5944, 8.2563]$ $\dot{z} \in [-13.402, 13.3172]$ $\dot{\phi} \in [-3.321, 2.6403]$ $\dot{\theta} \in [-6.5754, 3.7488]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$

Tabla C.18: Resultados de simulación, NLT-MDS7, guiñada baja

Prueba	Rango NLT, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades MDS7
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 1.242 \times 10^{-6}$ $y = 1.091 \times 10^{-6}$ $z = 4 \times 10^{-9}$ $\phi = 5 \times 10^{-7}$ $\theta = 5.7 \times 10^{-7}$ $\psi = 1.313 \times 10^{-5}$	$T_p = 4.982 \times 10^{-5}$ $T_q = 2.439 \times 10^{-5}$ $U_z = 6 \times 10^{-8}$ $T_r = 1.442 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-1.1997, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.782, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0771, 0.1606]$ $\dot{\theta} \in [-0.0585, 0.0568]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>B</b>	$x \in [-4.7989, 4.7984]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 1.024 \times 10^{-5}$ $y = 8.61 \times 10^{-6}$ $z = 6 \times 10^{-8}$ $\phi = 4.03 \times 10^{-6}$ $\theta = 4.71 \times 10^{-6}$ $\psi = 5.365 \times 10^{-5}$	$T_p = 9.798 \times 10^{-5}$ $T_q = 5.232 \times 10^{-5}$ $U_z = 9.3 \times 10^{-7}$ $T_r = 5.859 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-2.3994, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5637, 1.4998]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1555, 0.3238]$ $\dot{\theta} \in [-0.1247, 0.1169]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5985, 9.5963]$ $y \in [-2.9984, 3.5697]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3602]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 9.183 \times 10^{-5}$ $y = 6.903 \times 10^{-5}$ $z = 1.16 \times 10^{-6}$ $\phi = 3.6 \times 10^{-5}$ $\theta = 4.38 \times 10^{-5}$ $\psi = 2.289 \times 10^{-4}$	$T_p = 1.8 \times 10^{-4}$ $T_q = 1.159 \times 10^{-4}$ $U_z = 1.78 \times 10^{-5}$ $T_r = 2.566 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-4.799, 4.799]$ $\dot{y} \in [-3.1268, 3.001]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8608]$ $\dot{\phi} \in [-0.3414, 0.6588]$ $\dot{\theta} \in [-0.2886, 0.2526]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9987, 15.9932]$ $y \in [-4.9975, 5.9471]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5634, 0.6308]$ $\theta \in [-0.4216, 0.4186]$ $\psi \in [-0.0046, 0.0041]$	$x = 5.244 \times 10^{-4}$ $y = 3.457 \times 10^{-4}$ $z = 1.16 \times 10^{-5}$ $\phi = 2.127 \times 10^{-4}$ $\theta = 2.853 \times 10^{-4}$ $\psi = 7.387 \times 10^{-4}$	$T_p = 2.709 \times 10^{-4}$ $T_q = 2.437 \times 10^{-4}$ $U_z = 1.984 \times 10^{-4}$ $T_r = 8.817 \times 10^{-4}$	$\dot{x} \in [-7.9987, 8.0012]$ $\dot{y} \in [-5.211, 5.0035]$ $\dot{z} \in [-8.1282, 8.091]$ $\dot{\phi} \in [-0.656, 1.1314]$ $\dot{\theta} \in [-0.6109, 0.4818]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1989, 19.1921]$ $y \in [-5.997, 7.1356]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6635, 0.7611]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5068]$ $\psi \in [-0.0082, 0.0067]$	$x = 0.001$ $y = 0.0007$ $z = 0$ $\phi = 0.0004$ $\theta = 0.0006$ $\psi = 0.0012$	$T_p = 0.0003$ $T_q = 0.0004$ $U_z = 0.0005$ $T_r = 0.0015$	$\dot{x} \in [-9.5988, 9.6053]$ $\dot{y} \in [-6.2531, 6.005]$ $\dot{z} \in [-9.752, 9.7024]$ $\dot{\phi} \in [-0.8479, 1.387]$ $\dot{\theta} \in [-0.847, 0.6236]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$
<b>F</b>	$x \in [-26.3997, 26.3696]$ $y \in [-8.246, 9.8107]$ $z \in [-26.6526, 27.394]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1911]$ $\theta \in [-0.7268, 0.947]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.0053$ $y = 0.0064$ $z = 0.0005$ $\phi = 0.013$ $\theta = 0.0132$ $\psi = 0.0093$	$T_p = 0.0115$ $T_q = 0.0161$ $U_z = 0.0346$ $T_r = 0.0341$	$\dot{x} \in [-13.1991, 13.2321]$ $\dot{y} \in [-8.5984, 8.2582]$ $\dot{z} \in [-13.4022, 13.3188]$ $\dot{\phi} \in [-2.2082, 3.3687]$ $\dot{\theta} \in [-2.2106, 1.9328]$ $\dot{\psi} \in [0, 0]$

