REFORMA ACADEMICA DEL NIVEL MEDIO SUPERIOR

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE NUEVO LEON
Secretaría Académica

M7

MATEMATICAS, PRIMERA EDICION 1995

Matemáticas

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

QA11
U530
1995
v.7

QA11
U530
1995
V.7

0120-26760

1020124183

INTRODUCCIÓN

El presente texto forma parte de los materiales propuestos por el COMITÉ TÉCNICO DEL ÁREA DE MATEMÁTICAS para el curso de MATEMÁTICAS IV de la Reforma Académica.

Es claro que textos de Cálculo abundan en el mercado; pero no existe uno adecuado para estudiantes al que el programa de Reforma está dirigido, ni tampoco uno con la intención de promover la superación académica del profesorado en este nivel medio-superior.

El objetivo general de la Reforma Académica, la superación académica, es ambicioso, y sería presuntuoso afirmar que con materiales como el presente lo satisfacen completamente. Esta es la primera aproximación y de los resultados de la experimentación del material se obtendrán los elementos para su corrección. Nuestras consideraciones para su elaboración fueron las siguientes:

i) El maestro que impartirá la clase tiene conocimientos previos de los temas involucrados en esta fase del programa y por tanto, creemos que la resolución de problemas es esencial para cubrir los objetivos propuestos. Y puesto que será utilizado por los maestros en clase, el mismo material les proporcionará un apoyo a su labor docente.

ii) En esta fase de la Reforma, no se espera introducir al alumno en una problemática ajena a su realidad educativa. Es por ello que en la presentación de los materiales se ha cuidado que los niveles de rigor en la formalización no rebasen aquéllos que la práctica docente del profesor exija.

iii) En los diferentes capítulos del texto se ha tratado de construir la teoría con argumentos plausibles y de señalar algunos detalles formativos. En otras palabras, hemos intentado utilizar la intuición hasta donde nos ha sido posible, por considerar que en la enseñanza de las matemáticas, los procesos heurísticos juegan un papel primordial para su aprendizaje.

Por encima de todas las cosas, el objetivo principal en el desarrollo de este texto ha sido tener en cuenta las necesidades del estudiante. El esfuerzo de los autores a este respecto se ilustra con el intento para motivar, a través de los problemas de aplicación, los ejercicios y con los múltiples ejemplos que ilustran los conceptos.

Los autores desean expresar su gratitud sincera a los maestros que presentan valiosas sugerencias, y así como también expresar un reconocimiento a las personas que les ayudaron en la elaboración de este libro.

Comité Técnico de Matemáticas

Lic. Blanca Mª Borghes Alonso
Ing. Roberto Sánchez Ayala
Ing. Fernando Javier Gómez Triana
Lic. Miguel Angel Torrecillas González
Ing. Antonio Montemayor Soto
Ing. José Luis Guerra Torres

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ©
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

FONDO UNIVERSITARIO

INDICE

CAPITULO 1

FUNCIONES 1

1.1 Función 2
1.2 Funciones lineales 12
1.3 Funciones cuadráticas y parábolas 31
1.4 Más funciones elementales 37
1.5 Combinaciones de funciones 41

CAPITULO 2

LIMITES Y CONTINUIDAD 47

2.1 Concepto intuitivo de límite 48
2.2 Teorema de límites 54
2.3 Límites en los que interviene infinito 58
2.4 Continuidad 65

CAPITULO 3

LA DERIVADA 70

3.1 Incrementos y razones de cambio 71
3.2 La derivada 79
3.3 Derivadas de funciones elevadas a una potencia . . . 87
3.4 Otras aplicaciones 93
3.5 Derivadas del producto y cocientes y La regla de la cadena 100
3.6 Derivadas de orden superior 108

CAPITULO 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA 114

4.1 Derivadas y gráficas de funciones 115
4.2 Bosquejo de curvas polinomiales 125
4.3 Puntos críticos 128
4.4 Criterios para extremos locales 132
4.5 Aplicaciones de máximos y mínimos 137

CAPITULO 5

LA INTEGRAL 145

5.1 Antiderivadas 146
5.2 Areas bajo curvas 153
5.3 Más sobre áreas 160

CAPÍTULO 1
FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

Gran parte de las ciencias incluyen el estudio de las relaciones entre dos variables. Por ejemplo, seguramente alguna vez has escuchado comentarios tales como:

- La demanda de un artículo depende de su precio de venta.
- El área de un círculo depende de la longitud de su radio.
- La intensidad del sonido depende de la distancia a que se encuentra la fuente sonora.
- El poder adquisitivo de la moneda depende del índice del costo de la vida.
- El número de viviendas construidas en un año dependen de la tasa de interés del crédito bancario.
- La fuerza entre dos partículas con carga eléctrica opuesta depende de la distancia entre ellas, etc.

En cada una de estas relaciones, el valor de una de las variables determina el valor de la otra. La palabra "función" se utiliza para indicar una dependencia de una cantidad con respecto de otra.

El concepto de función es una de las ideas fundamentales que satura todas las matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos o que requieran el análisis de datos empíricos emplea el concepto de función.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

INDICE

CAPITULO 1

FUNCIONES 1

1.1 Función 2
1.2 Funciones lineales 12
1.3 Funciones cuadráticas y parábolas 31
1.4 Más funciones elementales 37
1.5 Combinaciones de funciones 41

CAPITULO 2

LIMITES Y CONTINUIDAD 47

2.1 Concepto intuitivo de límite 48
2.2 Teorema de límites 54
2.3 Límites en los que interviene infinito 58
2.4 Continuidad 65

CAPITULO 3

LA DERIVADA 70

3.1 Incrementos y razones de cambio 71
3.2 La derivada 79
3.3 Derivadas de funciones elevadas a una potencia . . . 87
3.4 Otras aplicaciones 93
3.5 Derivadas del producto y cocientes y La regla de la cadena 100
3.6 Derivadas de orden superior 108

CAPITULO 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA 114

4.1 Derivadas y gráficas de funciones 115
4.2 Bosquejo de curvas polinomiales 125
4.3 Puntos críticos 128
4.4 Criterios para extremos locales 132
4.5 Aplicaciones de máximos y mínimos 137

CAPITULO 5

LA INTEGRAL 145

5.1 Antiderivadas 146
5.2 Areas bajo curvas 153
5.3 Más sobre áreas 160

CAPÍTULO 1
FUNCIONES

INTRODUCCIÓN

Gran parte de las ciencias incluyen el estudio de las relaciones entre dos variables. Por ejemplo, seguramente alguna vez has escuchado comentarios tales como:

- La demanda de un artículo depende de su precio de venta.
- El área de un círculo depende de la longitud de su radio.
- La intensidad del sonido depende de la distancia a que se encuentra la fuente sonora.
- El poder adquisitivo de la moneda depende del índice del costo de la vida.
- El número de viviendas construidas en un año dependen de la tasa de interés del crédito bancario.
- La fuerza entre dos partículas con carga eléctrica opuesta depende de la distancia entre ellas, etc.

En cada una de estas relaciones, el valor de una de las variables determina el valor de la otra. La palabra "función" se utiliza para indicar una dependencia de una cantidad con respecto de otra.

El concepto de función es una de las ideas fundamentales que satura todas las matemáticas. Casi cualquier estudio que se refiera a la aplicación de las matemáticas a problemas prácticos o que requieran el análisis de datos empíricos emplea el concepto de función.

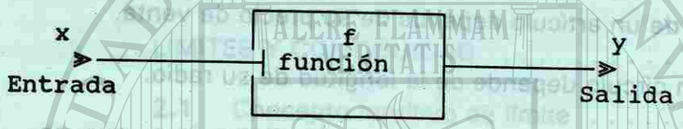
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

1 1 Función

Empezaremos dando la definición formal de una función:

Definición

> Una "función" es una regla que asocia los elementos de dos conjuntos *"X"* y *"Y"*, de tal manera que a cada elemento *"x"* del primer conjunto le corresponde un único elemento *"y"* del segundo conjunto.



(Observa que la definición no permite que a una entrada le corresponda más de una salida).

Por lo general, se usa una sola letra como *"f"* (o *"g"* o *"F"* o *"G"*) para denominar una función . Así si una función *"f"* asigna un valor de *"y"* para un valor de *"x"* particular, esto se escribe como

$$y=f(x)$$

y se lee *"f de x"* o *"f en x"*; y debemos interpretar esta notación como que la *"y"* es el valor de la función en *"x"*. (Observa que *"f(x)"* no es el producto de *"f"* por *"x"*).

Ejemplo 1
Si $f(x)=x^2$, encuentra:
a) $f(3)$ b) $f(-2)$ c) $f(a)$ d) $f(a+h)$

Solución
En estos cuatro casos, simplemente reemplazaremos la *"x"* por 3, -2, *"a"* y *"a+h"* respectivamente.

a) $f(3)=(3)^2=9$
b) $f(-2)=(-2)^2=4$
c) $f(a)=(a)^2=a^2$

Con el propósito de enfatizar, podríamos haber escrito esta función como

$$f(\ ) = (\ )^2$$

Lo anterior muestra que *"x"* es un "poseedor del lugar" de cualquier valor permisible. Así, si se desea evaluar $f(a+h)$, se introduce *"a+h"* en el paréntesis:
d) $f(a+h)=(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$

Una clara comprensión de la notación funcional es decisiva en cálculo. Estudia el siguiente ejemplo con todo cuidado, pues éste jugará un importante papel en los siguientes capítulos.

Ejemplo 2
Si $g(x)=x^2-2x$, calcula y simplifica
a) $g(-4)$ b) $g(4)$ c) $g(4+h)$ d) $g(4+h)-g(4)$ e) $\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}$

Solución
a) $g(-4)=(-4)^2-2(-4)=16+8=24$
b) $g(4)=(4)^2-2(4)=16-8=8$
c) $g(4+h)=(4+h)^2-2(4+h)=16+8h+h^2-8-2h=8+6h+h^2$
d) $g(4+h)-g(4)=8+6h+h^2-8=6h+h^2$

e) $\dfrac{g(4+h)-g(4)}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$

(En general la cantidad $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ para una función dada *"g"*, hará evidente su importancia cuando estudiemos el capítulo 3).

Si una función se define por una relación del tipo *"$y=f(x)$"*, donde $f(x)$ expresa el valor de la función por medio de una fórmula algebraica en términos de la variable *"x"*, por ejemplo: $y=x^3+3x-7$, entonces a la *"x"* se le denomina "variable independiente" y a la *"y"* se le llama "variable dependiente", pues el valor de *"y"* depende del valor elegido para *"x"*.

La regla de correspondencia es la parte principal de una función, pero ésta no queda determinada completamente, sino hasta que se da su dominio y rango.

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

D_f: El "dominio" de una función es el conjunto de valores permisibles que puede tomar la variable independiente.

R_f: El "rango" de una función es el conjunto de valores correspondientes que toma la variable dependiente.

En gran parte de los casos considerados, los dominios y rangos de las funciones con las cuales estaremos interesados son subconjuntos de los números reales. En tales casos, la función por lo regular se representa por su gráfica. La gráfica de una función f se obtiene dibujando todos los puntos (x,y), en donde x pertenece al dominio de f y $y=f(x)$, manejando x y y como coordenadas rectangulares.

Ejemplo 3

Consideremos $f(x)=2+0.5x^2$. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales, dado que podemos evaluar $f(x)$ para cualquier valor real de x. Algunos de los valores de esta función aparecen en la tabla 1, en la cual algunos valores de x están listados en el renglón superior y los valores de $y=f(x)$ están debajo de los valores

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

correspondientes de x. Los puntos correspondientes a los valores de x y y se graficaron como puntos en la figura 1. La gráfica de la función $f(x)=2+0.5x^2$ es una curva con forma de U que pasa por los puntos ya graficados.

Tabla 1

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4
$y=f(x)$	2	2.5	4	6.5	10	2.5	4	6.5	10

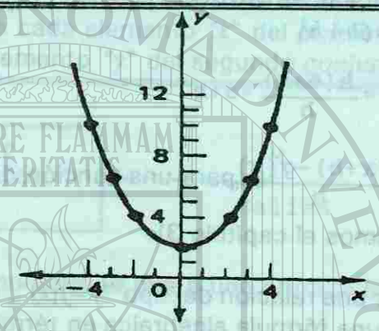


Fig. 1

Supongamos ahora que en el ejemplo 3, x denota el número de artículos producidos por una fábrica y $f(x)$ indica el costo total del producir x unidades. El costo de no producir artículos se obtiene haciendo $x=0$, esto es,

$$f(0)=2$$

De modo que 2 será el costo mínimo, produzcamos artículos o no. Estos se conocen como gastos permanentes. Por ejemplo, inversiones en maquinaria, renta del local de la fábrica y gastos de administración son algunos ejemplos de gastos permanentes. En este caso, el dominio de f no es el conjunto de todos los números reales sino el conjunto de los enteros no negativos, dado que x representa el número de artículos producidos y debe ser un número entero. En consecuencia

$$D_f=\{0,1,2,3,4,\ldots\}$$

Ahora como la variable independiente x toma los valores 0,1,2,3,..., la variable $y=f(x)$ asume los valores

$f(0)=2+0.5(0)^2=2$
$f(1)=2+0.5(1)^2=2.5$
$f(2)=2+0.5(2)^2=4$
$f(3)=2+0.5(3)^2=6.5$
etc.

En este caso, la gráfica de f es la que aparece en la figura 2. Nótese que la gráfica se compone de un conjunto discreto de puntos y no de una curva continua, como lo fue en el caso anterior. De este ejemplo, advertimos que el dominio y rango de una función pueden depender de lo que las variables independientes y dependientes representen en un problema práctico.

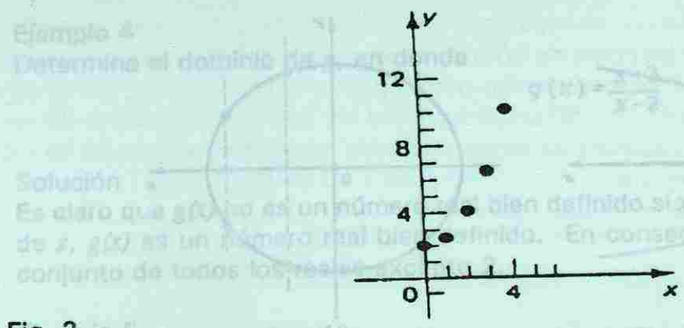


Fig. 2

CRITERIO DE LA LÍNEA VERTICAL

Cualquier curva dada (o conjunto de puntos) en el plano *cartesiano* es la gráfica de una función (en la cual y es la variable dependiente) si cualquier línea vertical corta a la gráfica solamente en un punto.

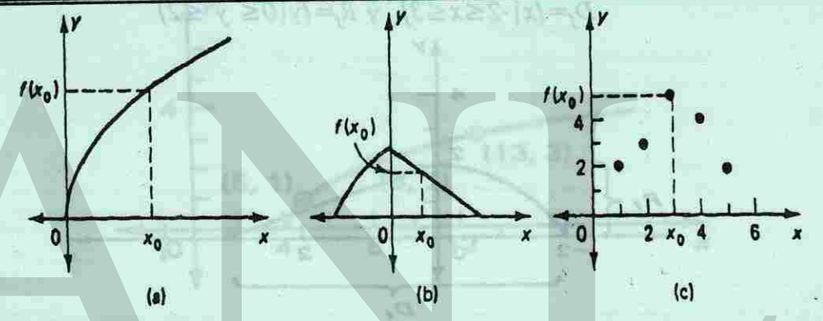


Fig. 3

Cualquier línea vertical corresponde a algún valor particular, digamos $x=x_0$, de la variable independiente, y el punto en que esta línea vertical corta a la gráfica determina el valor de y que le corresponde a x_0. Es decir la gráfica misma de la regla que relaciona cada valor de x con algún valor de y. Si la línea vertical $x=x_0$ no corta a la gráfica en ningún punto, esto significa que x_0 no pertenece al dominio.

Las gráficas de la figura 3 representan funciones. (Nótese que en la parte (c), el dominio de la función es el conjunto de enteros {1,2,3,4,5} de modo que la gráfica sólo consta de cinco puntos más bien que de una curva).

Por otra parte, las gráficas de la figura 4 no representan funciones. Estas no son funciones porque existen líneas verticales que cortan a las gráficas en más de un punto. En consecuencia, al valor $x=x_0$ en la primera gráfica, le corresponden dos valores y_1 y y_2 de y. En tal caso, el valor de x no determina un valor único de y.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

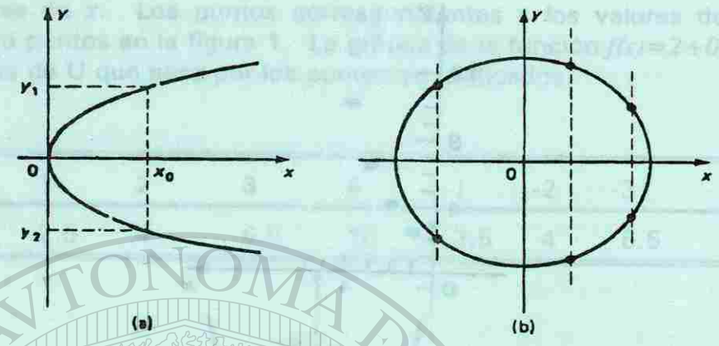


Fig. 4

En la gráfica de una función, los valores a lo largo del eje x en que la gráfica está definida constituyen el dominio de la función. En forma análoga, los valores a lo largo del eje y en que la gráfica tiene puntos constituyen el rango de la función. Esto se ilustra en la figura 5. Aquí tenemos que

$$D_f=\{x|-2\le x\le 3\} \text{ y } R_f=\{y|0\le y\le 2\}$$

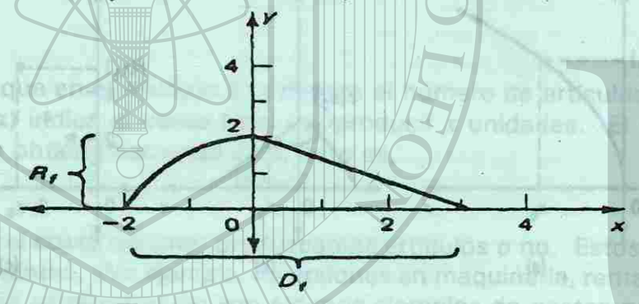


Figura 5

A menudo el dominio de una función no se establece de manera explícita. En tales casos se sobreentiende que es el conjunto de todos los valores de x para los cuales la regla dada tiene sentido. En el caso de una función f definida por una expresión algebraica, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $f(x)$ es un número real bien definido. Por ejemplo, el dominio de la función $f(x)=\sqrt{x}$ es el conjunto de los números reales no negativos, dado que la raíz cuadrada sólo tiene sentido si $x\ge 0$. De manera similar, en el caso de la función $g(x)=x^2/(x-3)$, el dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x=3$, puesto que cuando $x=3$ el denominador se hace cero y $g(3)$ no está definido.

En general, al determinar el dominio de una función debemos tener en mente estas dos condiciones: cualquier expresión dentro de una raíz cuadrada no puede ser negativa y el denominador de cualquier fracción no puede ser cero. (Más generalmente, cualquier expresión dentro de un radical con índice par tal como $\sqrt{}$ ó $\sqrt[4]{}$ ó $\sqrt[6]{}$ no puede ser negativa).

Ejemplo 4
Determina el dominio de g, en donde $g(x)=\dfrac{x+3}{x-2}$

Solución
Es claro que $g(x)$ no es un número real bien definido si $x=2$. Para cualquier otro valor de x, $g(x)$ es un número real bien definido. En consecuencia, el dominio de g es el conjunto de todos los reales excepto 2.

Ejemplo 5
Encuentra el dominio de f si $f(x)=\sqrt{x-4}$

Solución
El dominio de f es el conjunto de todos los valores para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa. Esto es,

$$x-4\ge 0 \quad \text{ó} \quad x\ge 4$$

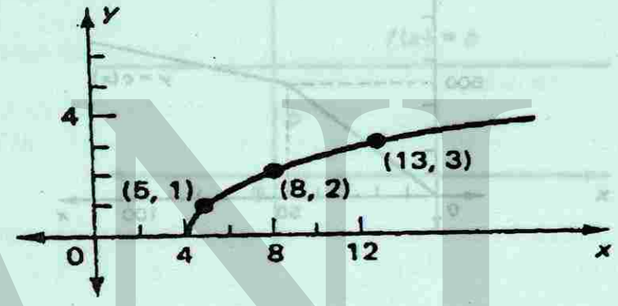


Fig. 6

Si $x<4$, $f(x)$ no es un número real, dado que la cantidad a la que se extrae raíz cuadrada, $x-4$, es negativa. La gráfica de f se aprecia en la figura 6, en la que se han graficado algunos puntos.

En los ejemplos anteriores, hemos estado interesados en funciones que están definidas por una sola expresión algebraica para todos los valores de la variable independiente. Algunas veces sucede que debemos usar funciones que están definidas por más de una expresión.

Ejemplo 6
(Función de costo de la electricidad)
La electricidad se cobra a los consumidores a una tarifa de 10¢ por unidad para las primeras 50 unidades y a 3¢ por unidad para cantidades que excedan las 50 unidades. Determina la función $c(x)$ que da el costo de usar x unidades de electricidad.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ALERE FLAMMAM VERITATIS DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución

Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x)=10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x=50$, obtenemos $c(50)=500$: el costo de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es x-50, y cuestan 3¢ cada una, por lo que el costo total es de $3(x\text{-}50)$ centavos. Así que, la tarifa total cuando $x>50$ es

$$c(x)=500+3(x\text{-}50)=500+3x\text{-}150$$
$$= 350+3x$$

Podemos escribir $c(x)$ en la forma: $C(x) = \begin{cases} 10x & (x \leq 50) \\ 350+3x & (x>50) \end{cases}$

La gráfica de $y=c(x)$ se aprecia en la figura 7. Observa cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x=50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra.

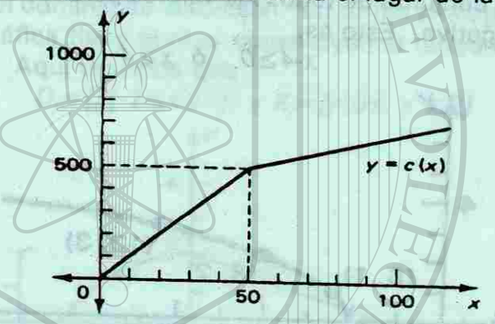


Fig. 7

Ejemplo 7

Considera la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 4\text{-}x & (0 \leq x \leq 4) \\ \sqrt{x-4} & (x>4) \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica $f(x)=4\text{-}x$, mientras que si $x>4$, está definida por la expresión $f(x)=\sqrt{x-4}$.

Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 2 y la gráfica de esta función aparece en la figura 8. Consta de dos segmentos: Si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y=4\text{-}x$. Para $x \geq 4$, la función es idéntica a la del ejemplo 5.

x	0	2	4	5	8	13
$y=f(x)$	4	2	0	1	2	3

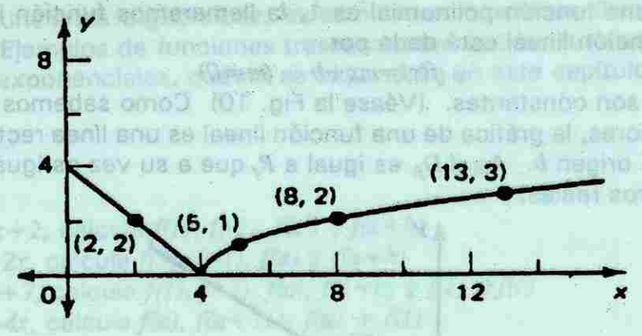


Fig. 8

En estos ejemplos, la función considerada está definida por dos expresiones algebraicas. Algunas veces es necesario considerar funciones definidas por tres o más expresiones diferentes.

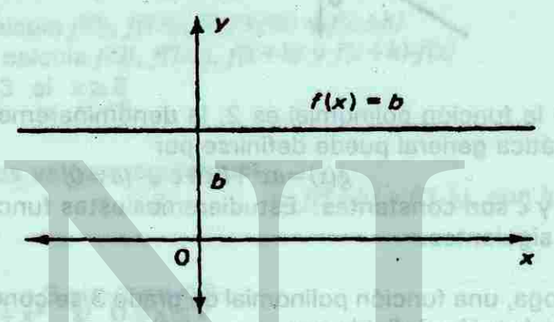


Fig. 9

Concluimos esta sección estudiando algunas funciones simples. Una función de la forma

$$f(x)=b$$

en donde b es una constante, se denomina función constante. (Véase la fig. 9) La gráfica de f es una línea recta paralela al eje x a una distancia $|b|$ por encima o por debajo del eje x dependiendo de que b sea positivo o negativo. En este caso

D_f= el conjunto de todos los números reales y $R_f = \{b\}$

Una función definida por la relación

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes y n un entero no negativo, se dice que es una función polinomial de grado n. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x)=3x^7-5x^4+2x-1 \quad \text{y} \quad g(x)=x^3+7x^2-5x+3$$

son funciones polinomiales de grado 7 y 3, respectivamente.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución

Si $x \leq 50$, cada unidad tiene un costo de 10¢, de modo que el costo total de x unidades es de $10x$ centavos. Así que, $c(x)=10x$ para $x \leq 50$. Cuando $x=50$, obtenemos $c(50)=500$: el costo de las primeras 50 unidades (esto es, 500¢) más el costo del resto de las unidades usadas. El número de estas unidades que sobrepasan a 50 es x-50, y cuestan 3¢ cada una, por lo que el costo total es de $3(x\text{-}50)$ centavos. Así que, la tarifa total cuando $x>50$ es

$$c(x)=500+3(x\text{-}50)=500+3x\text{-}150$$
$$= 350+3x$$

Podemos escribir $c(x)$ en la forma: $C(x) = \begin{cases} 10x & (x \leq 50) \\ 350+3x & (x>50) \end{cases}$

La gráfica de $y=c(x)$ se aprecia en la figura 7. Observa cómo cambia la naturaleza de la gráfica en $x=50$, en donde una fórmula toma el lugar de la otra.

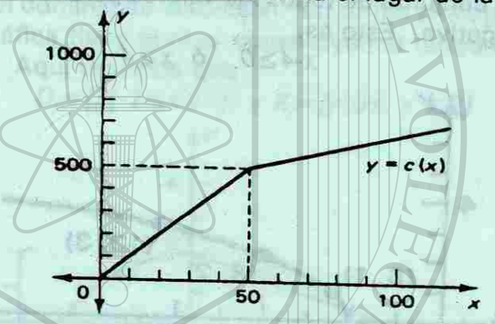


Fig. 7

Ejemplo 7

Considera la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} 4\text{-}x & (0 \leq x \leq 4) \\ \sqrt{x-4} & (x>4) \end{cases}$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números reales no negativos. En el caso de que $0 \leq x \leq 4$, la función está definida por la expresión algebraica $f(x)=4\text{-}x$, mientras que si $x>4$, está definida por la expresión $f(x)=\sqrt{x-4}$.

Algunos valores de $f(x)$ se dan en la tabla 2 y la gráfica de esta función aparece en la figura 8. Consta de dos segmentos: Si x está entre 0 y 4, la gráfica está formada por el segmento de línea recta con ecuación $y=4\text{-}x$. Para $x \geq 4$, la función es idéntica a la del ejemplo 5.

x	0	2	4	5	8	13
$y=f(x)$	4	2	0	1	2	3

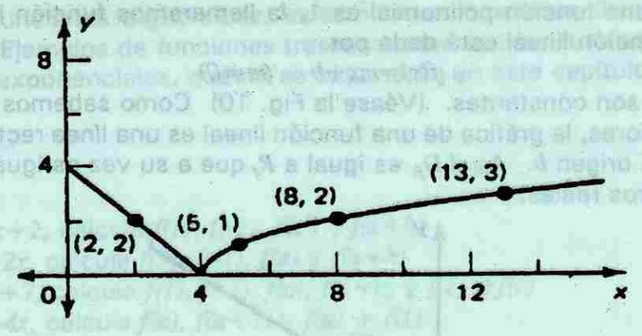


Fig. 8

En estos ejemplos, la función considerada está definida por dos expresiones algebraicas. Algunas veces es necesario considerar funciones definidas por tres o más expresiones diferentes.

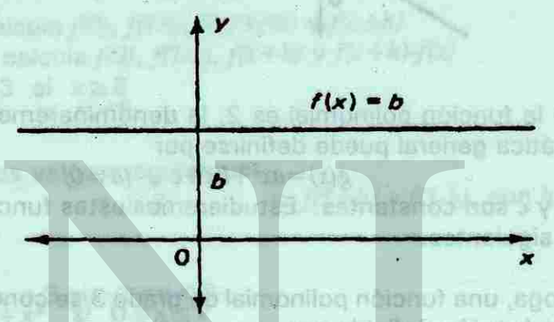


Fig. 9

Concluimos esta sección estudiando algunas funciones simples. Una función de la forma

$$f(x)=b$$

en donde b es una constante, se denomina función constante. (Véase la fig. 9) La gráfica de f es una línea recta paralela al eje x a una distancia $|b|$ por encima o por debajo del eje x dependiendo de que b sea positivo o negativo. En este caso

D_f= el conjunto de todos los números reales y $R_f = \{b\}$

Una función definida por la relación

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes y n un entero no negativo, se dice que es una función polinomial de grado n. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x)=3x^7-5x^4+2x-1 \quad \text{y} \quad g(x)=x^3+7x^2-5x+3$$

son funciones polinomiales de grado 7 y 3, respectivamente.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si el grado de una función polinomial es 1, la llamaremos función lineal. La forma general de la función lineal está dada por

$$f(x)=mx+b \quad (m\neq 0)$$

en donde m y b son constantes. (Véase la Fig. 10) Como sabemos por lo expuesto en cursos anteriores, la gráfica de una función lineal es una línea recta con pendiente m y ordenada al origen b. Aquí D_f, es igual a R_f que a su vez es igual al conjunto de todos los números reales.

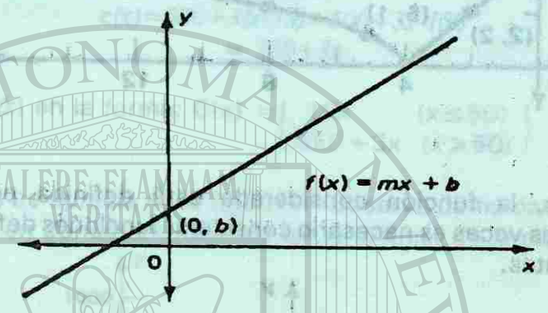


Fig. 10

Si el grado de la función polinomial es 2, la denominaremos función cuadrática. La función cuadrática general puede definirse por

$$g(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$$

en donde a, b y c son constantes. Estudiaremos estas funciones con todo detalle en las secciones siguientes.

En forma análoga, una función polinomial de grado 3 se conoce como función cúbica. Por ejemplo, la función definida por

$$f(x)=2x^3-5x^2+7x+1$$

es una función cúbica.

Si el grado de la función polinomial es cero, se reduce a una función constante.

Si una función puede expresarse como el cociente de dos funciones polinomiales, se denomina función racional. Ejemplos de funciones racionales son

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-4} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{2x^3-7x+1}{5x^2-2}$$

En general, cualquier función racional tiene la forma $f(x)=p(x)/q(x)$, en donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios en x.

Si el valor $f(x)$ de una función f se encuentra por un número finito de operaciones algebraicas, f se llama función algebraica. Las operaciones algebraicas son la adición, la sustracción, la multiplicación, la división, la elevación a potencias y la extracción de raíces. Por ejemplo, las funciones f y g definidas por

$$f(x)=\frac{(2x+1)^2-\sqrt{x^3+1}}{(x^2+1)^4} \quad \text{y} \quad g(x)=(2x^2-1)^{-1/7}+5x^{3/4}$$

son funciones algebraicas.

Aparte de las funciones algebraicas, existen otras funciones llamadas funciones trascendentes. Ejemplos de funciones trascendentes son las funciones logarítmicas y las funciones exponenciales, que no se expondrán en este capítulo.

Ejercicio 1.1

1. Dada $f(x)=3x+2$, calcula $f(1)$, $f(-2)$, $f(x^2)$ y $f(x+h)$
2. Dada $f(x)=5-2x$, calcula $f(3)$, $f(-1)$, $f(a)$ y $f(a+h)$
3. Dada $f(t)=5t+7$, calcula $f(1)$, $f(-3)$, $f(c)$, $f(1+c)$ y $f(1)+f(c)$
4. Dada $f(x)=3-4x$, calcula $f(a)$, $f(a+1)$ y $f(a)+f(1)$
5. Dada $f(x)=x^2$, calcula $f(3)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(\sqrt{x})$ y $f(x+h)$
6. Dada $f(x)=3x^2+7$, calcula $f(c)$, $f(c+h)$ y $f(c+h)-f(c)$
7. Dada $f(x)=\sqrt{x}$, calcula $f(4)$, $f(x^2)$ y $f(a^2+h^2)$
8. Dada $f(x)=\sqrt{x-16}$, calcula $f(25)$, $f(0)$ y $f(7)$
9. Dada $f(t)=3t^2-5t+7$, calcula $f(0)$, $f(1/t)$, $f(c)+f(h)$ y $f(c+h)$
10. Dada $f(u)=2u^2+3u-5$, calcula $f(0)$, $f(1/x)$, $f(x+h)$ y $f(x+h)-f(x)$
11. Dada $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x\geq 5 \\ 6-3x & \text{si } x<5 \end{cases}$

Encuentra cada uno de los valores siguientes:

a. $f(0)$ b. $f(7)$ c. $f(-2)$ d. $f(5+h)$ y $f(5-h)$, con $h>0$

12. Dada $g(x)=\begin{cases} 4x+3 & \text{si } -2\leq x<0 \\ 1+x^2 & \text{si } 0\leq x\leq 2 \\ 7 & \text{si } x>2 \end{cases}$

Evalúa cada uno de los valores siguientes

a. $g(1)$ b. $g(3)$ c. $g(-1)$ d. $g(0)$ e. $g(-3)$

Evalúa $[f(x+h)-f(x)]/h$ en donde $f(x)$ está dada abajo

13. $f(x)=2x+5$ 14. $f(x)=3x-7$
15. $f(x)=x^2$ 16. $f(x)=x^2-3x+5$

Determina el dominio de cada función

17. $f(x)=2x+3$ 18. $f(t)=2t^2-3t+7$
19. $h(x)=\frac{x-1}{x-2}$ 20. $d(p)=\frac{2p+3}{p-1}$
21. $g(x)=\frac{x+1}{x^2-3x+2}$ 22. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

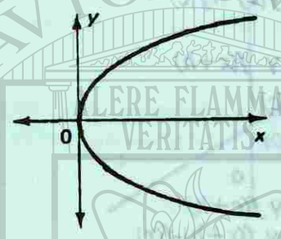
23. $g(t)=\sqrt{t-2}$ 24. $f(y)=-\sqrt{3y-2}$

25. $g(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}$

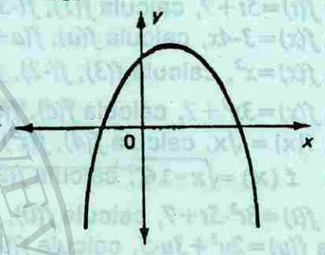
26. $f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{si } x>5 \\ 6-3x & \text{si } x<5 \end{cases}$

Establezca si las gráficas representan o no funciones

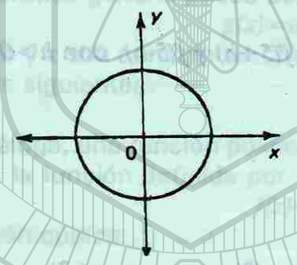
27



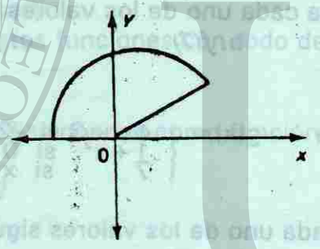
28.



29.



30.



1.2 Funciones Lineales

En esta sección, examinaremos algunas propiedades de las rectas. Nuestro primer objetivo será investigar la ecuación algebraica que tiene una recta dada, así como su gráfica.

Una de las propiedades más importantes de una línea recta es qué tan pronunciadamente sube o baja, y deseamos introducir una cantidad que mida el grado de inclinación (pendiente) de una recta. Empecemos considerando un ejemplo. La ecuación $y=2x-4$ tiene como gráfica la línea recta que aparece en la figura 11. Elijamos dos puntos sobre esta línea, tales como los puntos (3,2) y (5,6), que se denotan, respectivamente, por P y Q en la figura citada. La diferencia entre las coordenadas x de estos dos puntos, denotada por PR, se denomina el "avance" o distancia de P a Q:

$$\text{avance}=PR=5-3=2$$

La diferencia entre las coordenadas y de P y Q, igual a la distancia QR, se denomina la elevación de P a Q:

$$\text{elevación}=QR=6-2=4$$

Observemos que la elevación es igual a dos veces el avance. Este es el caso, no importando qué pares de puntos elijamos sobre la gráfica. Por ejemplo, tomemos los puntos $P'(-1,-6)$ y $Q'(4,4)$. (Véase la fig. 11) Entonces

$$\text{avance}=P'R'=4-(-1)=5 \text{ y elevación}=Q'R'=4-(-6)=10$$

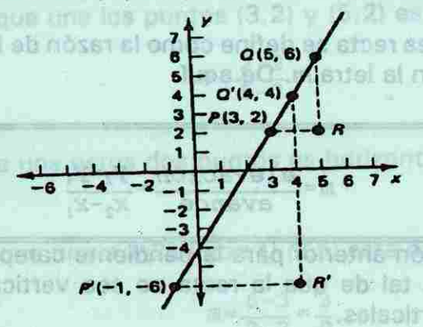


Fig. 11

De nuevo, la razón de la elevación al avance es igual a 2.

La misma razón de la elevación al avance se obtiene en los dos casos porque los triángulos PQR y $P'Q'R'$ son semejantes. Por tanto, las razones de los lados correspondientes son iguales: $QR/PR = Q'R'/P'R'$. Esta razón se denomina la pendiente de la línea recta. La recta de la figura 11 tiene una pendiente igual a 2.

La pendiente de una línea recta arbitraria se define de manera similar. Sean P y Q dos puntos cualesquiera sobre la línea. (Véase la fig. 12) Sean sus coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2), respectivamente. Sea R la intersección de la línea horizontal que pasa por P y la línea vertical a través de Q. Entonces, la distancia PR se denomina el avance entre P y Q y la distancia QR se conoce como la elevación entre P y Q.

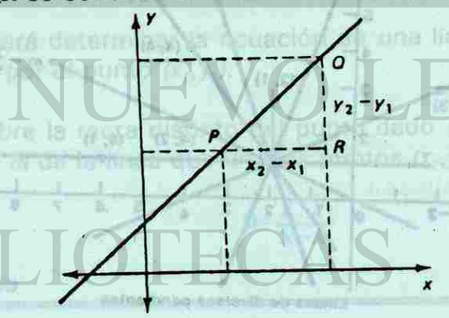


Fig. 12

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En términos de coordenadas,

elevación $= QR = y_2 - y_1$ y también

avance $= PR = x_2 - x_1$

(Nótese que si Q estuviese por debajo de R, lo cual sucedería si la recta presentara una inclinación descendente hacia la derecha, entonces la elevación sería negativa. Podíamos elegir también Q, de tal manera que estuviese a la izquierda de P, en cuyo caso $x_2 < x_1$ y el avance resultaría negativo).

La pendiente de una línea recta se define como la razón de la elevación al avance. Por lo regular se denota con la letra m. De aquí

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{avance}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Nótese que la ecuación anterior para la pendiente carece de sentido a menos que $x_2 - x_1 \neq 0$; es decir, con tal de que la recta no sea vertical. La pendiente no está definida para rectas verticales.

Debe observarse que la pendiente de una recta es la misma, no importando las posiciones de los puntos P y Q sobre la línea.

Si la pendiente m de una línea es positiva, la línea asciende hacia la derecha.

Entre más grande sea el valor de m, la inclinación de la línea es mayor con respecto a la horizontal. Si m es negativa, la línea desciende hacia la derecha. Si $m=0$, la línea es horizontal. Estas propiedades se ilustran en la figura 13.

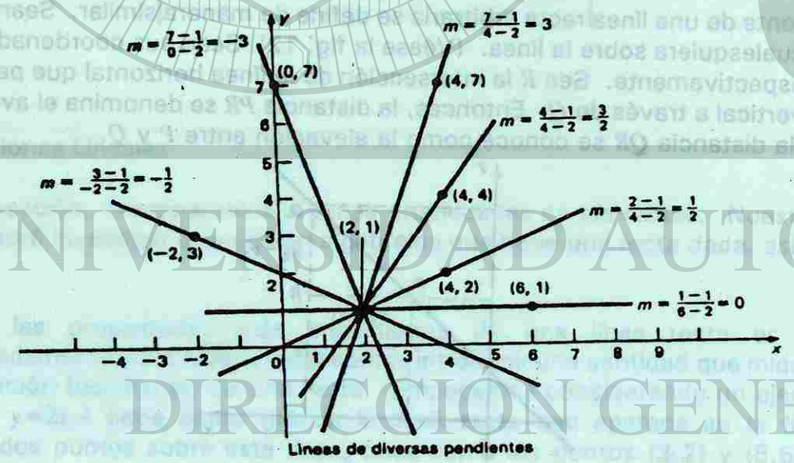


Fig. 13

Ejemplo 1

Encuentra la pendiente de la línea que une los puntos (1,-3) y (3,7)

Solución

Usando la fórmula, la pendiente es:

$$m = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

Ejemplo 2

La pendiente de la recta que une los puntos (3,2) y (5,2) es

$$m = \frac{2-2}{5-3} = 0$$

De modo que la recta que une estos dos puntos es horizontal

Ejemplo 3

La pendiente de la recta que une a $P(2,3)$ con $Q\ (2,6)$ está dada por

$$m = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0}$$

que no está definida. En consecuencia, la pendiente de la recta que une a P con Q no esta definida. En este caso, la recta PQ es vertical.

¿Qué información necesitamos para dibujar una línea recta particular? Una forma como puede especificarse una línea recta es dando dos puntos situados sobre ella. Una vez que los dos puntos se han dado, la línea completa está determinada, dado que sólo una línea recta puede pasar por esos dos puntos.

A través de cualquier punto, hay por supuesto muchas rectas diferentes con pendientes que van de grandes a pequeñas, positivas a negativas. Sin embargo, si se conoce la pendiente, existe sólo una recta que pasa por el punto en cuestión. en consecuencia, una segunda forma como puede especificarse una línea recta es dando un punto sobre ella y su pendiente.

Ahora nuestra tarea será determinar la ecuación de una línea recta no vertical con pendiente m que pase por el punto (x_1, y_1).