Tabla C.19: Resultados de simulación, NLT-MDS7, guiñada cero



Prueba	Rango NLRG, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades NLRG
<b>A</b>	$x \in [-2.4036, 2.404]$ $y \in [-0.7496, 0.8897]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0665, 0.0745]$ $\theta \in [-0.0917, 0.0867]$ $\psi \in [-2.4057, 2.4605]$	$x = 2.866 \times 10^{-4}$ $y = 2.063 \times 10^{-4}$ $z = 5 \times 10^{-7}$ $\phi = 2.871 \times 10^{-5}$ $\theta = 3.293 \times 10^{-5}$ $\psi = 6 \times 10^{-8}$	$T_p = 1.746 \times 10^{-5}$ $T_q = 3.286 \times 10^{-5}$ $U_z = 5.26 \times 10^{-6}$ $T_r = 9 \times 10^{-8}$	$\dot{x} \in [-1.2019, 1.2021]$ $\dot{y} \in [-0.78, 0.7494]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2165]$ $\dot{\phi} \in [-0.083, 0.1608]$ $\dot{\theta} \in [-0.0735, 0.0993]$ $\dot{\psi} \in [-1.2059, 1.2029]$
<b>B</b>	$x \in [-4.815, 4.8181]$ $y \in [-1.4994, 1.7724]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1604, 0.1948]$ $\theta \in [-0.1766, 0.155]$ $\psi \in [-4.8114, 4.9211]$	$x = 0.0011$ $y = 8.0384 \times 10^{-4}$ $z = 4.1833 \times 10^{-6}$ $\phi = 1.424 \times 10^{-4}$ $\theta = 9.47 \times 10^{-5}$ $\psi = 7 \times 10^{-7}$	$T_p = 1.302 \times 10^{-4}$ $T_q = 6.57 \times 10^{-5}$ $U_z = 4.12 \times 10^{-5}$ $T_r = 1.3 \times 10^{-6}$	$\dot{x} \in [-2.4082, 2.4097]$ $\dot{y} \in [-1.5559, 1.4981]$ $\dot{z} \in [-2.4391, 2.4323]$ $\dot{\phi} \in [-0.2677, 0.324]$ $\dot{\theta} \in [-0.3159, 0.3602]$ $\dot{\psi} \in [-2.4123, 2.4060]$
<b>C</b>	$x \in [-9.6565, 9.6805]$ $y \in [-3.0003, 3.5141]$ $z \in [-9.7213, 9.9467]$ $\phi \in [-0.4058, 0.3523]$ $\theta \in [-0.3799, 0.3959]$ $\psi \in [-9.6222, 9.8417]$	$x = 0.0045$ $y = 0.0032$ $z = 3.5918 \times 10^{-5}$ $\phi = 5.5588 \times 10^{-4}$ $\theta = 6.763 \times 10^{-4}$ $\psi = 1.98 \times 10^{-5}$	$T_p = 3.539 \times 10^{-4}$ $T_q = 5.263 \times 10^{-4}$ $U_z = 4.648 \times 10^{-4}$ $T_r = 6.54 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-4.833, 4.845]$ $\dot{y} \in [-3.0971, 2.9963]$ $\dot{z} \in [-4.8779, 4.8621]$ $\dot{\phi} \in [-1.5306, 1.2017]$ $\dot{\theta} \in [-1.5952, 1.4496]$ $\dot{\psi} \in [-4.8425, 4.8301]$
<b>D</b>	$x \in [-16.1395, 16.2349]$ $y \in [-5.0032, 5.7771]$ $z \in [-16.1848, 16.5882]$ $\phi \in [-0.6642, 0.6716]$ $\theta \in [-0.6516, 0.6941]$ $\psi \in [-16.0353, 16.4025]$	$x = 0.0138$ $y = 0.0089$ $z = 2.2164 \times 10^{-4}$ $\phi = 0.003$ $\theta = 0.0032$ $\psi = 2.9591 \times 10^{-4}$	$T_p = 0.0022$ $T_q = 0.0026$ $U_z = 0.0039$ $T_r = 0.0017$	$\dot{x} \in [-8.0852, 8.1326]$ $\dot{y} \in [-5.1345, 4.9938]$ $\dot{z} \in [-8.1284, 8.097]$ $\dot{\phi} \in [-3.8951, 4.312]$ $\dot{\theta} \in [-4.7651, 5.0089]$ $\dot{\psi} \in [-8.3306, 8.2855]$
<b>E</b>	$x \in [-19.3888, 19.53]$ $y \in [-6.009, 6.8829]$ $z \in [-19.4098, 19.9112]$ $\phi \in [-0.8159, 0.7848]$ $\theta \in [-0.8386, 0.8028]$ $\psi \in [-19.2397, 19.6829]$	$x = 0.0245$ $y = 0.0176$ $z = 5.2779 \times 10^{-4}$ $\phi = 0.0055$ $\theta = 0.0063$ $\psi = 7.4508 \times 10^{-4}$	$T_p = 0.0045$ $T_q = 0.0053$ $U_z = 0.0085$ $T_r = 0.0049$	$\dot{x} \in [-9.7112, 9.7793]$ $\dot{y} \in [-6.1489, 6.0216]$ $\dot{z} \in [-9.7531, 9.7126]$ $\dot{\phi} \in [-6.0706, 6.042]$ $\dot{\theta} \in [-7.293, 7.3926]$ $\dot{\psi} \in [-10.4362, 10.2507]$
<b>F</b>	$x \in [-26.705, 26.9991]$ $y \in [-8.3009, 9.3762]$ $z \in [-26.6462, 27.3922]$ $\phi \in [-1.0936, 1.1276]$ $\theta \in [-1.1509, 1.122]$ $\psi \in [-26.4693, 27.0667]$	$x = 0.551$ $y = 0.0536$ $z = 0.0026$ $\phi = 0.0149$ $\theta = 0.0195$ $\psi = 0.0044$	$T_p = 0.0121$ $T_q = 0.0181$ $U_z = 0.0363$ $T_r = 0.0294$	$\dot{x} \in [-13.3719, 13.6206]$ $\dot{y} \in [-8.4396, 8.3244]$ $\dot{z} \in [-13.4042, 13.342]$ $\dot{\phi} \in [-13.9437, 13.7492]$ $\dot{\theta} \in [-14.2886, 14.652]$ $\dot{\psi} \in [-18.3124, 16.4229]$
<b>G</b>	$x \in [-28.3324, 28.6678]$ $y \in [-8.7223, 9.9208]$ $z \in [-28.2513, 29.0553]$ $\phi \in [-1.6084, 1.2486]$ $\theta \in [-1.0967, 1.4111]$ $\psi \in [-28.0927, 28.7046]$	$x = 0.0555$ $y = 0.0889$ $z = 0.0042$ $\phi = 0.023$ $\theta = 0.0478$ $\psi = 0.0118$	$T_p = 0.0266$ $T_q = 0.0393$ $U_z = 0.1177$ $T_r = 0.0727$	$\dot{x} \in [-14.1891, 14.4795]$ $\dot{y} \in [-8.9471, 8.665]$ $\dot{z} \in [-14.215, 14.1545]$ $\dot{\phi} \in [-16.9989, 16.3225]$ $\dot{\theta} \in [-16.2812, 16.4275]$ $\dot{\psi} \in [-20.9809, 20.7663]$

Tabla C.20: Resultados de simulación, NLRG-NLT, guiñada alta

Prueba	Rango NLRG, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades NLRG
<b>A</b>	$x \in [-2.4001, 2.4001]$ $y \in [-0.7496, 0.8923]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0649, 0.064]$ $\theta \in [-0.0688, 0.0713]$ $\psi \in [-0.4009, 0.4101]$	$x = 4.783 \times 10^{-5}$ $y = 3.456 \times 10^{-5}$ $z = 9 \times 10^{-8}$ $\phi = 3.832 \times 10^{-6}$ $\theta = 6.307 \times 10^{-6}$ $\psi = 7 \times 10^{-9}$	$T_p = 4.05 \times 10^{-6}$ $T_q = 4.462 \times 10^{-6}$ $U_z = 9.12 \times 10^{-7}$ $T_r = 1 \times 10^{-8}$	$\dot{x} \in [-1.2, 1.2]$ $\dot{y} \in [-0.7816, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0716, 0.1607]$ $\dot{\theta} \in [-0.0592, 0.0679]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>B</b>	$x \in [-4.8003, 4.8001]$ $y \in [-1.4991, 1.7843]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1331, 0.1336]$ $\theta \in [-0.1418, 0.1376]$ $\psi \in [-0.4008, 0.41]$	$x = 9.226 \times 10^{-5}$ $y = 6.882 \times 10^{-5}$ $z = 3.5 \times 10^{-7}$ $\phi = 7.81 \times 10^{-6}$ $\theta = 1.304 \times 10^{-5}$ $\psi = 4 \times 10^{-8}$	$T_p = 8.036 \times 10^{-6}$ $T_q = 8.96 \times 10^{-6}$ $U_z = 3.707 \times 10^{-6}$ $T_r = 6 \times 10^{-8}$	$\dot{x} \in [-2.4001, 2.4002]$ $\dot{y} \in [-1.563, 1.4997]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1504, 0.3239]$ $\dot{\theta} \in [-0.1264, 0.138]$ $\dot{\psi} \in [-0.201, 0.2005]$
<b>C</b>	$x \in [-9.601, 9.5999]$ $y \in [-2.9983, 3.5673]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.2731, 0.2852]$ $\theta \in [-0.2991, 0.2904]$ $\psi \in [-0.4001, 0.4098]$	$x = 1.587 \times 10^{-4}$ $y = 1.359 \times 10^{-4}$ $z = 1.5 \times 10^{-6}$ $\phi = 2.658 \times 10^{-5}$ $\theta = 3.594 \times 10^{-5}$ $\psi = 4.8 \times 10^{-7}$	$T_p = 1.612 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.869 \times 10^{-5}$ $U_z = 1.741 \times 10^{-5}$ $T_r = 9.6 \times 10^{-7}$	$\dot{x} \in [-4.8004, 4.8013]$ $\dot{y} \in [-3.1256, 3.0006]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8609]$ $\dot{\phi} \in [-0.3341, 0.6591]$ $\dot{\theta} \in [-0.2933, 0.3103]$ $\dot{\psi} \in [-0.2009, 0.2004]$
<b>D</b>	$x \in [-16.0023, 16.0002]$ $y \in [-4.9973, 5.9423]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.4449, 0.4901]$ $\theta \in [-0.5265, 0.5264]$ $\psi \in [-0.3972, 0.4094]$	$x = 6.437 \times 10^{-4}$ $y = 3.241 \times 10^{-4}$ $z = 7.4 \times 10^{-6}$ $\phi = 2.357 \times 10^{-4}$ $\theta = 2.65 \times 10^{-4}$ $\psi = 9.1 \times 10^{-6}$	$T_p = 9.24 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.028 \times 10^{-4}$ $U_z = 1.283 \times 10^{-4}$ $T_r = 1.91 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-8.0011, 8.0101]$ $\dot{y} \in [-5.2088, 5.0026]$ $\dot{z} \in [-8.1282, 8.0911]$ $\dot{\phi} \in [-0.6389, 1.1323]$ $\dot{\theta} \in [-0.6243, 0.6857]$ $\dot{\psi} \in [-0.2007, 0.2002]$
<b>E</b>	$x \in [-19.2031, 19.2014]$ $y \in [-5.9967, 7.1289]$ $z \in [-19.4113, 19.9124]$ $\phi \in [-0.5163, 0.5923]$ $\theta \in [-0.6435, 0.6547]$ $\psi \in [-0.3938, 0.4092]$	$x = 0.0017$ $y = 6.3498 \times 10^{-4}$ $z = 2.3271 \times 10^{-5}$ $\phi = 7.064 \times 10^{-4}$ $\theta = 7.871 \times 10^{-4}$ $\psi = 3.8022 \times 10^{-5}$	$T_p = 2.603 \times 10^{-4}$ $T_q = 2.66 \times 10^{-4}$ $U_z = 4.688 \times 10^{-4}$ $T_r = 8.64 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-9.6015, 9.6243]$ $\dot{y} \in [-6.2504, 6.0038]$ $\dot{z} \in [-9.7519, 9.7025]$ $\dot{\phi} \in [-0.8207, 1.3894]$ $\dot{\theta} \in [-0.8701, 0.997]$ $\dot{\psi} \in [-0.2005, 0.2]$