Sea (x,y) un punto sobre la recta distinto del punto dado (x_1,y_1). (Véase la fig. 14) Entonces la pendiente m de la línea que une los puntos (x_1,y_1) y (x,y) está dada por

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

Por tanto, se sigue que

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esta se conoce como la forma punto-pendiente de la recta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

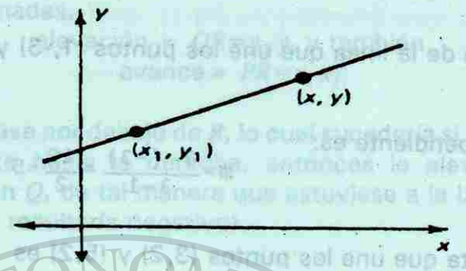


Fig. 14

Ejemplo 4

Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,-3) con pendiente -2

Solución

Usando la ecuación de la forma punto-pendiente con $m=-2$ y $(x_1,y_1)=(5,-3)$, encontramos que la ecuación requerida de la línea recta es la siguiente

$$y-(-3)=-2(x-5)$$
$$y+3=-2x+10$$
$$y=-2x+7$$

Ejemplo 5

Determina la ecuación de la línea recta que pasa por los puntos (1,-2) y (5,6)

Solución

La pendiente de la recta que une a (1,-2) con (5,6) es

$$m=\frac{6-(-2)}{5-1}=\frac{8}{4}=2$$

Usando la forma punto-pendiente, la ecuación de la línea recta a través de (1,-2) con pendiente $m=2$ es

$$y-(-2)=2(x-1)$$
$$y=2x-4$$

Esta es la recta que aparece en la figura 11

En la forma punto-pendiente, sea (x_1,y_1) igual a (0,b). (Véase la fig. 15) Entonces la ecuación punto-pendiente se transforma en

$$y-b=m(x-0)$$

o bien

$$y=mx+b$$

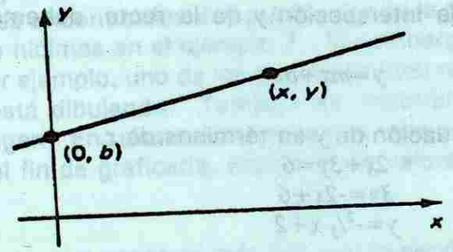


Fig. 15

La cantidad b, que da la distancia a lo largo del eje y, al corte con la línea recta, se conoce como la intersección y de la recta. La ecuación anterior se llama forma pendiente-intersección de la recta.

Una ecuación en forma general (de una función de primer grado) con dos variables x y y es una ecuación de la forma

$$Ax+By+C=0$$

en donde A, B y C son constantes y A y B diferentes de cero.

Con base en el estudio anterior, podemos describir la gráfica de la ecuación lineal general.

Si $B\neq 0$ y $A\neq 0$, la ecuación toma la forma

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

cuando se despeja y. Usando la forma pendiente-intersección, advertimos que ésta es la ecuación de una línea recta cuya pendiente es $-A/B$ y con intersección y igual a -C/B.

De modo que la gráfica de la función lineal general es, en cada caso, una línea recta. Una ecuación lineal de la forma de la ecuación anterior a menudo se conoce como ecuación general de una línea recta. La tabla 3 resume las diversas formas asumidas por la ecuación de una línea recta.

Tabla 3

Forma	Ecuación
1. Punto-pendiente	$y-y_1=m(x-x_1)$
2. Pendiente-intersección	$y=mx+b$
3. General	$Ax+By+C=0$, A y B diferentes de cero.

Ejemplo 6

Dada la ecuación lineal $2x+3y=6$, determina la pendiente y la intersección y de su gráfica.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución
Para encontrar la pendiente y la intersección y de la recta, debemos expresar la ecuación dada en la forma

$$y=mx+b$$

Es decir, debemos resolver la ecuación de y en términos de x.

$$2x+3y=6$$
$$3y=-2x+6$$
$$y=-{}^2/_3\,x+2$$

Comparando la forma pendiente-intersección, $y=mx+b$, tenemos que $m=-{}^2/_3$ y $b=2$. De modo que la pen18iente es igual a $-{}^2/_3$ y la intersección y es igual a 2.

Graficando funciones lineales

Ejemplo 7

Dibuja la gráfica de la ecuación lineal $3x-4y=12$

Solución

Sabemos que la gráfica de una ecuación lineal con dos variables siempre es una línea recta,y que una línea recta está completamente determinada por dos puntos. De modo que al graficar la ecuación lineal, encontramos dos puntos distintos (x,y) que satisfagan la ecuación, los graficamos y los unimos mediante una línea recta. Haciendo $x=0$ en la ecuación, obtenemos

$$-4y=12 \quad \text{o bien} \quad y=-3$$

En consecuencia, un punto sobre la línea es (0,-3). Haciendo $y=0$ en la ecuación considerada, vemos que

$$3x=12 \quad \text{o bien} \quad x=4$$

Por tanto, (4,0) es un segundo punto sobre la línea. Graficando los puntos (0,-3) y (4,0), los cuales están situados sobre los ejes coordenados y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica de la ecuación, que aparece en la figura 16.

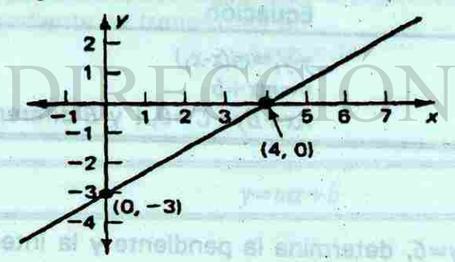


Fig. 16

Cuando dibujamos la gráfica de una relación lineal, el procedimiento más simple en la mayoría de los casos es encontrar los dos puntos donde la gráfica corta a los ejes de coordenadas, como lo hicimos en el ejemplo 7. Sin embargo, hay ocasiones en que no es conveniente; por ejemplo, uno de los puntos de intersección puede estar afuera del papel donde se está dibujando. También es imposible usar esta técnica si la gráfica pasa por el origen. En tales casos, podemos usar cualquier pareja de puntos sobre la gráfica con el fin de graficarla, eligiendo los valores de x más convenientes para calcular y.

En forma alternativa, algunas veces es más útil usar la pendiente al dibujar la gráfica. Por ejemplo, la ecuación del ejemplo 7 puede escribirse en la forma $y={}^3/_4\,x-3$, lo cual indica que la pendiente es ${}^3/_4$ y la intersección y es -3. Así que, podemos graficar el punto (0,-3). Además, por cada 4 unidades que nos movamos a lo largo de la dirección positiva de las x, la gráfica sube 3 unidades, dado que pendiente = elevación/avance $={}^3/_4$. De modo que si nos movemos 4 unidades horizontalmente y 3 unidades verticalmente a partir del punto (0,-3) obtenemos un segundo punto sobre la gráfica. O bien podemos movernos horizontalmente 8 unidades y 6 unidades verticalmente para obtener un segundo punto. Esto se ilustra en la figura 17. De la intersección y que es -3, nos movemos horizontalmente 8 unidades y luego subimos 6 unidades hasta llegar al punto B. Entonces, puede dibujarse una línea recta que una al punto (0,-3) con B.

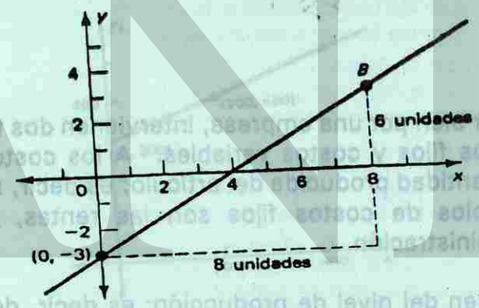


Fig. 17

Ejemplo 8
(Decisiones sobre vías de comunicación)
El gobierno de una ciudad tiene un presupuesto de $200 millones para gastos de transporte, e intenta utilizarlos para construir otras líneas de tren subterráneo o supercarreteras. Si cuesta $2.5 millones construir 1 km de supercarreteras y $4 millones construir 1 km de líneas de tren subterráneo. Encuentra la relación entre el número de kilómetros de autopista y de líneas de tren subterráneo que pueden construirse usando la totalidad del presupuesto. Interpreta la pendiente de la relación lineal que se obtiene.

Solución
Suponga que van a construir x kilómetros de autopista y y kilómetros de líneas de tren subterráneo. El costo para construir los x kilómetros de autopista a $2.5 millones por

kilómetro es de 2.5x millones de dólares y el costo de construcción de y kilómetros de tren subterráneo a \$4 millones por kilómetro es de $4y$ millones de dólares. Dado que el costo total es igual al presupuesto asignado para tal propósito,

$$2.5x+4y=200$$

Esta ecuación nos da la relación requerida entre los números de kilómetros que pueden construirse con el presupuesto.

Despejando y en la ecuación dada, obtenemos

$$y=-{}^{5}/_{8}x+50$$

La pendiente de esta línea es $-{}^{5}/_{8}$, que expresa el hecho de que cada kilómetro adicional de construcción de autopista será el costo de construcción de ${}^{5}/_{8}$ kilómetros de tren subterráneo. Despejando a x en la ecuación original en función de y

$$x=-{}^{8}/_{5}y+80$$

Así que, cada kilómetro adicional de construcción de tren subterráneo es a cambio de ${}^{8}/_{5}$ kilómetro de construcción de autopistas.

Por último estudiaremos algunas aplicaciones de las funciones lineales y líneas rectas a problemas en la administración y la economía.

Modelos de costo lineal

En la producción de cualquier bien por una empresa, intervienen dos tipos de costos; que se conocen como costos fijos y costos variables. A los costos fijos hay que enfrentarse sin importar la cantidad producida del artículo; es decir, no dependen del nivel de producción. Ejemplos de costos fijos son las rentas, intereses sobre préstamos y salarios de administración.

Los costos variables dependen del nivel de producción; es decir, de la cantidad de artículos producidos. Los costos de los materiales y de la mano de obra son ejemplos de costos variables. El costo total está dado por

Costo total = Costos variables + Costos fijos

Consideremos el caso en el que el costo variable por unidad del artículo es constante. En este caso, los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos. Si m denota el costo variable por unidad, entonces los costos variables totales al producir x unidades de artículos son de mx dólares. Si los costos fijos son de b dólares, se desprende que el costo total y_c (en dólares) de producir x unidades está dado por

Costo total = Costos totales variables + Costos fijos

$$y_c=mx+b$$

La ecuación anterior es un ejemplo de un modelo de costo lineal. La gráfica de la ecuación es una línea recta cuya pendiente representa el costo variable por unidad y cuya ordenada al origen da los costos fijos.

Ejemplo 9
(Modelo de costo lineal) El costo variable de procesar un kg. de granos de café es de 50¢ y los costos fijos por día son de \$300.
a) Da la ecuación de costo lineal y dibuja su gráfica
b) Determina el costo de procesar 1000 kilos de granos de café en un día.

Solución
a. Si y_c representa el costo (en dólares) de procesar x kg. de granos de café por día, se sigue que de acuerdo al modelo lineal, tenemos

$$y_c=mx+b$$

en donde m representa el costo variable por unidad y b es el costo fijo. En nuestro caso, $m=50¢=\$0.50$ y $b=\$300$. Por tanto

$$y_c=0.5x+300$$

Con el objeto de dibujar la gráfica de la función, primero encontramos dos puntos sobre ella

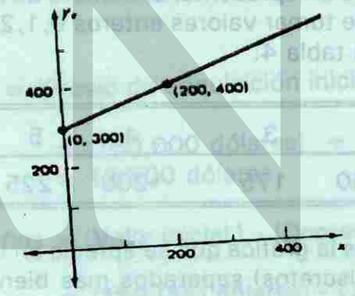


Fig. 18

Haciendo $x=0$ en la ecuación anterior, tenemos que $y=300$; haciendo $x=200$ en la ecuación anterior, tenemos $y_c=0.5(200)+300=400$. De modo que dos puntos que satisfacen la ecuación de costo anterior son (0,300) y (200, 400). Graficando estos dos puntos y uniéndolos mediante una línea recta, obtenemos la gráfica que aparece en la figura 18. Nótese que la porción relevante de la gráfica está situada por completo en el primer cuadrante porque x y y_c no pueden ser cantidades negativas.

b. Sustituyendo $x=1000$ en la ecuación, obtenemos

$$y_c=0.5(1000)+300=800$$

En consecuencia, el costo de procesar 1000 kg. de granos de café al día será de \$800.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 10

(Modelo de costos) El costo de fabricar 10 máquinas de escribir al día es de $350 mientras que cuesta $600 producir 20 máquinas del mismo tipo al día. Suponiendo un modelo de costo lineal, determina la relación entre el costo total y_c de producir "x" máquinas de escribir al día y dibuja su gráfica.

Solución

Se nos han dado los puntos (10, 350) y (20, 600) que están sobre la gráfica de un modelo de costo lineal. La pendiente de la línea que une estos dos puntos es

$$m=\frac{600-350}{20-10}=\frac{250}{10}=25$$

Usando la forma punto-pendiente, advertimos que la ecuación requerida de la línea recta (del modelo de costo lineal) con pendiente $m=25$ y que pasa por el punto (10,350) es

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y_c-350=25(x-10)=25x-250;$$

es decir,

$$y_c=25x+100$$

La gráfica de la ecuación anterior en este caso no es una línea recta continua porque no puede tomar valores fraccionarios al representar el número de máquinas de escribir producidas. La variable x sólo puede tomar valores enteros 0,1,2,3,4,5... los valores correspondientes de y_c se dan en la tabla 4.

x	0	1	2	3	4	5	6	...
y_c	100	125	150	175	200	225	250	...

Graficando estos puntos, obtenemos la gráfica que se aprecia en la figura 19. Nótese que la gráfica consta de puntos (discretos) separados mas bien de una línea recta continua.

Fig. 19

Depreciación en línea recta

Cuando una compañía compra equipo o maquinaria, registra el valor de tal equipo como uno de los activos en su balance general. Al pasar los años este valor debe decrecer porque el equipo lentamente se desgasta o se hace obsoleto. Esta reducción gradual en el valor de un activo se conoce como depreciación. Uno de los métodos ordinarios para calcular la cantidad de depreciación es reducir el valor por una cantidad constante cada año, de tal manera que el valor se reduzca a valores de desecho al término de la vida útil estimada para el equipo. Esto se denomina depreciación en línea recta. Tenemos que

Tasa de depreciación (por año)
= (Valor inicial - valor de desecho) ÷ (Vida útil en años)

Ejemplo 13

(Depreciación) Una empresa compra maquinaria por $150,000. Se espera que la vida útil de la maquinaria sea de 12 años con valor de desecho cero. Determina la cantidad de depreciación por año y una fórmula para el valor depreciado después de x años.

Solución

Depreciación por año = (Precio de adquisición inicial) ÷ (Vida útil en años)

= (150,000 dólares) ÷ (12 años)
= 12,500 dólares

Valor después de x años = (Valor inicial) - (Depreciación por año) (Número de años)

= (150,000 dólares) - (12,500 dólares por año)(x años)
= 150,000-12,500x dólares

La gráfica de esta relación aparece en la figura 21.

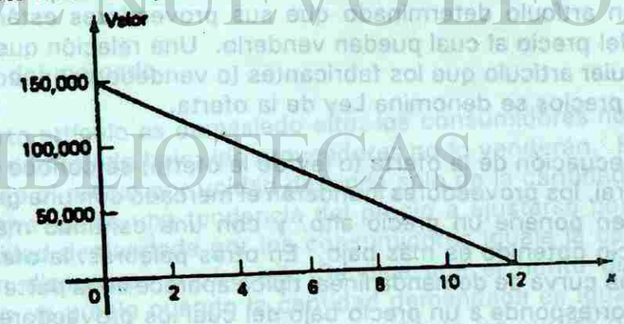


Fig. 21

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Oferta y demanda

Las leyes de la oferta y la demanda son dos de las relaciones fundamentales en cualquier análisis económico. La cantidad x de cualquier artículo que será adquirida por los consumidores depende del precio en que el artículo esté disponible. Una relación que especifique la cantidad de un artículo determinado que los consumidores están dispuestos a comprar, a varios niveles de precios, se denomina ley de la demanda. La ley más simple es una relación del tipo

$$p=mx+b$$

en donde p es el precio por unidad del artículo y m y b son constantes. La gráfica de una ley de demanda se llama la curva de demanda. Obsérvese que p se ha expresado en términos de x. Estos nos permite calcular el nivel de precio en que cierta cantidad x puede venderse.

Es un hecho perfectamente conocido que si el precio por unidad de un artículo aumenta, la demanda por el artículo disminuye, porque menos consumidores podrán adquirirlo, mientras que si el precio por unidad disminuye (es decir, el artículo se abarata) la demanda se incrementará. En otras palabras, la pendiente m de la relación de demanda de la ecuación anterior es negativa. De modo que la gráfica de la ecuación tiene una inclinación que baja hacia la derecha, como se aprecia en la figura 22. Puesto que el precio p por unidad y la cantidad x demandada no son números negativos, la gráfica de la ecuación anterior sólo debe dibujarse en el primer cuadrante.

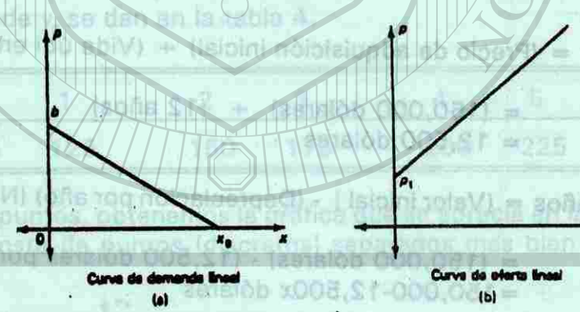


Fig. 22

La cantidad de un artículo determinado que sus proveedores están dispuestos a ofrecer depende del precio al cual puedan venderlo. Una relación que especifique la cantidad de cualquier artículo que los fabricantes (o vendedores) puedan poner en el mercado a varios precios se denomina Ley de la oferta.

La gráfica de una ecuación de la oferta (o ley de la oferta) se conoce como curva de la oferta. En general, los proveedores inundarán el mercado con una gran cantidad de artículos, si pueden ponerle un precio alto, y con una cantidad más pequeña de artículos si el precio obtenido es más bajo. En otras palabras, la oferta aumenta al subir el precio. Una curva de demanda lineal típica aparece en la parte (b) de la figura 25. El precio p_1 corresponde a un precio bajo del cual los proveedores no ofrecerán el artículo.

Ejemplo 14
(Demanda) Un comerciante puede vender 20 rasuradoras eléctricas al día al precio de $25 cada una, pero puede vender 30 si les fija un precio de $20 a cada rasuradora eléctrica. Determina la ecuación de demanda, suponiendo que es lineal.

Solución
Considerando la cantidad x demandada como la abscisa (o coordenada x) y el precio p por unidad como la ordenada (o coordenada y) los dos puntos sobre la curva de demanda tienen coordenadas.
$x=20, p=25$ y $x=30, p=20$

De modo que los puntos son (20,25) y (30,20). Dado que la ecuación de demanda es lineal, está dada por la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos (20,25) y (30,20). La pendiente de la línea que une estos puntos es

$$m=\frac{20-25}{30-20}=\frac{5}{10}=-\frac{5}{10}=-0.5$$

Por la fórmula punto-pendiente, la ecuación lineal de la línea que pasa por (20,25) con pendiente $m=-0.5$ es

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Dado que $y=p$, tenemos que

$$p-25=-0.5(x-20)$$
$$p=-0.5x+35$$

que es la ecuación de demanda requerida. (Véase la fig. 23)

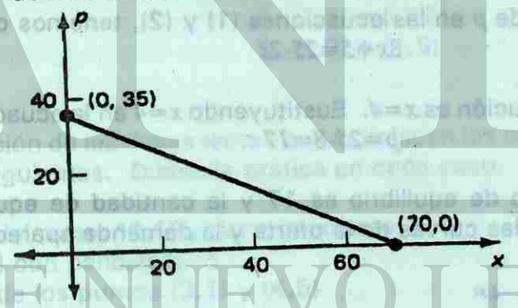


Fig. 23

Punto de equilibrio del mercado

Si el precio de cierto artículo es demasiado alto, los consumidores no lo adquirirán, mientras que si es demasiado bajo, los proveedores no lo venderán. En un mercado competitivo, cuando el precio por unidad depende sólo de la cantidad demandada y de la oferta, siempre existe una tendencia del precio a ajustarse por sí mismo, de modo que la cantidad demandada por los consumidores iguale la cantidad que los proveedores están dispuestos a ofrecer. Se dice que el punto de equilibrio del mercado ocurre en un precio cuando la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Esto corresponde al punto de intersección de las curvas de la oferta y la demanda. (Véase la fig. 24)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

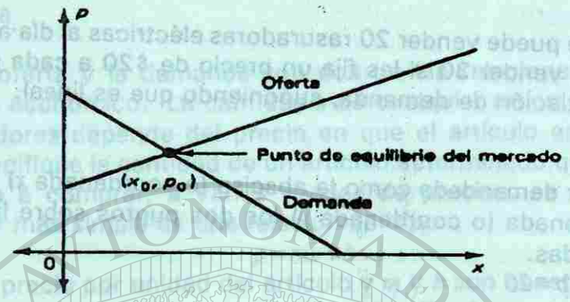


Fig. 24

Algebraicamente, el precio de equilibrio del mercado p_0 y la cantidad de equilibrio x_0 se determina resolviendo las ecuaciones de la oferta y la demanda simultáneamente para p y x. Nótese que el precio y la cantidad de equilibrio sólo tienen sentido cuando no son negativas.

Ejemplo 15
Determina el precio de equilibrio y la cantidad de equilibrio de las leyes de la oferta y la demanda siguientes

$$D: p = 25 - 2x \quad (1)$$
$$S: p = 3x + 5 \quad (2)$$

Solución
Igualando los dos valores de p en las ecuaciones (1) y (2), tenemos que

$$3x + 5 = 25 - 2x$$

Fácilmente se ve que la solución es $x = 4$. Sustituyendo $x = 4$ en la ecuación (1), resulta

$$p = 25 - 8 = 17$$

En consecuencia, el precio de equilibrio es 17 y la cantidad de equilibrio es de 4 unidades. Las gráficas de las curvas de la oferta y la demanda aparecen en la figura 25.

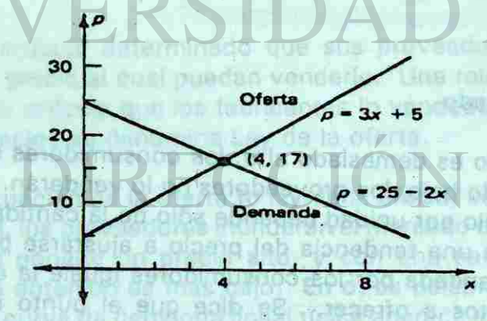


Fig. 25

Ejemplo 16
Si las ecuaciones de la demanda y la oferta son, respectivamente

$$D: 3p + 5x = 22 \quad (3)$$
$$S: 2p - 3x = 2 \quad (4)$$

determina los valores de x y p en el punto de equilibrio del mercado.

Solución
Las ecuaciones (3) y (4) forman un sistema de ecuaciones lineales en las variables x y p. Resolvamos este sistema por el método de suma y resta. Multiplicando ambos lados de la ecuación (3) por 3 y los dos miembros de la ecuación (4) por 5, obtenemos

$$9p + 15x = 66$$
$$10p - 15x = 10$$

Enseguida sumamos estas dos ecuaciones y simplificamos

$$9p + 15x + 10p - 15x = 66 + 10$$
$$19p = 76$$

Así que, $p = 4$. Sustituyendo este valor de p en la ecuación (3), obtenemos

$$3(4) + 5x = 22$$

Por lo tanto, $x = 2$. El punto de equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 4$ y $x = 2$.

Ejercicio 1.2

Determina las pendientes de las líneas que unen cada pareja de puntos.

1. (2,1) y (5,7)
2. (5,-2) y (1,-6)
3. (2,-1) y (4,-1)
4. (3,5) y (-1,5)
5. (-3,2) y (-3,4)
6. (1,2) y (1,5)

Encuentra la ecuación de las líneas rectas que satisfacen las condiciones de cada uno de los ejercicios siguientes. Dibuja la gráfica en cada caso.

7. Pasa a través del punto (2,1) y tiene pendiente 5.
8. Pasa por (1,-2) con pendiente -3
9. Pasa a través de los puntos (3,1) y (4,5)
10. Pasa por (2,1) y (3,4)
11. Pasa a través de los puntos (3,-2) y (3,7)
12. Tiene pendiente -2 y ordenada al origen 5

13. Función de costo.
Una empresa que fabrica radio-receptores tiene costos fijos de $3000 y el costo de la mano de obra y el material es de $15 por radio. Determina la función de costo, es decir, el costo total como una función del número de radios producidos. Si cada radio-receptor se vende por $25, encuentre la función de ingresos y la función de utilidades.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

14. (Función de ingresos)
Un fabricante puede vender 300 unidades de su producto al mes a un prec
de $20 por unidad y 500 unidades a un precio de $15 por unidad. Expresa
demanda del mercado x (el número de unidades que pueden venderse al me
como una función del precio por unidad, suponiendo que es una función linea
Expresa los ingresos como:
a. Una función del precio; b. Una función de x.

15. (Función de costo)
El azúcar tiene un costo de 25¢ para cantidades hasta de 50 libras y de 20
por libra extra en el caso de cantidades por encima de las 50 libras. Si C(
denota el costo de x libras de azúcar, representa $C(x)$ por medio de expresione
algebraicas apropiadas y bosqueja su gráfica.

16. (Modelo de costo lineal)
El costo variable de fabricar una mesa es de $7 y los costos fijos son de $15
al día. Determina el costo total y_c de fabricar x mesas al día. ¿Cuál es el cost
de fabricar 100 mesas al día?

17. (Modelo de costo lineal)
El costo de fabricar 100 cámaras a la semana es de $700 y el de 120 cámara
a la semana es de $800.
a. Determina la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.
b. ¿Cuáles son los costos fijos y variable por unidad?

18. (Modelo de costo lineal)
A una compañía le cuesta $75 producir 10 unidades de cierto artículo al día
$120 producir 25 unidades del mismo artículo al día.
a. Determina la ecuación de costo, suponiendo que es lineal.
b. ¿Cuál es el costo de producir 20 artículos al día?
c. ¿Cuál es el costo variable y el costo fijo por artículo?

19. (Análisis del punto de equilibrio)
Los costos fijos por producir cierto artículo son de $5000 al mes y los costos
variables son de $3.50 por unidad. Si el productor vende cada uno a $6.00,
responde a cada uno de los incisos siguientes:
a. Encuentra el punto de equilibrio.
b. Determina el número de unidades que deben producirse y venderse al mes
para obtener una utilidad de $1000 mensuales.
c. Obtén la pérdida cuando sólo 1500 unidades se producen y venden cada
mes.

20. (Análisis del punto de equilibrio)
El costo de producir x artículos está dado por $y_c=2.8x+600$ y cada artículo se
vende a $4.00
a. Encuentra el punto de equilibrio
b. Si se sabe que al menos 450 unidades se venderán, ¿cuál debería ser el
precio fijado a cada artículo para garantizar que no haya pérdidas?

21. (Depreciación)
Una empresa compró maquinaria nueva por $15000. Si se deprecia linealmente
en $750 al año y si tiene un valor de desperdicio de $2250, ¿por cuánto tiempo
estará la maquinaria en uso? ¿Cuál será el valor V de la maquinaria después de
t años de uso y después de 6 años de uso?

22. (Depreciación)
La señora Olivares compró un televisor nuevo por $800 que se deprecia
linealmente cada año un 15% de su costo original. ¿Cuál es el valor del
televisor después de t años y después de 6 años de uso?

23. (Ecuación de la oferta)
A un precio de $2.50 por unidad, una empresa ofrecerá 8000 vestidos al mes;
a $4 cada unidad, la misma empresa producirá 14,000 vestidos al mes.
Determina la ecuación de la oferta, suponiendo que es lineal.

24. (Relación de la demanda)
Un fabricante de herramientas puede vender 3000 martillos al mes a $2 cada
uno, mientras que sólo pueden venderse 2000 martillos a $2.75 cada uno.
Determina la ley de demanda, suponiendo que es lineal.

25. (Punto de equilibrio del mercado)
Un comerciante puede vender 200 unidades de cierto artículo al día a $30 por
unidad y 250 unidades a $27 por unidad. La ecuación de la oferta para tal
artículo es $6p=x+48$.
a. Determina la ecuación de la demanda para el artículo, suponiendo que es
lineal.
b. Encuentra el precio y la cantidad de equilibrio.

1.3 Funciones Cuadráticas y Parábolas

Una función de la forma

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

con a, b y c constantes, se denomina función cuadrática. El dominio de $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales. La gráfica de una función cuadrática es una curva denominada parábola.

La función cuadrática más simple se obtiene haciendo b y c iguales a cero, en cuyo caso obtenemos $f(x)=ax^2$. Las gráficas comunes de esta función en los casos en que a es positiva o negativa aparecen en la figura 26. El punto más bajo de la gráfica cuando $a>0$ ocurre en el origen, mientras que este mismo es el punto más alto si $a<0$. En cualquiera de los dos casos, el punto se denomina vértice de la parábola.

La función cuadrática general $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene una gráfica idéntica en forma y tamaño a la correspondiente a $y=ax^2$; la única diferencia es que el vértice de $f(x)=ax^2+bx+c$ está trasladado afuera del origen.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

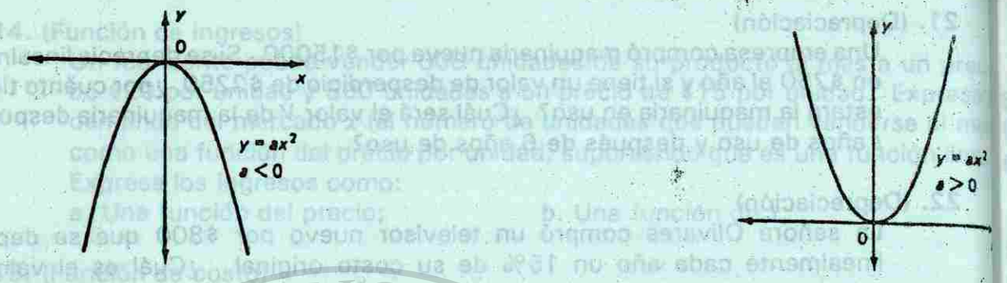


Fig. 26

Teorema 1
La gráfica de la función $f(x)=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ es una parábola que se abre hacia arr
si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$. Su vértice (que es el punto más bajo si $a>0$ y el pur
más alto si $a<0$) es el punto con coordenadas

$$x=-\frac{b}{2a} \quad y \quad y=\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Gráficas características de la función cuadrática $y=ax^2+bx+c$ se advierten en la figu
27.

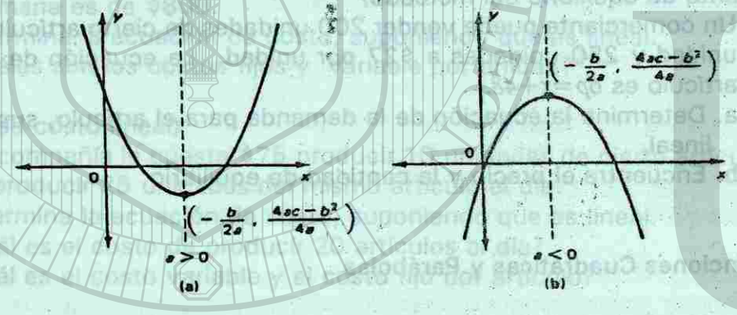


Fig. 27

Observaciones.

1. Si $b=c=0$, la función cuadrática se reduce a $f(x)=ax^2$. Las coordenadas d
vértice dadas en el teorema 1 se reducen a $x=y=0$, que es consistente co
nuestras afirmaciones anteriores.

2. La coordenada y del vértice también puede encontrarse sustituyendo el val
$x=-b/2a$ en la ecuación $y=ax^2+bx+c$ de la parábola. Con frecuencia esto es m
conveniente que usar la fórmula para y dada en el teorema 1.

3. La manera más fácil de probar el teorema 1 es utilizando el método d
completar el cuadrado. No lo probaremos aquí.

Ejemplo 1
Bosqueja la parábola $y=2x^2-4x+7$ y encuentra su vértice.

Comparando la ecuación

$$y=2x^2-4x+7$$

con la función cuadrática estándar

$$y=ax^2+bx+c$$

tenemos que $a=2$, $b=-4$ y $c=7$. La coordenada x del vértice es

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2(2)}=1$$

Con objeto de encontrar la coordenada y del vértice, lo mas sencillo es sustituir $x=1$ en la ecuación de la parábola dada

$$y=2(1)^2-4(1)+7=5$$

De modo que el vértice está en el punto (1,5)

En forma alternativa, podríamos usar la fórmula dada en el teorema 1.

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(2)(7)-(-4)^2}{4(2)}=\frac{56-16}{8}=5$$

Dado que $a=2>0$, la parábola se abre hacia arriba; esto es, el vértice (1,5) es el punto más bajo de la parábola. La gráfica de esta parábola puede bosquejarse graficando algunos puntos (x,y) situados sobre ella. Los valores de y que corresponden a los valores escogidos de x aparecen en la tabla 5. Graficando estos puntos y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 28. (Obsérvese que la gráfica de este ejemplo corta el eje y en el punto (0,7) pero que no corta al eje x en ningún punto. A menudo es útil al dibujar la gráfica de alguna función dada encontrar los puntos en que su gráfica corta los ejes de coordenadas).

TABLA 3

x	−1	0	1	2	3
y	13	7	5	7	13

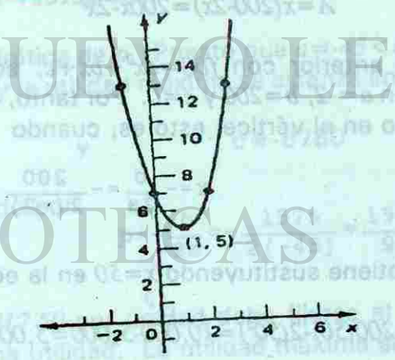


Figura 28

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

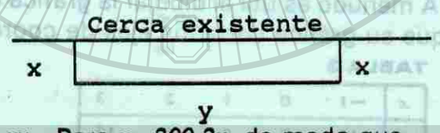
Como establecimos antes, el vértice de la parábola representa el punto más bajo cuando $a>0$ o el punto más alto si $a<0$. Se sigue, por tanto, que en el caso de que $a>0$, la función $f(x)=ax^2+bx+c$ toma su valor mínimo en el vértice de la parábola correspondiente. Eso es, $f(x)$ es mínimo cuando $x=-b/2a$. Por otro lado, cuando $a<0$, la función $f(x)=ax^2+bx+c$ toma su valor máximo si $x=-b/2a$. Estos valores más grandes y más pequeños de $f(x)=ax^2+bx+c$ pueden obtenerse sustituyendo $x=-b/2a$ en $f(x)$.

Problemas en que se nos pide determinar los valores máximos y mínimos de ciertas funciones aparecen con frecuencia en las aplicaciones. Los estudiaremos con detalle en el capítulo 4. Sin embargo, algunos de estos problemas pueden resolverse apelando a las propiedades de las parábolas. Los ejemplos siguientes pertenecen a esta categoría.

Ejemplo 2
(Cercas) Un granjero tiene 200 metros de cerca con la cual puede delimitar un terreno rectangular. Un lado del terreno puede aprovechar una cerca ya existente. ¿Cuál es el área máxima que puede cercarse?

Solución
Denotemos los lados del terreno con x y y, como se indica en la figura siguiente, con el lado y paralelo a la cerca ya existente. Se sigue que la longitud de la nueva cerca es $2x+y$, que debe ser igual a los 200 metros disponibles.

$$2x+y=200$$



El área encerrada es $A=xy$. Pero $y=200-2x$, de modo que

$$A=x(200-2x)=200x-2x^2$$

Comparando la expresión anterior con $f(x)=ax^2+bx+c$, advertimos que A es una función cuadrática de x, con $a=-2$, $b=200$ y $c=0$. Por tanto, dado que $a<0$, la función cuadrática tiene un máximo en el vértice, esto es, cuando

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{200}{2(-2)}=50$$

El valor máximo de A se obtiene sustituyendo $x=50$ en la ecuación anterior.

$$A=200(50)-2(50^2)=10{,}000-5{,}000=5{,}000$$

El área máxima que puede encerrarse es de 5000 metros cuadrados. Las dimensiones de esta área máxima son $x=50$ y $y=100$ metros. (Recuerda que $y=200-2x$)

Ejemplo 3
(Decisiones sobre fijación de precios) La demanda mensual, x, de cierto artículo al precio de p dólares por unidad está dada por la relación

$$x=1350-45p$$

El costo de la mano de obra y del material con que se fabrica este producto es de $5 por unidad y los costos fijos son de $2000 al mes. ¿Qué precio por unidad p deberá fijarse al consumidor con objeto de obtener una utilidad máxima mensual?

Solución
El costo total C (en dólares) de producir x unidades al mes es

$$C=\text{Costos variables}+\text{Costos fijos}$$
$$=5x+2000$$

La demanda x está dada por

$$x=1350-45p$$

Sustituyendo este valor de x en C, resulta que

$$C=5(1350-45p)+2000$$
$$=8750-225p$$

El ingreso R (en dólares) obtenido por vender x unidades a p dólares por unidad es

$$R=\text{Precio por unidad } x \text{ Número de unidades vendidas}$$
$$=px=p(1350-45p)$$
$$=1350p-45p^2$$

La utilidad P (en dólares) está dada entonces por la diferencia entre el ingreso y el costo

$$P=R-C$$
$$=-45p^2+1350p-(8750-225p)$$
$$=-45p^2+1575p-8750$$

La utilidad P es una función cuadrática de p. Puesto que $a=-45<0$, la gráfica es una parábola que se abre hacia abajo y la utilidad máxima se alcanza en el vértice. En este caso, tenemos que

$a=-45$, $b=1575$ y $c=-8750$

El vértice de la parábola está dado por

$$p=-\frac{b}{2a}=-\frac{1575}{2(-45)}=\frac{1575}{90}=17.5$$

En consecuencia un precio $p=\$17.50$ por unidad debe fijarse al consumidor con el propósito de obtener una máxima utilidad. La utilidad máxima será dada por

$$P=-45(17.5)^2+1575(17.5)-8750$$
$$=5031.25$$

ó $5031.25 al mes

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 4
(Decisiones sobre fijación de rentas) El señor Alonso es propietario de un edificio de departamentos con 60 habitaciones. El puede rentarlas todas si fija una renta mensual de $200 por habitación. A una renta más alta, algunas habitaciones quedarán vacías. En consecuencia, por cada incremento de la renta de $5, una habitación quedará vacía, sin posibilidad alguna de rentarla. Determina la relación funcional entre el ingreso mensual total y el número de habitaciones vacías. ¿Qué renta mensual maximizaría el ingreso total? ¿Cuál es este ingreso máximo?

Solución
Sea x el número de unidades vacías. El número de departamentos rentados es entonces $60-x$ y la renta mensual por habitación es $(200+5x)$ dólares. Si R denota el ingreso mensual total (en dólares), se sigue que

R = (Renta por unidad)(Número de unidades rentadas)
$=(200+5x)(60-x)$
$=-5x^2+100x+12,000$

El ingreso mensual total R es una función cuadrática de x con
$a=-5$, $b=100$ y $c=12,000$

La gráfica de R es una parábola que se abre hacia abajo (dado que $a<0$) y su vértice es el punto máximo. El vértice está dado por

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{100}{2(-5)}=10$$

$$R=-5(10)^2+100(10)+12,000=12,500$$

En consecuencia, si 10 unidades están desocupadas, los ingresos son máximos. La renta por habitación es entonces de $(200+5x)$ dólares ó $250 y el ingreso total es de $12,500 al mes.

Ejercicio 3.1
Bosqueja las parábolas siguientes y determina sus vértices

1. $y=2x^2+3x-1$
2. $y=4x-x^2$
3. $y=3-x-3x^2$
4. $y=4x^2+16x+4$

5. (Ingreso máximo)
El ingreso mensual por concepto de la venta de x unidades de cierto artículo está dado por $R(x)=12x-0.01x^2$ dólares. Determina el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

6. (Utilidad máxima)
La utilidad $P(x)$ obtenida por fabricar y vender x unidades de cierto producto está dada por

$$P(x)=60x-x^2$$

Determina el número de unidades que deben producirse y venderse con objeto de maximizar la utilidad. ¿Cuál es esta utilidad máxima?

7. (Ingresos y utilidad máximas)
Una empresa tiene costos fijos mensuales de $2000 y el costo variable por unidad de su producto es de $25.
a. Determina la función de costo.
b. El ingreso R obtenido por vender x unidades está dado por $R(x)=60x-0.01x^2$. Determina el número de unidades que deben venderse al mes de modo que maximicen el ingreso. ¿Cuál es este ingreso máximo?
c. ¿Cuántas unidades deben producirse y venderse al mes con el propósito de obtener una utilidad máxima? ¿Cuál es esta utilidad máxima?

8. (Costo mínimo)
El costo promedio por unidad (en dólares) al producir x unidades de cierto artículo es $C(x)=20-0.6x+0.0002x^2$. ¿Qué número de unidades producidas minimizarían el costo promedio? ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

9. (Cercas)
Un granjero tiene 500 yardas de cerca con la cual delimitará un corral rectangular ¿Cuál es el área máxima que puede cercar?

10. (Fijación del precio de un libro)
Si un editor fija el precio de un libro en $20 cada uno, venderá 10,000 ejemplares. Por cada dólar de incremento en el precio, las ventas bajan en 400 copias. ¿Qué precio debería fijar a cada libro de modo que el ingreso sea máximo? ¿Cuál es el valor de este ingreso máximo?

1.4 Más Funciones Elementales

En esta sección, estudiaremos algunas funciones simples de uso e interés común.

Funciones potenciales

Una función de la forma

$$f(x)=ax^n$$

en donde a y n son constantes distintas a cero, se denomina función potencial. Consideremos algunos casos especiales de funciones de este tipo.

1. $n=2$:
En este caso $f(x)=ax^2$, y tenemos un caso especial de las funciones cuadráticas expuestas en la sección 3. La gráfica de $y=ax^2$ es una parábola con vértice en el origen, que se abre hacia arriba si $a>0$ y hacia abajo si $a<0$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2. $n=½$:

Ahora, $f(x)=ax^{1/2}=a\sqrt{x}$. La gráfica es la mitad de una parábola que se abre hacia la derecha. Si $a>0$, la gráfica es la mitad superior de la parábola, mientras que si $a<0$, es la mitad inferior. En consecuencia, la gráfica sube o baja hacia la derecha dependiendo de si $a>0$ ó $a<0$. El dominio de f es el conjunto de los números reales no negativos. (Véase la fig. 29)

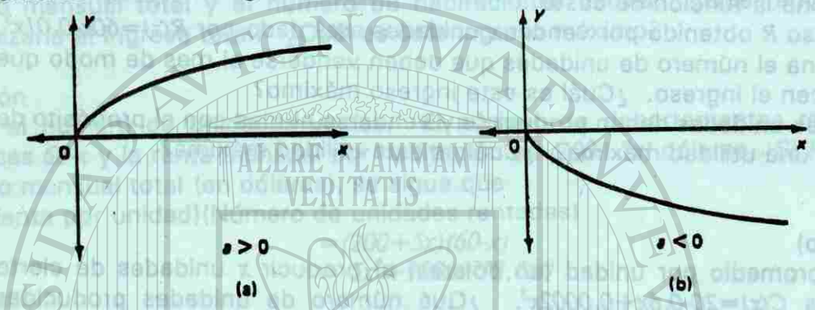


Fig. 29

3. $n=-1$:

En este caso, $f(x)=a/x$. El dominio de $f(x)$ consta de todos los números reales excepto cero. La figura 30 contiene las gráficas de $y=1/x$ y $y=-1/x$ (es decir, las correspondientes a $a=\pm 1$). La gráfica de $y=a/x$ cuando $a>0$ tiene una forma similar a la de $y=1/x$ y en el caso de que $a<0$ es parecida a la forma de $y=-1/x$. La gráfica de $y=a/x$ se denomina una hipérbola rectangular. A medida que x se acerca a cero, el denominador de $f(x)=a/x$ se hace muy pequeño, de modo que $f(x)$ tiende a ser numéricamente muy grande. Puede llegar a ser grande y positivo o grande y negativo, dependiendo de los signos de a y de x. Estas posibilidades se ven claras en la figura 30. Puede advertirse en la gráfica que cuando x se hace muy grande (positiva o negativamente), $f(x)$ se acerca cada vez más a cero; sin embargo, nunca es igual a cero. Se dice que los ejes de coordenadas son asíntotas de la gráfica.

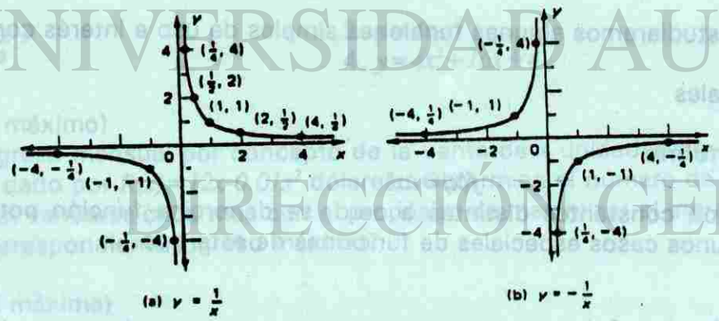


Fig. 30

4. $n=3$:

Ahora, $f(x)=ax^3$. La gráfica de $f(x)$ es la curva cúbica que aparece en la figura 31. El dominio es igual al conjunto de todos los números reales.

La figura 31 compara las gráficas de la función $y=ax^n$ para varios valores de n. Sólo se consideró el caso en que $a>0$, y las gráficas se dibujaron, en el cuadrante en que x y y no son negativas. (En administración y economía, por lo regular estamos interesados en variables que sólo toman valores no negativos).

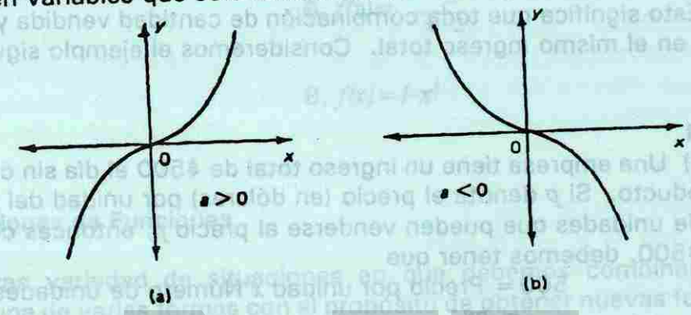


Fig. 31

Observemos que todas las gráficas pasan por el punto $(1,a)$. Cuando $n>1$, la gráfica sube al movernos hacia la derecha y, más aún, crece más y más pronunciadamente a medida que x se incrementa. Las funciones $y=ax^2$ y $y=ax^3$ que ya habíamos considerado son ejemplos que caen en esta categoría. El caso $n=1$ corresponde a la línea recta $y=ax$ que pasa por el origen y por el punto $(1,a)$.

Cuando $0<n<1$, la gráfica de $y=ax^n$ crece al desplazarnos hacia la derecha, pero este crecimiento es menos pronunciado a medida que x se incrementa. La función $y=ax^{1/2}$, que, como vimos antes tiene una gráfica que es la mitad de una parábola, es un ejemplo de este tipo.

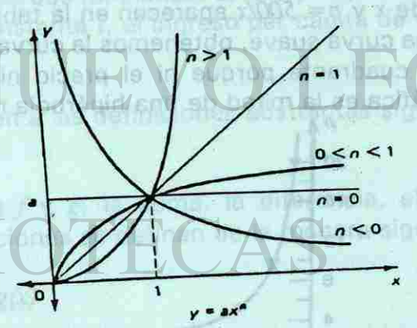


Fig. 32

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El caso $n=0$ corresponde a una línea recta horizontal. Por último, si $n<0$, la función $y=ax^n$ posee una gráfica que baja al movernos hacia la derecha y es asintótica a los ejes x y y. La hipérbola rectangular, con ecuación $y=ax^{-1}$, es un ejemplo de una de tales gráficas.

Existen situaciones en la administración en que, en un rango de interés dado, la relación de demanda entre cantidad y precio se basa en una variación inversa; esto es, la cantidad vendida o demandada en el mercado es inversamente proporcional al precio. Esto significa que toda combinación de cantidad vendida y precio por unidad resultará en el mismo ingreso total. Consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1
(Ingresos) Una empresa tiene un ingreso total de $500 al día sin considerar el precio de su producto. Si p denota el precio (en dólares) por unidad del producto y x es el número de unidades que pueden venderse al precio p, entonces con el propósito de obtener $500, debemos tener que

$$500 = \text{Precio por unidad } x \text{ Número de unidades vendidas} = px$$

Es decir,

$$p=\frac{500}{x}$$

Tabla 6

x	25	50	100	125	250	500
p	20	10	5	4	2	1

Algunos valores de x y $p= 500/x$ aparecen en la tabla 6. Graficando estos puntos y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la curva de la figura 33. Restringimos la gráfica al primer cuadrante porque ni el precio ni cantidad vendidos pueden ser negativos. La gráfica es la mitad de una hipérbola rectangular.

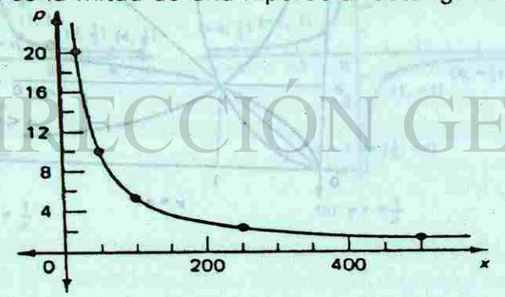


Fig. 33

Ejercicio 1.4

Determina los dominios de las funciones siguientes y bosqueja sus gráficas

1. $f(x)= \sqrt{4-x^2}$
2. $f(x)= 2-\sqrt{9-x^2}$
3. $g(x)= -\sqrt{3-x}$
4. $f(x)= \sqrt{x-2}$
5. $f(x)=1/x$
6. $f(x)= \frac{-3}{x-2}$
7. $f(x)=x^3$
8. $f(x)=1-x^3$

1.5 Combinaciones de Funciones

Existe una gran variedad de situaciones en que debemos combinar dos o más funciones en una de varias formas con el propósito de obtener nuevas funciones. Por ejemplo, denotemos con $f(t)$ y $g(t)$ los ingresos de una persona de dos fuentes distintas de tiempo t; ahora, el ingreso combinado de las dos fuentes es $f(t)+g(t)$. De las dos funciones f y g, en esta forma hemos obtenido una tercera función, la suma de f y g. Si $C(x)$ denota el costo de producir x unidades de cierto artículo y $R(x)$ es el ingreso obtenido de la venta de x unidades, la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x unidades está dada por $P(x)=R(x)-C(x)$. La nueva función P así obtenida es la diferencia de las dos funciones R y C.

Si $P(t)$ indica la población de un país e $I(t)$ es el ingreso per cápita en el momento t, el ingreso nacional de tal país está dado por $P(t)I(t)$. Este es un ejemplo en el que se forma una nueva función como el producto de dos funciones. De manera análoga, podemos definir el cociente de dos funciones: Si $N(t)$ y $P(t)$ indican el ingreso nacional y la población en cualquier instante t, el ingreso per cápita de tal país está dado por $N(t)/P(t)$.

Estos ejemplos nos conducen a las definiciones abstractas siguientes

Definición
Dadas dos funciones f y g, la suma, la diferencia, el producto y el cociente de esas funciones se definen de la manera siguiente.

Suma: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

Diferencia: $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

Producto: $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, con tal de que $g(x)\neq 0$

Los dominios de las funciones suma, diferencia y producto son iguales a la parte común de los dominios de f y g, esto es, al conjunto de las x en las cuales tanto f como g están definidas. En el caso de la función cociente, el dominio es la parte común de los dominios de f y g excepto por aquellos valores de x en los cuales $g(x)=0$.

Ejemplo 1
Sea $f(x)=1/(x-1)$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Calcula $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$, f/g y g/f. Determina el dominio en cada caso.

Solución
Tenemos:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}+\sqrt{x}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{x-1}-\sqrt{x}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x-1}\cdot\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{x-1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1/(x-1)}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}\,(x-1)}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{x}}{1/(x-1)}=\sqrt{x}\,(x-1)$$

Dado que su denominador se hace cero cuando $x=1$, $f(x)$ no está definida si $x=1$, de modo que el dominio de f es igual al conjunto de todos los reales excepto 1.

De manera similar, $g(x)$ está definida en aquellos valores de x para los cuales la expresión dentro del radical no es negativa, esto es, para $x\geq 0$. Así que

$D_f:\{x|x\neq 1\}$ y $D_g:\{x|x\geq 0\}$

La parte común de D_f y D_g es
$\{g|x\geq 0$ y $x\neq 1\}$

Este conjunto es el dominio de $f+g$, $f-g$ y $f\cdot g$.

Dado que $g(x)=\sqrt{x}$ es cero cuando $x=0$, este punto debe excluirse del dominio de f/g. En consecuencia, el dominio de f/g es
$\{x|x>0$ y $x\neq 1\}$

Puesto que $f(x)$ nunca es cero, el dominio de g/f es otra vez la parte común de D_f y D_g es decir el conjunto (1). Es evidente de la fórmula algebraica de $(g/f)(x)$ que esta función está bien definida cuando $x=1$. A pesar de esto, es necesario excluir $x=1$ del dominio de esta función, dado que g/f sólo puede definirse en aquellos puntos en que tanto g como f estén definidas.

Otra forma en que dos funciones pueden combinarse y producir una tercera función se conoce como composición de funciones. Consideremos la situación siguiente.

El ingreso mensual R de una empresa depende del número x de unidades que produce y vende. En general, podemos afirmar que $R=f(x)$. Por lo regular, el número x de unidades que pueden venderse depende del precio p por unidad que se fija al consumidor, de modo que $x=g(p)$. Si eliminamos x de las dos relaciones $R=f(x)$ y $x=g(p)$, tenemos
$R=f(x)=f(g(p))$

Esta da R como una función del precio p. Obsérvese la forma en que R se obtuvo como una función de p utilizando $g(p)$ como el argumento de la función f. Estos nos conduce a la definición siguiente

Definición
Sean f y g dos funciones. Sea x en el dominio de g de tal manera que $g(x)$ pertenezca al dominio de f. Entonces la composición $f\circ g$ (léase f compuesta con g) se define por
$(f\circ g)(x)=f(g(x))$

Ejemplo 2
Sea $f(x)=1/(x-2)$ y $g(x)=\sqrt{x}$. Evalúa:
a. $(f\circ g)(9)$;
b. $(f\circ g)(4)$;
c. $(f\circ g)(x)$;
d. $(g\circ f)(6)$;
e. $(g\circ f)(1)$;
f. $(g\circ f)(x)$.

a. $g(9)=\sqrt{9}=3$. Por tanto,
$(f\circ g)(9)=f(g(9))=f(3)=1/(3-2)=1$

b. $g(4)=\sqrt{4}=2$. Tenemos $(f\circ g)(4)=f(g(4))=f(2)=1/(2-2)$

Esto no esta definido. El valor $x=4$ no pertenece al dominio de $f\circ g$, de modo que $(f\circ g)(4)$ no puede determinarse.

c. $g(x)=\sqrt{x}$
$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\frac{1}{g(x)-2}=\frac{1}{\sqrt{x}-2}$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

d. $f(6)=1/(6-2)=1/4$;
$(g\circ f)(6)=g(f(6))=g(1/4)=\sqrt{\frac{1}{4}}=1/2$

e. $f(1)=1/(1-2)=-1$; $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(-1)=\sqrt{-1}$ el cual no es un número real. No podemos evaluar $(g\circ f)(1)$ porque 1 no pertenece al dominio de $g\circ f$.

f. $f(x)=1/(x-2)$
$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{f(x)}=\sqrt{\frac{1}{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$

El dominio de $f\circ g$ está dado por
$D_{f\circ g}=\{x|x\in D_g \quad \text{y} \quad g(x)\in D_f\}$

Es posible demostrar que, para las funciones del ejemplo 2
$D_{f\circ g}=\{x|x\geq 0 \quad \text{y} \quad x\neq 4\}$

y también
$D_{g\circ f}=\{x|x>2\}$

Ejemplo 3
(Ingresos) El ingreso mensual R obtenido por vender zapatos modelo de lujo es un función de la demanda x del mercado. Obsérvese que, como una función del preci p por par, el ingreso mensual y la demanda son
$R=300p-2p^2$ y $x=300-2p$
¿Cómo depende R de x?

Solución
Si $R=f(p)$ y $p=g(x)$, R puede expresarse como una función de x por medio de l composición $R=(f\circ g)(x)=f(g(x))$. La función $f(p)$ está dada por $R=f(p)=300p-2p^2$. Si embargo, con objeto de obtener $g(x)$, debemos resolver la relación de demand $x=300-2p$ de modo que expresemos p como función de x. Obtenemos así
$p=\frac{1}{2}(300-x)$

Sustituimos este valor de p en R y simplificamos
$R=300p-2p^2$
$=300\cdot\frac{1}{2}(300-x)-2\cdot\frac{1}{4}(300-x)^2$
$=(150)(300)-150x-\frac{1}{2}(300^2-600x+x^2)$
$=150x-0.5x^2$

Este es el resultado requerido, que expresa el ingreso mensual R como una función d la demanda x en el mercado.

Ejercicio 1.5

Calcula la suma, la diferencia, el producto y el cociente de las dos funciones f y g en cada uno de los ejercicios siguientes. Determina los dominios de las funciones resultantes.

1. $f(x)=x^2$; $g(x)=\frac{1}{x-1}$
2. $f(x)=x^2+1$; $g(x)=\sqrt{x}$
3. $f(x)=\sqrt{x-1}$; $g(x)=\frac{1}{x+2}$
4. $f(x)=1+\sqrt{x}$; $g(x)=\frac{2x+1}{x+2}$
5. $f(x)=(x+1)^2$; $g(x)=\frac{1}{x^2-1}$

Dadas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x-1}$, evalúa cada una de las composiciones siguientes

6. $(f\circ g)(5)$
7. $(g\circ f)(3)$
8. $(f\circ g)(5/4)$
9. $(g\circ f)(-2)$
10. $(f\circ g)(\frac{1}{2})$
11. $(g\circ f)(\frac{1}{3})$
12. $(f\circ g)(2)$
13. $(g\circ f)(1)$

Determina $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ en los ejercicios siguientes

14. $f(x)=x^2$; $g(x)=1+x$
15. $f(x)=\sqrt{x+1}$; $g(x)=x^2$
16. $f(x)=\frac{1}{x+1}$; $g(x)=\sqrt{x+1}$
17. $f(x)=2+\sqrt{x}$; $g(x)=(x-2)^2$
18. $f(x)=x^2+2$; $g(x)=x-3$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

19. (Función de ingreso)

La demanda x de cierto artículo está dada por $x=2000-15p$, en donde p es e precio por unidad del artículo. El ingreso mensual R obtenido de las ventas d este artículo está dado por $R=2000-15p^2$. ¿Cómo depende R de x?

20. (Función de ingreso)

Un fabricante puede vender q unidades de un producto al precio p por unidad en donde $20p+3q=600$. Como una función de la cantidad q demandada en e mercado, el ingreso semanal total está dado por $R=30q-0.15q^2$. ¿En qué forma depende R del precio p?

CAPITULO 2
LÍMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCION

El "límite" de una función, es una de las ideas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, y que lo distinguen de otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría y la trigonometría.

La discusión rigurosa de este concepto puede parecer difícil y compleja, por lo que nos limitaremos a una discusión intuitiva del concepto del "límite", ya que fue precisamente así, como sucedió la evolución histórica de este concepto.

Aquellos estudiantes que decidan cursar una Licenciatura de Ciencias o de Ingeniería, tendrán la oportunidad de revisar formalmente el concepto del "límite" en su curso de Cálculo Diferencial.

Existen muchos problemas del mundo real que pueden ser descritos por modelos matemáticos que establecen una relación funcional entre dos variables donde el valor de una de ellas, depende de los valores que tome la otra, esta última llamada variable independiente.

En este estudio nos va a interesar el comportamiento de la función (de la variable dependiente), cuando la variable independiente se aproxima, repito, se aproxima a un valor dado, pero sin llegar a tomar dicho valor, por ejemplo: si "x" se aproxima a 5, la "x" puede tomar valores de 4.9, 4.99, 4.999..... ó 5.01, 5.001, 5.0001..... pero no tomará el valor de 5, ésto es lo que significa aproximarse a un valor dado.

Cuando la variable independiente se aproxima a un valor dado, la función puede aproximarse a cierto valor, o no aproximarse a ninguno. Si el caso es el primero, en el que la función se aproxima a cierto valor, decimos que el valor al cual se aproxima la función es el límite (L) de la misma, cuando la variable independiente se aproxima al valor dado y se representa en la siguiente forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Lo anterior se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" $(x \dashrightarrow a)$, es L.

El segundo caso, cuando la función no se aproxima a ningún valor, decimos que el límite no existe.

La forma en que se relacionan dos variables nos puede conducir a funciones de muy diferentes tipos, y el cálculo de los límites puede ser difícil y complicado.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

19. (Función de ingreso)

La demanda x de cierto artículo está dada por $x=2000-15p$, en donde p es e precio por unidad del artículo. El ingreso mensual R obtenido de las ventas d este artículo está dado por $R=2000-15p^2$. ¿Cómo depende R de x?

20. (Función de ingreso)

Un fabricante puede vender q unidades de un producto al precio p por unidad en donde $20p+3q=600$. Como una función de la cantidad q demandada en e mercado, el ingreso semanal total está dado por $R=30q-0.15q^2$. ¿En qué forma depende R del precio p?

CAPITULO 2
LÍMITES Y CONTINUIDAD

INTRODUCCION

El "límite" de una función, es una de las ideas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, y que lo distinguen de otras áreas de las matemáticas, como el álgebra, la geometría y la trigonometría.

La discusión rigurosa de este concepto puede parecer difícil y compleja, por lo que nos limitaremos a una discusión intuitiva del concepto del "límite", ya que fue precisamente así, como sucedió la evolución histórica de este concepto.

Aquellos estudiantes que decidan cursar una Licenciatura de Ciencias o de Ingeniería, tendrán la oportunidad de revisar formalmente el concepto del "límite" en su curso de Cálculo Diferencial.

Existen muchos problemas del mundo real que pueden ser descritos por modelos matemáticos que establecen una relación funcional entre dos variables donde el valor de una de ellas, depende de los valores que tome la otra, esta última llamada variable independiente.

En este estudio nos va a interesar el comportamiento de la función (de la variable dependiente), cuando la variable independiente se aproxima, repito, se aproxima a un valor dado, pero sin llegar a tomar dicho valor, por ejemplo: si "x" se aproxima a 5, la "x" puede tomar valores de 4.9, 4.99, 4.999..... ó 5.01, 5.001, 5.0001..... pero no tomará el valor de 5, ésto es lo que significa aproximarse a un valor dado.

Cuando la variable independiente se aproxima a un valor dado, la función puede aproximarse a cierto valor, o no aproximarse a ninguno. Si el caso es el primero, en el que la función se aproxima a cierto valor, decimos que el valor al cual se aproxima la función es el límite (L) de la misma, cuando la variable independiente se aproxima al valor dado y se representa en la siguiente forma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Lo anterior se lee como: el límite de $f(x)$ cuando x tiende a "a" $(x \dashrightarrow a)$, es L.

El segundo caso, cuando la función no se aproxima a ningún valor, decimos que el límite no existe.

La forma en que se relacionan dos variables nos puede conducir a funciones de muy diferentes tipos, y el cálculo de los límites puede ser difícil y complicado.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

2.1 Concepto Intuitivo de Límite

El objetivo de este estudio, es apropiarse del concepto del límite de una función y aplicarlo a la solución de problemas y ejercicios sencillos.

Para que comprendas el concepto del límite de una función, te mostraremos un problema.

Problema 1

Un hombre acepta pagar una deuda en la siguiente forma:
El primer año el pago será de $12000 pesos, el segundo año el pago será de 0.9 de lo que pagó el primer año, el siguiente pago será 0.9 de lo que pagó el año anterior y así sucesivamente por "n" años.

A primera vista parece que el hombre no acabará de pagar nunca, lo cual es cierto, sin embargo, la cantidad total a pagar tiene un valor límite y no podrá ser mayor de esa cantidad, sin importar el número de años transcurridos incluso si $n\to\infty$.

Vamos a desarrollar la suma de pagos

n 1 2 3 n

$$Sn = 12000 + 12000(0.9) + 12000(0.9)(0.9) + \ldots + 12000(0.9)^{n-1}$$

Esto es algo que ya conoces, es una serie geométrica convergente, donde el primer término es 12000 y la razón $r=0.9$.

La fórmula para la suma de "n" términos de una serie geométrica, es la siguiente:

$$Sn = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

donde:
Sn = La suma de "n" términos
a_1 = Es el primer término de la serie
r = Es la razón

El problema en sí, es calcular el valor al que tiende esta suma, cuando el número de años "n" tiende a infinito. Esto lo podemos expresar en la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} Sn = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \lim_{n\to\infty} \frac{12000(1-0.9^n)}{1-0.9}$$

Para calcular el límite es necesario substituir el valor de "n" en la expresión, pero "n"→∞ y este no es un valor que podamos usar en la expresión de la suma, pero si observamos que debido a que la razón $r=0.9$ es menor que la unidad, el término $r^n=0.9^n$ tiende a cero a medida que se incrementa el valor de "n", por lo tanto, es

posible considerar que cuando $n\to\infty$, $0.9^n\to 0$ y la expresión de la suma se reduce a lo siguiente:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{12000}{1-0.9} = 120000$$

Esta es la cantidad límite que el hombre tendría que pagar sin importar el número de años transcurridos, por lo tanto es el límite buscado.

Si analizamos el problema gráficamente veríamos lo siguiente:

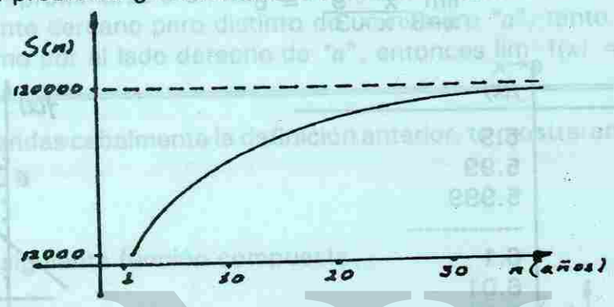


Fig. 2.1

El valor de la suma se aproxima a 120000, pero jamás alcanzará dicho valor.

Una demostración intuitiva de este límite, sería calcular S(n) para un número creciente de años y observar que, el $|S(n)-120000|\to 0$, cuando $n\to\infty$.

En el problema anterior la variable independiente tomó valores discretos y tendía a infinito, pero podemos observar que la existencia del límite de una función $f(x)$, no depende de si $f(x)$ está realmente definida.

En seguida te mostraremos un ejemplo donde los valores de la variable independiente son continuos y tiende a un valor finito.

Problema 2

Supongamos que un problema del mundo real se puede representar por el siguiente modelo matemático

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

y deseamos saber, ¿cuál es el límite de $f(x)$, cuando $x\to 3$, es decir: $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

El primer paso para calcular el límite de una función, consiste en sustituir el valor al que tiende la variable independiente en la expresión dentro del límite, si se obtiene un valor real "L", restaría demostrar que dicho valor es el límite buscado, o que el procedimiento empleado para calcular "L", es el establecido en alguno o algunos de los teoremas de límites que veremos más adelante.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El dominio de la función que examinaremos en el presente problema, es el conjunt de todos los números reales, excepto $x=3$, pues $f(3)$ no esta definido, ya que sustituimos $x=3$ en la expresión de $f(x)$, obtenemos 0/0 , y ésto es un indeterminación, sin embargo, $f(x)$ puede calcularse para cualquier valor de "x" cercan a 3.

Los valores de la tabla y la gráfica de la fig. 2.2, muestran que cuando "x" se acerc a 3 por la izquierda o por la derecha, los valores de $f(x)$ se acercan a 6, entonces, es el límite de $f(x)$, cuando $x \to 3$.

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

x	$f(x)$
2.9	5.9
2.99	5.99
2.999	5.999
----------	----------
3.1	6.1
3.01	6.01
3.001	6.001

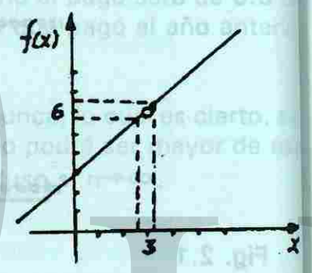


Fig. 2.2

Hemos encontrado en una forma intuitiva el límite buscado, así que en adelante usaremos la notación $x \to a^-$ para señalar que x tiende a "a" por la izquierda, y $x \to a^+$ lo hace por la derecha.

Si los límites unilaterales tienen un mismo valor "L", es decir si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se dice entonces que el límite existe y se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

En algunos casos como en el problema anterior, es posible remover la indeterminació y calcular el límite por sustitución directa, ya que con la condición de que $x \neq 3$ podemos hacer lo siguiente:

$$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$$

entonces

$$\lim_{x \to 3} x+3 = 6$$

que es el mismo valor obtenido para $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, cuando $x \to 3$.

Las gráficas de las funciones

$f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ y $f(x)=x+3$

son escencialmente iguales, excepto que la gráfica de la primera tiene un hueco en (3,6) es decir, es discontinua en ese punto.

Después de analizar estos problemas, estamos listos para dar una definición intuitiva de límite de una función

definición intuitiva de límite

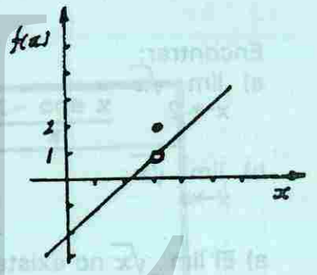
> Si $f(x)$ puede aproximarse a un número finito L, tomando a "x" suficientemente cercano pero distinto de un número "a", tanto por el lado izquierdo como por el lado derecho de "a", entonces $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Para que comprendas cabalmente la definición anterior, te mostraremos más ejemplos.

Problema 3

Si se nos da la siguiente función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$



Encontrar $\lim_{x \to 3} f(x)$

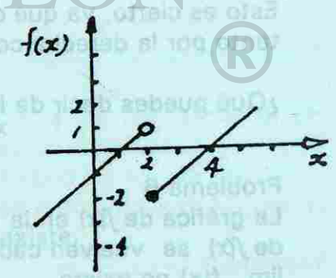
Solución.
En este caso $f(x)=2$, cuando $x=3$, pero la definición nos dice que el límite es el valor al que se aproxima $f(x)$, cuando $x \to 3$, tanto por la derecha, como por la izquierda, y de la gráfica se observa que $f(x) \to 1$, cuando $x \to 3$, por lo tanto

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

Problema 4

Se nos da la siguiente función compuesta

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ x-4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



Encontrar $\lim_{x \to 2} f(x)$

1020124183

Fig. 2.4

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En la gráfica (fig. 2.4) observamos que si $x \to 2$ por la izquierda, $f(x) \to 1$, y si lo hace po la derecha $f(x) \to -2$.

Esto contradice la definición de límite, que dice que debemos tener el mismo valor po ambos lados, entonces el límite de $f(x)$ no existe, cuando $x \to 2$.

$$\lim_{x \to 2} f(x) __ \text{ no existe}$$

Sin embargo, podemos describir la conducta de $f(x)$ en las cercanías de 2, en la form siguiente:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = -2$$

La existencia o no, del límite de una función $f(x)$, cuando $x \to a$, es independiente de l existencia o no, del límite de la misma función $f(x)$, cuando $x \to b$, donde, $b \neq a$.

Problema 5

Si tenemos que $f(x) = \sqrt{x}$, donde $x \geq 0$.

Encontrar:

a) $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$

b) $\lim_{x \to 4} \sqrt{x}$

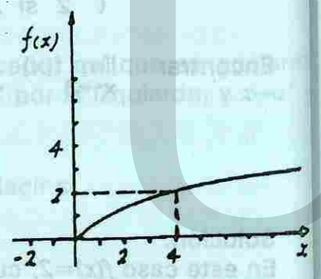


Fig. 2.5

a) El $\lim_{x \to -2} \sqrt{x}$ no existe, ya que el valor *al cual tiende "x"*, no está definido por la función dada.

b) El $\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

Esto es cierto, ya que de la gráfica de la fig. 2.5 podemos observar que cuando $x \to 4$ tanto por la derecha como por la izquierda, $f(x) \to 2$.

¿Qué puedes decir de $\lim_{x \to 0} \sqrt{x}$?

Problema 6

La gráfica de $f(x)$ en la fig. 2.6 muestra que cuando $x \to 3$ por la izquierda, los valores de $f(x)$ se vuelven cada vez más grandes, es decir, crecen sin cota, por lo tanto $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ no existe.

Esto es suficiente para decir que $\lim_{x \to 3} f(x)$ *no existe.*

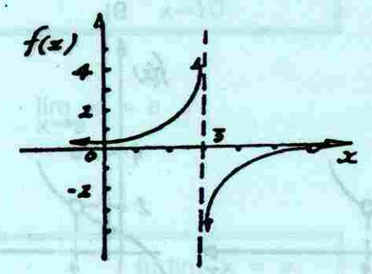


Fig. 2.6

Ejercicio 2.1

Completa los datos de las tablas y conjetura en una forma intuitiva los valores de los siguientes límites.

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} =$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} =$

x (Radianes)	$\frac{\text{sen } x}{x}$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
0.1	
0.01	
0.001	

x (Radianes)	$\frac{1 - \cos x}{x}$
-0.1	
-0.01	
-0.001	
-0.0001	
0.1	
0.01	
0.001	
0.0001	

Evalúa el límite dado

3) $\lim_{x \to 2} (3x + 1)$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

5) $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1)$

6) $\lim_{x \to 5} \sqrt{x - 1}$

Utiliza la gráfica dada para encontrar cada límite, si es que existe.

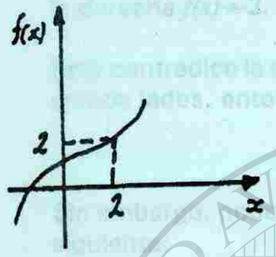
a) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$

b) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

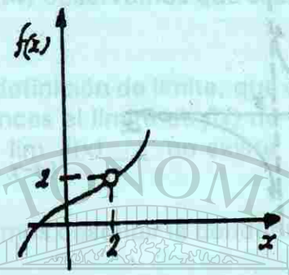
c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

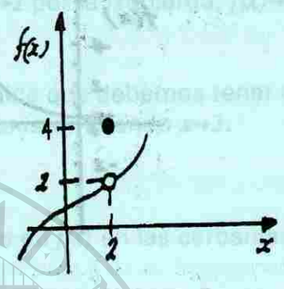
7)



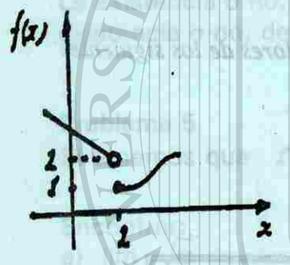
8)



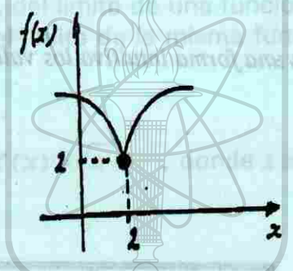
9)



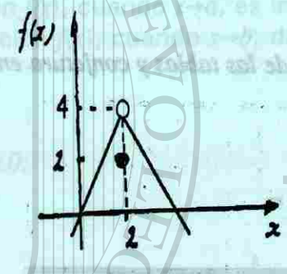
10)



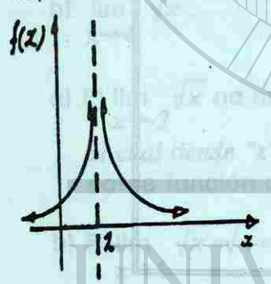
11)



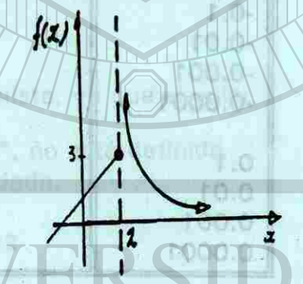
12)



13)



14)



2.2 Teoremas de límites

Hasta ahora, hemos abordado el concepto de límite de una función en una forma intuitiva, a través de tablas de valores y gráficas. Los teoremas que veremos a continuación, de los cuales omitiremos su demostración, te servirán para calcular los límites de una función o determinar su existencia en una forma sencilla y práctica.

Teorema 1
Si "c" es una constante, entonces

$$\lim_{x\to a} c = c$$

Ejemplo 1

a) $\lim_{x\to 1} 5 = 5$ b) $\lim_{x\to 10} \pi = \pi$

Teorema 2

$$\lim_{x\to a} x = a$$

Ejemplo 2

a) $\lim_{x\to 2} x = 2$ b) $\lim_{x\to \pi} x = \pi$

Teorema 3
Si "c" es una constante, entonces

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$$

Ejemplo 3

a) $\lim_{x\to 2} 3x = 3 \lim_{x\to 2} x = 3\cdot 2 = 6$

Teorema 4
Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces es único

Teorema 5
Límite de una suma, de un producto y de un cociente.
si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces

i) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L_1 + L_2$

ii) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 L_2$

iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, donde $L_2 \neq 0$

Teorema 6

Límite de una potencia
$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = L^n$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Teorema 7

Límite de una raíz
$\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n} = L^{1/n}$.

Si "n" es un número positivo par, $f(x) \geq 0$

Ejemplo 4
Evaluar $\lim_{x\to 1}(3x + 5)$

Solución
Por los teoremas 1,2,3 se sabe que $\lim_{x\to 1} 3x$ y $\lim_{x\to 1} 5$ existen, por lo tanto por el teorema 5(*i*)

Teorema 5 (*i*)

$$\lim_{x\to 1}(3x+5) = \lim_{x\to 1} 3x + \lim_{x\to 1} 5 = 3\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 5 =$$

$$= 3\cdot 1 + 5 = 8$$

Ejemplo 5
Evaluar
a) $\lim_{x\to 4}(x+1)\sqrt{x}$, b) $\lim_{x\to -2}(x+1)\sqrt{x}$

Solución
a) $\lim_{x\to 4}(x+1) = 5$ y $\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$, por lo tanto,

por 5(ii), $\lim_{x\to 4}(x+1)\sqrt{x} = \lim_{x\to 4}(x+1)\cdot\lim_{x\to 4}\sqrt{x} = 5\cdot 2 = 10$

b) $\lim_{x\to -2}(x+1) = -1$ y $\lim_{x\to -2}\sqrt{x}$, no existe entonces

$\lim_{x\to -2}(x+1)\sqrt{x}$ no existe

Ejemplo 6
Evaluar $\lim_{x\to 1}\frac{3x-2}{4x+4}$, por los teoremas 1,2,3

$\lim_{x\to 1}(3x-2) = 1$ y $\lim_{x\to 1}(4x+4) = 8$, entonces por 5(iii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x-2}{4x+4} = \frac{\lim_{x\to 1}(3x-2)}{\lim_{x\to 1}(4x+4)} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 7

Evaluar

$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$, **por los teoremas 1,2,3**

$\lim_{x\to 1} x = 1$ **y** $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$, **entonces por 5(iii)**

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1} = \frac{\lim_{x\to 1} x}{\lim_{x\to 1}(x-1)} = \frac{1}{0}$$, **no existe**

Ejercicio 2.2

Evaluar el límite dado

1. $\lim_{x\to 2} 10$
2. $\lim_{x\to 0} \text{sen}\pi$
3. $\lim_{x\to 1}(-5x)$
4. $\lim_{x\to 2}(x^4-3x^2+1)$
5. $\lim_{s\to 2}(4s-2)(s+2)$
6. $\lim_{t\to 0}\frac{t^2-10}{t+3}$
7. $\lim_{x\to 4}\sqrt{3x+4}$
8. $\lim_{t\to 0}\left(t-\frac{2}{t-2}\right)$
9. $\lim_{x\to -3}(x+3)^2$
10. $\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+7}$

En los siguientes ejercicios es necesario transformar la expresión dentro del límite para poder evaluarla

11. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$
12. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
13. $\lim_{h\to 0}\frac{(s+h)^2-s^2}{h}$
14. $\lim \frac{x^2-4}{}$
17. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-12}{x-2}$
18. $\lim_{x\to -3}\frac{4x-12}{x^2+x-6}$
19. $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x^2-x-6}$
20. $\lim \frac{x^2-9}{}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$x\to -2\ \ x^2+2x$

15. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3}$

16. $\lim_{x\to 0} \frac{x^5-x^2}{x^3-x^2}$

$x\to -3\ \ x^2+2x-3$

21. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+3x-1}{x} + \frac{1}{x}\right]$

22. $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

2.3 Límites en los que Interviene Infinito

Distinguiremos dos casos:

1. La función $f(x)\to\infty$, cuando $x\to a$

2. La función $f(x)\to L$, cuando $x\to\infty$

En el primer caso los valores de la función crecen o decrecen sin cota, cuando x tiende a un valor "a", por lo tanto, el límite de $f(x)$ no existe y se escribe en la siguiente forma

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Veamos un ejemplo

Evaluar $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

Si sustituimos el valor al que tiende "x" en la expresión dentro del límite, obtenemos 1/0, ¿Qué significa esto?

Para contestar esta pregunta, vamos a analizar el comportamiento de la función en las cercanías de $x=1$, tanto por la derecha, como por la izquierda, es decir, evaluaremos los límites unilaterales intuitivamente y construiremos la gráfica de la función dada.

x	$(x-1)$	$\frac{1}{x-1}$
0.9	-0.1	-10
0.99	-0.01	-100
0.999	-0.001	-1000
0.9999	-0.0001	-10000
1.1	0.1	10
1.01	0.01	100
1.001	0.001	1000
1.0001	0.0001	10000

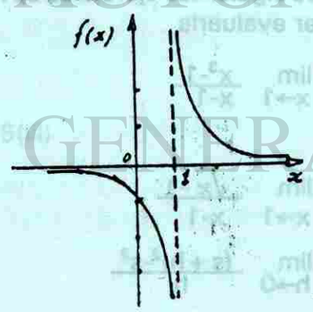


Fig. 2.7

A partir de los valores de la tabla y de la gráfica de la fig. 2.7, observamos que cuando nos aproximamos a $x=1$, por la izquierda, los valores de la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$ decrecen sin cota, y cuando lo hacemos por la derecha crecen sin cota.

Usando la notación de límite tenemos que,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Esto significa que no existe un valor límite para la función dada, cuando $x\to 1$, ni por la derecha, ni por la izquierda, entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \text{ no existe}$$

¿Qué podemos concluir del análisis anterior?

a) Si al sustituir el valor al que tiende "x" en la expresión de $f(x)$ dentro del límite se obtiene $\frac{\text{valor real}}{\text{cero}}$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$

lo que significa que no existe el límite de $f(x)$ cuando $x\to a$.

b) La gráfica nos muestra que la función tiene una asíntota vertical en $x=a$

NOTA: Las funciones pueden tener más de una asíntota vertical.

Lo anterior es muy útil cuando se necesita bosquejar la gráfica de una función, que tiene asíntotas verticales, te mostraremos un ejemplo.

Bosquejar la gráfica de $f(x)=\frac{x}{x-1}$, en las proximidades de $x=1$.

Lo primero es ver si la función tiene un límite cuando $x\to 1$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{0} = \infty \text{ (el límite no existe)}$$

Esto nos indica que $f(x)$ no esta definida en $x=1$, y que la gráfica de la función tiene una asíntota vertical en $x=1$, fig. 2.8.

Para bosquejar la gráfica es necesario conocer como se comportan los valores de $f(x)$, por la izquierda y por la derecha de $x=1$, para saber si $f(x)\to\infty$ ó $f(x)\to-\infty$, para ello evaluaremos

a) $\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1}$ y b) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

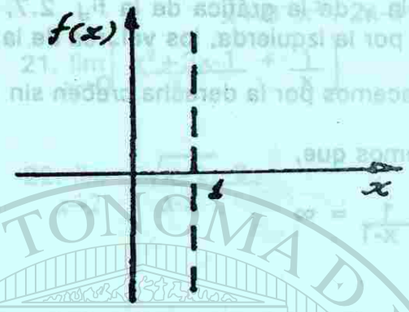


Fig. 2.8

Al evaluar estos límites nos interesa determinar el signo de los valores de $f(x)$, cuando nos acercamos a $x=1$, por la izquierda y por la derecha y definir si la función crece o decrece sin cota.

Esto se puede hacer fácilmente, tomando un valor muy cerca de $x=1$, primero por la izquierda, digamos $x=0.9$, y determinar el signo del numerador y del denominador de la expresión de la función, y en consecuencia el signo de los valores de $f(x)$, por la izquierda de $x=1$.