Tabla C.21: Resultados de simulación, NLRG-NLT, guiñada baja

Prueba	Rango NLRG, (m, rad)	Salida-EPM. (m,rad)	Entrada-EPM. (N, Nm)	Velocidades NLRG
<b>A</b>	$x \in [-2.3994, 2.3993]$ $y \in [-0.7495, 0.8928]$ $z \in [-2.4327, 2.4844]$ $\phi \in [-0.0791, 0.0802]$ $\theta \in [-0.0612, 0.0612]$ $\psi \in [-0.0001, 0]$	$x = 1.401 \times 10^{-6}$ $y = 5.15 \times 10^{-7}$ $z = 2 \times 10^{-9}$ $\phi = 1.273 \times 10^{-7}$ $\theta = 2.671 \times 10^{-7}$ $\psi = 9 \times 10^{-10}$	$T_p = 7.96 \times 10^{-8}$ $T_q = 1.6 \times 10^{-7}$ $U_z = 2.74 \times 10^{-8}$ $T_r = 1.7 \times 10^{-9}$	$\dot{x} \in [-1.1997, 1.1996]$ $\dot{y} \in [-0.782, 0.7497]$ $\dot{z} \in [-1.2195, 1.2164]$ $\dot{\phi} \in [-0.0771, 0.1607]$ $\dot{\theta} \in [-0.0585, 0.0568]$ $\dot{\psi} \in [-0.0003, 0.0002]$
<b>B</b>	$x \in [-4.799, 4.7985]$ $y \in [-1.4991, 1.7854]$ $z \in [-4.864, 4.9705]$ $\phi \in [-0.1629, 0.1676]$ $\theta \in [-0.1227, 0.1227]$ $\psi \in [-0.0002, 0.0002]$	$x = 1.163 \times 10^{-5}$ $y = 4.28 \times 10^{-6}$ $z = 3 \times 10^{-8}$ $\phi = 1.136 \times 10^{-6}$ $\theta = 2.378 \times 10^{-6}$ $\psi = 1.7 \times 10^{-8}$	$T_p = 6.86 \times 10^{-7}$ $T_q = 1.37 \times 10^{-6}$ $U_z = 4.52 \times 10^{-7}$ $T_r = 3.4 \times 10^{-8}$	$\dot{x} \in [-2.3994, 2.3993]$ $\dot{y} \in [-1.5637, 1.4998]$ $\dot{z} \in [-2.4392, 2.4322]$ $\dot{\phi} \in [-0.1555, 0.3239]$ $\dot{\theta} \in [-0.1248, 0.1169]$ $\dot{\psi} \in [-0.0011, 0.001]$
<b>C</b>	$x \in [-9.5986, 9.5964]$ $y \in [-2.9984, 3.5695]$ $z \in [-9.7215, 9.9469]$ $\phi \in [-0.3379, 0.3601]$ $\theta \in [-0.2477, 0.2474]$ $\psi \in [-0.0012, 0.001]$	$x = 1.074 \times 10^{-4}$ $y = 3.96 \times 10^{-5}$ $z = 6 \times 10^{-7}$ $\phi = 1.311 \times 10^{-5}$ $\theta = 2.718 \times 10^{-5}$ $\psi = 4.5 \times 10^{-7}$	$T_p = 7.02 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.361 \times 10^{-5}$ $U_z = 8.54 \times 10^{-6}$ $T_r = 9.1 \times 10^{-7}$	$\dot{x} \in [-4.799, 4.7994]$ $\dot{y} \in [-3.1268, 3.0009]$ $\dot{z} \in [-4.8782, 4.8608]$ $\dot{\phi} \in [-0.3414, 0.6591]$ $\dot{\theta} \in [-0.2888, 0.2528]$ $\dot{\psi} \in [-0.0049, 0.0058]$
<b>D</b>	$x \in [-15.9988, 15.994]$ $y \in [-4.9974, 5.9463]$ $z \in [-16.1856, 16.589]$ $\phi \in [-0.5635, 0.6305]$ $\theta \in [-0.4217, 0.4185]$ $\psi \in [-0.0047, 0.0041]$	$x = 7.169 \times 10^{-4}$ $y = 2.626 \times 10^{-4}$ $z = 6.8 \times 10^{-6}$ $\phi = 1.271 \times 10^{-4}$ $\theta = 2.71 \times 10^{-4}$ $\psi = 9.2 \times 10^{-6}$	$T_p = 5.5 \times 10^{-5}$ $T_q = 1.012 \times 10^{-4}$ $U_z = 1.08 \times 10^{-4}$ $T_r = 1.93 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-7.999, 8.0048]$ $\dot{y} \in [-5.2107, 5.0034]$ $\dot{z} \in [-8.1282, 8.091]$ $\dot{\phi} \in [-0.656, 1.1322]$ $\dot{\theta} \in [-0.6131, 0.4833]$ $\dot{\psi} \in [0.0173, 0.0284]$
<b>E</b>	$x \in [-19.1992, 19.1937]$ $y \in [-5.9969, 7.134]$ $z \in [-19.4114, 19.9124]$ $\phi \in [-0.6636, 0.7599]$ $\theta \in [-0.5122, 0.5065]$ $\psi \in [-0.0084, 0.0067]$	$x = 0.0017$ $y = 5.9985 \times 10^{-4}$ $z = 2.0182 \times 10^{-5}$ $\phi = 3.539 \times 10^{-4}$ $\theta = 8.044 \times 10^{-4}$ $\psi = 3.94 \times 10^{-5}$	$T_p = 1.381 \times 10^{-4}$ $T_q = 2.53 \times 10^{-4}$ $U_z = 3.467 \times 10^{-4}$ $T_r = 8.67 \times 10^{-5}$	$\dot{x} \in [-9.5991, 9.6139]$ $\dot{y} \in [-6.2527, 6.0048]$ $\dot{z} \in [-9.752, 9.7023]$ $\dot{\phi} \in [-0.8478, 1.3894]$ $\dot{\theta} \in [-0.8535, 0.6262]$ $\dot{\psi} \in [-0.0292, 0.0591]$
<b>F</b>	$x \in [-26.4001, 26.661]$ $y \in [-8.2451, 9.8121]$ $z \in [-26.6519, 27.3942]$ $\phi \in [-0.8453, 1.1902]$ $\theta \in [-0.7565, 0.8875]$ $\psi \in [-0.1091, 0.0779]$	$x = 0.056$ $y = 0.0393$ $z = 0.0012$ $\phi = 0.0102$ $\theta = 0.0156$ $\psi = 0.0034$	$T_p = 0.008$ $T_q = 0.0109$ $U_z = 0.0244$ $T_r = 0.0185$	$\dot{x} \in [-13.2076, 13.2808]$ $\dot{y} \in [-8.5986, 8.2578]$ $\dot{z} \in [-13.4021, 13.3111]$ $\dot{\phi} \in [-4.6089, 3.4142]$ $\dot{\theta} \in [-4.1358, 2.8636]$ $\dot{\psi} \in [-2.6887, 1.529]$