Si $x=0.9$, el signo de $f(x) = \frac{+}{-} = -$ (negativo)

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

Por el lado derecho de $x=1$, podemos elegir $x=1.1$, entonces,

Si $x=1.1$, el signo de $f(x) = \frac{+}{+} = +$ (positivo)

por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = \infty$$

El bosquejo de la gráfica, en las cercanías de $x=1$, luce como se muestra en la fig. 2.9

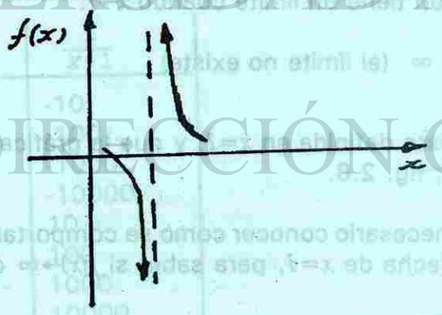
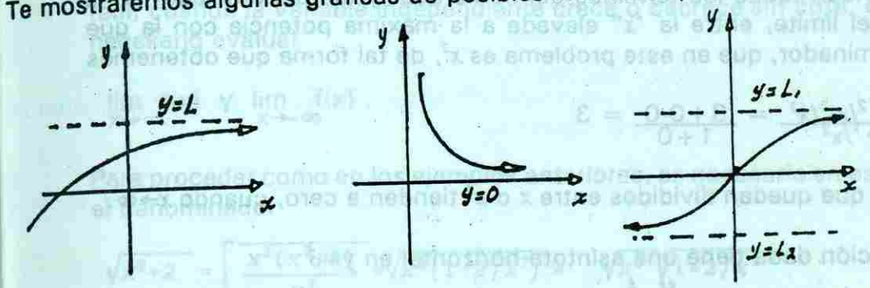


Fig. 2.9

El segundo caso, es cuando la variable independiente crece o decrece sin cota y la función $f(x)$, podría aproximarse a un valor constante L.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{o} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

Te mostraremos algunas gráficas de posibles funciones para aclarar lo anterior



a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L_2$

Fig. 2.10

Si $f(x)=L$, cuando $x\to\infty$ o $x\to -\infty$, la recta $y=L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $f(x)$.

En la gráfica de la función de la fig. 2.10c, $f(x)$ tiene dos asíntotas horizontales.

Si examinamos la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$, y su gráfica en la fig. 2.7, vemos que si $x\to\infty$, la expresión de $f(x) = \frac{1}{\infty}$, y de la gráfica observamos que en este caso $f(x) = \frac{1}{x-1} \to 0$

es decir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

por lo tanto, $y=0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de la función dada.

Cuando $x\to -\infty$, puede realizarse un análisis semejante y veremos que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Podemos resumir en la siguiente tabla, los resultados para las formas de los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$

Forma del límite	$\frac{L}{\pm\infty}$	$\frac{\pm\infty}{L}$	$\frac{L}{0}$
El límite es	0	infinito	infinito

En esta tabla no se contempla el caso ∞/∞, te mostraremos unos ejemplos para explicarte como se resuelve este caso.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 8
Evaluar

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2x-3}{x^2+1}$$

En este caso se dividen todos los términos del numerador y del denominador de la expresión dentro del límite, entre la "x" elevada a la máxima potencia con la que aparece en el denominador, que en este problema es x^2, de tal forma que obtenemos lo siguiente

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+{}^2/_{x}-{}^3/_{x^2}}{1+{}^1/_{x^2}} = \frac{3+0-0}{1+0} = 3$$

Todos los términos que quedan divididos entre x o x^2 tienden a cero, cuando $x\to\infty$.

La gráfica de la función dada tiene una asíntota horizontal en $y=3$

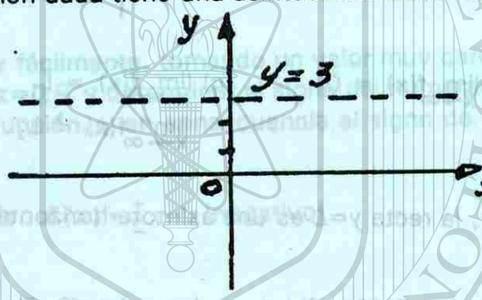


Fig. 2.11

Ejemplo 9

Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1-x^2}$

dividimos el numerador y el denominador entre x^2

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{{}^1/_{x^2}-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

La recta $y=-1$ es una asíntota horizontal

¿Qué puedes decir de las asíntotas verticales?

Ejemplo 10
Evaluar $\lim_{x\to\infty} \frac{2-x^3}{3x+1}$

dividimos el numerador y denominador entre "x"

$$\lim_{x\to\infty} \frac{{}^2/_{x}-x^2}{3+{}^1/_{x}} = \frac{-\infty}{3} = -\infty$$

Ejemplo 11
Si se da, $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

Determina si tiene asíntotas horizontales

Para realizar lo anterior es necesario investigar si la función se aproxima a un valor real, cuando la variable independiente crece o decrece sin cota, en otras palabras es necesario evaluar

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Para proceder como en los ejemplos anteriores, es necesario en este caso transformar el denominador

$$\sqrt{x^2+2} = \sqrt{\frac{x^2(x^2+2)}{x^2}} = \sqrt{x^2(1+2/x^2)} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{1+2/x^2}$$

Pero $\sqrt{x^2}=x$, si $x\geq 0$ y $\sqrt{x^2}=-x$ si $x<0$, por lo tanto;

a) $\sqrt{x^2}=x$, si $x\geq 0$, el denominador queda expresado como $\sqrt{x^2+2}=x\sqrt{1+{}^2/_{x^2}}$ y en consecuencia si $x\to\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

dividimos numerador y denominador entre x y obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{3}{1} = 3$$

La recta $y=3$, es una asíntota de la función dada, cuando $x\to\infty$

b) $\sqrt{x^2}=-x$ si $x<0$, el denominador queda expresado como $\sqrt{x^2+2}=-x\sqrt{1+{}^2/_{x^2}}$, entonces si $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}$$

dividimos numerador y denominador entre $-x$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = \frac{-3}{1} = -3$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La recta $y=-3$, es una asíntota horizontal de la función dada, cuando $x\to\infty$.

Para finalizar, te mostraremos algo nuevo sobre asíntotas. Hasta ahora, se te ha d
que una asíntota, en pocas palabras, es una línea que la gráfica de la funció
acerca a ella pero no la cruza, sin embargo hay excepciones.

La función $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, tiene una asíntota horizontal, pues

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=0$$

La recta $y=0$, es una asíntota horizontal de la función dada, pero el bosquejo d
gráfica de la función muestra lo siguiente:

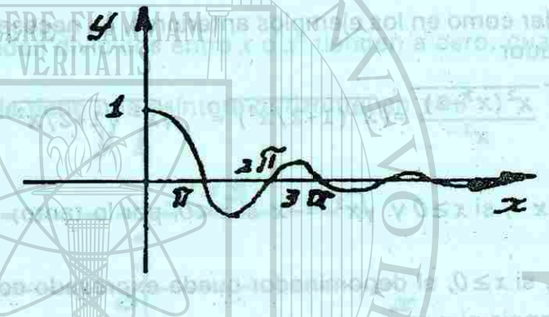


Fig. 2.12

¿Qué puedes decir de esto?

Ejercicio 2.3

Explica gráficamente el significado de los siguientes límites

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 10$
2. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
3. $\lim_{x\to3^+} f(x) = \infty$
4. $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$
5. $\lim_{x\to2^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to2^-} f(x) = \infty$
6. $\lim_{x\to3^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Encuentra los siguientes límites

7. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}$
8. $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}$
9. $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}$
12. $\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x-3}$ y $\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}$
13. $\lim_{x\to2^-}\frac{1}{(x-2)^4}$ y $\lim_{x\to2^+}\frac{1}{(x-2)^4}$
14. $\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)$

10. $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}$
11. $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x}$
15. $\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)$
16. $\lim_{x\to\infty}\frac{3+{}^2/_x}{5-{}^2/_{x^3}}$

Evalúa los siguientes límites

17. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$
18. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-4}$
19. $\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{2x^2-2}$
20. $\lim_{x\to\infty}\frac{1-6x}{3+2x}$
21. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-2}{x^2-3x}$
22. $\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt[3]{x}}{4+\sqrt[3]{x}}$

Encuentra las asíntotas verticales y horizontales, si las hay, y bosqueja la gráfica de las siguientes funciones

23. $f(x)=\frac{1}{x}$
24. $f(x)=\frac{1}{x}+2$
25. $f(x)=\frac{2-x}{x+2}$
26. $f(x)=\frac{2x^2}{x^2+3}$
27. $f(x)=\frac{x^2-x-6}{(x-3)}$
28. $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}$

2.4 Continuidad

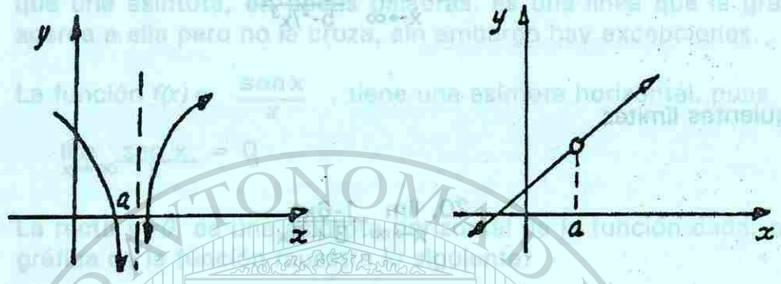
El concepto de continuidad de una función es fácil de comprender, y además, es indispensable en el estudio y aplicación del cálculo diferencial e integral.

Una función continua se describe a menudo como aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel.

En esta parte vamos a determinar las condiciones de continuidad de una función en un punto del dominio, por decir, en $x=a$, y además las condiciones de continuidad en un intervalo abierto o cerrado del dominio de la función, es decir, en (a,b),[a,b].

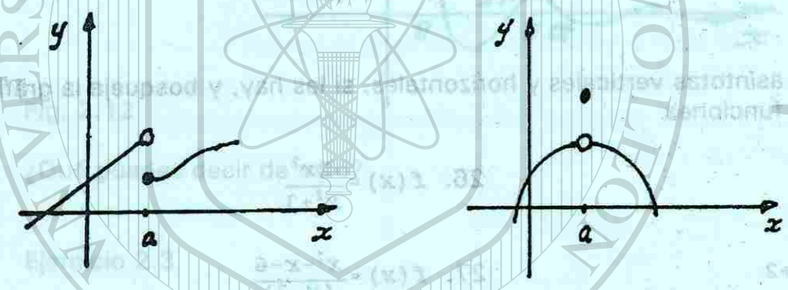
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Antes de establecer la definición precisa de continuidad mostraremos algunas gráfi de funciones que no son continuas o sea discontinuas en un punto del dominio d función.



a) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe
y f(a) no esta definida

b) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
f(a) no esta definida



c) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe
y f(a) esta definida

d) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
f(a) esta definida

Del análisis de las gráficas podemos establecer las siguientes condiciones que debe cumplirse para que una función sea continua en un punto "a".

Definición

Se dice que una función $f(x)$, es continua en un punto del dominio, $x=a$, si
i) $f(a)$ esta definida
ii) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
iii) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 12

La función $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, es discontinua en $x=-1$, puesto que $f(-1)$ no esta definida.

Sin embargo $f(x)$ es continua para toda $x\neq -1$.

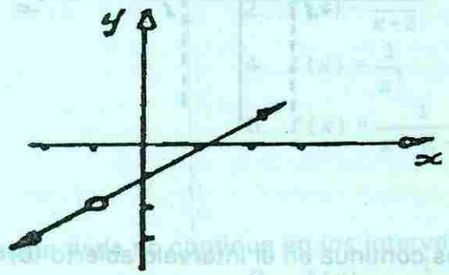


Fig. 2.14

Ejemplo 13
La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es discontinua en $x=0$, ya que $f(0)$ no esta definida y $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

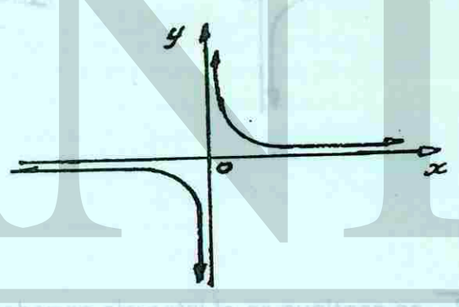


Fig. 2.15

Continuidad en un intervalo

a) Una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto (a,b) si lo es en todo número del intervalo, aunque $f(a)$ y $f(b)$ no estén definidos.

b) Una función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado [a,b] si lo es en todo número del intervalo y además, que $f(a)$ y $f(b)$ estén definidos, es decir
$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$

Ejemplo 14
La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, es continua en el intervalo abierto (-1;1), pero es discontinua en el intervalo cerrado [-1;1] puesto que f(-1) y f(1) no están definidos.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

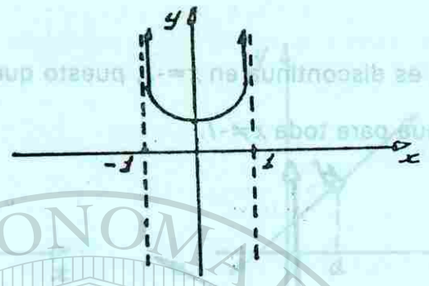


Fig. 2.16

Ejemplo 15

La función $f(x) = \frac{1}{x}$, es continua en el intervalo abierto $(0;\infty)$, pero es discontinuo en el intervalo semiabierto $[0;\infty)$, pues f(0) no esta definida

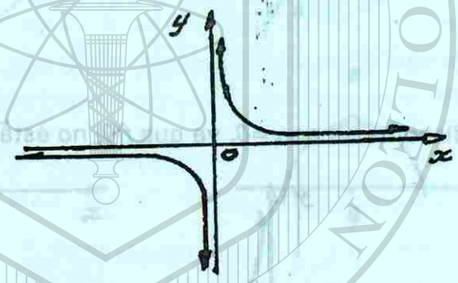


Fig. 2.17

Ejemplo 16

La función $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, es continua en el intervalo cerrado [-1;1], ya que

$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = f(-1) = 0$, y $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x^2} = f(1) = 0$

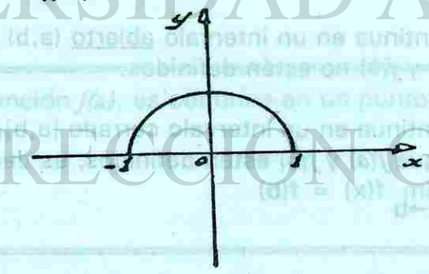


Fig. 2.18

Ejercicio 2.4

Determina si los hay, los valores de "x" para los cuales $f(x)$ es discontinua

1. $f(x)=x^3-1$
2. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
3. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$
4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$

Determina si la función dada es continua en los intervalos indicados

7. $f(x)=x^2+2$

   a) $[-1;4]$, b)$(3;\infty)$

8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

   a)$(1;\infty)$ b)$[1;\infty)$

9. $f(x) = \frac{1}{x}$

   a) $(-\infty;\infty)$, b)$(0;\infty)$

10. $f(x) = \frac{1}{x^2-x-6}$

    a)$(-2;3)$, b)$[-2;3]$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPÍTULO 3
LA DERIVADA

El tiempo ha demostrado que el descubrimiento del cálculo, registrado en la última porción del siglo XVII gracias a Isaac Newton (1642-1727) y a Gottfried Leibniz (1646-1716), fue uno de los adelantos más importantes en el desarrollo del pensamiento humano. Hay una cita atribuida a Laplace en la que revela la perspectiva que él observó en el logro monumental de los autores de esta obra. De ella dijo:"Siempre permanecerá preeminente sobre todas las otras producciones del género humano".

Ordinariamente, el estudio del cálculo se divide en dos partes: el cálculo diferencial y el cálculo integral y la "derivada de una función" es fundamental para el estudio del cálculo diferencial, pues sus conceptos son indispensables para las investigaciones no elementales tanto en las ciencias naturales como en las ciencias sociales y humanísticas. El propósito de este capítulo es definir, ilustrar y aplicar la idea de la derivada de una función.

Empezaremos nuestro trabajo investigando cómo varía el valor de una función, al variar la variable independiente. El problema fundamental del cálculo diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una manera continua, llevó a sus descubridores a determinar los principios fundamentales del cálculo, el instrumento más poderoso de las matemáticas modernas.

3.1 Incrementos y Razones de Cambio

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original. Los ejemplos siguientes ilustran tales situaciones.

1. El cambio en el costo total de operación de una planta que resulta de cada unidad adicional producida.
2. El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento de una unidad (por ejemplo, $1) en el precio.
3. El cambio en el producto nacional bruto de un país con cada año que pasa.

El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro, es la "diferencia" que se obtiene restando el valor inicial del valor final.

Definición

> Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces el cambio en el valor de x, que es x_2-x_1, se denomina el incremento de x y se denota por Δx.

Usamos la letra griega Δ (delta) para denotar un cambio o incremento de cualquier variable.

Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo (decremento), según la variable aumente o disminuya al cambiar de valor. Así:
Δx denota el cambio de la variable x.
Δp indica el cambio de la variable p.
Δq denota el cambio de la variable q.

Sea $y=f(x)$ una variable que depende de x. Cuando x tiene el valor x_1; y tiene el valor $y_1=f(x_1)$. De manera similar, cuando $x=x_2$; y tiene el valor $y_2=f(x_2)$. Así, el incremento de y es

$$\Delta y = y_2-y_1$$
$$\text{o sea, } \Delta y=f(x_2)-f(x_1)$$

Si en $y=f(x)$ la variable independiente x toma un incremento Δx, entonces Δy indicará el incremento correspondiente de la variable dependiente y, o sea, de la función $f(x)$.

El incremento Δy siempre ha de contarse a partir del valor inicial definido de y, que corresponde al valor inicial fijado arbitrariamente de x desde el cual se cuenta el incremento Δx. Por ejemplo, consideremos la función

$$y=x^2$$

Si tomamos $x=10$ como valor inicial de x, esto fija a $y=100$ como valor inicial de y.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Supongamos que x aumenta hasta $x=12$, es decir, $\Delta x=2$; entonces y aumenta hasta $y=144$, es decir, $\Delta y=44$.

Si ahora, x decrece hasta $x=9$, es decir, $\Delta x=-1$; entonces y decrece hasta $y=81$, es decir, $\Delta y=-19$.

En esta discusión y aumenta cuando x aumenta y y decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes de Δx y Δy tienen un mismo signo. Puede acontecer que y decrezca cuando x aumenta, o viceversa; entonces Δx y Δy tendrán signos contrarios.

Ejemplo 1
El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio por litro. Si p es el precio por litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta q (en litros por día) está dado por

$$q=500(150-p)$$

Calcula el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120¢ a 130¢ por litro.

Solución
Aquí, p es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de p es $p_1=120$ y el segundo valor es $p_2=130$. El incremento de p es

$$\Delta p=p_2-p_1=130-120=10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1=500(150-p_1)=500(150-120)=15{,}000$$
$$q_2=500(150-p_2)=500(150-130)=10{,}000$$

En consecuencia, el incremento de q está dado por:

$$\Delta q=q_2-q_1=10{,}000-15{,}000=-5{,}000$$

El incremento de p mide el crecimiento de q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5,000 litros por día si el precio se incrementa de 120¢ a 130¢.

Resolviendo la ecuación $\Delta x=x_2-x_1$ para x_2, tenemos $x_2=x_1+\Delta x$. Usando este valor de x_2 en la definición de Δy, obtenemos: $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$

$$\Delta y=f(x_1+\Delta x)-f(x_1)$$

Dado que x_1 puede ser cualquier valor de x, podemos suprimir el subíndice y escribir

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

En forma alternativa, dado que $f(x)=y$, podemos escribir

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)$$

Sea P el punto (x_1,y_1) y Q el punto (x_2,y_2), ambos situados en la gráfica de la función $y=f(x)$. (Véase la fig. 1) Entonces el incremento Δx es igual a la distancia horizontal de P a Q, mientras que Δy es igual a la distancia vertical de P a Q. En otras palabras, Δx es el avance y Δy es la elevación de P a Q.

En el caso ilustrado en la parte (a) de la figura 1, tanto Δx como Δy son positivos. Es posible que Δy o ambos sean negativos y aún Δy puede ser cero. Un ejemplo típico de un caso en que $\Delta x > 0$ y $\Delta y < 0$ se ilustra en la parte (b) de la figura 1.

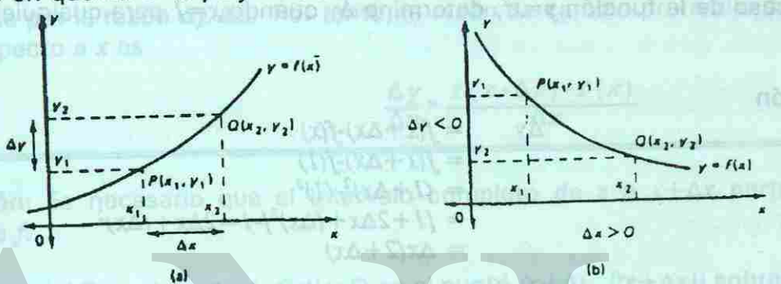


Fig. 1

En algunas de las aplicaciones que abordaremos más tarde, nos convendrá pensar el incremento Δx como muy pequeño (esto es, sólo desearemos considerar que Δx significa un cambio pequeño de x más bien que sólo un incremento). Sin embargo, en esta sección no se pondrá alguna restricción en el tamaño de los incrementos considerados; pueden ser pequeños así como relativamente grandes.

Ejemplo 2
Dada $f(x)=x^2$, calcula Δy si $x=1$ y $\Delta x=0.2$

Solución
Sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de Δy, obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= f(1+0.2)-f(1)\\ &= f(1.2)-f(1)\\ &= (1.2)^2-(1)^2\\ &= 1.44-1=0.44\end{aligned}$$

Así que, un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en y de 0.44. Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 2.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

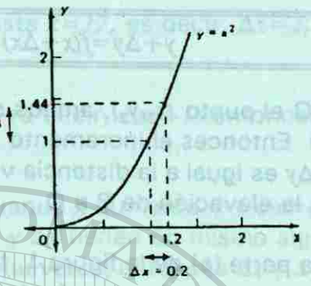


Fig. 2

Ejemplo 3
En el caso de la función $y=x^2$, determina Δy cuando $x=1$ para cualquier incremento Δx.

Solución

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= f(1+\Delta x)-f(1)\\ &= (1+\Delta x)^2-(1)^2\\ &= [1+2\Delta x+(\Delta x)^2]-1=2\Delta x+(\Delta x)^2\\ &= \Delta x(2+\Delta x)\end{aligned}$$

Puesto que la expresión de Δy del ejemplo 3 es válida para todos los incrementos Δx, podemos resolver el ejemplo 2 sustituyendo $\Delta x=0.2$ en el resultado.
Obtenemos:
$\Delta y = 0.2(2+0.2) = 0.2(2.2) = 0.44$
como antes.

Ejemplo 4
De nuevo considera la función $y=x^2$ y determina Δy para valores generales de x y Δx.

Solución

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)-f(x)\\ &= (x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2\\ &= \Delta x(2x+\Delta x)\end{aligned}$$

Otra vez es claro que podemos recobrar el resultado del ejemplo 3 sustituyendo $x=1$ en la expresión del ejemplo 4. Sin embargo, esta expresión da el incremento de y para cualesquiera valores de x y Δx.

Cuando se establecen en términos absolutos (como en los ejemplos anteriores), los cambios de la variable dependiente contienen menos información de la que tendrían si se establecieran en términos relativos. Por ejemplo, enunciados absolutos como, "la temperatura descendió 10°C" o "las ganancias se incrementarán en $3000" son menos informativos que proposiciones relativas como, "la temperatura descendió 10°C en las últimas 5 horas" o "las ganancias se incrementarán en $3000 dólares si se

venden 60 unidades extras". De estos últimos enunciados, no sólo sabemos qué tanto cambia la variable (temperatura o ganancias), sino también podemos calcular la razón promedio en que está cambiando con respecto a una segunda variable. Por tanto, el descenso promedio de la temperatura durante las últimas 5 horas es 10/5 = 2°C por hora; y el incremento promedio de las ganancias si 60 unidades más se venden es de 3000/60 = 50 dólares por unidad.

Definición

> La razón de cambio promedio de una función f sobre un intervalo de x a $x+\Delta x$ se define por la razón $\Delta y/\Delta x$. Por tanto, la razón de cambio promedio de y con respecto a x es
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Observación: Es necesario que el intervalo completo de x a $x+\Delta x$ pertenezca al dominio de f.

Gráficamente, si P es el punto $(x, f(x))$ y Q es el punto $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ sobre la gráfica de $y=f(x)$, entonces $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ es la elevación y Δx es el avance de P a Q. Por la definición de pendiente, podemos decir que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que, la razón de cambio promedio de y con respecto a x es igual a la pendiente de la secante PQ que une los puntos P y Q sobre la gráfica de $y=f(x)$. (Véase la fig. 3) Estos puntos corresponden a los valores x y $x+\Delta x$ de la variable independiente.

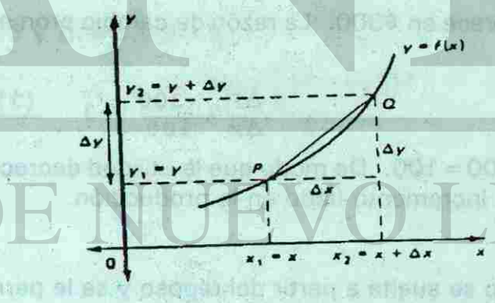


Fig. 3

Ejemplo 5
(Costo, ingresos y utilidades)
Un fabricante de productos químicos advierte que el costo por semana de producir x toneladas de cierto fertilizante está dado por $C(x)=20{,}000+40x$ dólares y el ingreso obtenido por la venta de x toneladas está dado por $R(x)=100x-0.01x^2$. La compañía actualmente produce 3100 toneladas por semana, pero está considerado incrementar la producción a 3200 toneladas por semana. Calcula los incrementos resultantes en el costo, el ingreso y la utilidad. Determina la razón de cambio promedio de la utilidad por las toneladas extras producidas.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución
El primer valor de x es 3100 y $x+\Delta x = 3200$

$$\begin{aligned}\Delta C &= C(x+\Delta x)-C(x)\\ &= C(3200)-C(3100)\\ &= [20{,}000+40(3200)]-[20{,}000+40(3100)]\\ &= 148{,}000-144{,}000=4000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta R &= R(x+\Delta x)-R(x)\\ &= R(3200)-R(3100)\\ &= [100(3200)-0.01(3200)^2]-[100(3100)-0.01(3100)^2]\\ &= 217{,}600-213{,}900=3700\end{aligned}$$

De modo que los costos se incrementan en $4000 bajo el incremento dado en la producción, mientras que los ingresos se incrementan en $3700.

A partir de estos resultados, es claro que la utilidad debe decrecer en $300. Podemos advertir esto con más detalle si consideramos que las utilidades obtenidas por la empresa son iguales a sus ingresos menos sus costos, de modo que la utilidad $P(x)$ por la venta de x toneladas de fertilizante es

$$\begin{aligned}P(x) &= R(x)-C(x)\\ &= 100x-0.01x^2-(20{,}000+40x)\\ &= 60x-0.01x^2-20{,}000\end{aligned}$$

En consecuencia, el incremento en la utilidad cuando x cambia de 3100 a 3200 es

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(3200)-P(3100)\\ &= [60(3200)-0.01(3200)^2-20{,}000]-[60(3100)-0.01(3100)^2-20{,}000]\\ &= 69{,}600-69{,}900=-300\end{aligned}$$

Así pues, la utilidad decrece en $300. La razón de cambio promedio de la utilidad por tonelada extra es

$$\frac{\Delta P}{\Delta x}=\frac{-300}{100}=-3$$

en donde $\Delta x = 3200-3100 = 100$. De modo que la utilidad decrece en un promedio de $3 por tonelada bajo el incremento dado en la producción.

Ejemplo 6
Cuando cualquier objeto se suelta a partir del reposo y se le permite caer libremente bajo la fuerza de gravedad, la distancia s (en pies) recorrida en el tiempo t (en segundos) está dada por

$$s(t)=16t^2$$

Determina la velocidad promedio del objeto durante los intervalos de tiempos siguientes

a) El intervalo de tiempo de 3 a 5 segundos
b) El cuarto segundo (de t = 3 a t = 4 segundos)
c) El intervalo de tiempo entre los instantes 3 y 3½ segundos.
d) El lapso de t a $t+\Delta t$

Solución
La velocidad promedio de cualquier móvil es igual a la distancia recorrida dividida entre el intervalo de tiempo empleado. Durante el lapso de t a $t+\Delta t$, la distancia recorrida es el incremento Δs, y así la velocidad promedio es la razón $\Delta s/\Delta t$.

a) Aquí $t=3$ y $t+\Delta t=5$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{s(5)-s(3)}{5-3}$$

$$=\frac{16(5^2)-16(3^2)}{2}=\frac{400-144}{2}$$

$$=\frac{256}{2}=128$$

Por consiguiente, durante el lapso de t = 3 a t = 5, el móvil cae una distancia de 256 pies con una velocidad promedio de 128 pies/seg.

b) Ahora, $t=3$ y $t+\Delta t=4$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{s(4)-s(3)}{4-3}$$

$$=\frac{16(4^2)-16(3^2)}{1}=256-144$$

$$=112$$

El móvil tiene una velocidad promedio de 112 pies/segundo durante el cuarto segundo de caída.

c) En este caso, $t=3$ y $\Delta t = 3\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\frac{16(3\frac{1}{2})^2-16(3)^2}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{196-144}{\frac{1}{2}}=\frac{52}{\frac{1}{2}}$$

$$=104$$

Así pues, el móvil tiene una velocidad promedio de 104 pies/segundo durante el lapso de 3 a 3½ segundos.

d) En el caso general

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{16(t+\Delta t)^2-16t^2}{\Delta t}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

$$= \frac{16[t^2+2t\cdot\Delta t+(\Delta t)^2]-16t^2}{\Delta t}$$

$$= \frac{32t\cdot\Delta t+16(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$= 32t + 16\Delta t$$

la cual es la velocidad promedio durante el lapso de t a $t+\Delta t$.

Todos los resultados particulares del ejemplo 6 pueden obtenerse como casos especiales de la parte (d) poniendo los valores apropiados de t y Δt. Por ejemplo, el resultado de la parte (a) se obtiene haciendo $t=3$ t $\Delta t=2$:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t+16\Delta t = 32(3)+16(2) = 96+32 = 128$$

Ejercicio 3.1

Determina los incrementos de las funciones siguientes para los intervalos dados.

1. $f(x)=2x+7;$ $x=3,\ \Delta x=0.2$
2. $f(x)=2x^2+3x-5;$ $x=2,\ \Delta x=0.5$
3. $g(x)=x^2-4;$ $x=1,\ \Delta x=2$
4. $f(t)=900/t;$ $t=25,\ \Delta t=5$
5. $h(x)=ax^2+bx+c;$ x a $x+\Delta x$
6. $F(x)=x+2/x;$ x a $x+\Delta x$

Calcula la razón de cambio promedio de cada función en el intervalo dado

7. $f(x)=3-7x;$ $x=2,\ \Delta x=0.5$
8. $f(x)=3x^2-5x+1;$ $x=3,\ \Delta x=0.2$
9. $g(x)=x^2-9;$ $x=2,\ \Delta x=0.5$
10. $h(x)=3x^2+1;$ $x=5,\ \Delta x=0.3$
11. $f(t)=\sqrt{4+t};$ $t=5,\ \Delta t=1.24$
12. $F(x)=3/x;$ x a $x+\Delta x$
13. $G(t)=t^3+t;$ $t=a$ a $a+h$
14. $f(x)=x^3-1;$ x a $x+\Delta x$

15. (Crecimiento y variación de la población)
El tamaño de la población de cierto centro minero al tiempo t (medido en años) está dado por

$$p(t) = 10{,}000+1000t-120t^2$$

Determina la razón de crecimiento promedio entre cada par de tiempos.

a. $t=3$ y $t=5$ años
b. $t=3$ y $t=4$ años
c. $t=3$ y $t=3\frac{1}{2}$ años
d. t y $t+\Delta t$ años

16. (Función de costo)
Un fabricante descubre que el costo de producir x artículos está dado por

$$C=0.001x^3-0.3x^2+40x+1000$$

Determina el incremento en el costo cuando el número de unidades se incrementa de 50 a 60. Calcula el costo promedio por unidad adicional de incremento en la producción de 50 a 60 unidades.

17. (Función de costo)
Con respecto a la función de costo del ejercicio 16, calcula el costo promedio por unidad adicional en incremento de la producción de 90 a 100 unidades.

18. (Crecimiento del PNB)
Durante el período de 1970 a 1990, el producto nacional bruto de cierto país se encontraba dado por la fórmula $I=5+0.1x+0.01x^2$ en miles de millones de dólares. (Aquí la variable x se usa para medir años, con $x=0$ correspondiente a 1970 y $x=20$ a 1990). Determina el crecimiento promedio del PNB por año entre 1975 y 1980.

19. (Proyectiles)
Una partícula que se lanza hacia arriba con una velocidad de 200 pies/segundo alcanza una altura s después de t segundos, en donde $s=200t-16t^2$. Calcula la velocidad ascendente promedio en cada caso.
a. Entre $t=2$ y $t=3$ segundos
b. Entre $t=3$ y $t=5$ segundos
c. Entre t y $t+\Delta t$

20. (Función de ingreso)
El ingreso semanal total R (en dólares) obtenido por la producción y venta de x unidades de cierto artículo está dado por

$$R=f(x)=500x-2x^2$$

Determina la razón promedio de ingreso por unidad extra cuando el número de unidades producidas y vendidas por semana se incrementa de 100 a 120.

3.2 La Derivada

En el ejemplo 6 de la sección 3.1, estudiamos las velocidades promedio de un móvil que cae durante varios intervalos de tiempo diferentes. Sin embargo, en muchos ejemplos tanto de la ciencia como de la vida diaria, la velocidad promedio de un móvil no da la información de mayor importancia. Por ejemplo, si una persona que viaja en un automóvil choca contra una pared de concreto, no es la velocidad promedio sino la velocidad en el instante de colisión la que determina si la persona sobrevivirá al accidente.

¿Qué entendemos por la velocidad de un móvil en cierto instante (o velocidad instantánea, como por lo regular se le denomina)? La mayoría de la gente aceptaría que en una idea como la de velocidad instantánea, es precisamente la cantidad que

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

el velocímetro del automóvil mide, pero la definición de velocidad instantánea presenta algunas dificultades. La velocidad se define como la distancia recorrida en cierto intervalo dividida entre su duración. Pero si nos interesa la velocidad en cierto instante particular, deberíamos considerar un intervalo de duración cero. Sin embargo, la distancia recorrida durante tal intervalo sería cero, y obtendríamos 0/0, una cantidad que no tiene sentido.

A fin de definir la velocidad instantánea de un móvil en cierto instante t, procederemos de la manera siguiente. Durante cualquier intervalo con una duración entre t y $t+\Delta t$, se recorre un incremento en la distancia Δs. La velocidad promedio es $\Delta s/\Delta t$. Imaginemos ahora que el incremento Δt se hace más y más pequeño, de modo que el intervalo correspondiente es muy pequeño. Así, es razonable suponer que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ sobre tal intervalo muy pequeño estará muy cerca de la velocidad instantánea en el instante t. Más aún, entre más corto sea el intervalo Δt, mejor aproximará la velocidad promedio a la velocidad instantánea. De hecho, podemos imaginar que si a Δt se le permite hacerse arbitrariamente cercano a cero, de modo que la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ puede hacerse cada vez más parecida a la velocidad instantánea.

En el ejemplo 6 de la sección 3.1 vimos que la velocidad promedio durante el intervalo de t a $t + \Delta t$, de una partícula que cae bajo la acción de la gravedad está dada por

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 32t + 16\Delta t$$

Haciendo $t=3$, obtenemos la velocidad promedio durante un intervalo de duración Δt después de 3 segundos de caída.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 96 + 16\Delta t$$

Algunos valores de esta velocidad aparecen en la tabla 1 para diferentes valores del incremento Δt. Por ejemplo, la velocidad promedio entre 3 y 3.1 segundos se obtiene haciendo $\Delta t = 0.1$: $\Delta s/\Delta t = 96 + 1.6 = 97.6$ pies/segundo.

Tabla 1

Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$	104	100	97.6	96.16	96.016

A partir de los valores de la tabla 1 es claro que a medida que Δt se hace más y más pequeño, la velocidad promedio se acerca cada vez más a 96 pies/segundo. Es razonable concluir en consecuencia que 96 pies/segundo es la velocidad instantánea en $t=3$.

Lo que hemos hecho es calcular la velocidad media sobre intervalos de tiempo cada vez más cortos, comenzando cada uno en $t=3$. Cuanto más corto sea el intervalo, mejor nos aproximamos a la "verdadera" velocidad en el instante $t=3$. El concepto de límite proporciona el modo de alcanzar la mejor descripción.

Supongamos que un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición en el momento está dada por $s(t)$. En el instante próximo $t+\Delta t$, está en $s(t+\Delta t)$. Por lo tanto, la velocidad media durante este intervalo es

$$V_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Y ahora definimos la "velocidad instantánea v" en el instante t mediante

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_{prom} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

En el caso en que $s(t) = 16t^2$, la velocidad instantánea en el instante t

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} 32t + 16\Delta t$$

$$V = 32t$$

Entonces la velocidad instantánea cuando $t=3$ es $v = 32(3) = 96$ pies por segundo. Esto confirma nuestra suposición anterior.

Veamos cómo ésta definición de velocidad instantánea de un móvil nos conduce de manera natural a un proceso de límite. La velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ se calcula en primer término para un lapso de duración entre t y $t+\Delta t$, y luego se calcula su valor límite cuando $\Delta t \to 0$. Podríamos describir $\Delta s/\Delta t$ como la razón de cambio promedio de la posición, s, con respecto al tiempo, y su límite es la razón de cambio instantáneo de s con respecto a t.

Existen muchos ejemplos de procesos que se desarrollan en el tiempo y que pueden describirse por una o más funciones de t. En cada caso, puede darse una definición correspondiente a la razón de cambio de la cantidad apropiada con respecto al tiempo. El ejemplo 1 ilustra un caso típico del asunto.

Ejemplo 1
(Crecimiento de la población)
Durante el período de 10 años de 1980 a 1990, se encontró que la población de cierto país estaba dada por la fórmula

$$P(t) = 1 + 0.03t + 0.001t^2$$

en donde P está en millones y t es el tiempo medido en años desde el inicio de 1980. Calcula la tasa de crecimiento instantánea al inicio de 1985.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Busquemos la razón de crecimiento en t = 5. El incremento de P entre t = 5 y t = 5 + Δt es:

$$\begin{aligned}\Delta P &= p(5+\Delta t)-P(5)\\ &= [1+0.03(5+\Delta t)+0.001(5+\Delta t)^2]\\ &\quad -[1+0.03(5)+0.001(5)^2]\\ &= [1+0.15+0.03\Delta t+0.001(25+10\Delta t+(\Delta t)^2)]\\ &\quad -[1+0.15+0.001(25)]\\ &= 0.04\Delta t+0.001(\Delta t)^2 = \Delta t(0.04+0.001\Delta t)\end{aligned}$$

La tasa de crecimiento promedio durante este intervalo de tiempo está dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta t}=0.04+0.001\Delta t$$

A fin de obtener la tasa de crecimiento instantánea, debemos tomar el límite cuando Δt→0.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}[0.04+0.001\ \Delta t] = 0.04$$

Así, al inicio de 1985, la población del país está creciendo una tasa de 0.04 millones por año (esto es, 40,000 por año).

La razón de cambio instantánea de una función tal como la del ejemplo 1 es un caso de lo que llamaremos la "derivada" de una función. Daremos ahora una definición formal de la derivada.

Definición

Sea $y=f(x)$ una función dada. La derivada de y con respecto a x, denotada por dy/dx, se define por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

con tal de que este límite exista.

A la derivada también se le da el nombre de "coeficiente diferencial" y la operación de calcular la derivada de una función se denomina "diferenciación".

Si la derivada de una función existe en un punto particular, decimos que f es diferenciable en tal punto.

La derivada de $y=f(x)$ con respecto a x también se denota por uno de los símbolos siguientes:

$$\frac{d}{dx}(y),\ \frac{df}{dx},\ \frac{d}{dx}(f),\qquad y',\ f'(x),\ D_x y,\ D_x f$$

Cada una de estas notaciones indica exactamente lo mismo que dy/dx.

Observación: dy/dx indica la derivada de y con respecto a x si y es una función de la variable independiente x; dC/dq denota la derivada de C con respecto a q si C es una función de la variable independiente q; dx/du indica la derivada de x con respecto a u si x es una función de la variable independiente u.

De la definición

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},\ \frac{dC}{dq} = \lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta q},\ y\ \frac{dx}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}$$

Con el propósito de calcular la derivada dy/dx, procedemos de la manera siguiente:

1. Calculamos $y=f(x)$ y $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$
2. Restamos la primera cantidad de la segunda a fin de obtener Δy y simplificamos el resultado.
3. Dividimos Δy entre Δx y entonces tomamos el límite de la expresión resultante cuando $\Delta x\to 0$.

Ejemplo 2

Calcula la derivada de $2x^2+3x+1$ con respecto a x.

Solución

Sea $y=f(x)=2x^2+3x+1$. Se sigue que

$$\begin{aligned}y+\Delta y &= f(x+\Delta x)=2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+1\\ &= 2[x^2+2x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]+3x+3\Delta x+1\\ &= 2x^2+4x\cdot\Delta x+2(\Delta x)^2+3x+3\Delta x+1\\ &= 2x^2+3x+1+\Delta x(4x+3+2\Delta x)\end{aligned}$$

Restando y a $y+\Delta y$, tenemos

$$\Delta y = \Delta x(4x+3+2\Delta x)$$

y así, $\Delta y/\Delta x=4x+3+2\Delta x$. En consecuencia

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4x+3+2\Delta x)$$
$$=4x+3$$

Si $f(x)=2x^2+3x+1$, se sigue que $f'(x)=4x+3$. En particular, por ejemplo, $f'(-2)=4(-2)+3=-5$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Ya hemos visto que cuando la variable independiente de una función $y=f(x)$ representa el tiempo, la derivada dy/dt da la razón de cambio instantánea de y. Por ejemplo, si s = f(t) representa la distancia recorrida por un móvil, ds/dt da la velocidad instantánea. Aparte de esta clase de aplicación de la derivada, sin embargo, tiene también una interpretación desde el punto de vista geométrico.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Si P y Q son los dos puntos $(x,f(x))$ y $(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$ sobre la gráfica de $y=f(x)$, entonces, como se estableció en la sección 3.1, la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente del segmento rectilíneo PQ. A medida que Δx se hace más y más pequeño, el punto Q se aproxima cada vez más a P el segmento secante PQ esta cada vez más cerca de ser tangente cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de la secante PQ se aproxima a la pendiente de la línea tangente en P. Así que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

representa la pendiente de la línea tangente a $y=f(x)$ en el punto $P(x, f(x))$. (véase la fig. 4).