Tabla C.22: Resultados de simulación, NLRG-NLT, guiñada cero

# BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] ABDOLHOSSEINI, M., Y. M. ZHANG y C. A. RABBATH, «An Efficient Model Predictive Control Scheme for an Unmanned Quadrotor Helicopter», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **70**(1–4), págs. 27–38, 2013.
- [2] ALTUG, E., J. OSTROWSKI y R. MAHONY, «Control of a quadrotor helicopter using visual feedback», en *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, tomo 1, IEEE, págs. 72–77, 2002.
- [3] AMIRI, N., A. RAMIREZ-SERRANO y R. DAVIES, «Integral Backstepping Control of an Unconventional Dual-Fan Unmanned Aerial Vehicle», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **69**(1–4), págs. 147–159, 2013.
- [4] AMOOZGAR, M., A. CHAMSEDDINE y Y. ZHANG, «Fault-tolerant fuzzy gain-scheduled PID for a quadrotor helicopter testbed in the presence of actuator faults», en *Proceedings of the 2nd IFAC Conference on Advances in PID Control*, tomo 2, IFAC, págs. 282–287, 2012.
- [5] AVIASTAR, «Breguet-Richet Gyroplane No.1», , 2001, URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/breguet\\_gyro.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/breguet_gyro.php).
- [6] AVIASTAR, «Convertawings Model A», , 2001, URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/convertawings.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/convertawings.php).
- [7] AVIASTAR, «Curtiss-Wright VZ-7», , 2001, URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/curtiss\\_vz-7.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/curtiss_vz-7.php).

- 
- [8] AVIASTAR, «De Bothezat», , 2001, URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/bothezat.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/bothezat.php).
- [9] AVIASTAR, «Oemichen», , 2001, URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/oemich](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/oemich)
- [10] AVIASTAR, «Convertawings Model F, project», , 2002, URL [http://www.aviastar.org/helicopters\\_eng/convertawings\\_f.php](http://www.aviastar.org/helicopters_eng/convertawings_f.php).
- [11] BAI, Y., H. LIU, Z. SHI y Y. ZHONG, «Robust control of quadrotor unmanned air vehicles», en *Control Conference (CCC), 2012 31st Chinese*, IEEE, págs. 4462–4467, Julio 2012.
- [12] BANGURA, M. y R. MAHONY, «Nonlinear Dynamic Modeling for High Performance Control of a Quadrotor», en *Australasian Conference on Robotics and Automation (ACRA 2012)*, Australian Robotics and Automation Association, págs. 1–10, 2012.
- [13] BARANEK, R. y F. SOLC, «Modelling and control of a hexa-copter», en *Carpathian Control Conference (ICCC), 2012 13th International*, IEEE, págs. 19–23, Mayo 2012.
- [14] BEARD, R. W. y T. W. MCLAIN, *Small unmanned aircraft: theory and practice*, primera edición, Princeton university press, Princeton, New Jersey, 2012.
- [15] BEJI, L. y A. ABICHOU, «Trajectory Generation and Tracking of a Mini-Rotorcraft», en *Robotics and Automation, 2005. ICRA 2005. Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, IEEE, págs. 2618–2623, Abril 2005.
- [16] BELOKON', S. A., Y. N. ZOLOTUKHIN, A. S. MAL'TSEV, A. A. NESTEROV, M. N. FILIPPOV y A. P. YAN, «Control of flight parameters of a quadrotor vehicle moving over a given trajectory», *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, **48**(5), págs. 454–461, 2012.

- [17] BENALLEGUE, A., A. MOKHTARI y L. FRIDMAN, «Feedback linearization and high order sliding mode observer for a quadrotor UAV», en *Variable Structure Systems, 2006. VSS'06. International Workshop on*, IEEE, págs. 365–372, Junio 2006.
- [18] BENALLEGUE, A., A. MOKHTARI y L. FRIDMAN, «High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV», *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **18**(4–5), págs. 427–440, 2008.
- [19] BENEDICT, M., R. GUPTA y I. CHOPRA, «Design, Development and Flight Testing of a Twin-Rotor Cyclocopter Micro Air Vehicle», en *Proceedings of the 67th Annual National Forum of the American Helicopter Society*, American Helicopter Society International, Inc., Mayo 2011.
- [20] BENNETT, E., «Why Don't We Fly Straight Up?», en *Popular Science Monthly*, tomo 112 – #2, Bonnier Corporation, págs. 43–44, 125, febrero 1928.
- [21] BOUABDALLAH, S., P. MURRIERI y R. SIEGWART, «Design and control of an indoor micro quadrotor», en *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*, tomo 5, IEEE, págs. 4393–4398, Abril 2004.
- [22] BOUABDALLAH, S., P. MURRIERI y R. SIEGWART, «Towards Autonomous Indoor Micro VTOL», *Autonomous Robots*, **18**(2), págs. 171–183, 2005.
- [23] BOUABDALLAH, S., A. NOTH y R. SIEGWART, «PID vs LQ control techniques applied to an indoor micro quadrotor», en *Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, tomo 3, IEEE, págs. 2451–2456, Septiembre 2004.
- [24] BOUADI, H., M. BOUCHOUCHA y M. TADJINE, «Sliding Mode Control based on Backstepping Approach for an UAV Type-Quadrotor.», *International Journal of Applied Mathematics & Computer Sciences*, **4**(1), 2008.

- 
- [25] BRAMWELL'S, A. R. S., G. DONE y D. BALMFORD, *Bramwells Helicopter Dynamics*, segunda edición, Butterworth-Heinemann Ltd, Oxford, Reino Unido, 1995.
- [26] CABECINHAS, D., R. NALDI, L. MARCONI, C. SILVESTRE y R. CUNHA, «Robust Take-Off for a Quadrotor Vehicle», *Robotics, IEEE Transactions on*, **28**(3), págs. 734–742, Junio 2012.
- [27] CARRILLO, L., A. LÓPEZ, R. LOZANO y C. PÉGARD, *Quad Rotorcraft Control: Vision-Based Hovering and Navigation*, primera edición, Springer, London, 2013.
- [28] CASTILLO, P., A. DZUL y R. LOZANO, «Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft», *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, **12**(4), págs. 510–516, 2004.
- [29] CASTILLO, P., P. GARCÍA, R. LOZANO y P. ALBERTOS, «Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial, (RIAI), Elsevier*, **4**(1), págs. 41–57, 2007.
- [30] CASTILLO, P., R. LOZANO y A. DZUL, «Stabilization of a mini-rotorcraft having four rotors», en *Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings. 2004 IEEE/RSJ International Conference on*, tomo 3, IEEE, págs. 2693–2698, Septiembre 2004.
- [31] CASTILLO, P., R. LOZANO y A. DZUL, «The Quad-rotor Rotorcraft», en *Modelling and Control of Mini-Flying Machines*, Advances in Industrial Control, Springer London, págs. 39–59, 2005.
- [32] CASTILLO, P., R. LOZANO y A. DZUL, «Stabilization of a mini rotorcraft with four rotors», *Control Systems, IEEE*, **25**(6), págs. 45–55, 2005.
- [33] CHAMSEDDINE, A., L. TONG, Y. ZHANG, C. RABBATH y D. THEILLIOL, «Flatness-based trajectory planning for a quadrotor Unmanned Aerial Vehicle

- test-bed considering actuator and system constraints», en *American Control Conference (ACC), 2012*, IEEE, págs. 920–925, Junio 2012.
- [34] CHAMSEDDINE, A., Y. ZHANG, C. RABBATH, C. JOIN y D. THEILLIOL, «Flatness-Based Trajectory Planning/Replanning for a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle», *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, **48**(4), págs. 2832–2848, 2012.
- [35] CHAMSEDDINE, A., Y. ZHANG, C. RABBATH y D. THEILLIOL, «Trajectory Planning and Replanning Strategies Applied to a Quadrotor Unmanned Aerial Vehicle», *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **35**(5), págs. 1667–1671, 2012.
- [36] CHEN, M. y M. HUZMEZAN, «A combined MBPC/2 dof  $H_\infty$  controller for a quad rotor UAV», en *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, tomo AIAA 2003-5520, AIAA, 2003.
- [37] CHOI I., H., BANG, «Adaptive command filtered backstepping tracking controller design for quadrotor unmanned aerial vehicle», *Proceedings Of The Institution Of Mechanical Engineers Part G-Journal Of Aerospace Engineering*, **226**(G5), págs. 483–497, 2011.
- [38] CORONA-SÁNCHEZ, J. J. y H. RODRÍGUEZ-CORTÉS, «Trajectory Tracking Control for a Rotary Wing Vehicle Powered by Four Rotors», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **70**(1–4), págs. 39–50, 2013.
- [39] COWLING, I. D., O. A. YAKIMENKO, J. F. WHIDBORNE y A. K. COOKE, «A prototype of an autonomous controller for a quadrotor UAV», en *In proceedings of: 4th European Control Conference*, págs. 1–8, 2007.
- [40] DAEWON, L., L. HYON, J. K. H, Y. K. y J. S. KIE, «Adaptive Image-Based Visual Servoing for an Underactuated Quadrotor System», *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **35**(4), págs. 1335–1353, 2012.



- [41] DAS, A., F. LEWIS y K. SUBBARAO, «Backstepping Approach for Controlling a Quadrotor Using Lagrange Form Dynamics», *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, **56**(1–2), págs. 127–151, 2009.
- [42] DAS, A., K. SUBBARAO y F. LEWIS, «Dynamic inversion with zero-dynamics stabilisation for quadrotor control», *Control Theory Applications, IET*, **3**(3), págs. 303–314, 2009.
- [43] DAVIS, W., B. B. KOSICKI, D. M. BOROSON y D. E. KOSTISHACK, «Micro Air Vehicles for Optical Surveillance», *The Lincoln Laboratory Journal*, **9**(2), págs. 197–214, 1996.
- [44] DERAFA L., M. T. B. A., OULDALI A., «Non-linear control algorithm for the four rotors UAV attitude tracking problem», *The Aeronautical Journal*, **115**(1165), 2011.
- [45] DO NASCIMENTO, D. A., C. Z. RUFINO, S. C. OLIVEIRA y M. A. F. FEITOSA, «Modeling and Design of an Autonomous Unmanned Aerial Vehicle Quadrotor Prototype for Applications in Swarm of Robots», en *Robotics Symposium and Latin American Robotics Symposium (SBR-LARS), 2012 Brazilian*, IEEE, págs. 325–328, Octubre 2012.
- [46] ESCAREÑO, J., S. SALAZAR-CRUZ y R. LOZANO, «Embedded control of a four-rotor UAV», en *American Control Conference, 2006*, IEEE, págs. 6 pp.–, Junio 2006.
- [47] ESCAREÑO, J., A. SANCHEZ, O. GARCIA y R. LOZANO, «Triple tilting rotor mini-UAV: Modeling and embedded control of the attitude», en *American Control Conference, 2008*, IEEE, págs. 3476–3481, Junio 2008.
- [48] ESCHMANN, C., C. M. KUO, C. H. KUO y C. BOLLER, «Unmanned aircraft systems for remote building inspection and monitoring», en *Proceedings of the sixth European workshop on structural health monitoring*, 2012.

- [49] ESTRADA, S., E. LICEAGA y H. RODRIGUEZ-CORTES, «Nonlinear motion control of a rotary wing vehicle powered by four rotors», en *Electrical and Electronics Engineering, 2006 3rd International Conference on*, IEEE, págs. 1–6, Septiembre 2006.
- [50] ETKIN, B., *Dynamics of Atmospheric Flight*, primera edición, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
- [51] FEDERAL AVIATION ADMINISTRATION (FAA), «Press Release - FAA Approves First Commercial UAS Flights over Land», , Junio 2014, URL [http://www.faa.gov/news/press\\_releases/news\\_story.cfm?newsId=16354](http://www.faa.gov/news/press_releases/news_story.cfm?newsId=16354).
- [52] FREDDI, A., A. LANZON y S. LONGHI, «A feedback linearization approach to fault tolerance in quadrotor vehicles», en *Proceedings of the 18th IFAC World Congress*, tomo 18, IFAC, págs. 5413–5418, 2011.
- [53] FREDDI, A., S. LONGHI y A. MONTERIU, «Actuator fault detection system for a mini-quadrotor», en *Industrial Electronics (ISIE), 2010 IEEE International Symposium on*, IEEE, págs. 2055–2060, Julio 2010.
- [54] GARCIA-CARRILLO, L., E. RONDON, A. DZUL, A. SANCHE y R. LOZANO, «Hovering quad-rotor control: A comparison of nonlinear controllers using visual feedback», en *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on*, IEEE, págs. 1662–1667, Diciembre 2010.
- [55] GARCÍA CARRILLO, L. R., A. E. DZUL LÓPEZ, R. LOZANO y C. PÉGAR, «Modeling the Quad-Rotor Mini-Rotorcraft», en *Quad Rotorcraft Control, Advances in Industrial Control*, Springer London, págs. 23–34, 2013.
- [56] GOLDSTEIN, H., C. P. POOLE y J. L. SAFKO, *Classical Mechanics*, tercera edición, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2001.

- [57] GOMEZ-BALDERAS, J. E., S. SALAZAR, J. A. GUERRERO y R. LOZANO, «Vision-based autonomous hovering for a miniature quad-rotor», *Robotica*, Cambridge University Press, **32**, págs. 43–61, Enero 2014.
- [58] GONZALEZ, I., S. SALAZAR, H. ROMERO, R. LOZANO y J. TORRES, «Attitude control of a quad-rotor using speed sensing in brushless DC motors», en *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE)*, 2011 8th International Conference on, IEEE, págs. 1–6, Octubre 2011.
- [59] GONZALEZ-SANCHEZ, M., L. AMEZQUITA-BROOKS y E. LICEAGA-CASTRO, «Simplificación de Modelos de Cuadrirotos», en *Congreso Nacional de Control Automatico, AMCA 2013*, AMCA, págs. 81–86, 2013.
- [60] GONZALEZ-SANCHEZ, M., L. AMEZQUITA-BROOKS, E. LICEAGA-CASTRO y P. DEL C ZAMBRANO-ROBLED0, «Simplifying quadrotor controllers by using simplified design models», en *Decision and Control (CDC)*, 2013 IEEE 52nd Annual Conference on, IEEE, págs. 4236–4241, Diciembre 2013.
- [61] GRZONKA, S., G. GRISSETTI y W. BURGARD, «A Fully Autonomous Indoor Quadrotor», *Robotics, IEEE Transactions on*, **28**(1), págs. 90–100, Febrero 2012.
- [62] GUADARRAMA-OLVERA, J. R., J. J. CORONA-SÁNCHEZ y H. RODRÍGUEZ-CORTÉS, «Hard Real-Time Implementation of a Nonlinear Controller for the Quadrotor Helicopter», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **73**(1–4), págs. 81–97, 2014.
- [63] HAMEL, T., R. MAHONY, R. LOZANO y J. OSTROWSKI, «Dynamic modelling and configuration stabilization for an X4-flyer», en *Proceedings of the 15th Triennial IFAC World Congress*, tomo 15, IFAC, 2002.
- [64] HANAFI, D., M. QETKEAW, R. GHAZALI, M. THAN, W. UTOMO y R. OMAR, «Simple GUI Wireless Controller of Quadcopter», *SCIRP, Interna-*