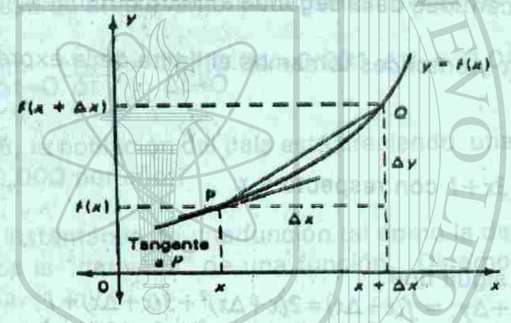


Fig. 4

Ejemplo 3
Calcula la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^2-4x$ en el punto (3,-3)

Solución
En primer término calculamos dy/dx. Tenemos que $y=x^2-4x$, de modo que
$y+\Delta y=(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)$
luego, $\Delta y=[(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)]-y$

$$\begin{aligned} \Delta y &= [(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)]-(x^2-4x) \\ \Delta y &= 2x\Delta x+(\Delta x)^2-4\Delta x \\ \Delta y &= \Delta x(2x+\Delta x-4) \end{aligned}$$

Así que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x+\Delta x-4)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x+\Delta x-4$$

En consecuencia,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x+\Delta x-4$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x-4$$

Aquí $f'(x)=2x-4$. Cuando $x=3$, $f'(3)=2(3)-4=2$. Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente a $y=x^2-4x$ en $x=3$ es 2.

Con el objeto de obtener la ecuación de la recta tangente, podemos usar la fórmula punto-pendiente

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

Con pendiente m = 2 y $(x_1,y_1)=(3,-3)$, obtenemos

$$\begin{aligned} y-(-3) &= 2(x-3) \\ y+3 &= 2(x-3) \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} y+3 &= 2x-6 \\ y &= 2x-6-3 \\ y &= 2x-9 \end{aligned}$$

que es la ecuación requerida

Ejemplo 4
Evalúa dy/dx para la ecuación cúbica

$$y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

en donde A,B,C y D son cuatro constantes

Solución
Reemplazando x por $x+\Delta x$, encontramos que

$$\begin{aligned} y+\Delta y &= A(x+\Delta x)^3+B(x+\Delta x)^2+C(x+\Delta x)+D \\ &= A[x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3] \\ &+B[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2]+C(x+\Delta x)+D \end{aligned}$$

Si ahora restamos la expresión dada de y, llegamos a que

$$\begin{aligned} \Delta y &= (y+\Delta y)-y \\ &= A[x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3] \\ &+B[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2] \\ &+C(x+\Delta x)+D-(Ax^3+Bx^2+Cx+D) \\ &= A[3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]+B[2x\Delta x+(\Delta x)^2]+C\Delta x \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]+B(2x+\Delta x)+C$$

Haciendo que Δx se aproxime a cero, observamos que los tres términos de la derecha que incluyen a Δx como factor tenderán a cero en el límite. Los términos restantes dan el resultado siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3Ax^2+2Bx+C$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

A partir del resultado de este ejemplo, es posible obtener de nuevo algunos de los resultados de los ejemplos anteriores. Por ejemplo, si hacemos A = 0, B = 2, C = 3 y D = 1, la función cúbica del ejemplo 4 se convierte en $y=0x^3+2x^2+3x+1=2x^2+3x+1$, que se consideró en el ejemplo 2. De la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{dy}{dx}=3Ax^2+2Bx+C=3(0)x^2+2(2)x+3=4x+3$$

que es consistente con los resultados del ejemplo 2

Ejercicio 3.2

Calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes según el caso.

1. $f(x)=2x-5$
2. $f(x)=2-5x$
3. $g(x)=7$
4. $g(t)=-3$
5. $f(x)=x^2$
6. $g(t)=3t^2+1$
7. $f(u)=u^2+u+1$
8. $g(x)=x^2-3x+7$
9. $h(x)=7-3x^2$
10. $f(x)=1/x$

11. Calcula dy/dx si: (a) $y=3-2x^2$; (b) $y=3x+7$

12. Determina du/dt si: (a) $u=2t+3$; (b) $u=1/(2t+1)$

13. Determina $f'(2)$ si $f(x)=5-2x$
14. Calcula $g'(4)$ si $g(x)=(x+1)^2$
15. Encuentra $F'(3)$ si $F(t)=t^2-3t$
16. Determina $G'(1)$ si $G(u)=u^2-u+3$

Determina la pendiente de la tangente a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados. Encuentra la ecuación de la línea tangente en cada caso,.

17. $y=3x^2-4$ en $x=2$
18. $y=x^2+x+2$ en $x=-2$
19. (Crecimiento de las ventas)
    El volumen de las ventas de un disco fonográfico particular está dado como una función del tiempo t por la fórmula
    $$S(t)=10{,}000+2000t-200t^2$$
    en donde t se mide en semanas y S es el número de discos vendidos por semana. Determina la razón en que S cambia cuando
    a. t = 0 b. t = 4 c. t = 8

20. (Crecimiento de la población)
    Cierta población crece de acuerdo con la fórmula
    $$p(t)=30{,}000+60t^2$$
    en donde t se mide en años. Calcula la tasa de crecimiento cuando:
    a. t = 2 b. t = 0 c. t = 5

3.3 Derivadas de Funciones Elevadas a una Potencia

Por lo que se expuso en la sección 3.2 quedó claro que el encontrar derivadas de funciones utilizando la propia definición de derivada no siempre es sencillo y por lo general lleva tiempo. Esta tarea puede simplificarse en forma apreciable usando ciertas fórmulas estándar. En esta sección, desarrollaremos fórmulas con objeto de encontrar las derivadas de funciones elevadas a una potencia y combinaciones de ellas.

Empecemos retomando el ejemplo 4 de la sección 3.2. Considerando casos especiales de los coeficientes A,B,C y D en ese ejemplo, obtenemos los resultados siguientes:

TEOREMA 1

(a) La derivada de una función constante es cero.
(b) Si $y=x$, entonces $dy/dx=1$
(c) Si $y=x^2$, entonces $dy/dx=2x$
(d) Si $y=x^3$, entonces $dy/dx=3x^2$

Demostración

(a) En la función $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, hagamos A,B y C iguales a cero. Entonces y = D, una función constante. La expresión general de dy/dx es $3Ax^2+2Bx+C$ (por el ejemplo 4 de la sección 3.2) y es cero cuando A = B = C = 0.

(b) Si hacemos A = B = D = 0 y C = 1, obtenemos $y=x$ y $dy/dx=1$, como se requería

(c) y (d) Se prueban en forma similar

En términos geométricos, la parte(a) del teorema 1 asegura que la pendiente de la recta y = c es cero en todo punto de ella. Es obvio que esto es cierto porque la gráfica de y = c es una recta horizontal, y cualquier recta horizontal tiene pendiente cero.

Ejemplo 1

$$\frac{d}{dx}(6)=0 \quad y \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

Con base en los resultados de las partes (a) a (d) del teorema 1, podemos observar cierto patrón en las derivadas de potencias de $x, y=x^n$. Tenemos el resultado siguiente que es válido para cualquier valor real de n.

TEOREMA 2

Si $y=x^n$, entonces $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$. (Fórmula de la potencia)

Verbalmente, a fin de encontrar la derivada de cualquier potencia constante de x, reducimos la potencia de x en 1 y multiplicamos por el exponente original de x.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Al final de esta sección, probaremos esta fórmula de la derivada de x^n en el caso que n sea un entero positivo. Sin embargo, es válida para todos los valores reales de n.

Ejemplo 2

(a) $\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$

(b) $\frac{d}{dy}(y^{3/2}) = \frac{3}{2}y^{3/2-1} = \frac{3}{2}y^{1/2}$

(c) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{d}{dt}(t^{-1/2}) = -\frac{1}{2}t^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}t^{-3/2} = \frac{-1}{2\sqrt{t^3}}$

(d) $\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\right) = \frac{d}{du}(u^{-2}) = -2u^{-2-1} = -2u^{-3} = -\frac{2}{u^3}$

(e) $\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(x^1) = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$ (porque $x^0 = 1$)

TEOREMA 3

Si u(x) es una función diferenciable de x y c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

Esto es, la derivada del producto de una constante y una función de x es igual producto de la constante y la derivada de la función.

Ejemplo 3

(a) $\frac{d}{dx}(cx^n) = c\frac{d}{dx}(x^n) = c(nx^{n-1}) = ncx^{n-1}$

(b) $\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{t}\right) = \frac{d}{dt}(4t^{-1}) = 4\frac{d}{dt}(t^{-1}) = 4(-1 \cdot t^{-2}) = -\frac{4}{t^2}$

(c) $\frac{d}{du}(2\sqrt{u}) = \frac{d}{du}(2u^{1/2}) = 2\frac{d}{du}(u^{1/2}) = 2 \cdot \frac{1}{2}u^{1/2-1} = u^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{u}}$

TEOREMA 4

Si u(x) y v(x) son dos funciones diferenciables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

En otras palabras, "la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las dos funciones".

Ejemplo 4

Calcula dy/dx si $y = x^2 + \sqrt{x}$

Solución

La función dada es la suma de x^2 y $x^{1/2}$. En consecuencia, por el teorema 4, podemos diferenciar estas dos potencias por separado.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^{1/2})$$

$$= 2x + \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Este teorema puede extenderse de inmediato a la suma de cualquier número de funciones y también a diferencias entre funciones. Por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

etc.

Ejemplo 5

Determina la derivada de $3x^4-5x^3+7x+2$ con respecto a x.

Solución

Sea $y = 3x^4-5x^3+7x+2$

Se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x^4-5x^3+7x+2)$$

$$= \frac{d}{dx}(3x^4) - \frac{d}{dx}(5x^3) + \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(2)$$

Usamos el teorema 4 a fin de expresar la derivada de la suma $3x^4-5x^3+7x+2$ como la suma de las derivadas de $3x^4$, $-5x^3$, $7x$ y 2. Calculando estas cuatro derivadas, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = 3(4x^3) - 5(3x^2) + 7(1x^0) + 0$$

$$= 12x^3 - 15x^2 + 7$$

porque $x^0 = 1$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Expresiones en que aparecen paréntesis pueden derivarse después de eliminar los paréntesis. Por ejemplo, si deseamos calcular dy/dx cuando $y=x^2(2x-3)$, en primer término escribimos $y=2x^3-3x^2$. En esta forma, podemos derivar y como en el ejemplo 5, y obtener $dy/dx=6x^2-6x$. O si $y=(x+2)(x^2-3)$, empezamos desarrollando los productos, obteniendo $y=x^3+2x^2-3x-6$. A partir de esta etapa, procedemos otra vez como en el ejemplo 5 y obtenemos que $dy/dx=3x^2+4x-3$.

En forma similar, podemos simplificar fracciones con denominadores monomiales antes de diferenciar. Por ejemplo, si

$$y=\frac{5t^4+7t^2-3}{2t^2}$$

escribimos primero $y=\frac{5}{2}t^2+\frac{7}{2}-\frac{3}{2}t^{-2}$. Después de derivar los tres términos por separado, obtenemos

$$\frac{dy}{dt}=5t+3t^{-3}$$

Demostración del teorema 3. Sea $y = cu(x)$. Entonces si x se reemplaza por $x + \Delta x$ se convierte en $u + \Delta u$ y y en $y + \Delta y$, de modo que

$$\begin{aligned} y + \Delta y &= cu(x + \Delta x) \\ &= c(u + \Delta u) \end{aligned}$$

Restando tenemos que $\Delta y = c(u + \Delta u) - cu = c\Delta u$. La división de ambos lados entre Δx nos da

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(c\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{du}{dx},$$

como se requería. En forma alternativa, podemos escribir

$$\frac{d}{dx}[cf(x)]=c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Demostración del teorema 4.
Sea $y=u(x)+v(x)$. Si a x se le da un incremento Δx. Puesto que y, u y v son funciones de x, se incrementan en $y+\Delta y, u+\Delta u, v+\Delta v$, en donde

$$\begin{aligned} y+\Delta y &= u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x) \\ &= (u+\Delta u)+(v+\Delta v) \end{aligned}$$

La resta de y a $y+\Delta y$ da

$$\Delta y = (u+\Delta u+v+\Delta v)-(u+v)=\Delta u+\Delta v$$

Dividiendo entre Δx, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Si ahora hacemos que Δx tienda a cero, obtenemos

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$$

que es el resultado requerido.

Por último probaremos la fórmula de las potencias cuando n es un entero positivo. La demostración dada utiliza el resultado siguiente del álgebra.

Si n es un entero positivo.

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

Este resultado es fácil de verificar multiplicando las dos expresiones del lado derecho término a término. Debe observarse que el número de términos en el segundo paréntesis de la derecha es igual a n, la potencia de a y b en el lado izquierdo.

Considere los ejemplos siguientes

$$\begin{aligned} n=2&: a^2-b^2=(a-b)(a+b) \\ n=3&: a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \\ n=4&: a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Demostración del teorema 2

La derivada de x^n con respecto a x es nx^{n-1}, en donde n es un entero positivo.

Demostración
Sea $y=x^n$. Cuando x cambia a $x+\Delta x$, se incrementa a $y+\Delta y$, en donde

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^n$$

La sustracción del valor de y de $y+\Delta y$ nos da

$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n$$

Con el objeto de simplificar esta expresión de Δy, usamos la identidad algebraica que se dio antes, haciendo $a=x+\Delta x$ y $b=x$. Así pues, $a-b=(x+\Delta x)-x=\Delta x$, de modo que

$$\begin{aligned} \Delta y=\Delta x[&(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}\cdot x+(x+\Delta x)^{n-3}\cdot x^2+\ldots \\ &+(x+\Delta x)\cdot x^{n-2}+x^{n-1}] \end{aligned}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Dividiendo ambos lados entre Δx y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [(x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2} \cdot x + (x+\Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \ldots + (x+\Delta x) \cdot x^{n-2} + x^{n-1}]$$

Ahora cuando $\Delta x \to 0$, cada término de los paréntesis se aproxima al límite x^{n-1}. Por ejemplo, el segundo término $(x+\Delta x)^{n-2} \cdot x = x^{n-1}$ cuando $\Delta x \cdot 0$. Más aún, hay n de tales términos que están sumados, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} + x^{n-1}$$
$$= nx^{n-1}$$

como se requería

Ejercicio 3.3

Deriva las expresiones siguientes

1. $4x^3-3x^2+7$
2. $2x-x^3$
3. $3x^4-7x^3+5x^2+8$
4. $5-2x^2+x^4$
5. $3u^2+\frac{3}{u^2}$
6. $\frac{1}{t}+2+t$
7. $5-\frac{1}{t}$
8. $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$
9. $\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{y}}$
10. $2x^{3/2}+4x^{3/4}$
11. $3x^4+(2x-1)^2$
12. $(y-2)(2y-3)$
13. $(x-7)(2x-9)$
14. $(u+1)(2u+1)$
15. $(t+1)(3t-1)^2$
16. $(u-2)^3$
17. $5-3t+4t^2-\frac{2}{t}$
18. $\frac{(x+1)^2}{x}$
19. $\frac{2y^2+3y-7}{y}$
20. $\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{x^2}$
21. $\frac{u^3+2u+2}{u^3}$
22. $(8y)^{2/3}+(8y)^{-2/3}$

23. $x^{1.2}+1/x^{0.6}$
24. $\frac{x^3-x^{1.6}}{x^{2.3}}$
25. $\frac{5x^3}{6}$
26. $\frac{7}{x}$

27. Calcula dy/dx si $y=x^3+1/x^3$

28. Determina du/dx si $u=x^2-7x+5/x$

29. Calcula dy/du si $y= u^3-5u^2+\frac{7}{3u^2}+6$

30. Determina dx/dt si $x=(3t^3-5t^2+7t-1)/t^2$

Determina la ecuación de la línea tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados.

31. $f(x)=x^2-3x+4$ en (1,2)

32. $f(x)=x^2+1/x^2$ en (-1,2)

33. $f(x)=2/x$ en $x=-2$

34. $f(x)=x^3-1/x^3$ en $x=1$

35. (Móvil)
La distancia recorrida por un móvil al tiempo t es igual a $2t^3-t^{1/2}$. Calcule la velocidad instantánea:
a. Al tiempo t b. En el instante t = 4

36. (Proyectiles)
Una partícula se lanza directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 60 pies/segundo. Después de t segundos, su altura sobre el nivel del suelo está dada por $s = 60t-16t^2$. Calcula su velocidad instantánea después de t segundos. ¿Qué tiene de especial el instante t = 15/8?

37. (Crecimiento del PNB)
En el ejercicio 18 de la sección 3.1, calcula las tasas de crecimiento instantáneas del PNB en:
a. 1970 b. 1980 c. 1990

(La respuesta debe darse en miles de millones de dólares por año)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

3.4 Otras Aplicaciones

La derivada tiene varias aplicaciones en la administración y la economía en la construcción de lo que denominamos tasas marginales. Empezaremos considerando el ejemplo del costo marginal.

Costo marginal

Suponga que el fabricante de cierto artículo descubre que a fin de producir x de estos artículos a la semana, el costo total en dólares está dado por $C=200+0.03x^2$. Por ejemplo, si se producen 100 artículos a la semana, el costo está dado por $C=200+0.03(100)^2=500$. El costo promedio por artículo al producir 100 artículos es 500/100 = \$5.

Si el fabricante considera cambiar la tasa de producción de 100 a $(100+\Delta x)$ unidades por semana, en donde Δx representa el incremento en la producción semanal. El costo es

$$\begin{aligned} C+\Delta C &= 200+0.03(100+\Delta x)^2 \\ &= 200+0.03[10{,}000+200\Delta x+(\Delta x)^2] \\ &= 500+6\Delta x+0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el costo extra determinado por la producción de los artículos adicionales es

$$\begin{aligned} \Delta C &= (C+\Delta C)-C=500+6\Delta x+0.03(\Delta x)^2-500 \\ &= 6\Delta x+0.03(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, el costo promedio por artículo de las unidades extras es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x}=6+0.03\Delta x$$

Por ejemplo, si la producción crece de 100 a 150 artículos por semana (de modo que $\Delta x=50$, se sigue que el costo promedio de los 50 artículos adicionales es igual a $6+0.03(50)=\$7.50$ por cada uno. Si el incremento es de 100 a 110 (de modo que $\Delta x=10$), el costo promedio extra de los 10 artículos es igual a \$6.30 por cada uno.

Definimos el costo marginal como el valor límite del costo promedio por artículo extra cuando este número de artículos extra tiende a cero. Así, podemos pensar al costo marginal como el costo promedio por artículo extra cuando se efectúa un cambio muy pequeño en la cantidad producida. En el ejemplo anterior,

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(6+0.03\Delta x) = 6$$

En el caso de una función de costo general $C(x)$ que represente el costo de producir una cantidad x de cierto artículo, el costo marginal se define en forma similar por

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}$$

Es claro que el costo marginal no es otra cosa que la derivada de la función de costo con respecto a la cantidad producida.

$$\text{Costo marginal} = \frac{dC}{dx}$$

El costo marginal mide la tasa con que el costo se incrementa con respecto al incremento de la cantidad producida.

Ejemplo 1
(Costo marginal)
El caso de la función de costo
$C(x)=0.001x^3-0.3x^2+40x+1000$
determina el costo marginal como una función de x. Evalúa el costo marginal cuando la producción está dada por $x=50$, $x=100$ y $x=150$

Solución
Deseamos evaluar $C'(x)$. La función dada $C(x)$ es una combinación de potencias de x y así puede derivarse por medio de la fórmula para las potencias que se presentó en la última sección. Obtenemos

$$\begin{aligned} C'(x) &= \frac{d}{dx}(0.001x^3-0.3x^2+40x+1000) \\ &= 0.001(3x^2)-0.3(2x)+40(1)+0 \\ &= 0.003x^2-0.6x+40 \end{aligned}$$

Esta función, el costo marginal, da el costo promedio por artículo de crecimiento de la producción por una pequeña cantidad dado que ya se han producido x artículos. Cuando se han producido 50 unidades, el costo marginal de los artículos extra está dado por

$$\begin{aligned} C'(50) &= (0.003)(50)^2-(0.6)(50)+40 \\ &= 7.5-30+40=17.5 \end{aligned}$$

Si $x=100$, el costo marginal es

$$\begin{aligned} C'(100) &= (0.003)(100)^2-(0.6)(100)+40 \\ &= 30-60+40=10 \end{aligned}$$

Cuando $x=150$, el costo marginal está dado por

$$\begin{aligned} C'(150) &= (0.003)(150)^2-(0.6)(150)+40 \\ &= 67.5-90+40=17.5 \end{aligned}$$

Informalmente podemos decir que el costo de producir el 51° artículo es de \$17.50, el 101° artículo tiene un costo de \$10 y el 151° artículo cuesta \$17.50.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

(Afirmaciones como esta no son lo bastante precisas, dado que la deriva es la razón de un incremento infinitesimalmente pequeño en la producción, no de un incremento unitario).

En el ejemplo 1, observamos que el costo marginal decrece a medida que la producción se incrementa de 50 a 100 unidades y luego se incrementa de nuevo cuando la producción aumenta de 100 a 150. En la figura 5 aparece la gráfica de $C'(x)$ como una función de x.

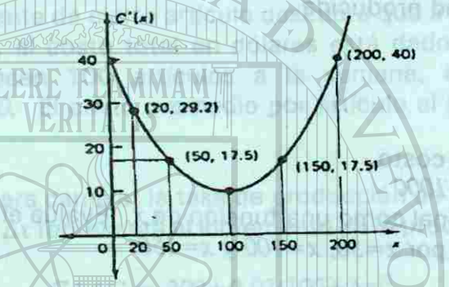


Fig. 5

Este tipo de comportamiento es bastante frecuente en el costo marginal. Cuando la producción x aumenta a partir de valores pequeños, el costo marginal decrece (esto es, el costo promedio del pequeño incremento siguiente en la producción baja). La razón de esto estriba en las escalas de la economía, que provocan que la fabricación de pequeñas cantidades de bienes es relativamente más cara que la producción de grandes cantidades. Sin embargo, cuando x se hace muy grande, los costos empiezan a aumentar a medida que la capacidad de las unidades de producción existentes llegan a gastarse y empieza a ser necesario invertir en una nueva planta o maquinaria o pagar horas extras a los trabajadores, etc. Esto causa un eventual aumento en el costo marginal. Así que, por lo regular, el costo marginal primero decrece al aumentar la producción y luego se incrementa de nuevo.

Es importante no confundir el costo marginal con el costo promedio. Si $C(x)$ es la función de costo, el costo promedio de x artículos es el costo total, $C(x)$, dividido entre el número de artículos producidos.

$$\text{Costo promedio por artículo} = \frac{C(x)}{x}$$

Esto es muy diferente del costo marginal, que está dado por la derivada $C'(x)$. El costo marginal representa el costo promedio por unidad adicional de un pequeño incremento en la producción. El costo promedio por lo regular se denota por $\bar{C}(x)$

Ejemplo 2
En el caso de la función de costo $C(x)=1000+10x+0.1x^2$, el costo marginal es $C'(x)=10+0.2x$. El costo promedio de producir x artículos es

$$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{1000}{x}+10+0.1x$$

Estas dos funciones son bastante distintas.

Ingreso y utilidad marginales

Ahora consideramos los ingresos derivados de la venta de los productos o servicios de una empresa. Si $R(x)$ denota el ingreso en dólares por la venta de x artículos, definimos el ingreso marginal como la derivada $R'(x)$.

$$\text{Ingreso marginal} = R'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta x}$$

Si el número de artículos vendidos se incrementa de x a $x+\Delta x$, entonces existe un incremento correspondiente en el ingreso dado por

$$\Delta R = \text{Nuevo ingreso} - \text{Ingreso original} = R(x+\Delta x) - R(x)$$

El incremento promedio en el ingreso por artículo adicional vendido se obtiene dividiendo ΔR entre el número de artículos adicionales, lo que da $\Delta R/\Delta x$. El valor límite de este promedio cuando $\Delta x \to 0$ da el ingreso marginal. Así pues, el ingreso marginal representa las entradas adicionales de una empresa por artículo adicional vendido cuando ocurre un incremento muy pequeño en el número de artículos vendidos. Esto es, la tasa con la que crece el ingreso con respecto al incremento del volumen de ventas.

Ejemplo 3
(Ingreso marginal)
Si la función de ingreso está dada por

$$R(x)=10x-0.01x^2$$

en donde x es el número de artículos vendidos, determina el ingreso marginal. Evalúa el ingreso marginal cuando $x=200$.

Solución
Necesitamos evaluar $R'(x)$. Dado que $R(x)$ es una combinación de potencias de x, podemos usar la fórmula para las potencias, obteniendo el resultado

$$R'(x) = \frac{d}{dx}(10x-0.01x^2)$$
$$=10(1)-(0.01)(2x)=10-0.02x$$

Esto nos da el ingreso marginal cuando se vende un número arbitrario x de artículos.
Si $x=200$, obtenemos un ingreso marginal de
$R'(200) = 10-(0.02)(200) = 10-4 = 6$

Así que, cuando se venden 200 artículos, cualquier incremento pequeño en las ventas provoca un aumento en los ingresos de $6 por artículo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

La función de ingreso puede escribirse en la forma

$$R(x)=xp$$

en donde p es el precio por artículo y x es el número de artículos vendidos. Vimos en el capítulo 1 que en muchos casos existe una relación entre x y p caracterizada por la ecuación de demanda. Mientras más artículos pueda vender la empresa, más bajo puede fijar el precio, entre más alto se fije el precio, en general, menor será el volumen de las ventas.

Ejemplo 4
(Ingreso marginal)
Determina el ingreso marginal cuando $x=300$ si la ecuación de demanda es

$$x=1000-100p$$

Solución
En primer término debemos escribir la ecuación de demanda en tal forma que expresamos a p como una función de x.

$$100p=1000-x$$
$$p=10-0.01x$$

Así, la función de ingreso está dada por

$$R(x)=xp=x(10-0.01x)$$
$$=10x-0.01x^2$$

Observemos que esta función de ingreso es la misma que la del ejemplo anterior, de modo que podemos usar el resultado del ingreso marginal:

$$R'(x)=10-0.02x$$

Cuando el volumen de ventas es de 300, el ingreso marginal esta dado por

$$R'(300)=10-(0.02)(300)=10-6=4$$

La utilidad que una empresa obtiene está dada por la diferencia entre sus ingresos y sus costos. Si la función de ingreso es $R(x)$ cuando se venden x artículos y si la función de costo es $C(x)$ al producirse esos mismos x artículos, entonces la utilidad $P(x)$ obtenida por producir y vender x artículos está dada por

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

La derivada de $P'(x)$ se denomina la utilidad marginal. Representa la utilidad adicional por artículo si la producción surge un pequeño incremento.

Ejemplo 5
(Utilidad marginal)
La ecuación de demanda de cierto artículo es

$$p+0.1x=80$$

y la función de costo es

$$C(x)=5000+20x$$

Calcula la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso de que se produzcan y vendan 400 unidades.

Solución
La función de ingreso está dada por

$$R(x)=xp=x(80-0.1x)$$
$$=80x-0.1x^2$$

Por consiguiente, la utilidad generada por la producción y venta de x artículos está dada por

$$P(x) = R(x)-C(x)$$
$$= (80x-0.1x^2)-(5000+20x)$$
$$= 60x-0.1x^2-5000$$

La utilidad marginal es la derivada $P'(x)$. Dado que $P(x)$ es una combinación de potencias, usamos la fórmula de las potencias a fin de calcular su derivada.

$$P'(x)=\frac{d}{dx}(60x-0.1x^2-5000)$$
$$=60-0.2x$$

Si $x=150$, obtenemos $P'(x)=60-(0.2)(150)=30$. Así pues, cuando se producen 150 artículos, la utilidad marginal, esto es, la utilidad extra por artículo adicional cuando la producción se incrementa en una pequeña cantidad es $30.

Cuando $x=400$, la utilidad marginal es $P'(400)=60-(0.2)(400)=-20$.

En consecuencia, si se producen 400 unidades, un pequeño incremento en la producción da como resultado una pérdida (esto es, una utilidad negativa) de $20 por unidad adicional.

Ejercicio 3.4
(Costo marginal)
Calcula el costo marginal de las funciones de costo siguientes

1. $C(x)=100+2x$
2. $C(x)=0.0001x^3-0.09x^2+20x+1200$

(Ingreso marginal) Calcula el ingreso marginal de las funciones de ingreso siguientes

3. $R(x)=x-0.01x^2$
4. $R(x)=5x-0.01x^{5/2}$
5. (Ingreso marginal)
   Si la ecuación de demanda es $x+4p=100$, calcula el ingreso marginal, $R'(x)$
6. (Ingreso marginal)
   Si la ecuación de demanda es $x^{3/2}+50p=1000$, calcula el ingreso marginal cuando p = 16
7. (Utilidad marginal)
   Si en el ejercicio 5, la función de costo es $C(x)=100+5x$, calcula la utilidad marginal.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

8. (Utilidad marginal)
Si en el ejercicio 6, la función de costo es $C(x)=50+x^{3/2}$, evalúa la utilidad marginal cuando:
a. $p=16$ b. $x=25$

9. (Utilidad máxima)
En el ejercicio 7, encuentra el valor de x tal que $P'(x)=0$ y calcula la utilidad correspondiente. Esta representa la utilidad máxima que pueda obtenerse por la venta del artículo en cuestión. Determina el precio p que da esta utilidad máxima.

10. (Ingreso marginal)
Cuando una peluquera fija una cuota de $4 por corte de cabello, advierte que el número de clientes que atiende en una semana es de 100, en promedio. Al elevar la tarifa a $5, el número de clientes por semana baja a 80. Suponiendo una ecuación de demanda lineal entre el precio y el número de clientes, determina la función del ingreso marginal. Encuentra entonces el precio que produce un ingreso marginal igual a cero.

3.5 Derivadas de Productos y Cocientes y la Regla de la Cadena

En esta sección, probaremos y explicaremos el uso de dos importantes teoremas que representan técnicas útiles cuando se requiere derivar funciones complicadas.

Teorema 1. (La regla del producto)
Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones de x diferenciales, se sigue que

$$\frac{d}{dx}(u\cdot v)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

Esto es, $uv'+vu'$.

En términos verbales, la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo 1
Calcula y' si $y=(5x^2-3x)(2x^3+8x+7)$

Solución
La función dada y puede escribirse como un producto $y=uv$ si hacemos

$$u=5x^2-3x \quad \text{y} \quad v=2x^3+8x+7$$

Así pues, por los métodos de la sección 12-4, advertimos que

$$u'=10x-3 \quad \text{y} \quad v'=6x^2+8$$

Por consiguiente, por la regla del producto,

$$\begin{aligned} y' &= uv'+vu' \\ &= (5x^2-3x)(6x^2+8)+(2x^3+8x+7)(10x-3) \\ &= 50x^4-24x^3+120x^2+22x-21 \end{aligned}$$

En el ejemplo 1, en realidad no necesitábamos la regla del producto a fin de calcular la derivada de la función. Pudimos calcular y' eliminando los paréntesis del lado derecho y expresando a y como una suma de potencias de x.

$$\begin{aligned} y &= (5x^2-3x)(2x^3+8x+7) \\ &= 10x^5-6x^4+40x^3+11x^2-21x \\ y' &= 10(5x^4)-6(4x^3)+40(3x^2)+11(2x)-21(1) \\ &= 50x^4-24x^3+120x^2+22x-21 \end{aligned}$$

Los ejemplos que se dan a continuación también ilustran la utilización de la regla del producto aun cuando podrían resolverse empleando los métodos anteriores. Sin embargo, más tarde nos toparemos con funciones para las que ese método alternativo no existe. En estos casos, será esencial utilizar la regla del producto a fin de calcular las derivadas.

Ejemplo 2
Dada $f(t)=(2\sqrt{t}+1)(t^2+3)$, determine $f'(t)$.

Solución
Usamos la regla del producto con $u=2\sqrt{t}+1=2t^{1/2}+1$ y $v=t^2+3$

$$\begin{aligned} &(2t^{1/2}+1)\frac{d}{dt}(t^2+3)+(t^2+3)\frac{d}{dt}(2t^{1/2}+1) \\ &= (2t^{1/2}+1)(2t)+(t^2+3)(2\cdot\tfrac{1}{2}t^{-1/2}) \\ &= 4t^{3/2}+2t+t^{3/2}+3t^{-1/2} \\ &= 5t^{3/2}+2t+3/\sqrt{t} \end{aligned}$$

Teorema 2 (regla del cociente)

Si $u(x)$ y $v(x)$ son dos funciones diferentes de x, se sigue que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

o bien

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

Esto es, la derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo 3
Calcule y' si

$$y=\frac{x^2+1}{x^3+4}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución
Usamos la regla del cociente (con $u=x^2+1$ y $v=x^3+4$)

$$y'=\frac{(x^3+4)\frac{d}{dx}(x^2+1)-(x^2+1)\frac{d}{dx}(x^3+4)}{(x^3+4)^2}$$

$$=\frac{(x^3+4)(2x)-(x^2+1)(3x^2)}{(x^3+4)^2}$$

$$=\frac{2x^4+8x-(3x^4+3x^2)}{(x^3+4)^2}$$

$$=\frac{-x^4-3x^2+8x}{(x^3+4)^2}$$

Demostraciones de los teoremas

Demostración del teorema 1

Sea $y=u\cdot v$. Entonces

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)$$
$$=uv+u\cdot\Delta v+v\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v$$
$$=y+u\,\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v$$

Restamos y de ambos lados

$$\Delta y=u\Delta v+v\,\Delta u+\Delta u\,\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Tomando límites cuando $\Delta x\to 0$, tenemos que

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

En el último termino de la derecha, $\Delta u\to 0$ cuando $\Delta x\to 0$, de modo que obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$$

como se requería.

Demostración del teorema 2

Sea $y=u/v$. Cuando x se incrementa a $x+\Delta x$, y se incrementa a $y+\Delta y$, u a $u+\Delta u$, y v a $v+\Delta v$, por lo que

$$y+\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$$

Restamos $y=u/v$ a ambos lados

$$\Delta y=\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}$$

$$=\frac{v(u+\Delta u)-u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)}$$

$$=\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)}$$

Dividiendo entre Δx, obtenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}$$

Si ahora tomamos los límites cuando $\Delta x\to 0$, de modo que $\Delta y/\Delta x\to dy/dx$, $\Delta u/\Delta x\to du/dx$ y $\Delta v/\Delta x\to dv/dx$, tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v(v+0)}=\frac{vu'-uv'}{v^2}$$

dado que el otro incremento Δv en el denominador tiende a cero. Así que, con esto probamos el teorema.

La regla de la cadena

Sea $y=f(u)$ una función de u y $u=g(x)$ una función de x. Entonces podemos escribir

$$y=f[g(x)]$$

que representa a y como una función de x, denominada la función composición de f y g. Se denota por $(f\circ g)(x)$. (Véase la sección 1.5)

Las derivadas de funciones compuestas pueden calcularse mediante el teorema siguiente. Se dará una demostración al final de esta sección.

Teorema 3. (Regla de la cadena)

Si y es una función de u y u es una función de x, entonces

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

La regla de la cadena representa la que es probablemente la más útil de todas las herramientas de diferenciación, como pronto se hará evidente. Es un recurso que se utiliza con frecuencia al manejar el calculo diferencial y el lector deberá dominar su aplicación tan pronto como sea posible. Cuando la usamos al derivar una función complicada, es necesario reconocer que la función dada que puede escribir como la composición de dos funciones más simples. Los ejemplos siguientes ilustran lo anterior.

Ejemplo 4
Calcule dy/dx cuando $y=(x^2+1)^5$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución
Podríamos resolver este problema desarrollando $(x^2+1)^5$ como un polinomio en x. Sin embargo, es mucho más sencillo utilizar la regla de la cadena.

Observe que y puede expresarse como la composición de dos funciones en la forma siguiente.

$$y=u^5 \quad \text{donde} \quad u=x^2+1$$

Se sigue que

$$\frac{dy}{du}=5u^4 \quad y \quad \frac{du}{dx}=2x$$

Por la regla de la cadena, tenemos que

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=5u^4\cdot 2x$$
$$=5(x^2+1)^4\cdot 2x=10x(x^2+1)^4$$

Si $y=f(u)$, otra manera de escribir la regla de la cadena es

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\frac{du}{dx}$$

(dado que $f'(u)=dy/du$). En particular, si $f(u)=u^n$, $f'(u)=nu^{n-1}$. Así tenemos el caso siguiente de la regla de la cadena

> Si $y=[u(x)]^n$, entonces $\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

La composición puede pensarse como el tener diferentes capas que deben desprenderse una por una. La capa exterior de la función corresponde a la parte que debe calcularse al último al evaluarla. Por ejemplo, si $y=(x^2+1)^5$, la parte exterior de la función es la quinta potencia y la parte interior es (x^2+1). Al evaluar y para 1, y luego elevar a la quinta potencia. Por ejemplo, si $x=2$, entonces la interior $=x^2+1=2^2+1=5$ y $y=(\text{interior})^2=5^5=3125$

Al derivar una función compuesta, debemos derivar primero la capa exterior de la función, y después multiplicar por la derivada de la parte interior. En estos términos verbales podemos reformular la regla de la cadena en la forma siguiente

> Si $y=f(\text{interior})$, $\frac{dy}{dx}=f'(\text{interior})\cdot(\text{derivada del interior con respecto a } x)$
>
> Si $y=(\text{interior})^n$, $\frac{dy}{dx}=n(\text{interior})^{n-1}\cdot(\text{derivada del interior con respecto a } x)$

Aquí interior significa cualquier función diferenciable de x.

Por ejemplo, volviendo a $y=(x^2+1)^5$, pudimos tomar el interior como x^2+1 y f(interior) = (interior)^5. Se sigue de inmediato que,

$$\frac{dy}{dx}=$$
$$=5(x^2+1)^4\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)$$
$$=5(x^2+1)^4\cdot 2x=10x(x^2+1)^4$$

lo que da la misma respuesta que antes

Ejemplo 5
Dada $f(t)=1/\sqrt{t^2+3}$, calcula $f'(t)$

Solución
Sea $u=t^2+3$, de modo que $y=f(t)=1/\sqrt{u}=u^{-1/2}$. Se sigue que

$$\frac{du}{dt}=2t \quad y \quad \frac{dy}{du}=-\tfrac{1}{2}u^{-3/2}=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-3/2}$$

Así que, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dt}$$
$$=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-3/2}\cdot 2t=-t(t^2+3)^{-3/2}$$

En forma alternativa, podemos resolver directamente,

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+3}}=(t^2+3)^{-1/2}$$

Aquí el interior es (t^2+3) y el exterior es la potencia $-\frac{1}{2}$. Usando la fórmula de la potencia a fin de derivar la parte exterior, tenemos

$$f'(t)=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-1/2-1}\cdot\frac{d}{dt}(t^2+3)$$
$$=-\tfrac{1}{2}(t^2+3)^{-3/2}\cdot 2t=t(t^2+3)^{-3/2}$$

Ejemplo 6
Dada $y=(x^2+5x+1)(2-x^2)^4$, calcula dy/dx

Solución
Utilizando la regla del producto de derivadas, obtenemos

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+5x+1)\frac{d}{dx}(2-x^2)^4+(2-x^2)^4\frac{d}{dx}(x^2+5x+1)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Con objeto de evaluar $(d/dx)(2-x^2)^4$, podemos usar la regla de la cadena con interior $= (2-x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+5x+1)[4(2-x^2)^3 \frac{d}{dx}(2-x^2)] + (2-x^2)^4(2x+5)$$

$$= (x^2+5x+1)[4(2-x^2)^3 \cdot (-2x)] + (2-x^2)^4(2x+5)$$
$$= -8x(2-x^2)^3(x^2+5x+1) + (2x+5)(2-x^2)^4$$

La factorización produce ahora

$$\frac{dy}{dx} = (2-x^2)^3[-8x(x^2+5x+1) + (2x+5)(2-x^2)]$$
$$= (2-x^2)^3[10-4x-45x^2-10x^3]$$

Demostración del teorema 3

La demostración de la regla de la cadena, cuando se presenta en forma detallada, es un poco más complicada que la dada aquí. Por tanto incluimos una demostración que, si bien cubre la mayoría de los casos que consideraremos, tiene algunas restricciones en su rango de aplicabilidad.

Sea Δx un incremento en x. Puesto que u y y son funciones de x, variarán siempre que x lo haga, de modo que denotaremos sus incrementos por Δu y Δy. Por tanto, a condición de que $\Delta u \neq 0$, tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Hacemos ahora que $\Delta x \to 0$. En este límite, también tenemos que $\Delta u \to 0$ y que $\Delta y \to 0$, y así

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$
$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

como se requería.

La razón de que esta demostración esté incompleta estriba en la suposición de que $\Delta u \neq 0$. Para la mayoría de las funciones $u(x)$, nunca se dará el caso de que Δu se haga cero si Δx es muy pequeño (pero $\Delta x \neq 0$). Sin embargo, es posible que una función $u(x)$ pueda tener la peculiaridad de que Δu se haga cero repetidas veces a medida que $\Delta x \to 0$. Cuando se presentan tales funciones, la demostración dada deja de ser válida. Es posible modificar la demostración a fin de cubrir casos como éste, pero no lo haremos aquí.

Ejercicio 3.5

Usando la regla del producto, calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable respectiva.

1. $y=(x+1)(x^3+3)$
2. $y=(x^3+6x^2)(x^2-1)$
3. $u=(7x+1)(2-3x)$
4. $u=(x^2+7x)(x^2+3x+1)$
5. $f(x)=(x^2-5x+1)(2x+3)$
6. $g(x)=(x^2+1)(x+1)^2$
7. $f(x)=(3x+7)(x-1)^2$
8. $y=(t^2+1)(t-1/t)$
9. $u=(y+3/y)(y^2-5)$
10. $g(x)=(x^2+1)(3x-1)(2x-3)$

(Ingreso marginal) Usando la regla del producto, calcula el ingreso marginal de las relaciones de demanda siguientes

11. $x=1000-2p$
12. $p=40-\frac{1}{2}\sqrt{x}$
13. $x=4000-10\sqrt{p}$
14. $p=15-0.1x^{0.6}-0.3x^{0.3}$

Usa la regla del cociente con objeto de calcular las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva.

15. $y = \frac{3}{2x+7}$
16. $f(t) = \frac{5t}{2-3t}$
17. $y = \frac{u}{u+1}$
18. $f(x) \quad \frac{x+2}{x-1}$
19. $f(x) = \frac{x+1}{x+3}$
20. $g(x) = \frac{3-x}{x^2-3}$

Calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva.

21. $y=(3x+5)^7$
22. $y = \sqrt{5-2t}$
23. $u=(2x^2+1)^{3/2}$
24. $x=(y^3+7)^6$
25. $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^4}$
26. $h(t) = \sqrt{t^2+a^2}$
27. $F(x) = \sqrt[3]{x^3+3x}$
28. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{t^3+1}}$
29. $y = (t^2+1/t^2)^5$
30. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2+9}}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

31. $y=(x^2+1)^{0.6}$

32. $G(u)=(u^2+1)^3(2u+1)$

33. $H(y)=(2y^2+3)^6(5y+2)$

34. $f(x)=(x+1)^3(2x+1)^4$

35. $g(t)=(3x-1)^5(2x+3)^4$

36. $f(x)=x^3(x^2+1)^7$

37. $u=x^2\sqrt{x^3+a^3}$

38. $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

39. $y=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$

40. $x=\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+4}}$

41. (Móvil)
La distancia recorrida por un automóvil al tiempo t está dada por $y=(3t+1)\sqrt{t+}$
Calcula su velocidad instantánea en el instante t.

42. (Crecimiento y variación de la población)
El tamaño de cierta población al tiempo t es

$$P(t)=\left(\frac{t^2+3t+1}{t+1}\right)^6$$

Determina la tasa de cambio del tamaño de la población.

(Costos marginales) Encuentra los costos marginales de las funciones de costo siguientes:

43. $C(x)=\sqrt{100+x^2}$

44. $C(x)=20+2x-\sqrt{x^2+1}$

3.6 Derivadas de Orden Superior

La operación derivada toma una función f y produce una nueva función f'. Si ahora se deriva f' se producirá otra función que se designa como f'' (se lee "f biprima") y que se llama segunda derivada de f. Esta, a su vez, puede ser derivada para producir f''', que se llama tercera derivada de f, etc. Por ejemplo, sea

$$f(x)=2x^3-4x^2+7x-8$$

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-8x+7 \\ f''(x) &= 12x-8 \\ f'''(x) &= 12 \\ f''''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Dado que la derivada de la función cero es cero, todas las derivadas de mayor orden serán cero.

Hemos presentado dos notaciones de la derivada (que ahora se llamará también primera derivada) de $y=f(x)$. Esta son:

$$f'(x) \qquad \frac{dy}{dx}$$

llamadas respectivamente, la notación prima y la notación de Leibniz. Existe una variación de la notación prima, nombrada y', que también usaremos en ocasiones. Todas estas notaciones se extienden a las derivadas de orden superior, como se muestra en el diagrama siguiente. Observa que aunque la notación de Leibniz es complicada, resulta ser la más apropiada y natural, al menos así lo pensaba él al escribir

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad como \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Derivada	f' notación	y' notación	D notación	Notación de Leibniz
Primera	$f'(x)$	y'	D_xy	$\frac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	D_x^2y	$\frac{d^2y}{dx^2}$
Tercera	$f'''(x)$	y'''	D_x^3y	$\frac{d^3y}{dx^3}$
Cuarta	$f''''(x)$	y''''	D_x^4y	$\frac{d^4y}{dx^4}$
Quinta	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	D_x^5y	$\frac{d^5y}{dx^5}$
Sexta	$f^{(6)}(x)$	$y^{(6)}$	D_x^6y	$\frac{d^6y}{dx^6}$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
nésima	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	D_x^ny	$\frac{d^ny}{dx^n}$

Ejemplo 1

Si $y=2x^5-3x^4+4x^3-5x^2-x+9$, encuentra $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ y $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = 10x^4-12x^3+12x^2-10x-1$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 40x^3-36x^2+24x-10$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120x^2-72x+24$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 240x-72$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Velocidad y aceleración

En la sección 3.2 usamos el concepto de velocidad instantánea para motivar la definición de derivada. Revisemos esta noción mediante un ejemplo. También, desde ahora, usaremos sólo la palabra velocidad en lugar de la frase más usual de velocidad instantánea.

Ejemplo 2
Un objeto se mueve a lo largo del eje coordenado de modo que su posición s satisface $s = 2t^2 - 12t + 8$, donde s se mide en centímetros y t en segundos con $t \geq 0$. Determine la velocidad del objeto cuando $t = 1$ y cuando $t = 6$. ¿Cuándo es 0 la velocidad? ¿Cuándo es positiva?

Solución
Si usamos el símbolo v(t) como velocidad en el instante t, entonces

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

Por lo tanto,

$$v(1) = 4(1) - 12 = -8 \text{ centímetros por segundo}$$
$$v(6) = 4(6) - 12 = 12 \text{ centímetros por segundo}$$

La velocidad es cero cuando $4t - 12 = 0$, es decir, cuando $t = 3$. La velocidad es positiva cuando $4t - 12 > 0$, o sea cuando $t > 3$. Todo esto se muestra esquemáticamente en la figura 6.

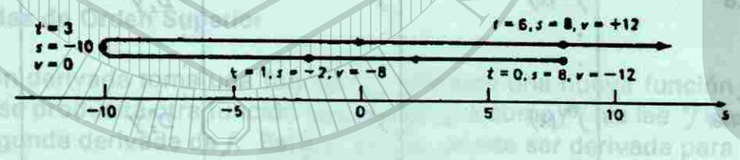


Fig. 6

Por supuesto, el objeto, se mueve a lo largo del eje de las s, no en la trayectoria dibujada arriba de éste. La trayectoria dibujada muestra lo que ocurre al objeto. Entre $t = 0$ y $t = 3$, la velocidad es negativa. El objeto se mueve hacia la izquierda (de regreso). En el momento $t = 3$, se ha "frenado" a la velocidad cero, y entonces emprende la marcha hacia la derecha, con lo que la velocidad se vuelve positiva. Luego, la velocidad negativa corresponde al movimiento en dirección de s; la velocidad positiva corresponde a la dirección creciente de s.

Hay una distinción técnica entre las palabras velocidad y rapidez. La velocidad tiene un signo asociado a ella; puede ser positivo o negativo. La rapidez se define como el valor absoluto de la velocidad. Entonces, en el ejemplo anterior, la rapidez en $t = 1$ es $|-8| = 8$ centímetros por segundo. El medidor de la mayoría de los automóviles es un "rapidómetro" (celerómetro) y siempre da valores no negativos.

Ahora queremos dar una interpretación física a la segunda derivada d^2s/dt^2. Por supuesto que no es más que la primera derivada de la velocidad. Por tanto, mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, y se llama aceleración. Si la designamos con a, entonces

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En el ejemplo 2, $s = 2t^2 - 12t + 8$. Por lo tanto

$$v = \frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = 4$$

Esto significa que la velocidad aumenta a razón constante de 4 centímetros por segundo cada segundo, y escribimos 4 centímetros por segundo por segundo.

1
Problemas de caída de los cuerpos.

Si un cuerpo es arrojado verticalmente hacia arriba (o hacia abajo) desde una altura inicial de s_o pies con una velocidad inicial de v_o pies por segundo, y si s es la altura sobre el piso (en pies) después de t segundos, entonces

$$s = -16t^2 + v_o t + s_o$$

Esto presupone que el experimento tiene lugar cerca del nivel del mar y que se puede despreciar la resistencia del aire. El diagrama de la figura 7 representa la situación que tenemos en mente.

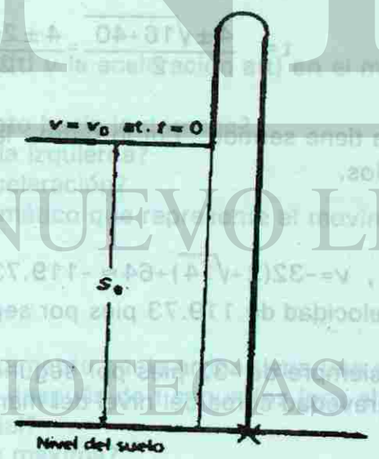


Fig. 7

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 3

Supongamos que se arroja una pelota hacia arriba desde lo alto de un edificio de 160 pies de altura con una velocidad inicial de 64 pies por segundo.

a) ¿Cuándo alcanza la altura máxima?
b) ¿Cuál es la altura máxima?
c) ¿Cuándo llega al piso?
d) ¿Con qué velocidad llega al piso?
e) ¿Cuál es su aceleración al momento t = 2?

Solución

Sea t = 0 que corresponde al instante cuando la pelota es arrojada. Entonces $s_0 = 160$ y $v_0 = 64$, por lo que

$$s = -16t^2 + 64t + 160$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -32t + 64$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -32$$

a) La bola alcanza su altura máxima en el momento en que su velocidad es 0; esto es, cuando $-32t + 64 = 0$, o sea $t = 2$ segundos.

b) Cuando $t = 2$, $s = -16(2)^2 + 64(2) + 160 = 224$ pies

c) La pelota golpea el piso cuando $s = 0$; es decir, cuando

$$-16t^2 + 64t + 160 = 0$$

Si dividimos entre -16 y usamos la fórmula cuadrática, obtenemos

$$t^2 - 4t - 10 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16+40}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{2} = 2 \pm \sqrt{14}$$

Sólo la respuesta positiva tiene sentido. Por lo tanto, la pelota llega al suelo a los $t = 2 + \sqrt{14} \approx 5.74$ segundos.

d) Cuando $t = 2 + \sqrt{14}$, $v = -32(2 + \sqrt{14}) + 64 \approx -119.73$. Entonces, la pelota llega al suelo con una velocidad de 119.73 pies por segundo.

e) La aceleración es siempre de -32 pies por segundo por segundo. Esta es la aceleración de la gravedad cerca del nivel del mar.

Ejercicio 3.6

En los problemas 1 a 4 encuentre d^2y/dx^2

1. $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 8$
2. $y = 2x^5 - x^4$
3. $y = (2x + 5)^3$
4. $y = (3x - 2)^2$

En los problemas 5 a 8 encuentra $f''(2)$

5. $f(x) = 2x^3 - 7$
6. $f(x) = 5x^3 + 1$
7. $f(t) = \frac{1}{t}$
8. $f(x) = x(x^2 + 1)$

9. Sin hacer ningún cálculo, encuentra cada derivada

a. $D_x^4(2x^3 + 3x - 19)$

b. $D_x^5(x^4 - 7x^2 + 12)$

c. $D_x^5(x^2 - 4)^2$

En los problemas 10 y 11, un objeto se mueve a lo largo del eje horizontal coordenado de acuerdo con la fórmula $s = f(t)$, donde la distancia s se mide a partir del origen y está dada en pies y t en segundos. En cada caso, contesta las siguientes preguntas (vea los ejemplos 2 y 3)

a) ¿Cuáles son la velocidad v(t) y la aceleración a(t) en el momento t?

b) ¿Cuándo se mueve el objeto hacia la derecha?
c) ¿Cuándo se mueve hacia la izquierda?
d) ¿Cuándo es negativa la aceleración?
e) Dibuja un diagrama esquemático que represente el movimiento del objeto.

10. $s = 12t - 2t^2$
11. $s = t^3 - 6t^2$

12. Un objeto arrojado directamente hacia arriba tiene una altura $s = -16t^2 + 48t + 256$ pies después de t segundos (vea el ejemplo 3)
a) ¿Cuál es su velocidad inicial?
b) ¿Cuándo alcanza su altura máxima?
c) ¿Cuál es su altura máxima?
d) ¿Cuándo alcanza el piso?
e) ¿Con qué velocidad llega al piso?

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

CAPÍTULO 4
APLICACIONES DE LA DERIVADA

INTRODUCCIÓN

Muchas de las aplicaciones importantes de las derivadas requieren determinar los valores máximos y mínimos de una función particular. Por ejemplo, la utilidad que un fabricante obtiene depende del precio fijado al producto, y al fabricante le interesa conocer el precio que produce una utilidad máxima. Este precio "óptimo" (o mejor precio) se obtiene mediante un proceso denominado "maximización" u "optimización" de la función de utilidad. En forma similar a una compañía de bienes raíces le puede interesar la renta que debe fijar a las oficinas o departamentos que controla a fin de generar el máximo ingreso por rentas; o una compañía ferroviaria puede requerir conocer la velocidad promedio que sus trenes deberán desarrollar con objeto de minimizar el costo por kilómetro de operación; o un economista puede necesitar conocer el nivel de impuestos en un país que promoverá la tasa de crecimiento máxima de la economía. Antes de abordar este tipo de aplicaciones debemos de estudiar la teoría de máximos y mínimos.

4.1 Derivadas y Gráficas de Funciones

En esta sección, consideraremos el significado de la primera y segunda derivadas de una función en relación con su gráfica. Empezaremos con la primera derivada.

Definición

Una función $y=f(x)$ se dice que es una función creciente sobre un intervalo de valores de x si y crece al incrementarse la x. Esto es, si x_1 y x_2 son dos valores cualesquiera en el intervalo dado con $x_2 > x_1$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$.

Una función $y=f(x)$ se dice que es una función decreciente sobre un intervalo de su dominio si y decrece al incrementarse la x. Es decir, si $x_2 > x_1$ son dos valores de x en el intervalo dado, entones $f(x_2) < f(x_1)$.

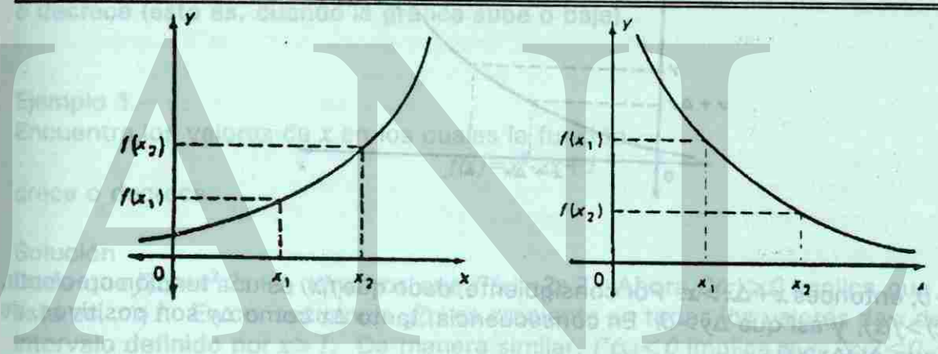


Fig. 1

Las partes (a) y (b) de la figura 1 ilustran una función creciente y otra decreciente, respectivamente. La gráfica sube o baja, respectivamente, al movernos de izquierda a derecha.

Teorema 1

a) Si $f(x)$ es una función creciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \geq 0$.
b) Si $f(x)$ es una función decreciente que es diferenciable, entonces $f'(x) \leq 0$.

Demostración

a) Sean x y $x+\Delta x$ dos valores de la variable independiente, con $y=f(x)$ y $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ los valores correspondientes de la variable dependiente. Se sigue que

$$\Delta y=f(x+\Delta x) - f(x)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Debemos considerar dos casos, según que $\Delta x > 0$ ó $\Delta x < 0$. Están ilustrados en las figuras 2 y 3.

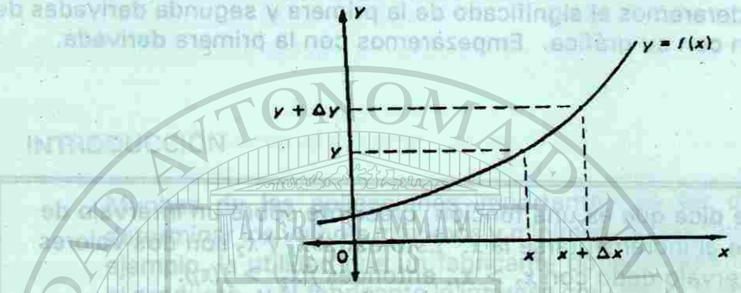


Fig. 2

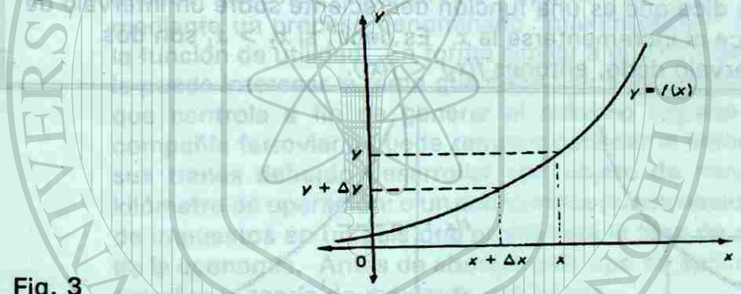


Fig. 3

Si $\Delta x > 0$, entonces $x + \Delta x > x$. Por consiguiente, dado que $f(x)$ es una función creciente, $f(x+\Delta x) > f(x)$, y así que $\Delta y > 0$. En consecuencia, tanto Δx como Δy son positivos, de modo que $\Delta y/\Delta x > 0$.

La segunda posibilidad es que $\Delta x < 0$. Entonces $x + \Delta x < x$ y así $f(x+\Delta x) < f(x)$. De aquí $\Delta y < 0$. En este caso, tanto Δx como Δy son negativos, de modo que otra vez $\Delta y/\Delta x > 0$.

Así que en ambos casos, $\Delta y/\Delta x$ es positiva. La derivada $f'(x)$ es el límite de $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$, y dado que $\Delta y/\Delta x$ siempre es positiva, es claro que es imposible aproximarse a un número negativo como valor límite. En consecuencia $f'(x) \geq 0$, como se establece en el teorema.

La demostración de la parte (b), cuando $f(x)$ es una función decreciente, es muy similar y se deja como un ejercicio.

Este teorema tiene una proposición recíproca, que puede establecerse de la manera siguiente.

Teorema 2

(a) Si $f'(x) > 0$ para toda x en algún intervalo, entonces $f(x)$ es una función creciente de x sobre tal intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ para toda x en algún intervalo, entonces $f(x)$ es una función decreciente de x sobre tal intervalo.

La demostración de este teorema no se dará. Sin embargo, es un resultado intuitivamente obvio. En la parte (a), por ejemplo, el hecho de que $f'(x) > 0$ significa, geométricamente, que la tangente a la gráfica en cualquier punto tiene pendiente positiva. Si la gráfica de $f(x)$ siempre está inclinada hacia arriba al movernos a la derecha, entonces es claro que y debe crecer a media que x aumenta. En forma análoga, en la parte (b), si $f'(x) < 0$, entonces la gráfica está inclinada hacia abajo y y decrece cuando x aumenta.

Estos teoremas se usan a fin de determinar los intervalos en que una función crece o decrece (esto es, cuando la gráfica sube o baja).

Ejemplo 1

Encuentra los valores de x en los cuales la función

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

crece o decrece.

Solución

Dado que $f(x) = x^2 - 2x + 1$, tenemos que $f'(x) = 2x - 2$. Ahora $f'(x) > 0$ implica que $2x - 2 > 0$, esto es, $x > 1$. En consecuencia, $f(x)$ es creciente en todos los valores de x dentro del intervalo definido por $x > 1$. De manera similar, $f'(x) < 0$ implica que $2x - 2 < 0$, esto es, $x < 1$. La función decrece si $x < 1$.

La gráfica de $y = f(x)$ aparece en la figura 4. (Observa que $f(1) = 0$, de modo que el punto (1,0) está sobre la gráfica). Si $x < 1$, la gráfica está inclinada hacia abajo y para $x > 1$, está inclinada hacia arriba.

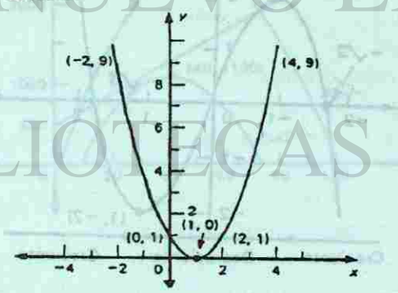


Fig. 4

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 2

Determina los valores de x en los cuales la función

$$f(x)=x^3-3x$$

crece o decrece

Solución

Tenemos que $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$. Con objeto de determinar el intervalo en que $f(x)$ crece, hacemos $f'(x)>0$, esto es,

$$3(x-1)(x+1)>0$$

El procedimiento consiste en examinar los signos de los factores $(x-1)$ y $(x+1)$. Estos se ilustran en la figura 5. El factor $(x-1)$ es positivo si $x>1$ y negativo en el caso de que $x<1$. Mientras que $(x+1)$ es positivo si $x>-1$ y negativo para $x<-1$.

Fig. 5

En la región determinada por $x>1$, tanto el factor $(x-1)$ como $(x+1)$ son positivos, de modo que su producto es positivo. Si $x<-1$, ambos factores son negativos y de nuevo su producto es positivo. Así que, $f'(x)>0$ si $x<-1$ y cuando $x>1$ y en cada una de estas regiones $f(x)$ crece.

En la región definida por $-1<x<1$, el producto $(x-1)(x+1)$ es negativo porque los dos factores tienen signos opuestos. En esta región, por consiguiente, $f(x)$ decrece.

La gráfica de $f(x)$ se aprecia en la figura 6.

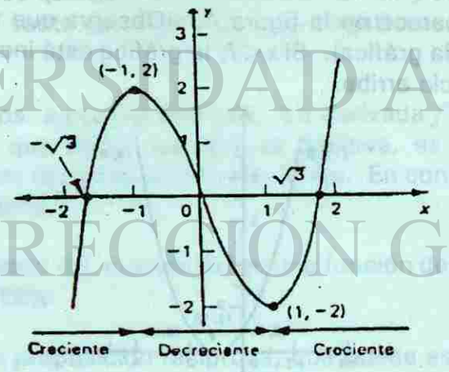


Fig. 6

Ejemplo 3

(Análisis de las funciones de costo, ingreso y utilidad). En el caso de la función de costo $C(x)=500+20x$ y la relación de demanda $p=100-x$, determina las regiones en que la función de costo, la función de ingreso y la función de utilidad son funciones crecientes o decrecientes de x.

Solución

Puesto que $C(x)=500+20x$, $C'(x)=20$ siempre es positiva. De ahí que la función de costo sea una función creciente de x para todos los valores de x. La función de ingreso es

$$R(x)=xp=x(100-x)=100x-x^2$$

Así pues, el ingreso marginal es

$$R'(x)=100-2x$$

De modo que $R'(x)>0$ si $100-2x>0$, esto es, cuando $x<50$. En el caso de que $x>50$, $R'(x)<0$. Así que la función de ingreso es una función creciente de x si $x<50$ y es una función decreciente de x para $x>50$.

La función de utilidad es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x)-C(x) \\ &= 100x-x^2-(500+20x) \\ &= 80x-x^2-500 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $P'(x)=80-2x$ y $P'(x)>0$ cuando $80-2x>0$ ó $x<40$; en forma alternativa, $P'(x)<0$ si $x>40$. De modo que la función de utilidad es una función creciente de x si $x<40$, y es una función decreciente de x para $x>40$. Las gráficas de las tres funciones aparecen en la figura 7.

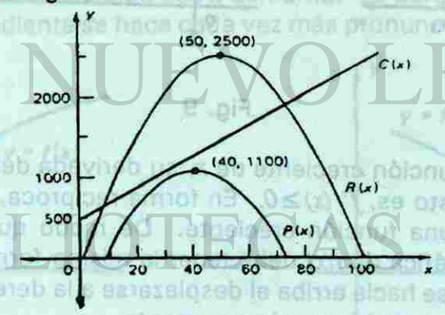


Fig. 7

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El tipo de comportamiento que estas tres funciones presentan es bastante típico de las funciones generales de costo, ingreso y utilidad. La función de costo por lo regular es una función creciente de la cantidad de bienes producidos (casi siempre cuesta más producir más, si bien ocurren excepciones con ciertas políticas de precios).

De manera similar, la función de ingreso es, en general, una función creciente para pequeños volúmenes de ventas, pero por lo regular se transforma en una función decreciente cuando consideramos grandes volúmenes de ventas. La función de utilidad tiene este mismo comportamiento de crecimiento para x pequeña y decrece en el caso de que x sea grande.

Advertimos de lo antes expuesto que el signo de la primera derivada tiene un significado geométrico que es de gran utilidad cuando necesitamos obtener una idea cualitativa de la gráfica de una función. Se abordará ahora la segunda derivada, la cual, como veremos, también tiene una importante interpretación geométrica.

Considere una función $f(x)$ cuya gráfica tiene la forma general que se aprecia en la figura 8. La pendiente de la gráfica es positiva, $f'(x)>0$, de modo que y es una función creciente de x. Más aún, la gráfica tiene la propiedad de que al movernos hacia la derecha (esto es, cuando x crece), la pendiente de la gráfica se hace más pronunciada. Es decir, la derivada $f'(x)$ también es una función creciente de x. La gráfica de $f'(x)$ debe tener la forma indicada cualitativamente en la figura 9.

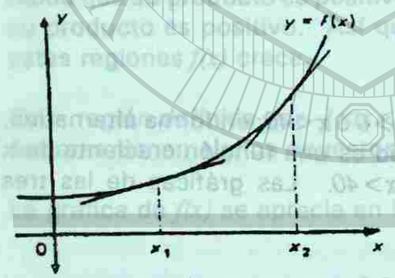


Fig. 8

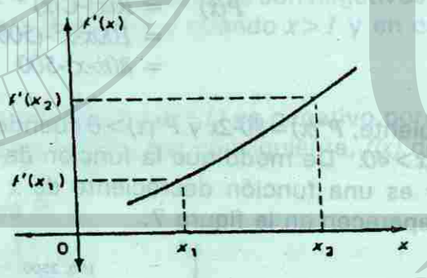


Fig. 9

Ahora, si $f'(x)$ es una función creciente de x, su derivada debe ser mayor o igual que 0 por el teorema 1. Esto es, $f''(x)\geq 0$. En forma recíproca, si $f''(x)>0$ entonces por el teorema 2 $f'(x)$ es una función creciente. De modo que si tanto $f'(x)>0$ como $f''(x)>0$ entonces la gráfica de $f(x)$ debe tener la misma forma general indicada en la figura 8. Debe inclinarse hacia arriba al desplazarse a la derecha, y la pendiente debe ser cada vez más pronunciada cuando x aumenta.

Analicemos ahora una función $f(x)$ con una gráfica de la forma que se observa en la figura 10. Aquí la gráfica se inclina hacia abajo al movernos a la derecha, con $f'(x)<0$,

pero la pendiente es cada vez menos pronunciada a media que x aumenta. Así que, $f'(x)$ es creciente a partir de valores negativos grandes pudiendo llegar hasta cero, como se aprecia en la figura 11. De nuevo $f'(x)$ es una función creciente de x, de modo que $f''(x)\geq 0$.

De manera recíproca, si $f'(x)<0$ y $f''(x)>0$, se sigue que la gráfica de $f(x)$ presenta la forma general de la figura 10. Esto es, la gráfica se inclina hacia abajo al desplazarnos a la derecha pero es cada vez menos pronunciada a medida que x aumenta.

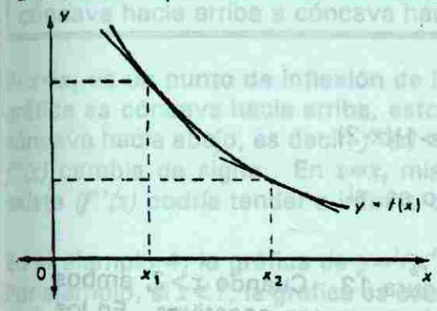


Fig. 10

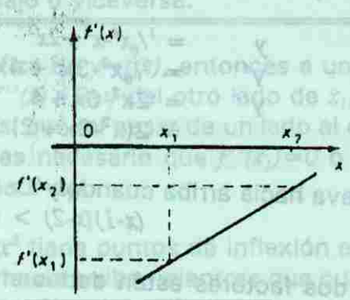


Fig. 11

La propiedad geométrica que caracteriza ambos tipos de gráficas es que son cóncavas hacia arriba. Concluimos, por tanto, que si la gráfica de $y=f(x)$ es cóncava hacia arriba, entonces $f''(c)\geq 0$. En forma recíproca, si $f''(x)>0$, se sigue que la gráfica de $y=f(x)$ debe ser cóncava hacia arriba.

Ahora consideremos la posibilidad alternativa, esto es, que la gráfica de $y=f(x)$ sea cóncava hacia abajo. Los casos que corresponden a los dos tipos ya considerados se observan en la figura 12. La parte (a) ilustra el caso en que $f'(x)>0$ pero la pendiente se hace menos pronunciada a medida que x aumenta. La parte (b) ejemplifica el caso en donde $f'(x)<0$ y la pendiente se hace cada vez más pronunciada cuando x aumenta.

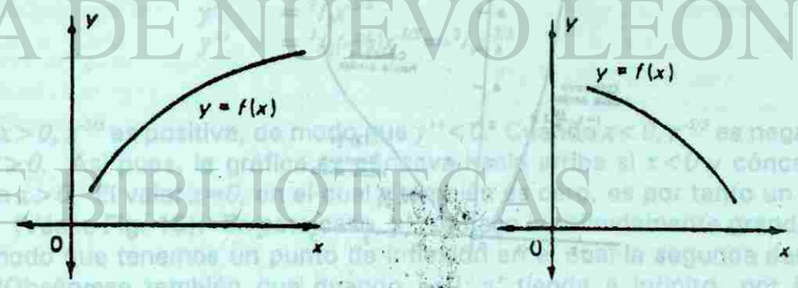


Fig. 12

a) b)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En cada caso, $f'(x)$ es una función decreciente de x. Por consiguiente, concluimos que cuando la gráfica de $y=f(x)$ es cóncava hacia abajo, $f''(x) \leq 0$. Recíprocamente, cuando $f''(x)<0$, la gráfica de $y=f(x)$ es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 4

Encuentra los valores de x en los cuales la gráfica de

$$y=\tfrac{1}{6}x^4-x^3+2x^2$$

es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

$$\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{6}x^4-x^3+2x^2 \\ y' &= \tfrac{4}{6}x^3-3x^2+4x \\ y'' &= 2x^2-6x+4 \\ &= 2(x^2-3x+2) = 2(x-1)(x-2) \end{aligned}$$

La gráfica es cóncava hacia arriba cuando $y''>0$, esto es, si

$$(x-1)(x-2) > 0$$

Los signos de los dos factores están dados en la figura 13. Cuando $x>2$, ambos factores son positivos, mientras que si $x<1$, ambos factores son negativos. En los dos casos su producto es positivo, de modo que $y''>0$. Por otro lado, cuando $1<x<2$ los factores $(x-1)$ y $(x-2)$ tienen signos opuestos, de modo que $y''<0$.

Fig. 13

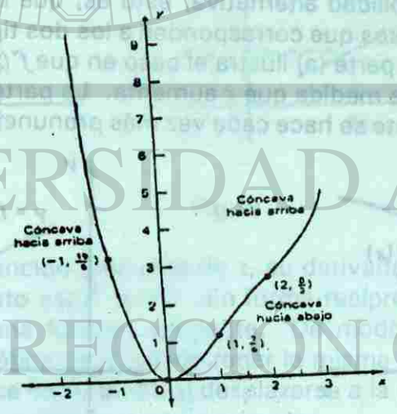


Fig. 14

Así que la función dada es cóncava hacia arriba si $x<1$ ó $x>2$ y cóncava hacia abajo en el caso de que $1<x<2$. Estas propiedades se observan en la gráfica de la figura 14.

Definición

> Un punto de inflexión de una curva es un punto en donde la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.

Si $x=x_1$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y=f(x)$, entonces a un lado de x_1 la gráfica es cóncava hacia arriba, esto es, $f''(x)>0$; y del otro lado de x_1, la gráfica es cóncava hacia abajo, es decir, $f''(x)<0$. Así que, al pasar de un lado al otro de $x=x_1$, $f''(x)$ cambia de signo. En $x=x_1$ mismo, es necesario que $f''(x_1)=0$ o que $f''(x_1)$ no exista ($f''(x)$ podría tender a infinito cuando $x \to x_1$).

En el ejemplo 4, la gráfica de $y=\tfrac{1}{6}x^4-x^3+2x^2$ tiene puntos de inflexión en $x=1$ y $x=2$. Por ejemplo, si $x<1$, la gráfica es cóncava hacia arriba, mientras que cuando $1<x<2$, la gráfica es cóncava hacia abajo. De modo que $x=1$ es un punto en donde la concavidad cambia, es decir, un punto de inflexión. Esto también se aplica a $x=2$.

En el ejemplo 4 los puntos de inflexión están dados por $y''=0$.

Ejemplo 5

Determina los puntos de inflexión de $y=x^{1/3}$

Solución

Tenemos que

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{1}{3}x^{-2/3} \\ y'' &= \tfrac{1}{3}(-\tfrac{2}{3})x^{-5/3} = -\tfrac{2}{9}x^{-5/3} \end{aligned}$$

Ahora, si $x>0$, $x^{-5/3}$ es positiva, de modo que $y''<0$. Cuando $x<0$, $x^{-5/3}$ es negativa, por lo que $y''>0$. Así pues, la gráfica es cóncava hacia arriba si $x<0$ y cóncava hacia abajo para $x>0$. El valor $x=0$, en el cual y también es cero, es por tanto un punto de inflexión. (Véase Fig. 15). En este caso, y' se hace indefinidamente grande cuando $x \to 0$, de modo que tenemos un punto de inflexión en el cual la segunda derivada no existe. (Obsérvese también que cuando $x \to 0$, y' tiende a infinito, por lo que la pendiente de la gráfica tiende a ser vertical en el origen para esta función particular).

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

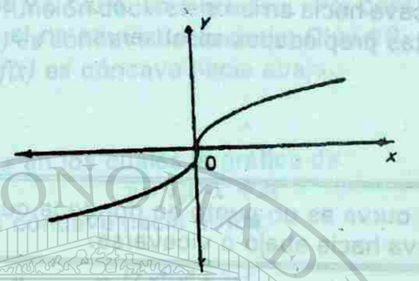


Fig. 15

Observa que la tangente a la gráfica es un punto de inflexión siempre corta a ésta en tal punto. Ésta es una propiedad poco común de una tangente (por regla, la gráfica está situada por completo a un lado de la línea tangente cerca del punto de tangencia).

Ejercicio 4.1

Determina los valores de x en los cuales las funciones siguientes son: (a) crecientes; (b) decrecientes; (c) cóncavas hacia arriba y (d) cóncavas hacia abajo. También, encuentra los puntos de inflexión, si los hay.

1. $y= x^2-6x+7$
2. $y=x^3-12x+10$
3. $f(x)=x^3-3x+4$
4. $f(x)=2x^3-9x^2-24x+20$
5. $f(x)=x+{}^1/_x$
6. $f(x)=x^2+{}^1/x^2$
7. $y=x^5-5x^4+1$
8. $y=x^7-7x^6$
9. $y=x^2-4x+5$
10. $y=x^3-3x+2$
11. $y=5x^6-6x^5+1$
12. $y=x^4-2x^2$
13. $y=x^{2/3}$

(Análisis de funciones de costo, ingreso y utilidad) Para las funciones de costo y relaciones de demanda siguientes, determina las regiones en que (a) la función de costo, (b) la función de ingreso y (c) la función de utilidad son crecientes o decrecientes.

14. $C(x)=2000+10x;\quad p=100-{}^1/_2x$
15. $C(x)=4000+x^2;\ p=300-2x$

4.2 Bosquejo de Curvas Polinomiales

A menudo ocurre que nos gustaría obtener un dibujo cualitativo aproximado de cómo la gráfica de una función dada se vería sin necesidad de tabular un gran número de puntos. La primera y segunda derivadas son herramientas efectivas para este fin. En esta sección, estudiaremos su uso aplicado a funciones polinomiales. Las gráficas que aparecen en las figuras 6 y 14 de la sección 4.1 se obtuvieron por los métodos que a continuación se describen.

Ejemplo 1
Bosqueja la gráfica de la función $y=2x^3-9x^2+12x-2$

Solución
1. En primer término determinaremos en dónde la función es creciente o decreciente:

$$y' = 6x^2-18x+12 = 6(x-1)(x-2)$$

Así que, $y'>0$ cuando $x<1$ o si $x>2$, de modo que en estos dos intervalos la gráfica es creciente. En el intervalo $1<x<2$ es decreciente. (Véase la parte (a) de la Fig. 16). Enseguida encontramos las coordenadas de los puntos que separan estos intervalos. De inmediato se advierte que $y=3$ si $x=1$ y $y=2$ cuando $x=2$, por lo que los puntos son (1,3) y (2,2).

2. Ahora examinaremos en dónde la función es cóncava hacia arriba o hacia abajo. Tenemos que:

$$y'' = 12x-18$$

y así $y''>0$ si $x>{}^3/_2$ mientras que $y''<0$ cuando $x<{}^3/_2$. La gráfica es cóncava hacia abajo para $x<{}^3/_2$ y cóncava hacia arriba si $x>{}^3/_2$. (Véase la parte (b) de la Fig. 16) Las coordenadas del punto en que la concavidad cambia están dadas por $x={}^3/_2$, $y={}^5/_2$.

Combinando la información de las partes (a) y (b), podemos resumirla como se advierte en la parte (c) de la figura 16; esto es, si $x<1$, $f(x)$ es creciente y cóncava hacia abajo; cuando $1<x<{}^3/_2$, $f(x)$ decrece y es cóncava hacia abajo; etcétera.

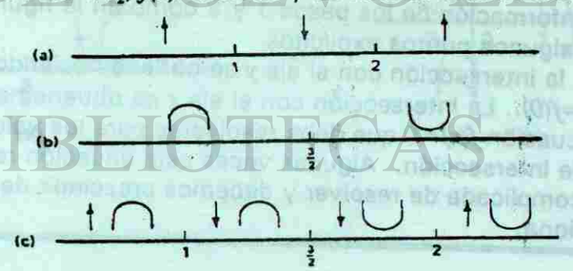


Fig. 16

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Por último calculamos las coordenadas del punto en que la gráfica corta al eje y. Si $x=0$, $y=-2$, de modo que el punto es (0,-2).

A fin de bosquejar la gráfica, graficamos primero los puntos (1,3), $(^3/_2, ^5/_2)$, (2,2) en donde f(x) cambia su naturaleza (de creciente a decreciente o de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo) y el punto (0,-2) en que la gráfica corta el eje y. Entonces usando la información de la figura 16, dibujamos curvas del tipo apropiado que unan a estos puntos. Esto da la gráfica como se aprecia en la figura 17.

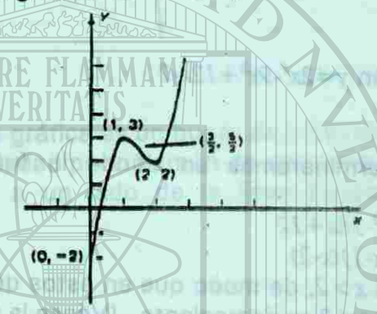


Fig. 17

Los pasos necesarios en el bosquejo de la gráfica de una función polinomial pueden resumirse en el procedimiento siguiente:

Paso 1: Calcula $f'(x)$
Determina los intervalos en que $f'(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ crece o decrece, respectivamente. Calcula las coordenadas de los puntos que dividen estos intervalos.

Paso 2: Calcula $f''(x)$
Determina los intervalos en que $f''(x)$ es positiva o negativa: éstos dan los intervalos en que $f(x)$ es cóncava hacia arriba o hacia abajo, respectivamente. Calcula las coordenadas de los puntos que separan estos intervalos.

Paso 3: Combina
Combina la información de los pasos 1 y 2 como en la figura 16.

Paso 4: Encuentra algunos puntos explícitos
Por ejemplo, la intersección con el eje y se obtiene haciendo $x=0$, de modo que $y=f(0)$. La intersección con el eje x se obtiene haciendo $y=0$. Esto da la ecuación $f(x)=0$ que debe resolverse para los valores de x en los puntos de intersección. Algunas veces esta ecuación resulta ser demasiado complicada de resolver y debemos prescindir de la información que proporciona.

Ejemplo 2
Bosqueja la gráfica de $y=3+5x-2x^2$

Solución
Paso 1

$$y'=5-4x$$

Así que, $y'>0$ si $x<{}^5/_4$ y $y'<0$ cuando $x>{}^5/_4$. Si $x={}^5/_4$,

$$y = 3+5({}^5/_4)-2({}^5/_4)^2 = {}^{49}/_8$$

En consecuencia, la gráfica es creciente si $x<{}^5/_4$ y decreciente para $x>{}^5/_4$, y el punto divisorio de la gráfica es $({}^5/_4, {}^{49}/_8)$.

Paso 2
$y''=-4$.
Así que la gráfica es cóncava hacia abajo para toda x.

Paso 3
Combinando la información de los pasos 1 y 2, tenemos la figura 18 (a).

Paso 4
Cuando $x=0$, $y=3$ lo que da el punto (0,3). Si $y=0$ obtenemos la ecuación $2x^2-5x-3=0$. Esta función cuadrática puede factorizarse: $(2x+1)(x-3)=0$, y las raíces son $x=-½$ y $x=3$. En consecuencia, la gráfica corta al eje x en (-½,0) y (3,0).

Integrando toda esta información, podemos dibujar un bosquejo razonablemente preciso de la gráfica, como se observa en la figura 18 (b).

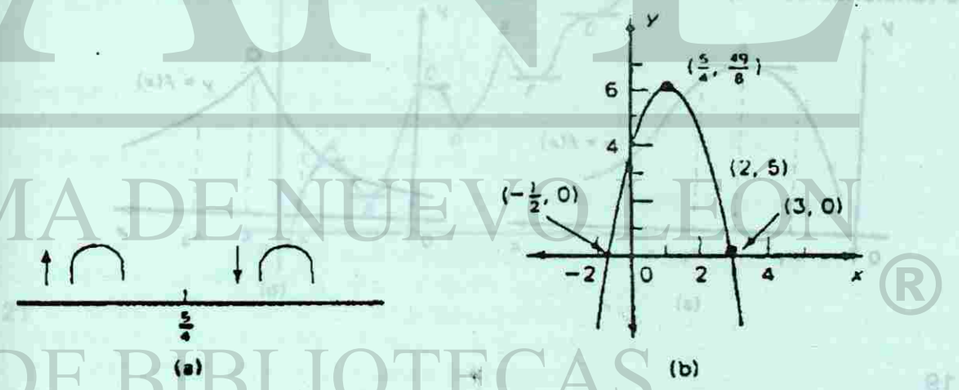


Fig. 18

Bosqueje las gráficas de las funciones siguientes

1. $y = x^2 - 6x + 7$
2. $y = x^2 - 4x + 5$
3. $y = x^3 - 3x + 4$
4. $y = x^3 - 12x + 10$
5. $y = x^3 - 3x + 2$
6. $y = 2x^3 - 9x - 24x + 20$
7. $y = x^4 - 2x^2$
8. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$
9. $y = x^2 - 5x + 1$
10. $y = x^4 - 7x^3$
11. $y = 5x^3 - 6x^2 + 1$
12. $y = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2$

4.3 Puntos Críticos

Definiciones

a) Una función *f(x)* se dice que tiene un máximo local en $x=c$ si $f(c)>f(x)$ para cada x lo suficientemente cerca de *c*.

Así, los puntos P y Q en las gráficas de la figura 19 corresponden a máximos locales de las funciones correspondientes.

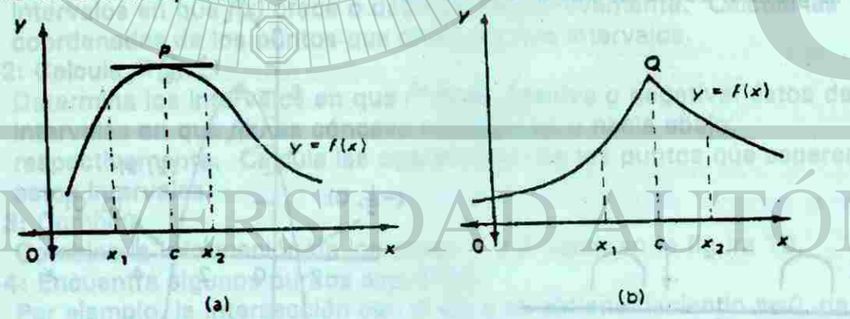


Fig. 19

b) Una función *f(x)* se dice que tiene un mínimo local en $x=c$ si $f(c)<f(x)$ para cada x suficientemente cerca de *c*.