- tional Journal of Communications, Network and System Sciences*, **6**(1), págs. 52–59, 2013.
- [65] HANCER, C., K. T. ONER, E. SIRIMOGLU, E. CETINSOY y M. UNEL, «Robust hovering control of a quad tilt-wing UAV», en *IECON 2010 - 36th Annual Conference on IEEE Industrial Electronics Society*, IEEE, págs. 1615–1620, Noviembre 2010.
- [66] HOFFMAN, G. M., H. HUANG, S. WASLANDER y C. TOMLIN, «Quadrotor Helicopter Flight Dynamics and Control: Theory and Experiment», en *AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*, tomo AIAA 2007-6461, AIAA, 2007.
- [67] HOFFMANN, G., D. RAJNARAYAN, S. WASLANDER, D. DOSTAL, J. S. JANG y C. TOMLIN, «The Stanford testbed of autonomous rotorcraft for multi agent control (STARMAC)», en *Digital Avionics Systems Conference, 2004. DASC 04. The 23rd*, tomo 2, IEEE, págs. 12.E.4–121–10, Octubre 2004.
- [68] HOSSAIN, M. R., D. G. RIDEOUT y D. N. KROUGLICOF, «Bond Graph Dynamic Modeling and Stabilization of a Quad-rotor Helicopter», en *Proceedings of the 2010 Spring Simulation Multiconference*, SpringSim '10, Society for Computer Simulation International, págs. 215:1–215:7, 2010.
- [69] HOW, J. P., B. BETHKE, A. FRANK, D. DALE y J. VIAN, «Real-time indoor autonomous vehicle test environment», *Control Systems, IEEE*, **28**(2), págs. 51–64, Abril 2008.
- [70] HUA, M.-D., T. HAMEL, P. MORIN y C. SAMSON, «Introduction to Feedback Control of Underactuated VTOL Vehicles: A Review of Basic Control Design Ideas and Principles», *Control Systems, IEEE*, **33**(1), págs. 61–75, Feb 2013.
- [71] IAT21, «D-Dalus», , 2014, URL <http://www.d-dalus.com/home.html>.
- [72] JARDIN, M. R. y E. R. MUELLER, «Optimized measurements of UAV mass moment of inertia with a bifilar pendulum», en *Proceedings of the AIAA Gui-*

- dance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, tomo AIAA 2007-6822, AIAA, págs. 763–775, 2007.
- [73] KENDOUL, F., D. LARA, I. FANTONI-COICHOT y R. LOZANO, «Real-Time Nonlinear Embedded Control for an Autonomous Quadrotor Helicopter», *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **30**(4), págs. 1049–1061, 2007.
- [74] KHALIL, H. K., *Nonlinear Systems*, tercera edición, Prentice Hall, USA, 2002.
- [75] LANDAU, L. D. y E. M. LIFSHITZ, *Mechanics, Course of Theoretical Physics*, tomo 1, tercera edición, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, Reino Unido, 1976.
- [76] LEE, D., H. JIN KIM y S. SASTRY, «Feedback linearization vs. adaptive sliding mode control for a quadrotor helicopter», *International Journal of Control, Automation and Systems*, **7**(3), págs. 419–428, 2009.
- [77] LEISHMAN, J. G., «The Breguet-Richet Quadrotor Helicopter of 1907», *Vertiflite*, **47**(3), págs. 58–60, 2002.
- [78] LEISHMAN, R., J. MACDONALD, T. MCLAIN y R. BEARD, «Relative navigation and control of a hexacopter», en *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, IEEE, págs. 4937–4942, Mayo 2012.
- [79] LI, J. y Y. LI, «Dynamic analysis and PID control for a quadrotor», en *Mechatronics and Automation (ICMA), 2011 International Conference on*, IEEE, págs. 573–578, Agosto 2011.
- [80] MAHONY, R., V. KUMAR y P. CORKE, «Multirotor Aerial Vehicles: Modeling, Estimation, and Control of Quadrotor», *Robotics Automation Magazine, IEEE*, **19**(3), págs. 20–32, Septiembre 2012.
- [81] MELLINGER, D., N. MICHAEL y V. KUMAR, «Trajectory Generation and Control for Precise Aggressive Maneuvers with Quadrotors», en *Experimental*

- Robotics, Springer Tracts in Advanced Robotics*, tomo 79, Springer International Publishing, págs. 361–373, 2014.
- [82] MOHAMED, H., S. S. YANG y M. MOGHAVVEMI, «Sliding mode controller design for a flying quadrotor with simplified action planner», en *ICCAS-SICE, 2009*, IEEE, págs. 1279–1283, Agosto 2002.
- [83] MOKHTARI, A. y A. BENALLEGUE, «Dynamic feedback controller of Euler angles and wind parameters estimation for a quadrotor unmanned aerial vehicle», en *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*, tomo 3, IEEE, págs. 2359–2366, Abril 2004.
- [84] MOKHTARI, A., A. BENALLEGUE y B. DAACHI, «Robust feedback linearization and  $GH_\infty$  controller for a quadrotor unmanned aerial vehicle», en *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04. 2004 IEEE International Conference on*, IEEE, págs. 1198–1203, Agosto 2005.
- [85] MOKHTARI, A., N. K. M'SIRDI, K. MEGHRICHE y A. BELAIDI, «Feedback linearization and linear observer for a quadrotor unmanned aerial vehicle», *Advanced Robotics*, **20**(1), págs. 71–91, 2006.
- [86] MONJE, C. A., E. LICEAGA y J. U. LICEAGA, «Fractional Order Control of an Unmanned Aerial Vehicle (UAV)», en *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*, tomo 17, IFAC, págs. 15 285–15 290, 2008.
- [87] NAGATY, A., S. SAEEDI, C. THIBAUT, M. SETO y H. LI, «Control and Navigation Framework for Quadrotor Helicopters», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **70**(1–4), págs. 1–12, 2013.
- [88] NAIDOO, Y., R. STOPFORTH y G. BRIGHT, «Quad-Rotor Unmanned Aerial Vehicle Helicopter Modelling & Control», *International Journal of Advanced Robotic Systems, InTech*, **8**(4), págs. 139–149, 2011.
- [89] NALDI, R., L. GENTILI, L. MARCONI y A. SALA, «Design and experimental validation of a nonlinear control law for a ducted-fan miniature aerial vehicle»,

- Control Engineering Practice*, **18**(7), págs. 747–760, special Issue on Aerial Robotics, Julio 2010.
- [90] NAPOLITANO, R. M., *Aircraft dynamics: from modeling to simulation*, primera edición, John Wiley & Sons, Inc., USA, 2011.
- [91] NIRUT, P., R. MASUDA y H. HIRATA, «Control System Design and Simulation For a Quadrotor Helicopter», en *In proceedings of International Conference on Simulation Technology (31 st JSST Annual Conference)*, págs. 593–596, Noviembre 2009.
- [92] PAPACHRISTOS, C., K. ALEXIS y A. TZES, «Towards a High-End Unmanned Tri-TiltRotor: Design, Modeling and Hover Control», en *Control Automation (MED), 2012 20th Mediterranean Conference on*, IEEE, págs. 1579–11 584, Julio 2012.
- [93] PATANKAR, S. S., D. E. SCHINSTOCK y R. M. CAPLINGER, «Application of pendulum method to UAV momental ellipsoid estimation», en *6th AIAA Aviation Technology, Integration and Operations Conference (ATIO)*, tomo AIAA 2006-7820, AIAA, 2006.
- [94] PEÑA, M. V., E. C. VIVAS y C. I. RODRÍGUEZ, «Modelamiento Dinámico y control LQR de un Quadrotor», *Avances: Investigación en Ingeniería*, **13**, págs. 71–86, 2010.
- [95] PONG-IN, P. y P. R. OUYANG, «Application of Online Iterative Learning Tracking Control for Quadrotor UAVs», *Hindawi Publishing Corporation, ISRN Robotics*, **2013**, article ID 476153, 20 páginas, 2013.
- [96] POUNDS, P., R. MAHONY, P. HYNES y J. ROBERTS, «Design of a four-rotor aerial robot», en *Proc. 2002 Australasian Conference on Robotics and Automation*, tomo 27, págs. 145–150, 2002.