Los puntos A y b en las gráficas de la figura 20 corresponden a mínimos locales.

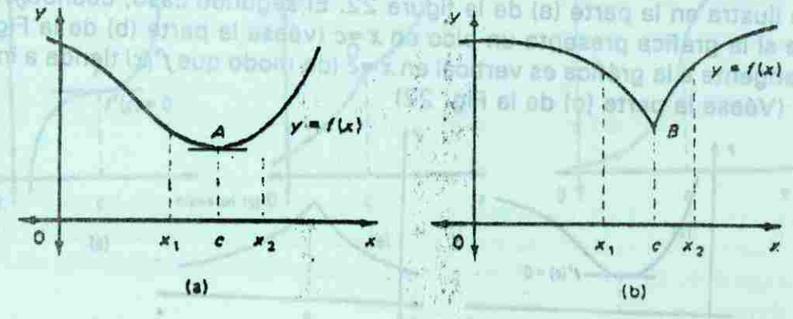


Fig. 20

c) El término extremo se utiliza para indicar un máximo local o un mínimo local.

Una función puede tener más de un máximo local y más de un mínimo local, como se aprecia en la figura 21. Los puntos A, C y E de la gráfica corresponden a puntos en que la función tiene máximos locales.

Un valor *máximo* o *mínimo* (local) de una función es la coordenada y del punto en que la gráfica tiene un máximo o mínimo local. Un valor mínimo local puede ser mayor que un valor máximo local. Esto puede advertirse de inmediato en la parte superior de la gráfica, en donde la coordenada *y* de F es mayor que la correspondiente a A.

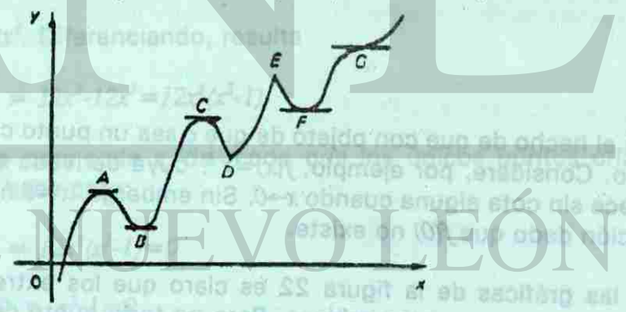


Fig. 21

Definición

El valor $x=c$ se denomina un punto crítico de una función continua *f* si *f(c)* está bien definido y si $f'(c)=0$ o $f'(x)$ no existe en $x=c$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En el caso en que $f'(c)=0$, la tangente a la gráfica de $y=f(x)$ es horizontal en $x=c$. Esta posibilidad se ilustra en la parte (a) de la figura 22. El segundo caso, cuando $f'(c)$ no existe, ocurre si la gráfica presenta un pico en $x=c$ (véase la parte (b) de la Fig. 22) o cuando la tangente a la gráfica es vertical en $x=c$ (de modo que $f'(x)$ tienda a infinito cuando $x \to c$). (Véase la parte (c) de la Fig. 22)

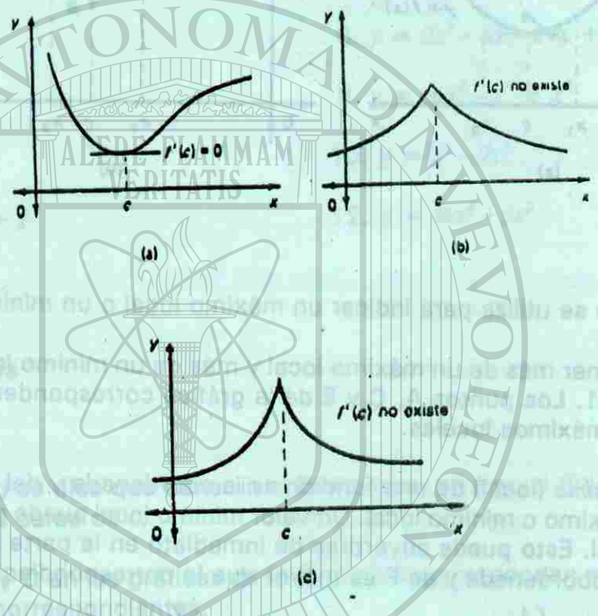


Fig. 22

Enfatizamos el hecho de que con objeto de que c sea un punto crítico, $f(c)$ debe estar bien definido. Considere, por ejemplo, $f(x)=x^{-1}$, cuya derivada es $f'(x)=-x^{-2}$. Es claro que, $f'(x)$ crece sin cota alguna cuando $x \to 0$. Sin embargo, $x=0$ no es un punto critico de esta función dado que $f(0)$ no existe.

A partir de las gráficas de la figura 22 es claro que los extremos locales de una función sólo ocurren en puntos críticos. Pero no todo punto crítico de una función corresponde a un mínimo local o a un máximo local. El punto P de la parte (a) de la figura 23 en donde la tangente es horizontal, corresponde a un punto crítico pero no es un máximo local ni un mínimo local. Los puntos Q y R de las partes (b) y (c) corresponden a puntos críticos en que $f'(c)$ no existe, pero no son extremos de $f(x)$. De hecho, P y R son puntos de inflexión.

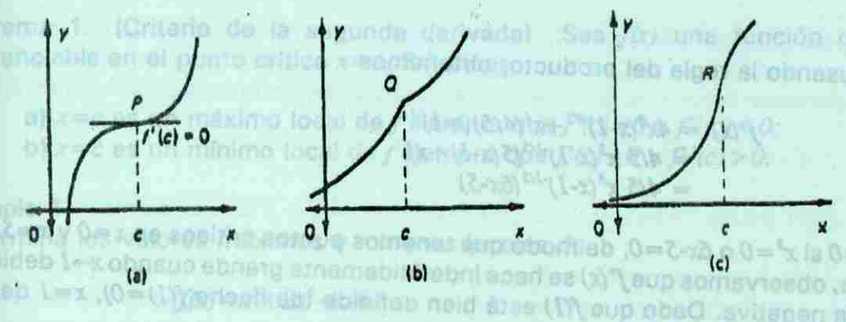


Fig. 23

En la próxima sección, desarrollaremos ciertos criterios que nos permitirán distinguir aquellos puntos críticos que son extremos locales de aquellos que no lo son. Primero examinaremos puntos críticos por sí mismos a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Determina los puntos críticos de la función

$$f(x) = x^3(2x^3-3x)$$

Solución

Tenemos que $f(x)=2x^6-3x^4$. Diferenciando, resulta

$$f'(x) = 12x^5-12x^3=12x^3(x^2-1)$$

Es claro que $f'(x)$ existe para toda x, de modo que los únicos puntos críticos son aquellos en que $f'(x)$ se hace cero:

$$f'(x) = 12x^3(x^2-1)=0$$

o bien

$$x^3=0 \quad \text{o} \quad x^2-1=0$$

Así que los puntos críticos son $x=0, \pm 1$.

Ejemplo 2

Encuentre los puntos críticos de la función

$$f(x)=x^4(x-1)^{4/5}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Solución

Derivando, usando la regla del producto, obtenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3(x-1)^{4/5}+x^4(4/5)(x-1)^{-1/5} \\ &= 4/5\ x^3(x-1)^{-1/5}[5(x-1)+x] \\ &= 4/5\ x^3(x-1)^{-1/5}(6x-5) \end{aligned}$$

Ahora $f'(x)=0$ si $x^3=0$ o $6x-5=0$, de modo que tenemos puntos críticos en $x=0$ y $x=5/6$. Sin embargo, observamos que $f'(x)$ se hace indefinidamente grande cuando $x\to 1$ debido a la potencia negativa. Dado que $f(1)$ está bien definido (de hecho $f(1)=0$), $x=1$ debe ser un punto crítico del tipo en que $f'(x)$ no existe.

Ejercicio 4.3

Determina los puntos críticos de las funciones siguientes.

1. $2x^2+8x+1$
2. $4-x-3x^2$
3. x^3-3x
4. $2x^3-6x$
5. x^3+3x^2+1
6. $2x^3-3x^2-36x+1$
7. $x^3-9x^2+24x+2$
8. x^4-2x^2
9. x^4-4x^3
10. $x+x^{-1}$

4.4 Criterios para Extremos Locales

Hemos visto que los extermos locales de una función se encuentran entre sus puntos críticos. Describiremos ahora los dos criterios que se usan con objeto de decidir si un punto crítico dado es o no un máximo o mínimo local.

Consideremos primero el caso en que el extremo local coincide con un punto crítico dado por $f'(x)=0$, esto es, cuando la línea tangente es horizontal en el punto de la gráfica de f que corresponde al extremo. Entonces si el punto es un máximo local, la gráfica es cóncava hacia abajo, y si el punto es un mínimo local, la gráfica es cóncava hacia arriba. Pero sabemos que siempre que $f''(x)<0$, la gráfica de f es cóncava hacia abajo y siempre que $f''(x)>0$, la gráfica es cóncava hacia arriba. Esto nos lleva al teorema siguiente.

Teorema 1 (Criterio de la segunda derivada) Sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable en el punto crítico $x=c$. Entonces

a) $x=c$ es un máximo local de f siempre que $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$;
b) $x=c$ es un mínimo local de f siempre que $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$.

Ejemplo 1
Determina los valores máximos y mínimos locales de

$$f(x)=x^3+2x^2-4x-8$$

Si $f(x)=x^3+2x^2-4x-8$. Entonces,

$$f'(x)=3x^2+4x-4$$

A fin de encontrar los puntos críticos, hacemos $f'(x)=0$

$$\begin{aligned} 3x^2+4x-4&=0 \\ (3x-2)(x+2)&=0 \end{aligned}$$

Esto da $x=2/3$ ó -2. Ahora $f''(x)=6x+4$. Si $x=2/3$,

$$f''(2/3) = 6(2/3)+4 = 8>0$$

De aquí, puesto que $f''(x)$ es positiva en $x=2/3$, $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=2/3$. EL valor mínimo local está dado por

$$f(2/3) = (2/3)^3 + 2(2/3)^2 - 4(2/3) - 8 = -\frac{256}{27}$$

Cuando $x=-2$, $f''(-2) = 6(-2) + 4 = -8<0$. En consecuencia, dado que $f''(x)$ es negativa cuando $x=-2$, $f(x)$ tiene un máximo local si $x=-2$. El valor máximo local está dado por

$$f(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - 4(-2) - 8 = 0$$

Así, el único valor máximo local de $f(x)$ es 0, y ocurre cuando $x=-2$; el único valor mínimo local es $-\frac{256}{27}$, y ocurre cuando $x=2/3$.

Observe que el ejemplo 1, $f'(x)$ está bien definida para todos los valores de x, así que los únicos puntos críticos son aquellos en que $f'(x)$ es cero.

El criterio de la segunda derivada puede utilizarse en todos los extremos locales en que $f'(c)=0$ y $f''(c)$ no es cero. Si $f''(x)=0$ en un punto crítico $x=c$, o si $f''(c)$ no existe, entonces el criterio de la segunda derivada no puede aplicarse a fin de decidir si $x=c$ es un punto máximo o mínimo local. En tales casos, podemos recurrir a un criterio diferente, denominado el criterio de la primera derivada para extremos locales.

UANL UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

El criterio de la primera derivada también se emplea en puntos críticos del tipo en que $f'(c)$ no existe. Sucede también en algunos casos que aun cuando el criterio de la segunda derivada funciona, el criterio de la primera derivada es más simple de aplicar.

Teorema 2 (Criterio de la primera derivada)

Si $x=c$ es un punto crítico de $f(x)$, esto es, $f'(c)=0$ o $f'(x)$ no existe cuando $x \to c$, entonces:

a) $x=c$ es un máximo local de f si $f'(x)$ cambia de signo positivo a negativo cuando x pasa de menor que c a mayor que ese valor. (Véase la parte (a) de la figura 24. El (+), (-) o (0) entre paréntesis de la figura indica el signo de la pendiente a la gráfica en los puntos dados.)

b) $x=c$ es un mínimo local de f si $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo cuando x pasa de menor que c a mayor que ese valor. (Véase la parte (b) de la Fig. 24.)

c) $x=c$ no es un extremo local si $f'(x)$ no cambia de signo cuando x pasa de menor que c a mayor que ese valor. (Véase la parte (c) de la Fig. 24.) En tales casos, $x=c$ será un punto de inflexión o presentará un pico en la gráfica de $f(x)$.

Ejemplo 2
Determina los extremos locales de $f(x)=x^4-4x^3+7$

Solución
En este caso $f'(x) = 4x^3-12x^2 = 4x^2(x-3)$

En un punto crítico, $f'(x)=0$ ó $4x^2(x-3)=0$, es decir, $x=0$ o $x=3$.

Ahora $f''(x)=12x^2-24x$.

En $x=3$. $f''(3) = 12(9)-24(3) = 108-72 = 36>0$. En consecuencia, $x=3$ es un punto mínimo local de $f(x)$.

En $x=0$, $f''(0)=0$. Así que no podemos usar el criterio de la segunda derivada con objeto de determinar la naturaleza del punto critico $x=0$. Para ello, debemos recurrir al criterio de la primera derivada.

En primer término, sea x estrictamente menor que el punto crítico $x=0$, esto es, sea x negativo pero pequeño. Entonces $x^2 > 0$ y $x-3 < 0$. Por tanto $f'(x) = 4x^2(x-3)<0$, dado que es el producto de un número positivo ($4x^2$) y un número negativo ($x-3$). En segundo lugar, consideremos una x estrictamente mayor que le punto crítico $x=0$, es decir, tomamos x pequeño y positivo. Se sigue que $x^2 > 0$ y $x-3<0$, de modo que $f'(x)=4x^2(x-3)<0$. Por consiguiente, $f'(x)$ es negativa tanto para valores de x a la derecha del punto $x=0$ como en el caso de valores a la izquierda de tal valor y no cambia de signo cuando x se incrementa alrededor del valor 0. En consecuencia, $x=0$ ni es máximo ni es mínimo (en realida es un punto de inflexión).

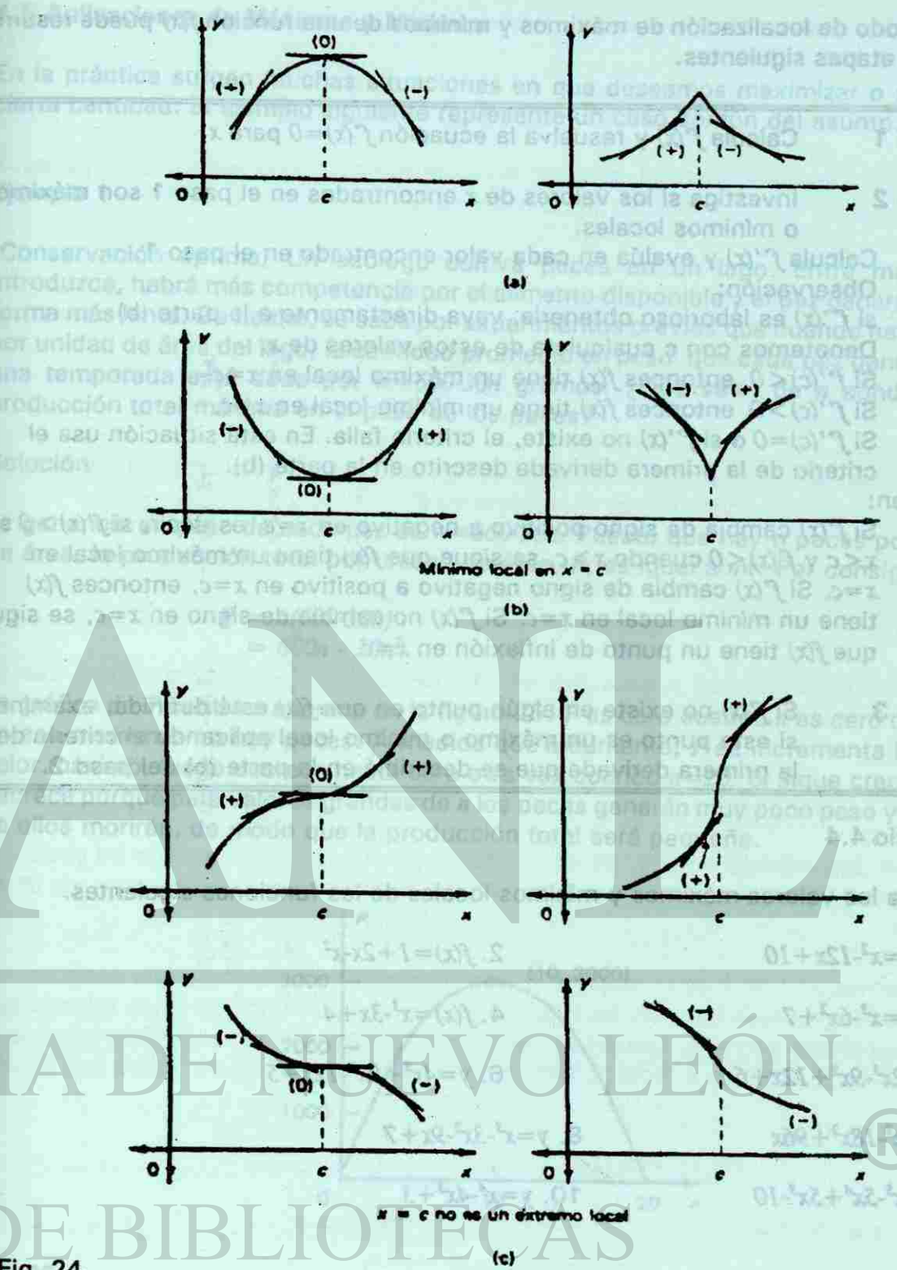


Fig. 24

El método de localización de máximos y mínimos de una función $f(x)$ puede resumirse en las etapas siguientes.

Paso 1 Calcula $f'(x)$ y resuelva la ecuación $f'(x)=0$ para x.

Paso 2 Investiga si los valores de x encontrados en el paso 1 son máximos o mínimos locales.

a) Calcula $f''(x)$ y evalúa en cada valor encontrado en el paso 1.
Observación:
si $f''(x)$ es laborioso obtenerla, vaya directamente a la parte (b).
Denotemos con c cualquiera de estos valores de x.
Si $f''(c)<0$, entonces $f(x)$ tiene un máximo local en $x=c$.
Si $f''(c)>0$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=c$.
Si $f''(c)=0$ o si $f''(x)$ no existe, el criterio falla. En está situación usa el criterio de la primera derivada descrito en la parte (b).

O bien:

b) Si $f'(x)$ cambia de signo positivo a negativo en $x=c$, es decir, si $f'(x)>0$ si $x<c$ y $f'(x)<0$ cuando $x>c$, se sigue que $f(x)$ tiene un máximo local en $x=c$. Si $f'(x)$ cambia de signo negativo a positivo en $x=c$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo local en $x=c$. Si $f'(x)$ no cambia de signo en $x=c$, se sigue que $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x=c$.

Paso 3 Si $f'(x)$ no existe en algún punto en que $f(x)$ esté definida, examine si este punto es un máximo o mínimo local aplicando el criterio de la primera derivada que se describió en la parte (b) del paso 2.

Ejercicio 4.4

Calcula los valores máximos y mínimos locales de las funciones siguientes.

1. $f(x)=x^2-12x+10$
2. $f(x)=1+2x-x^2$
3. $f(x)=x^3-6x^2+7$
4. $f(x)=x^3-3x+4$
5. $y=2x^3-9x^2+12x+6$
6. $y=4x^3+9x^2-12x+5$
7. $y=x^3-18x^2+96x$
8. $y=x^3-3x^2-9x+7$
9. $y=x^5-5x^4+5x^3-10$
10. $y=x^4-4x^3+3$

4.5 Aplicaciones de Máximos y Mínimos

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El ejemplo siguiente representa un caso común del asunto.

Ejemplo 1

(Conservación óptima) Un ecólogo cultiva peces en un lago. Entre más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w=600-30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución

La ganancia en peso de cada pez es $w=600-30n$. Puesto que hay n peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente.

$$P = n(600-30n)$$
$$= 600n - 30n^2$$

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero dado que en ese momento no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando $n=20$. Si sigue creciendo, P decrece porque para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña.

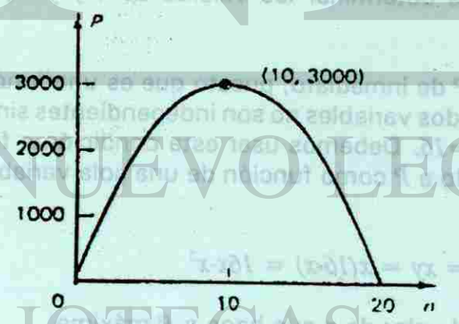


Fig. 25

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

4.5 Aplicaciones de Máximos y Mínimos

En la práctica surgen muchas situaciones en que deseamos maximizar o minimizar cierta cantidad. El ejemplo siguiente representa un caso común del asunto.

Ejemplo 1

(Conservación óptima) Un ecólogo cultiva peces en un lago. Entre más peces introduzca, habrá más competencia por el alimento disponible y el pez ganará peso en forma más lenta. De hecho, se sabe por experimentos previos que cuando hay n peces por unidad de área del lago, la cantidad promedio en peso que cada pez gana durante una temporada está dada por $w=600-30n$ gramos. ¿Qué valor de n conduce a la producción total máxima en el peso de los peces?

Solución

La ganancia en peso de cada pez es $w=600-30n$. Puesto que hay n peces por unidad de área, la producción total por unidad de área, P, es igual a nw. Por consiguiente.

$$\begin{aligned} P &= n(600-30n) \\ &= 600n - 30n^2 \end{aligned}$$

La gráfica de P contra n aparece en la figura 25. P es cero cuando n es cero dado que en ese momento no hay peces. A medida que n aumenta, P se incrementa hasta un valor máximo, luego decrece hasta cero otra vez cuando $n=20$. Si sigue creciendo, P decrece porque para valores grandes de n los peces ganarán muy poco peso y algunos de ellos morirán, de modo que la producción total será pequeña.

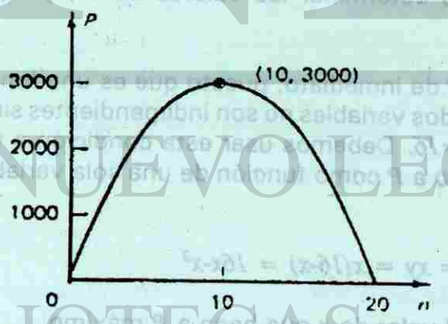


Fig. 25

Con objeto de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn.

$$\frac{dP}{dn}=600-60n$$

y $dP/dn=0$ cuando $600-60n=0$, esto es, si $n=10$. Así que la densidad de 10 peces por unidad de área da la producción total máxima. El valor máximo de P es

$$P = 600(10)-30(10)^2 = 3000$$

es decir 3000 gramos por unidad de área. Es obvio que a partir de la gráfica de P como una función de n que el valor $n=10$ corresponde al máximo de P. Sin embargo, podemos verificarlo usando la regla de la segunda derivada.

$$\frac{d^2P}{dn^2}=-60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico n = 10 corresponde al máximo de P.

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

Ejemplo 2

Determina dos números cuya suma sea 16 de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución

Sean los dos números x y y, de modo que $x+y=16$. Si $P=xy$ denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes sino que están relacionadas por la condición $x+y=16$. Debemos usar esta condición a fin de eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable. Tenemos que $y=16-x$, y así

$$P= xy = x(16-x) = 16x-x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx}=16-2x$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Con objeto de encontrar el valor de n para P máxima, derivamos y hacemos igual a cero la derivada dP/dn.

$$\frac{dP}{dn}=600-60n$$

y $dP/dn=0$ cuando $600-60n=0$, esto es, si $n=10$. Así que la densidad de 10 peces por unidad de área da la producción total máxima. El valor máximo de P es

$$P = 600(10)-30(10)^2 = 3000$$

es decir 3000 gramos por unidad de área. Es obvio que a partir de la gráfica de P como una función de n que el valor $n=10$ corresponde al máximo de P. Sin embargo, podemos verificarlo usando la regla de la segunda derivada.

$$\frac{d^2P}{dn^2}=-60$$

La segunda derivada es negativa (de hecho, para todos los valores de n) por lo que el valor crítico n = 10 corresponde al máximo de P.

Consideremos otro ejemplo de naturaleza puramente matemática.

Ejemplo 2

Determina dos números cuya suma sea 16 de tal forma que su producto sea tan grande como sea posible.

Solución

Sean los dos números x y y, de modo que $x+y=16$. Si $P=xy$ denota su producto, entonces necesitamos determinar los valores de x y y que produzcan que P sea máximo.

No podemos derivar P de inmediato, puesto que es una función de dos variables, x y y. Sin embargo, estas dos variables no son independientes sino que están relacionadas por la condición $x+y=16$. Debemos usar esta condición a fin de eliminar una de las variables de P, dejando a P como función de una sola variable. Tenemos que $y=16-x$, y así

$$P= xy = x(16-x) = 16x-x^2$$

Debemos encontrar el valor de x que haga a P máximo.

$$\frac{dP}{dx}=16-2x$$

Así que, $dP/dx=0$ cuando $16-2x=0$, esto es, si $x=8$. La segunda derivada $d^2P/dx^2=-2<0$, y $x=8$ corresponde a un máximo de P.

Cuando $x=8$, también $y=8$, de modo que el valor máximo de P es igual a 64.

La solución de problemas de optimización del tipo anterior con frecuencia se encuentra que es una de las áreas más difíciles del cálculo diferencial. La principal dificultad surge cuando es necesario escribir el problema dado en palabras en ecuaciones. Una vez que las ecuaciónes se han construido, por lo regular es rutinario completar la solución usando un poco de cálculo. Esta tarea de expresar problemas en palabras en términos de ecuaciones matemáticas ocurre a menudo en todas las ramas de matemáticas aplicadas y es algo que el estudiante interesado en las aplicaciones deberá dominar en sus cursos de cálculo a fin de que sean de utilidad.

Por desgracia, no es posible dar rápidas y contundentes reglas por medio de las cuales cualquier problema verbal pueda reescribirse en ecuaciones. Sin embargo, existen algunos principios directores que conviene tener en mente.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Paso 1 Identifica todas las variables involuradas en el problema y denota cada una de ellas mediante un símbolo.
En el ejemplo 1, las variables eran n, el número de peces por unidad de área; w, la ganacia promedio en peso por pez, y P, la producción total de peso de peces por unidad de área. En el ejemplo 2, las variables eran los dos números x y y , y P, su producto.

Paso 2 Destaca la variable que ha de ser maximizada o minimizada y exprésela en términos de las otras variables del problema.
Volviendo al ejemplo 1, la producción total P se maximizó, y escribimos $P=nw$, que expresa a P en términos de n y w. En el ejemplo 2, el producto P de x y y se maximizó y por supuesto $P=xy$.

Paso 3 Detremina todas las relaciones entre las variables. Exprese estas relaciones matemáticamente.
En el primer ejemplo, se daba la relación $w=600-3n$. En el segundo, la relación entre x y y es que su suma debía ser igual a 16, de modo que escribimos la ecuación matemática $x+y=16$.

Paso 4 Expresa la cantidad por maximizar o minimizar en términos de las otras variables. Con objeto de hacer esto, se utilizan las relaciones obtenidas en el paso 3 a fin de eliminar todas excepto una de las variables.
Recurriendo de nuevo al ejemplo 1, teníamos que $P=nw$ y $w=600-3n$, de modo que, sustituyendo w, se obtiene P en términos de n: $P=n(600-3n)$. En el ejemplo 2, tenemos que $P=xy$ y $x+y=16$, por lo que, sustituyendo y obtenemos $P=x(16-x)$.

Paso 5 Una vez que se ha expresado la cantidad requerida como una función de una variable, determina sus puntos criticos e investiga si son máximos o mínimos locales.

Seguiremos estos pasos en otro ejemplo.

Ejemplo 3

(Costo mínimo) Se ha de construir un tanque con una base cuadrada horizontal y lados rectangulares verticales. No tendrá tapa. El tanque debe tener una capacidad de 4 metros cúbicos de agua. El material con que se construirá el tanque tiene un costo de $10 por metro cuadrado. ¿Qué dimensiones del tanque minimizan el costo del material?

Solución

Paso 1 Las variables en el problema son las dimensiones del tanque y el costo de los materiales de construcción. El costo depende del área total de la base y de los lados, los cuales determinan la cantidad de material usado en la construcción. Denotemos con x la longitud de un lado de la base y con y la altura del tanque. (Véase la Fig. 26.) La cantidad que debe minimizarse es el costo total de material, que denotamos con C.

Paso 2 C es igual al área del tanque multiplicada por $10, que es el costo por unidad de área. La base es un cuadrado con lado x, de modo que tiene un área x^2. Cada lado es un rectángulo con dimensiones x y y, y tiene un área de xy. El área total de la base más los cuatro lados es por tanto x^2+4xy. En consecuencia, escribimos

$$C=10(x^2+4xy)$$

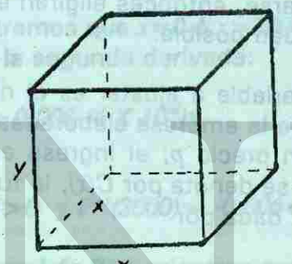


Fig. 26

Paso 3 Observa que la cantidad por minimizar está expresada como una función de dos variables, de modo que necesitamos una relación entre x y y a fin de eliminar una de éstas. Esta relación se obtiene del requerimiento (establecido en el problema) de que el volumen del tanque debe ser de 4 metros cúbicos. El volumen es igual al área de la base por la altura, esto es, x^2y, y así tenemos la condición

$$x^2y=4$$

Paso 4 Por el paso 3, $y = 4/x^2$, y así

$$C = 10\,[x^2+4x(4/x^2)] = 10\,[x^2+16/x]$$

Paso 5 Podemos derivar la última expresión y determinar los puntos críticos de C.

$$\frac{dC}{dx}=10\left(2x-\frac{16}{x^2}\right)=20\left(x-\frac{8}{x^2}\right)=0$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Así, $x - 8/x^2 = 0$ y por tanto $x^3 = 8$; es decir, $x = 2$.

La base del tanque debería tener en consecuencia un lado de 2 metros de longitud. La altura del tanque es ahora dada por

$$y = 4/x^2 = 4/(2)^2 = 1$$

Es fácil verificar que $d^2C/dx^2 > 0$ cuando $x = 2$, de modo que este valor de x representa un mínimo local de C.

Una de las aplicaciones más importantes de la teoría de máximos y mínimos es a las operaciones de empresas comerciales. Esto ocurre por una razón simple, es decir que una empresa selecciona su estrategia y nivel de operación en tal forma que maximice su utilidad. Así pues, si la administración de la empresa sabe cómo depende la utilidad de alguna variable que puede ajustarse, entonces eligirán el valor de tal variable de modo que produzca la máxima utilidad posible.

Consideremos el caso en que la variable a ajustar es el nivel de producción, x (el número de unidades del producto de la empresa elaboradas por semana o por mes). Si cada una unidad se vende a un precio p, el ingreso es $R(x) = p(x)$. El costo de producir x artículos depende de x y se denota por $C(x)$, la función de costo. Se sigue que la utilidada es una función de x dada por

$$P(x) = R(x) - C(x) = px - C(x)$$

Deseamos elegir el valor de x que haga a P máxima.

En primer término abordemos el caso en que una pequeña empresa vende su producto en un mercado de libre competencia. En esta situación, el volumen de ventas x de esta empresa particular no afectará el precio del mercado para el artículo en cuestión. Podemos suponer que el precio p es constante, independiente de x, determinado por fuerzas económicas fuera de control de nuestra pequeña empresa. El ejemplo siguiente ilustra un problema de esta clase.

Ejemplo 4

(Maximización de utilidades) Una pequeña empresa manufacturera puede vender todos los artículos que produce a un precio de $6 cada uno. El costo de producir x artículos a la semana (en dólares) es

$$C(x) = 1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3$$

¿Qué valor de x debemos seleccionar con objeto de maximizar las utilidades?

Solución

El ingreso producido por la venta de x artículos a $6 cada uno es $R(x) = 6x$ dólares. Por consiguiente, la utilidad por semana es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 6x - (1000 + 6x - 0.003x^2 + 10^{-6}x^3) \\ &= -1000 + 0.003x^2 - 10^{-6}x^3 \end{aligned}$$

A fin de encontrar el valor máximo de P, buscamos los puntos criticos en la forma usual y luego investigamos su naturaleza. Derivando obtenemos

$$P'(x) = 0.006x - (3 \times 10^{-6})x^2$$

y haciendo $P'(x) = 0$, encontramos que $x = 0$ ó $x = 2000$. Podemos aplicar a cada uno de estos valores el criterio de la segunda derivada:

$$P''(x) = 0.006 - (6 \times 10^{-6})x$$

de modo que

$$P''(0) = 0.006 > 0 \quad y \quad P''(2000) = -0.006 < 0$$

Así que $x = 0$ es un mínimo local de $P(x)$, mientras que $x = 2000$ es un máximo local. Este último valor representa el nivel de producción en que la utilidad es máxima. Este valor está dado por

$$\begin{aligned} P(2000) &= -1000 + 0.003(2000)^2 - 10^{-6}(2000)^3 \\ &= 3000 \end{aligned}$$

o $3000 por semana.

Ejercicio 4.5

1. (Teoría de números) Determina dos números cuya suma sea 10 tales que su producto sea máximo.
2. (Teoría de números) Encuentra dos números con suma igual a 8, de modo que la suma de sus cuadrados sea un mínimo.
3. (Teoría de números) Determina dos números positivos cuya suma sea 75, tales que el producto de uno por el cuadrado del otro sea máximo.
4. (Teoría de números) Determina dos números positivos con suma igual a 12 de modo que la suma de sus cubos sea un mínimo.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5. (Geometría) Demuestra que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. (Costo de cercas) Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de $15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a $20?

7. (Costos de cercas) Repite el ejercicio 6 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

8. (Diseño de un folleto impreso) Un folleto impreso ha de contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

9. (Diseño de una cisterna) Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pies cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente al concreto, determina las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

10. (Diseño de una cisterna) Repite el ejercicio 9 si la forma de la cisterna es un cilindro con base y tapas circulares.

11. (Costo promedio mínimo) El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\overline{C}=5+\frac{48}{x}+3x^2$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentra el valor mínimo de $\overline{C}$.

12. (Utilidad máxima) Una empresa vende todas las unidades que produce a $4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escribe la expresión para la utilidad total P como una función de x.
b) Determina el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima
c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

CAPÍTULO 5
LA INTEGRAL

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, el cálculo y aplicación de las derivadas de funciones). Esta parte del tema se denomina cálculo diferencial. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado cálculo integral, en que nos interesará el proceso opuesto a la diferenciación.

Hasta ahora hemos visto que si s(t) es la distancia recorrida en el instante t por un móvil, la velocidad instantánea es v(t) = s'(t), la derivada de s(t). A fin de calcular v, sólo derivamos s(t). Sin embargo, puede suceder que ya conozcamos la función velocidad v(t) y se requiera calcular la distancia recorrida s. En tal situación, conocemos la derivada s'(t) y buscamos la función s(t), una etapa opuesta a la diferenciación. Por ejemplo, podemos estar manejando un modelo de costos en que el costo marginal es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir x artículos. O bien, podríamos conocer la tasa de producción de un pozo de petróleo como función del tiempo y debemos calcular la producción total durante cierto período.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5. (Geometría) Demuestra que entre todos los rectángulos de área igual a 100 centímetros cuadrados, el que tiene perímetro más pequeño es el cuadrado de lado igual a 10 centímetros.

6. (Costo de cercas) Un granjero desea delimitar una parcela rectangular de área 900 metros cuadrados. La cerca tiene un costo de $15 por metro. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la parcela de modo que se minimice el costo del cercado? ¿Cómo cambia su respuesta si el costo de cercado sube a $20?

7. (Costos de cercas) Repite el ejercicio 6 en el caso de que uno de los lados de la parcela es común a una cerca ya existente y sólo es necesario cercar tres lados.

8. (Diseño de un folleto impreso) Un folleto impreso ha de contener 48 pulgadas cuadradas de espacio impreso con márgenes de 3 pulgadas en la parte superior e inferior y márgenes laterales de 1 pulgada. ¿Qué dimensiones del folleto consumirán la mínima cantidad de papel?

9. (Diseño de una cisterna) Se construirá una cisterna con capacidad de 324 pies cúbicos de agua. Deberá tener una base cuadrada con cuatro lados verticales, todos fabricados con concreto, y una tapa superior de acero. Si la unidad de área de acero cuesta el doble que la correspondiente al concreto, determina las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo total de construcción.

10. (Diseño de una cisterna) Repite el ejercicio 9 si la forma de la cisterna es un cilindro con base y tapas circulares.

11. (Costo promedio mínimo) El costo promedio de fabricar cierto artículo es

$$\overline{C}=5+\frac{48}{x}+3x^2$$

en donde x es el número de artículos producidos. Encuentra el valor mínimo de $\overline{C}$.

12. (Utilidad máxima) Una empresa vende todas las unidades que produce a $4 cada una. El costo total de la empresa C por producir x unidades está dado en dólares por

$$C = 50 + 1.3x + 0.001x^2$$

a) Escribe la expresión para la utilidad total P como una función de x.
b) Determina el volumen de producción x de modo que la utilidad P sea máxima
c) ¿Cuál es el valor de la utilidad máxima?

CAPÍTULO 5
LA INTEGRAL

INTRODUCCIÓN

Hasta ahora en nuestro estudio del cálculo, nos hemos ocupado del proceso de diferenciación (esto es, el cálculo y aplicación de las derivadas de funciones). Esta parte del tema se denomina cálculo diferencial. Enseguida abordaremos el segundo campo de estudio dentro del área general del cálculo, denominado cálculo integral, en que nos interesará el proceso opuesto a la diferenciación.

Hasta ahora hemos visto que si s(t) es la distancia recorrida en el instante t por un móvil, la velocidad instantánea es v(t) = s'(t), la derivada de s(t). A fin de calcular v, sólo derivamos s(t). Sin embargo, puede suceder que ya conozcamos la función velocidad v(t) y se requiera calcular la distancia recorrida s. En tal situación, conocemos la derivada s'(t) y buscamos la función s(t), una etapa opuesta a la diferenciación. Por ejemplo, podemos estar manejando un modelo de costos en que el costo marginal es una función conocida del nivel de producción y necesitamos calcular el costo total de producir x artículos. O bien, podríamos conocer la tasa de producción de un pozo de petróleo como función del tiempo y debemos calcular la producción total durante cierto período.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

5.1 Antiderivadas

El proceso de determinar la función cuando se conoce su derivada se llama integración, y la función a determinar se denomina la antiderivada o la integral de la función dada.

Con objeto de evaluar la antiderivada de alguna función $f(x)$, debemos encontrar una función $F(x)$ cuya derivada sea igual a $f(x)$. Por ejemplo, supongamos que $f(x)=2x$. Puesto que sabemos que $d/dx\ (x^2)=2x$, concluimos que podemos elegir $F(x)=x^2$. En consecuencia, una antiderivada de $2x$ es x^2.

Sin embargo, debe observarse que esta respuesta no es única, porque las funciones x^2+1, x^2-3 y $x^2+½$ todas tienen a $2x$ como derivada. De hecho, para cualquier constante C, x^2+C tiene derivada $2x$; en consecuencia, x^2+C es una antiderivada de $2x$ para cualquier C. La constante C, que puede tener un valor arbitrario, se conoce como la constante de integración.

El hecho de que no sean únicas es común a todas las antiderivadas. Cualquier constante puede sumarse a una antiderivada sin alterar la propuesta de ser la antiderivada de una función dada. Sin embargo, ésta no es la única ambigüedad que existe: si $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$, entonces cualquier otra antiderivada de $f(x)$ difiere de $F(x)$ sólo por una constante. Por tanto, podemos decir que si $F'(x)=f(x)$, entonces la antiderivada general de $f(x)$ está dada por $F(x)+C$, en donde C es cualquier constante.

Dado que la constante de integración es arbitraria (es decir, puede ser cualquier número real), la integral así obtenida recibe el nombre más propio de integral indefinida. Algunas veces diversos métodos de evaluar una integral pueden dar la respuesta en diferentes formas, pero siempre se dará el caso en que las dos respuestas sólo difieren por una constante.

Sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Escribimos esta afirmación en la forma

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

que se lee como la integral de $f(x)\,dx$, es igual a $F(x)+C$. La función $f(x)$ por integrar se denomina el integrando y el símbolo $\int$ es el signo de integral. El símbolo

$$\int \ldots . dx$$

indica la integral, con respecto a x, de .... Es el inverso del símbolo

$$\frac{d}{dx}\cdots$$

que significa derivada, con respecto a x, de.... El signo de integral y dx van juntos. El signo de integral indica la operación de integración y dx especifica que la variable de integración es x. El integrando siempre se coloca entre el signo de integral y la diferencial de la variable de integración.

Por ejemplo, podemos escribir

$$\int 2x\,dx = x^2+C$$

A partir de la definición de integral, es claro que

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$$

Esto es, el proceso de diferenciación neutraliza el efecto del proceso de integración.

Estableceremos un número de fórmulas de integración simple y estándar. La primera de éstas se conoce como fórmula de la potencia; nos indica cómo integrar cualquier potencia de x con excepción de la recíproca de x.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n\neq -1) \quad \textit{(Fórmula de la potencia)}$$

Así, se quiere integrar cualquier potencia de x con excepción de la recíproca de la primera potencia, debemos aumentar la potencia en 1, luego dividimos entre el nuevo exponente y, por último, sumamos la constante de integración arbitraria.

Esta fórmula se obtiene a partir de la fórmula correspondiente para derivadas. Observemos que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\left(x^{n+1}\right)$$

En consecuencia, dado que la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es x^n, una antiderivada de x^n debe ser $x^{n+1}/(n+1)$. La antiderivada general se obtiene sumando la constante de integración.

Ejemplo 1

(a) $\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$ $\quad (n=3)$

(b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C$ $\quad (n=-2)$

$= -\frac{1}{x} + C$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{-1/2+1}}{(-½+1)} + C = 2\sqrt{t} + C$ $\quad (n=-½)$

(d) $\int dx = \int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$ $\quad (n=0)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ahora probamos dos teoremas que simplificarán el álgebra de integración.

TEOREMA 1 La integral del producto de una constante de una función de x es igual a la constante por la integral de la función. Esto es, si c es una constante.