- 
- [97] POWERS, C., D. MELLINGER, A. KUSHLEYEV, B. KOTHMANN y V. KUMAR, «Influence of Aerodynamics and Proximity Effects in Quadrotor Flight», **88**, págs. 289–302, 2013.
- [98] PROUTY, R. W., *Helicopter Performance, Stability and Control*, primera edición, Krieger Publishing Company, USA, 1995.
- [99] RAHARJA, G., K. G. BEOM y Y. KWANGJOON, «Design and implementation of coaxial quadrotor for an autonomous outdoor flight», en *Ubiquitous Robots and Ambient Intelligence (URAI), 2011 8th International Conference on*, IEEE, págs. 61–63, Noviembre 2011.
- [100] RODRIGUEZ-RODRIGUEZ, M. y H. RODRIGUEZ-CORTES, «Nonlinear control for trajectory tracking of a quadrotor unmanned vehicle», en *Electrical Engineering Computing Science and Automatic Control (CCE), 2011 8th International Conference on*, IEEE, págs. 1–6, Octubre 2011.
- [101] RONDON, E., L.-R. GARCIA-CARRILLO y I. FANTONI, «Vision-based altitude, position and speed regulation of a quadrotor rotorcraft», en *Intelligent Robots and Systems (IROS), 2010 IEEE/RSJ International Conference on*, IEEE, págs. 628–633, Octubre 2010.
- [102] RYLL, M., H. BULTHOFF y P. GIORDANO, «Modeling and control of a quadrotor UAV with tilting propellers», en *Robotics and Automation (ICRA), 2012 IEEE International Conference on*, IEEE, págs. 4606–4613, Mayo 2012.
- [103] SADEGHZADEH, I., A. MEHTA, Y. ZHANG y C. A. RABBATH, «Fault-tolerant trajectory tracking control of a quadrotor helicopter using gain-scheduled PID and model reference adaptive control», en *In Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society*, tomo 2, Prognostics and Health Management Society, 2011.
- [104] SALAZAR-CRUZ, S. y R. LOZANO, «Stabilization and Nonlinear Control for a Novel Trirotor Mini-Aircraft», en *Robotics and Automation, 2005. ICRA*



2005. *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on*, IEEE, págs. 2612–2617, Abril 2005.
- [105] SANCHEZ, A., P. GARCIA, P. CASTILLO y R. LOZANO, «Simple Real-Time Stabilization of Vertical Takeoff and Landing Aircraft with Bounded Signals», *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **31**(4), págs. 1166–1176, 2008.
- [106] SÁNCHEZ, A., L. GARCÍA CARRILLO, E. RONDON, R. LOZANO y O. GARCÍA, «Hovering Flight Improvement of a Quad-rotor Mini UAV Using Brushless DC Motors», *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, **61**(1–4), págs. 85–101, 2011.
- [107] SCHAFROTH, D., C. BERMES, S. BOUABDALLAH y R. SIEGWART, «"Modeling, system identification and robust control of a coaxial micro helicopter», *Control Engineering Practice*, **18**(7), págs. 700–711, special Issue on Aerial Robotics, Julio 2010.
- [108] SEDDON, J., *Basic Helicopter Aerodynamics*, primera edición, BSP Professional Books, Oxford, Reino Unido, 1990.
- [109] SIRA-RAMÍREZ, H., «On the linear control of the quad-rotor system», en *American Control Conference (ACC), 2011*, IEEE, págs. 3178–3183, Junio 2011.
- [110] SKOGESTAD, S. y I. POSTLETHWAITE, *Multivariable Feedback Control: Analysis and Design*, segunda edición, John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [111] STENGEL, R. F., *Flight dynamics*, primera edición, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2004.
- [112] STEVENS, B. L. y F. L. LEWIS, *Aircraft control and simulation*, segunda edición, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2003.

- 
- [113] TA, D. A., I. FANTONI y R. LOZANO, «Modeling and Control of a Tilt Tri-Rotor Airplane», en *American Control Conference (ACC)*, IEEE, págs. 131–136, Junio 2012.
- [114] TAYEBI, A. y S. MCGILVRAY, «Attitude Stabilization of a VTOL Quadrotor Aircraft», *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, **14**(3), págs. 562–571, Mayo 2006.
- [115] THE AIRFORCE COLLABORATORY, «Mind of a Quadrotor», , 2013, URL <https://collaboratory.airforce.com/quadrotor/>.
- [116] VOOS, H., «Nonlinear state-dependent Riccati equation control of a quadrotor UAV», en *Computer Aided Control System Design, 2006 IEEE International Conference on Control Applications, 2006 IEEE International Symposium on Intelligent Control, 2006 IEEE*, IEEE, págs. 2547–2552, Octubre 2006.
- [117] WASLANDER, S., G. HOFFMANN, J. S. JANG y C. TOMLIN, «Multi-agent quadrotor testbed control design: integral sliding mode vs. reinforcement learning», en *Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005). 2005 IEEE/RSJ International Conference on*, IEEE, págs. 3712–3717, Agosto 2005.
- [118] WU, J., H. PENG y Q. CHEN, «RBF-ARX model-based modeling and control of quadrotor», en *Control Applications (CCA), 2010 IEEE International Conference on*, IEEE, págs. 1731–1736, Septiembre 2012.
- [119] XU, R. y U. OZGUNER, «Sliding Mode Control of a Quadrotor Helicopter», en *Decision and Control, 2006 45th IEEE Conference on*, IEEE, págs. 4957–4962, Diciembre 2006.
- [120] ZHAO, W. y T. H. GO, «Quadcopter formation flight control combining MPC and robust feedback linearization», *Journal of the Franklin Institute*, **351**(3), págs. 1335–1355, 2014.

# PUBLICACIONES

---

Se anexan las portadas de los artículos generados durante el desarrollo de la presente tesis [59, 60].

52nd IEEE Conference on Decision and Control  
December 10-13, 2013. Florence, Italy



## Simplifying quadrotor controllers by using simplified design models

M. González-Sánchez, L. Amézquita-Brooks, E. Liceaga-Castro, P. del C. Zambrano-Robledo

**Abstract**— A series of design models for the quad-rotor vehicle (QRV) are presented. These design models include a full nonlinear model which contains the most relevant dynamics. This model uses a traditional aeronautical structure. This structure may not be the best for typical nonlinear control design, but it is useful for simulation and aeronautical variables evaluation. A second nonlinear model, shown to be equivalent to the previous one, is derived. This model complies with the typical state space structure used for most nonlinear control design methods. Therefore, by using this model it is possible to simplify the controller design task. A disadvantage is that both models are represented by a set of highly nonlinear differential equations and may complicate the design of simple control laws. Therefore, a simplified model which is almost linear is derived. This model is based on a linear approximation of the main QRV dynamics plus a simple nonlinear term arising due to the yaw motion. Through an extensive set of simulations, the operating range of the approximate model is elucidated. It is shown that this model is adequate for linear controller design for a very wide range of operation.

### I. INTRODUCTION

The use of unmanned aerial vehicles (UAVs) is currently becoming part of the normal operating procedures for many public and private organisms. In particular, security, surveillance and research applications are widespread [1]. The growth of these applications has brought technological developments in several areas such as sensors, programming techniques, digital processing units, energy storage, etc [10].

UAVs can be classified, according to their physical configuration, in fixed or rotatory wing vehicles. The emergence of new applications for UAVs has also stimulated the design of innovative configurations. For instance, an unconventional vertical take-off and landing configuration is suggested in [3]. Other unconventional configurations such as ducted fan micro UAV and cyclocopters are reported in [4,5].

One of the most recurrent configurations in several applications is the *quad-rotor-vehicle* (QRV) due to its construction simplicity. There are several reports of working automated QRV platforms. For instance, in [2,6] backstepping based control is successfully used. Other approaches such as adaptive and robust backstepping are reported in [7]. Feedback linearization and sliding mode control are reported in [8,9]. Other non-linear control

schemes can be found in [10]. In addition to non-linear control schemes, several working QRV applications use traditional PI-PID linear controllers with excellent experimental results [11]. Nonetheless, the design of such PI-PID controllers remains mostly heuristic.

Notwithstanding the numerous reports on QRV control, there is still a lack of a standard design model. In fact, the majority of the reports start with a modeling procedure. From the point of view of model-based control, the pre-existence of a viable theoretical model consists in one of the most important steps when designing adequate controllers. In the context of aeronautical applications, standard and widely accepted design models for classical fixed wing and rotatory wing configurations are common. One problem with these models is that they are locked to the reference frames traditionally used for aeronautical applications. These reference frames are not necessarily the most beneficial for the control designer.

In this article a full QRV model which includes all the dynamics commonly reported in the literature is presented. Moreover, it is proved that this model is also adequate for deriving a quasi-linear approximation. It is also shown that this approximation contains the most relevant dynamics of the non-linear model. Furthermore, the approximate model is adequate for emulating a wide range of operations which include the most significant maneuvers.

Finally, a wide set of digital simulations comparing the traditional non-linear model, the modified non-linear model and the quasi-linear approximation is included. These simulations allow to verify the validity of the rearranged non-linear model and to define a range of validity for the quasi-linear approximation.

### II. NON-LINEAR MATHEMATICAL MODEL

The modeling procedure for the QRV is based on classical rigid body mechanics and it is typical for these models to use mixed reference frames for measurement and model management reasons. Nonetheless, the use of mixed reference frames adds unnecessary memory-less equations to the model complicating the controller design process. Therefore, in this section the state space model for the QRV is derived with the purpose of obtaining a model with the structure:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x, u) \\ y &= h(x)\end{aligned}$$

Which is more suitable in the context of controller design, this structure allows the use of well-defined methods such as input-output feedback linearization, sliding mode control, robust linear control, etc.

M. González-Sánchez (e-mail: m.f.gonzalez@ieee.org).  
L. Amézquita-Brooks (e-mail: amezquita-brooks@ieee.org).  
E. Liceaga-Castro (e-mail: e.liceaga.c@gmail.com).  
P. del C. Zambrano-Robledo (e-mail: patricia.zambranor@uanl.edu.mx) are with the Universidad Autónoma de Nuevo León, FIME-CHIA, Carr. A Salinas Victoria Km 2.3 C.P. 66600, Apodaca, Nuevo León, México.

Congreso Nacional de Control Automático 2013  
Ensenada, Baja California, Mexico, Octubre 16-18, 2013



## Simplificación de Modelos de Cuadrirotos

M. González-Sánchez, L. Amézquita-Brooks, E. Liceaga-Castro  
Universidad Autónoma de Nuevo León, FIME-CIIIA

Carr. A Salinas Victoria Km 2.3, C.P. 66600, Apodaca NL, México

Email: mario.gonzalezsn@uanl.edu.mx, amezquita-brooks@ieee.org, e.liceaga.c@gmail.com

Teléfono: (52)-81-13404020, ext. 2228

**Resumen**— En este artículo se presenta una serie de modelos de diseño para el vehículo cuadri-rotor. Entre estos se incluye un modelo completo no lineal que contiene las dinámicas más relevantes. Este modelo utiliza una estructura aeronáutica tradicional. Esta estructura puede no ser la mejor para el diseño típico de controladores no lineales, pero es útil para la simulación y evaluación de variables aeronáuticas. Así mismo, en este artículo se deriva un segundo modelo no lineal, que resulta ser equivalente al anterior. Este modelo cumple con la estructura típica de un modelo en espacio de estados utilizada para la mayoría de los métodos de diseño de controladores no lineales. Una desventaja es que ambos modelos aún son complejos, lo cual puede complicar el diseño de leyes de control. Para resolver este problema se deriva un modelo simplificado con el que es posible diseñar controladores más simples. Finalmente, a través de un conjunto de simulaciones, se investiga el rango de validez del modelo simplificado, que resulta ser suficiente para el seguimiento de trayectorias de alto desempeño.

**Palabras clave:** Aeroespacial, Cuadrirotor, Modelado, Control lineal.

### I. INTRODUCCIÓN

El uso de vehículos aéreos no tripulados (UAV's, por sus siglas en inglés) se está convirtiendo en parte de los procedimientos normales de operación para muchos organismos públicos y privados. En particular, las aplicaciones de seguridad, vigilancia e investigación son extensas (Davis *et al.*, 1998). El crecimiento de estas aplicaciones ha traído avances tecnológicos en diversas áreas tales como sensores, técnicas de programación, unidades de procesamiento digital, almacenamiento de energía, etc. (Minh, 2013).

Los UAV's pueden ser clasificados, de acuerdo a su configuración física: vehículos de ala fija o rotatoria. La aparición de nuevas aplicaciones para los UAV's también ha estimulado el diseño de configuraciones innovadoras. Por ejemplo, una combinación poco convencional de despegue/aterrizaje vertical es sugerida en (Amiri *et al.*, 2013). Otras configuraciones no convencionales, tales como un micro UAV de ducto y ciclocópteros se presentan en (Naldi *et al.*, 2010; Benedict *et al.*, 2011).

Una de las configuraciones más recurrentes en diferentes aplicaciones es el cuadri-rotor, (CR) debido a su facilidad de construcción. Hay varios reportes de plataformas experimentales de CR's en funcionamiento. Por ejemplo, en (Das *et al.*, 2009; Derafa *et al.*, 2011) el control basado en "backstepping" es utilizado con éxito. Otros enfoques tales

como "backstepping" adaptativo y robusto se presentan en (Choi & Bang, 2011). Técnicas como linealización por retroalimentación y control por modos deslizantes se presentan en (Daewon *et al.*, 2009; Mokhtari *et al.*, 2006). Otros esquemas de control no lineal se pueden encontrar en (Minh, 2013). Además de esquemas de control no lineal, varias aplicaciones de CR's en funcionamiento utilizan controladores lineales PI-PID tradicionales con excelentes resultados experimentales (Mellinger *et al.*, 2012). No obstante, el diseño de tales controladores PI-PID sigue siendo mayormente heurístico.

A pesar de los numerosos reportes sobre el control de CR's, existe todavía una ausencia de un modelo de diseño estándar. De hecho, la mayoría de los reportes comienzan con un procedimiento de modelado. En el contexto de las aplicaciones aeronáuticas, existen modelos de diseño estándar y ampliamente aceptados para las configuraciones de ala fija o rotatoria. Un problema con estos modelos es que están desarrollados con los marcos de referencia utilizados tradicionalmente para aplicaciones aeronáuticas. Estos sistemas de referencia no son necesariamente los más convenientes para el diseño de controladores.

En este trabajo se presenta un modelo dinámico completo de un CR que incluye todas las dinámicas comúnmente reportadas en la literatura. Posteriormente, este modelo se reordena para que tenga una estructura de espacio de estado que pueda considerarse estándar y por lo tanto se pueda utilizar con los métodos de control no lineal más comunes. Por otra parte, se muestra que este modelo también es adecuado para derivar una aproximación cuasi-lineal. Se muestra que esta aproximación contiene las dinámicas más relevantes del modelo no lineal y que es adecuada para modelar un rango de operación amplio que incluye las maniobras más importantes.

Por último, se comparan todos los modelos mediante simulaciones. Estas simulaciones permiten verificar la validez y rangos de operación de los modelos propuestos.

### II. MODELO MATEMÁTICO NO LINEAL

El procedimiento de modelado para el CR se basa en la mecánica clásica de cuerpo rígido y es típico en estos modelos el uso de marcos de referencia mixtos para la medición y manipulación de las variables. No obstante, el uso de marcos de referencia mixtos añade ecuaciones sin memoria redundantes que complican aún más el proceso de diseño del controlador. Por lo tanto, en esta sección se deriva un modelo con la estructura de espacio de estados estandarizada, que es más adecuada en el contexto del diseño de controladores.

# FICHA AUTOBIOGRÁFICA

---

Mario Francisco González Sánchez

Candidato para el grado de Maestría en Ingeniería Aeronáutica  
con Orientación en Dinámica de Vuelo

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáutica

Tesis:

MODELADO, ANÁLISIS Y CONTROL DE CUADRIRROTORES:  
UN ENFOQUE DE CONTROL CLÁSICO

Nací en Saltillo, Coahuila el día 8 de Agosto de 1989. Soy egresado de la carrera de Ingeniería en Mecatrónica por Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey Campus Saltillo en el año 2012. En el transcurso de mi carrera tuve la oportunidad de tener un acercamiento a la investigación científica, con la publicación de 2 artículos, el primero de ellos fue realizado en el programa « 13° Verano de la Ciencia de la Región Centro » y con la segunda publicación participé en el « 8° Congreso de Electrónica, Robótica y Mecánica Automotriz » auspiciado por la IEEE (CERMA 2011) en conjunto con el Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks.

Ingresé a la Maestría en Ingeniería Aeronáutica con Orientación en Dinámica de Vuelo, por parte del Centro de Investigación e Innovación en Ingeniería Aeronáu-

---

tica en el 2012. El trabajo realizado durante la maestría llevó a la participación en congresos, el primero de ellos fue el « IEEE 52nd Annual Conference on Decision and Control (CDC), 2013 » y la segunda participación se dio en el « Congreso Nacional de Control Automático, AMCA 2013 » en conjunto con el Dr. Luis Antonio Amézquita Brooks y el Dr. Eduardo Liceaga Castro, así como una estancia académica en la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Azcapotzalco.