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

Ejemplo 2

(a) $\int 3x^2\, dx = 3\int x^2\, dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$

(b) $\int 2x^3\, dx = 2\int x^3\, dx = \frac{2x^4}{4} + C = \frac{x^4}{2} + C$

(c) $\int 5\, dx = 5\int 1\, dx = 5x + C$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 Tenemos que

$$\frac{d}{dx}\left[c\int f(x)\, dx\right] = c\,\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] = cf(x)$$

Por consiguiente, $c\, f(x)$ es la derivada de $c \int f(x)dx$, y así a partir de la definición de antiderivada, se sigue que $c \int f(x)dx$ debe ser la antiderivada de $c\, f(x)$. En otras palabras,

$$\int c\, f(x)\, dx = c\int f(x)\, dx$$

que prueba el resultado.

Como resultado de este teorema, se sigue que podemos sacar cualquier constante multiplicativa del interior del signo de integral.

Observación: Las variables no pueden sacarse del signo de integral. Por ejemplo,

$$\int x\,(x^3)dx \neq x\int x^3\, dx$$

TEOREMA 2 La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de sus integrales.

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Observación: Este resultado puede extenderse a la diferencia de dos funciones o cualquier suma algebraica de un número finito de funciones.

Ejemplo 3
Calcula la integral de $(x - 3/x)^2$.

Solución
Desarrollamos $(x-3/x)^2$ con objeto de expresar el integrando como una suma de funciones potencia.

$$\int \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 - 6 + \frac{9}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x^2\, dx - \int 6\, dx + \int 9x^{-2}\, dx$$

$$= \int x^2\, dx - 6\int 1\, dx + 9\int x^{-2}\, dx$$

$$= \frac{x^{2+1}}{2+1} - 6x + 9\,\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \frac{x^3}{3} - 6x - \frac{9}{x} + C$$

Ejemplo 4

Encuentra la antiderivada de

$$\frac{3 + 7t^2 + t^3}{t^2}$$

Solución

$$\int \frac{3 + 7t^2 + t^3}{t^2}\, dt = \int \left(\frac{3}{t^2} + 7 + t\right) dt$$

$$= 3\int t^2\, dt + 7\int 1\, dt + \int t\, dt$$

$$= 3\,\frac{t^{2+1}}{-1} + 7t + \frac{t^{1+1}}{2} + C$$

$$= -\frac{3}{t} + 7t + \frac{t^2}{2} + C$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx\right] + \frac{d}{dx}\left[\int g(x)\, dx\right]$$

$$= f(x) + g(x)$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

En consecuencia, $f(x) + g(x)$ es la derivada de $\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$, y así por la definición de antiderivada,

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Ejemplo 5

(Costo extra de producción) Una compañía actualmente produce 150 unidades por semana de producto. Por experiencia, saben que el costo de producir la unidad número x en una semana (esto es, el costo marginal) está dado por

$$C'(x) = 25 - 0.02x$$

Suponiendo que este costo marginal aún se aplica, determina el costo extra por semana que debería considerarse al elevar la producción de 150 a 200 unidades por semana.

Solución

El costo marginal es la derivada de la función de costo. En consecuencia, la función de costo se obtiene integrando la función de costo marginal.

$$\begin{aligned} C(x) &= \int C'(x)\,dx \\ &= \int (25 - 0.02x)\,dx \\ &= 25x - (0.02)\frac{x^2}{2} + K = 25x - 0.01x^2 + K \end{aligned}$$

en donde K es la constante de integración. No tenemos la información suficiente con objeto de determinar el valor de K. Sin embargo, deseamos calcular el incremento en el costo que resulta de elevar x de 150 a 200 (esto es, C(200) - C(150)).

$$\begin{aligned} C(200) &= 25(200) - 0.01(200)^2 + K = 4600 + K \\ C(150) &= 25(150) - 0.01(150)^2 + K = 3525 + K \end{aligned}$$

por consiguiente,

$$C(200) - C(150) = (4600 + K) - (3525 + K) = 1075$$

El incremento en el costo semanal sería por tanto $1075. Nótese que la constante desconocida K no aparece en la respuesta final.

Ejemplo 6

(Ingreso y demanda) El ingreso marginal de una empresa está dado por

$$R'(x) = 15 - 0.01x$$

a) Determina la función de ingreso
b) Encuentra la relación de demanda para el producto de la empresa

Solución

a) La función de ingreso $R(x)$ es la integral de la función de ingreso marginal Así que

$$\begin{aligned} R(x) &= \int R'(x)\,dx = \int (15 - 0.01x)\,dx \\ &= 15x - 0.01\frac{x^2}{2} + K = 15x - 0.005x^2 + K \end{aligned}$$

en donde K es la constante de integración. A fin de determinar K, usamos el hecho de que el ingreso debe ser cero cuando no se venden unidades. Es decir, si $x=0$, $R=0$. Haciendo $x=0$ y $R=0$ en nuestra expresión de $R(x)$, obtenemos

$$0 = 15(0) - 0.005(0^2) + K$$

lo que da $K=0$. Por consiguiente, la función de ingreso es

$$R(x) = 15x - 0.005x^2$$

b) Si cada artículo que la empresa produce se vende a un precio p, se sigue que el ingreso obtenido por la venta de x artículos está dado por $R = px$. Así que

$$px = 15x - 0.005x^2$$

o bien

$$p = 15 - 0.005x$$

que es la relación de demanda requerida.

Ejercicio 5-1

Determina las integrales de las funciones siguientes.

1. x^7
2. $\sqrt[3]{x}$
3. $1/x^3$
4. $1/\sqrt{x}$
5. $7x$
6. $2x^4$
7. $8/x^5$
8. x^2-2x-3
9. x^3-8
10. $3x + 3/x^2$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

11. $8/x^2 + x^2/8$

12. $\frac{x^2-3x}{x}$

13. $(x-1)^2$

14. $\sqrt{3x}$

15. $(x+2)(x-2)$

16. ex^{e+1}

17. $x^7 + 7x^5 + 7/x^3 + 7x$

18. $7x^2 - 3x + 8 + 1/x^3 + 2/x^2$

19. $3x^2 - 5x + 7/x^2 + 2$

20. $(x-2)(2x+3)$

21. $(x+1)(3x-2)$

22. $(x+3)(2x-1)$

23. $(x+2)^2$

24. $(2x-3)^2$

25. $(x + 1/x)^2$

Encuentra las antiderivadas de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes según el caso.

26. $4x^3+3x^2+2x+1+1/x^2+1/x^3$

27. $3t^4-5t^3+7$

28. $\sqrt{u}\,(u^2+3u+7)$

29. $\frac{2y^3+7y^2-6y}{3y}$

30. $\sqrt{x}\,(x+1)\,(2x-1)$

Evalúa las integrales siguientes.

31. $\int \frac{1 + 7x^2 - 2x^3}{x^2}\,dx$

32. $\int (\sqrt{2}y+1)^2 dy$

33. (Velocidad y distancia)
La velocidad del movimiento en el instante t es $(t + \sqrt{t})^2$. Calcula la distancia recorrida en el instante t.

34. (Aceleración)
La aceleración de un móvil en el instante t es $3 + 0.05t$.

a) Determina la velocidad en cualquier instante t si la velocidad inicial en $t=0$ es de 60 unidades.

b) Calcula la distancia recorrida por el móvil en el instante t si la distancia es cero cuando $t=0$.

35. (Costo marginal)
La función de costo marginal de una empresa es $C'(x) = 30-0.05x$

a) Determina la función de costo $C(x)$, si los costos fijos de la empresa son de $2000 por mes.

b) ¿Cuánto costará producir 150 unidades en un mes?

36. (Ingreso marginal)
La función de ingreso marginal de cierta empresa es

$$R'(x) = 20-0.02x-0.003x^2$$

a) Encuentra la función de ingreso.

b) ¿Cuánto ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?

c) ¿Cuál es la función de demanda del producto de la empresa?

5.2 Área bajo Curvas

En esta sección y en las siguientes nos ocuparemos del cálculo de áreas de regiones que tienen fronteras curveadas. Estas pueden evaluarse usando las integrales definidas.

Definición

Sea $f(x)$ una función con una antiderivada que denotaremos por $F(x)$. Sean a y b dos números reales tales que $f(x)$ y $F(x)$ existen para todos los valores de x en el intervalo cerrado con puntos extremos a y b. Entonces la integral definida de $f(x)$ de $x=a$ a $x=b$ se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y se define por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Los números a y b se denominan los límites de integración, a es el límite inferior y b es el límite superior. Por lo regular $a<b$, pero esto no es esencial.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ® DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Cuando evaluamos una integral definida, se acostumbra utilizar por conveniencia unos paréntesis rectangulares grandes en el lado derecho, de la manera siguiente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Leemos esto como la integral definida de $f(x)$ de $x=a$ a $x=b$ es $F(x)$ en b menos $F(x)$ en a. La notación de paréntesis que aparece enmedio significa que la función dentro de ellos debe evaluarse en los dos valores del argumento que aparecen después de los paréntesis. La diferencia entre estos dos valores de la función se toma en el orden siguiente: el valor en el argumento superior menos el valor del argumento inferior.

Al evaluar integrales definidas, omitimos la constante de integración de la antiderivada de $f(x)$ porque esta constante de integración se cancela en la respuesta final. Sea $F(x)+C$ cualquier antiderivada de $f(x)$, en donde C es la constante de integración. Luego, por la definición anterior

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+C]_a^b$$

$$= [F(b) + C] - [F(a) + C]$$

$$= F(b) - F(a)$$

y C ha desaparecido de la respuesta

Ejemplo 1

Evalúa la integral definida siguiente.

$$\int_2^3 x^4\,dx$$

Solución

a) Tenemos que $\int x^4\,dx = x^5/5$. Así que

$$\int_2^3 x^4 dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_2^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{2^5}{5} = \frac{1}{5}(3^5 - 2^5) = \frac{211}{5}$$

Nuestro principal interés en esta sección será el cálculo de áreas de regiones acotadas por curvas. Sea $f(x)$ una función dada definida y continua en un intervalo $a \le x \le b$ y que toma valores no negativos en tal intervalo. La gráfica de $y = f(x)$ se encuentra por completo por arriba del eje x y entre las líneas verticales $x=a$ y $x=b$. Esta área aparece sombreada en la figura 1.

Existe una estrecha relación entre el área A y la antiderivada de la función $f(x)$. Esta relación es el contenido del llamado teorema fundamental del cálculo, quizá el teorema más importante de todo el cálculo.

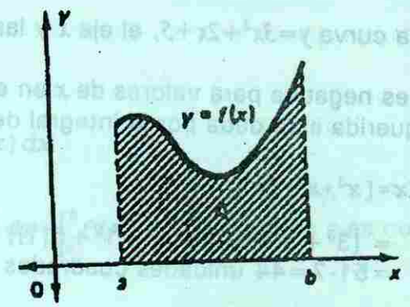


Fig. 1

Teorema 1 (Teorema fundamental del cálculo) Sea $f(x)$ una función continua no negativa en $a \le x \le b$ y sea $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$. Entonces A, el área entre $y = f(x)$, el eje x y las líneas verticales $x=a$ y $x=b$, está dada por la integral definida

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Antes de presentar la demostración del teorema, ilustramos su aplicación mediante algunos ejemplos.

Ejemplo 2

Evalúa el área entre la gráfica $y=x^2$ y el eje x, de $x=0$ a $x=2$.

Solución

El área requerida se ha sombreado en la figura 2. Puesto que $f(x)=x^2$ no es negativa, esta área es igual a la integral definida $\int_a^b f(x)dx$, en donde $f(x)= x^2$, $a=0$ y $b=2$.

Así que el área es

$$\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

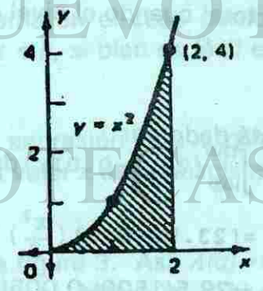


Fig. 2

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

Ejemplo 3
Determina el área acotada por la curva $y=3x^2+2x+5$, el eje x y las líneas $x=1$ y $x=3$

Es claro que $f(x)=3x^2+2x+5$ no es negativa para valores de x en el intervalo definido por $1 \leq x \leq 3$. Así, el área requerida está dada por la integral definida siguiente:

$$\int_1^3 (3x^2+2x+5)\,dx=[x^3+x^2+5x]_1^3$$
$$=[3^3+3^2+5(3)]-[1^3+1^2+5(1)]$$
$$=51-7=44 \text{ unidades cuadradas}$$

Si $C(x)$ denota el costo total de producir x unidades de cierto artículo, se sigue que $C'(x)$ representa la función de costo marginal. Ahora, por la definición de integral definida,

$$\int_a^b C'(x)\,dx=[C(x)]_a^b=C(b)-C(a)$$

Pero $C(b)-C(a)$ representa el cambio en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de a a b unidades. Se sigue que $\int_a^b C'(x)\,dx$ también representa ese mismo cambio en el costo total.

Así que tenemos el importante resultado siguiente: el cambio en los costos de producción al incrementar el nivel de producción de a a b unidades es igual al área bajo la gráfica de la función de costo marginal $(y=C'(x))$ entre $x=a$ y $x=b$.

De manera similar, si $R'(x)$ es la función de ingreso marginal, entonces el cambio en el ingreso cuando el nivel de ventas se incrementa de a a b unidades está dado por $\int_a^b R'(x)dx$. Una interpretación análoga puede darse a $\int_a^b P'(x)dx$ en donde $P'(x)$ es la función de utilidad marginal; es el cambio en la utilidad cuando x se incrementa de a a b.

Ejemplo 4
La función de costo marginal de una empresa a un nivel de producción x es

$$C'(x)=23.5-0.01x$$

Calcula el incremento en el costo total cuando el nivel de producción se incrementa de 1000 a 1500 unidades.

Solución
El incremento en el costo total está dado por

$$\int_{1000}^{1500} C'(x)\,dx=\int_{1000}^{1500}(23.5-0.01x)\,dx$$
$$=[23.5x-0.01(\frac{x^2}{2})]_{1000}^{1500}$$
$$=23.5(1500)-0.005(1500^2)$$
$$-[23.5(1000)-0.005(1000^2)]$$
$$=35,250-11,250-(23,500-5000)=5500$$

El incremento en el costo es por consiguiente de $5500

Teorema 2

a) $\int_a^a f(x)\,dx=0$

b) $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

c) $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)$ en donde c es cualquier número real

Demostración
Sea $F(x)$ cualquier antiderivada de $f(x)$. Entonces, por la definición de integral definida, tenemos lo siguiente:

a) $\int_a^a f(x)\,dx=[F(x)]_a^a=F(a)-F(a)=0$

b) Tenemos que $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

y asimismo $\int_b^a f(x)\,dx=[F(x)]_b^a=F(a)-F(b)$

de modo que $\int_a^b f(x)\,dx=-\int_b^a f(x)\,dx$

c) La demostración de esta parte se deja como ejercicio.

Concluimos esta sección dando una demostración del teorema fundamental del cálculo. La demostración que daremos carecerá de rigor dado que no dimos una definición matemática propia del área bajo una curva. Sin embargo, podemos asegurar a los alumnos que existe una demostración rigurosa.

Demostración del teorema fundamental del cálculo.

Empezamos probando el teorema en el caso particular en que $f(x)$ es una función creciente no negativa en $a \leq x \leq b$, si bien es fácil extender la demostración a todas las funciones continuas.

Cuando $f(x) \geq 0$, buscamos una expresión para A, que represente el área bajo la curva $y=f(x)$ desde el valor a hasta el valor x de la abscisa, en donde x es cualquier número tal que $a \leq x \leq b$.

$A(x)$ es el área sombreada de la figura 3. Así, $A(a)=0$, porque es obvio que el área se reduce a cero cuando x tiende a a. Más aún, $A(b)$ es sin duda el área bajo la curva entre a y b, esto es, la cantidad A que requerimos es tal que $A(b)=A$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

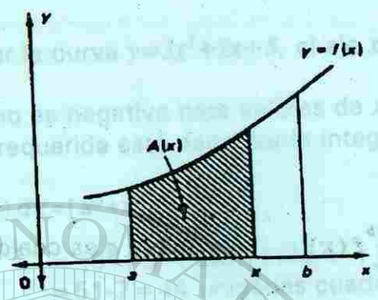


Fig. 3

Si x cambia a $x+\Delta x(\Delta x>0)$, el área $A(x)$ también se aumenta a $A+\Delta A$, en donde $A+\Delta A$ es el área bajo la curva entre los valores a y $x+\Delta x$ de la abscisa. (Véase la fig. 4) Es razonable esperar que ΔA sea igual al área que aparece sombreada en esta figura. (No podemos probar esto en forma estricta aquí dado que no ofrecimos una definición rigurosa de área).

El área ΔA es mayor que el área del rectángulo inscrito con altura $f(x)$ y ancho Δx; ΔA es menor que el área del rectángulo circunscrito con altura $f(x+\Delta x)$ y ancho Δx. Por tanto,

$$f(x)\cdot\Delta x < \Delta A < f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Dividiendo toda la expresión anterior entre Δx, obtenemos

$$f(x) < \frac{\Delta A}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$$

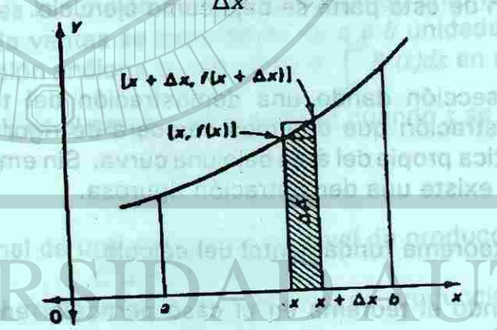


Fig. 4

dado que $f(x)$ es continua, $f(x+\Delta x)\to 0$. Después de tomar límites en las desigualdades anteriores cuando $\Delta x\to 0$, se sigue $\Delta A/\Delta x$ tiene un límite, y

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta x} = f(x) \text{ o bien } A'(x) = f(x)$$

Debido a que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, se sigue que $F'(x)=f(x)$. En consecuencia, tanto $F(x)$ como $A(x)$ son antiderivadas de $f(x)$ y por ello sólo pueden diferir en a lo más una constante; esto es

$$A(x)=F(x)+C \qquad (1)$$

en donde C es alguna constante

Haciendo $x=a$ y recordando que $A(a)=0$, tenemos

$$A(a)=F(a)+c=0$$

de modo que $C=-F(a)$. Reemplazando C por $-F(a)$ en la ecuación (1) anterior, obtenemos

$$A(x)=F(x)-F(a)$$

Por último, haciendo $x=b$ en la igualdad anterior, resulta que

$$A(b)=F(b)-F(a)$$

Pero $A(b)=A$, o sea el área total requerida bajo la curva, y hemos probado que

$$A=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

(por la definición de integral definida)

Ejercicio 5.2

Evalúa las integrales definidas siguientes

1. $\int_0^1 x^2dx$
2. $\int_{-1}^3 t^3dt$
3. $\int_1^2 (3x^2-5x+7)\,dx$
4. $\int_0^5 (u^2+u+1)\,du$

Calcula las áreas bajo las gráficas de las funciones siguientes entre los valores de x dados.

5. $y=3x+2$, $x=1$ y $x=3$
6. $y=5x^2$, $x=0$ y $x=2$
7. $y=4-x^2$, $x=0$ y $x=2$
8. $y=2x^2+3x-1$, $x=1$ y $x=4$
9. $y=x^3$, $x=0$ y $x=3$
10. $y=1+x^3$, $x=0$ y $x=2$
11. $y=2+x-x^2$, $x=-1$ y $x=2$
12. $y=x^3-x$, $x=-1$ y $x=0$

13. (Incremento en el ingreso)
La función de ingreso marginal de una empresa está dada por $R'(x)=12.5-0.02x$. Determina el incremento en el ingreso total de la empresa cuando el nivel de ventas se incrementa de 100 a 200 unidades.

14. (Incremento en las utilidades)
El costo marginal de cierta empresa está dado por $C'(x)=15.7-0.002x$, mientras que su ingreso marginal es $R'(x)=22-0.004x$. Determina el incremento en las utilidades de la empresa si las ventas se incrementan de 500 a 600 unidades.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

15. (Incremento y decrecimiento en el ingreso).
En el ejercicio 13, el nivel de ventas primero decrece de 100 a 80 unidades y luego se incrementa a 150 unidades. Determina el incremento global en el ingreso total.

5.3 Más sobre Áreas

En la sección 5.2, se estableció que el área bajo la curva $y=f(x)$ acotada por las líneas $x=a$, $x=b$ y $y=0$ (el eje x) está dado por la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ en el caso en que $f(x)\geq 0$ en $a \leq x \leq b$.

Consideremos ahora el caso correspondiente a la región acotada por la curva $y=f(x)$, las líneas $x=a$, $x=b$ y el eje x cuando $f(x)\leq 0$ si $a\leq x\leq b$. Es claro que el área en cuestión situada por completo por debajo del eje x, como se advierte en la figura 5.

Definamos $g(x)= -f(x)$ de modo que $g(x)\geq 0$ si $a\leq x\leq b$. El área acotada por $y=g(x)$ o $y=-f(x)$, las líneas $x=a$, $x=b$ y eje x. (Véase la fig. 6). Esta área, como en la última sección, está dada por la integral definida $\int_a^b g(x)\,dx$ Ahora

$$\int_a^b g(x)\,dx=G(b)-G(a)$$

en donde $G(x)$ es la antiderivada de $g(x)$. Pero dado que $g(x)=-f(x)$, debe seguirse que $F(x)=-G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Así que, $G(b)-G(a)=-F(b)+F(a)$, o bien

$$\int_a^b g(x)\,dx=-[F(b)-F(a)]=-\int_a^b f(x)\,dx$$

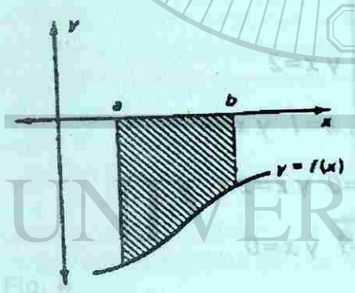


Fig. 5

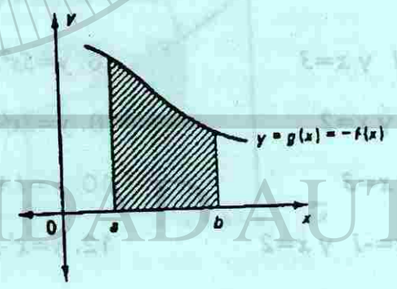


Fig. 6

Comparando las figuras 5 y 6, es claro que las dos regiones sombreadas tienen áreas de igual magnitud dado que una región puede obtenerse reflejando la otra con respecto al eje x. En consecuencia, el área situada por debajo del eje x, acotada por la curva $y=f(x)$ y las líneas $x=a$ y $x=b$, está dada por la integral definida

$$-\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 1
Determina el área acotada por $y=x^2-9$, $x=0$, $x=2$ y el eje x.

Solución
La gráfica de $y=x^2-9$ está debajo del eje x si $0\leq x \leq 2$. El área requerida (que aparece sombreada en la Fig. 7) está dada por

$$-\int_0^2 (x^2-9)\,dx=\int_0^2 (9-x^2)\,dx$$

$$=[9x-\frac{x^3}{3}]_0^2$$

$$=(9(2)-\frac{2^3}{3})-(9(0)-\frac{0^3}{3})=\frac{46}{3} \text{ unidades cuadradas}$$

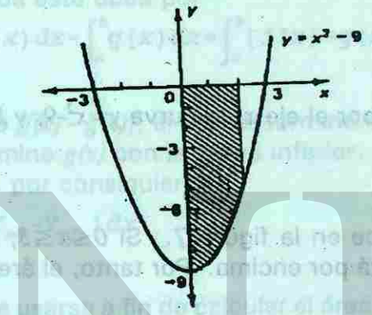


Fig. 7

Consideremos ahora el área de la región acotada por la curva $y=f(x)$ y las líneas $x=a$, $x=b$ y el eje x en el caso que $f(x)$ es algunas veces y otras negativa en el intervalo $a\leq x \leq b$ (véase fig. 8). Tal región tiene partes por debajo del eje x y otras por encima del eje x. Supondremos que podemos determinar los puntos en que la gráfica $y=f(x)$ cruza al eje x, esto es, los valores de x en que $f(x)=0$. En la figura 8 ilustramos el caso en que hay dos de tales puntos, denotados por $x=p$ y $x=q$. En este caso,

$f(x)\geq 0$ para $a \leq x \leq p$
$f(x)\leq 0$ para $p \leq x \leq q$

y asimismo

$f(x)\geq 0$ para $q\leq x \leq b$

En un problema de este tipo, calculamos el área en cada subintervalo por separado: el área requerida es entonces la suma de todas estas áreas. En la figura 8 las áreas entre $x=a$ y $x=p$, entre $x=q$ y $x=b$ está por encima del eje x, mientras que el área entre $x=p$ y $x=q$ está por debajo del eje x. Por consiguiente, el área requerida es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx+[-\int_p^q f(x)\,dx]+\int_q^b f(x)\,dx$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

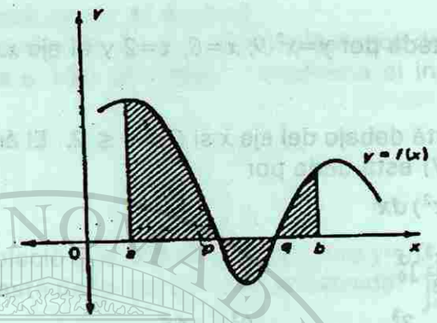


Fig. 8

Ejemplo 2

Determina el área acotada por el eje x, la curva $y=x^2-9$, y las líneas $x=0$ y $x=4$.

Solución:

La gráfica de $y=x^2-9$ aparece en la figura 7. Si $0\leq x\leq 3$, está por debajo del eje x, mientras que si $3<x<4$, está por encima. Por tanto, el área requerida está dada por

$$\int_0^3 -(x^2-9)\,dx+\int_3^4 (x^2-9)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_0^3+\left[\frac{x^3}{3}-9x\right]_3^4$$

$$=\left(-\frac{3^3}{3}+9\cdot 3\right)-\left(-\frac{0^3}{3}+9\cdot 0\right)+\left(\frac{4^3}{3}-9\cdot 4\right)-\left(\frac{3^3}{3}-9\cdot 3\right)$$

$$=18-0+\left(-\frac{44}{3}\right)-(-18)=\frac{64}{3}$$ unidades cuadradas.

Area de regiones entre curvas

Consideremos ahora el área acotada entre las curvas $y=f(x)$ y $y=g(x)$ y las líneas $x=a$ y $x=b$. En primer lugar supondremos que $f(x) > g(x) \geq 0$ en $a\leq x\leq b$ de modo que ambas curvas están arriba del eje x y la curva $y=f(x)$ está por encima de la curva $y=g(x)$. El área considerada aparece en la fig. 9. Es claro que esta área es la diferencia entre el área de la región acotada por $y=f(x)$ y el eje x y el área de la región acotada por $y=g(x)$ y el eje x; esto es, el área de la región CDEF entre las dos curvas es igual al área de ABEF menos el área de ABDC.

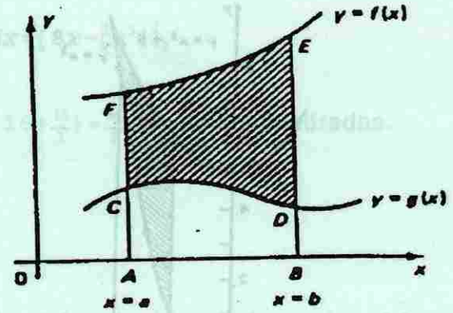


Fig. 9

Por tanto, el área requerida está dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$$

Nota que en el integrando $[f(x) - g(x)]$, el primer término está relacionado con la curva superior y el segundo término $g(x)$ con la curva inferior. Una manera conveniente de recordar esta fórmula es, por consiguiente,

$$\int_a^b (Y_{sup}-Y_{inf})\,dx$$

Esta forma también puede usarse a fin de calcular el área entre dos curvas cuando una o ambas están por debajo del eje x y asimismo si las dos curvas se cruzan entre sí.

Ejemplo 3

Determina el área entre las curvas $y=x^2+5$ y $y=x^3$ y las líneas $x=1$ y $x=2$

Solución

La gráfica de $y=x^2+5$ está por encima de la curva $y=x^3$ el intervalo $1\leq x\leq 2$. Así que el área requerida (que aparece sombreada en la figura 10) está dada por

$$A=\int_1^2 (Y_{sup}-Y_{inf})\,dx$$

$$=\int_1^2 [(x^2+5)-x^3]\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+5x-\frac{x^4}{4}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}+10-4\right)-\left(\frac{1}{3}+5-\frac{1}{4}\right)=3\frac{7}{12}$$

o $3\frac{7}{12}$ unidades cuadradas

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

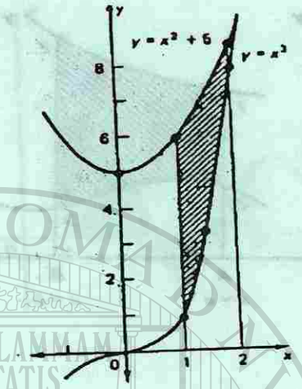


Fig. 10

Ejemplo 4
Determina el área de la región encerrada por las curvas $y=-x^2$ y $y=x^2-8$.

Solución
En este caso no se dan los límites de integración. La primera etapa es bosquejar las gráficas de las dos curvas a fin de determinar el área requerida que encierran además de los límites de integración. En la figura 11 aparecen las gráficas de las dos curvas en la cual se ha sombreado la región en cuestión.

Con objeto de encontrar los puntos de intersección de las curvas, debemos manejar las ecuaciones de las curvas como ecuaciones simultáneas y resolverlas para x y y. En ese ejemplo particular, al igualar las dos expresiones de y resulta:

$$-x^2=x^2-8 \quad \text{ó} \quad 2x^2-8=0$$

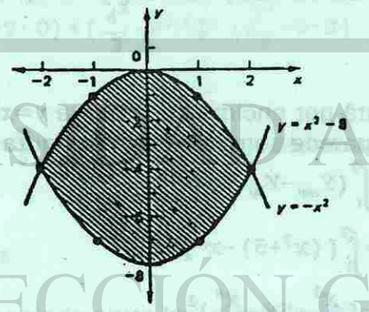


Fig. 11

En consecuencia, $x=\pm 2$. En la región que aparece en la figura 11, x varía entre $2y+2$. Por consiguiente:

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2}[\,(-x^2)-(x^2-8)\,]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}(8-2x^2)\,dx=[\,8x-\tfrac{2}{3}x^3\,]_{-2}^{2}$$

$$= (16-\tfrac{16}{3})-(-16+\tfrac{16}{3})=\tfrac{64}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicio 5.3

En cada uno de los ejercicios siguientes, determina el área de la región acotada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las líneas $x=a$ y $x=b$.

1. $y=-x^2$; $x=0$, $x=3$
2. $y=1-\sqrt{x}$; $x=1$, $x=9$
3. $y=x^3$; $x=-1$, $x=1$
4. $y=x^2-4$; $x=0$, $x=3$
5. $y=x^2-3x+2$; $x=0$, $x=3$
6. $y=1-x^2$; $x=0$, $x=2$

Encuentra el área entre los pares de curvas siguientes y entre las líneas verticales dadas.

7. $y=x^2$, $y=3x$; $x=1$, $x=2$
8. $y=x^2$, $y=2x-1$; $x=0$, $x=2$
9. $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$; $x=0$, $x=1$
10. $y=x^2$, $y=x^3$; $x=0$, $x=2$

Determina el área de la región encerrada entre los pares de curvas siguientes

11. $y=x^2$, $y=2-x^2$
12. $y=x^3$, $y=x^2$
13. $y=x^2$, $y=2x$

Encuentra el área acotada por las curvas y las líneas siguientes

14. $y=x^2$, $y=0$, $y=4$ y $x=0$ (eje y)
15. $y^2=x$, $y=0$, $y=2$ y $x=0$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 1 NOMBRE _____

SECCIÓN 1.1 FECHA _____

Para cada una de las siguientes funciones encuentra lo que se pide

1. Dada $f(x) = 5x-3$
   Calcula
   a) f(3) b) f(-4) c) f(0) d) f(8)

2. Dada $f(x) = \sqrt{x+4}$
   Calcula
   a) f(5) b) f(-3) c) f(-4) d) (-8)

3. Dada $g(a) = 5a^2-3a+4$
   Calcula
   a) f(0) b) f(-2) c) f(3) d) f(5)

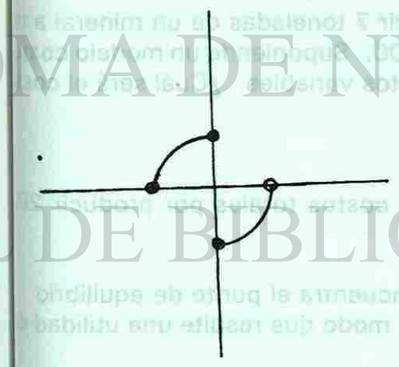
4. Dada $F(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
   Encuentra cada uno de los valores siguientes
   a) f(-2) b) f(0) c) f(0.9) d) $f(1+h)$ si $h>0$

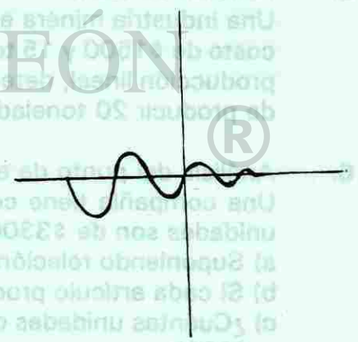
5. Dada $g(a) = 3a-4$ evalúa $\dfrac{g(a+b)-g(a)}{b}$

6. Determina el dominio de cada una de las funciones
   a) $f(x) = 5x+1$ b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-5}$ c) $g(p) = 2p^2+5p+3$

   d) $d(y) = \sqrt{4-y}$ $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ f) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x-6 & \text{si } \geq 1 \end{cases}$

7. Establecer si las gráficas representan una función





UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 2 NOMBRE _____
SECCIÓN 1.2 FECHA _____

1 Determina la pendiente de las líneas que unen cada pareja de puntos
a) (2,3) y (5,9)
b) (-8,7) y (5,-9)

2. Encuentra la ecuación y dibuja la gráfica de las líneas que satisfacen las condiciones en cada uno de los siguientes casos
a) Pasa por el punto (-3,2) y tiene pendiente 3/2
b) Pasa por los puntos (-5,-2) y (8,-5)
c) Tiene pendiente -4 y ordenada al origen 7

3. Función de costo
Una fábrica de colchones tiene costos fijos de $12000 y el costo de mano de obra y el material es de $700 por colchón. Determina la función de costo. Si cada colchón se vende por $900, encuentra la función de ingresos y la función de utilidades.

4. Función de ingresos
Un comerciante puede vender 150 unidades de un artículo al mes a un costo de $18 por unidad y 280 unidades a un costo de $16 por unidad. Expresa la demanda del mercado "x" (el número de unidades que pueden venderse al mes) como una función del precio por unidad, suponiendo que es una función lineal. Expresa los ingresos como
a) Una función del precio
b) Una función de "x"

5. Función de costo
Una industria minera encuentra que puede producir 7 toneladas de un mineral a un costo de $1500 y 15 toneladas a un costo de $1800. Suponiendo un modelo costo-producción lineal, determina el costo fijo y los costos variables. ¿Cuál será el costo de producir 20 toneladas de mineral?

6. Análisis del punto de equilibrio
Una compañía tiene costos fijos de $2500 y los costos totales por producir 200 unidades son de $3300
a) Suponiendo relación lineal escribe la ecuación
b) Si cada artículo producido se vende a $5.25 encuentra el punto de equilibrio
c) ¿Cuántas unidades deberá producir y vender de modo que resulte una utilidad de $200?

7. Relación de la demanda
Un fabricante de detergentes encuentra que las ventas son de 10000 paquetes a la semana cuando el precio es de $1.20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a $12000 cuando el precio se reduce a $1.10 por paquete. Determina la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

8. Punto de equilibrio
Encuentra el precio (p) y la cantidad de equilibrio (x) de las curvas de demanda y oferta siguiente:
La ecuación de la demanda "D" es $2p+3x=100$
La ecuación de la oferta "S" es $p=1/10x+2$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 3 NOMBRE _____
SECCIÓN 1.3 FECHA _____

1. Bosqueja las gráficas de las siguientes parábolas y determina sus vértices
   a) $y = 3x^2-2x+5$ b) $y = 5-4x-2x^2$

2. Ingreso máximo
   El ingreso mensual por concepto de la venta de "x" unidades de cierto artículo está dado por $R(x) = 8x-0.02x^2$ pesos. Determina el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

3. Utilidad
   La utilidad P(x) que se obtiene por la venta de "x" unidades de libros está dada por $P(x) = 36x-x^2$. Determina el número de libros que deben venderse con objeto de maximizar la utilidad y ¿cuál es esta utilidad máxima?

4. Cercas
   Un granjero tiene 650 metros de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar? y ¿cuáles son las dimensiones?

5. Publicidad y ventas
   El número "y" de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad "x" (en pesos) gastada en publicidad y está dada por $y = 70+150x-0.3x^2$. ¿Cuánto deberían gastar a la semana en publicidad con objeto de obtener un volumen de ventas máximo? ¿cuál es este volumen de ventas máximo?

6. Ingresos y utilidades máximas
   Los costos fijos semanales de una empresa por su producto son de $200 y el costo variable por unidad es de $0.70. La empresa puede vender "x" unidades a un precio de "$p" por unidad en donde $2p = 5-0.01x$. Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana de modo que obtenga
   a) Ingresos máximos b) Utilidad máxima

7. Relación de la demanda
   Un fabricante de detergentes encuentra que las ventas son de 10000 paquetes a la semana cuando el precio es de $1.20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a $12000 cuando el precio se reduce a $1.10 por paquete. Determina la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

8. Punto de equilibrio
   Encuentra el precio (p) y la cantidad de equilibrio (x) de las curvas de demanda y oferta siguiente:
   La ecuación de la demanda "D" es $2p+3x = 100$
   La ecuación de la oferta "S" es $p = 1/10x+2$

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 3 NOMBRE _____
SECCIÓN 1.3 FECHA _____

1. Bosqueja las gráficas de las siguientes parábolas y determina sus vértices
   a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ b) $y = 5 - 4x - 2x^2$

2. Ingreso máximo
   El ingreso mensual por concepto de la venta de "x" unidades de cierto artículo está dado por $R(x) = 8x - 0.02x^2$ pesos. Determina el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

3. Utilidad
   La utilidad P(x) que se obtiene por la venta de "x" unidades de libros está dada por $P(x) = 36x - x^2$. Determina el número de libros que deben venderse con objeto de maximizar la utilidad y ¿cuál es esta utilidad máxima?

4. Cercas
   Un granjero tiene 650 metros de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar? y ¿cuáles son las dimensiones?

5. Publicidad y ventas
   El número "y" de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad "x" (en pesos) gastada en publicidad y está dada por $y = 70 + 150x - 0.3x^2$. ¿Cuánto deberían gastar a la semana en publicidad con objeto de obtener un volumen de ventas máximo? ¿cuál es este volumen de ventas máximo?

6. Ingresos y utilidades máximas
   Los costos fijos semanales de una empresa por su producto son de $200 y el costo variable por unidad es de $0.70. La empresa puede vender "x" unidades a un precio de "$p" por unidad en donde $2p = 5 - 0.01x$. Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana de modo que obtenga
   a) Ingresos máximos b) Utilidad máxima

7. Relación de la demanda
   Un fabricante de detergentes encuentra que las ventas son de 10000 paquetes a la semana cuando el precio es de $1.20 por paquete, pero que las ventas se incrementan a $12000 cuando el precio se reduce a $1.10 por paquete. Determina la relación de demanda, suponiendo que es lineal.

8. Punto de equilibrio
   Encuentra el precio (p) y la cantidad de equilibrio (x) de las curvas de demanda y oferta siguiente:
   La ecuación de la demanda "D" es $2p + 3x = 100$
   La ecuación de la oferta "S" es $p = 1/10x + 2$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 3 NOMBRE _____

SECCIÓN 1.3 FECHA _____

1. Bosqueja las gráficas de las siguientes parábolas y determina sus vértices
   a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ b) $y = 5 - 4x - 2x^2$

2. Ingreso máximo
   El ingreso mensual por concepto de la venta de "x" unidades de cierto artículo está dado por $R(x) = 8x - 0.02x^2$ pesos. Determina el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar el ingreso. ¿Cuál es el correspondiente ingreso máximo?

3. Utilidad
   La utilidad P(x) que se obtiene por la venta de "x" unidades de libros está dada por $P(x) = 36x - x^2$. Determina el número de libros que deben venderse con objeto de maximizar la utilidad y ¿cuál es esta utilidad máxima?

4. Cercas
   Un granjero tiene 650 metros de cerca con la cual delimitará un corral rectangular. ¿Cuál es el área máxima que puede cercar? y ¿cuáles son las dimensiones?

5. Publicidad y ventas
   El número "y" de unidades vendidas cada semana de cierto producto depende de la cantidad "x" (en pesos) gastada en publicidad y está dada por $y = 70 + 150x - 0.3x^2$. ¿Cuánto deberían gastar a la semana en publicidad con objeto de obtener un volumen de ventas máximo? ¿cuál es este volumen de ventas máximo?

6. Ingresos y utilidades máximas
   Los costos fijos semanales de una empresa por su producto son de $200 y el costo variable por unidad es de $0.70. La empresa puede vender "x" unidades a un precio de "$p" por unidad en donde $2p = 5 - 0.01x$. Cuántas unidades deberán producirse y venderse a la semana de modo que obtenga
   a) Ingresos máximos b) Utilidad máxima

LABORATORIO No. 4 NOMBRE _____

SECCIÓN 1.4 FECHA _____

Para las siguientes funciones determina los dominios y bosqueja sus gráficas

1. $f(x) = x^2 + 4$
2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$
8. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2 - x}}$
9. $f(x) = 2 + \sqrt{x - 2}$
10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 5 NOMBRE _____
SECCIÓN 1.5 FECHA _____

Calcula "f+g", "f-g", "(f)(g) y "f/g" en cada uno de los siguientes ejercicios y determina el dominio en cada una de las funciones resultantes.

1. $f(x)=2x+5$, $g(x)=-4x+8$

2. $f(x)=x^2-3x$, $g(x)=x+1$

3. $f(x)=\frac{x}{x+1}$, $g(x)=1/x$

4. $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3+x^2$

Dada $f(x)=5x^2$ y $g(x)=7x-9$, evalúa cada una de las composiciones siguientes

5. $(f\circ g)(3)$

6. $(g\circ f)(2)$

7. $(f\circ g)(\frac{1}{2})$

8. $(g\circ f)\ (3/5)$

Determina $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ en los siguientes ejercicios

9. $f(x)=3/x$, $g(x)=\frac{x}{x+1}$

10. $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$, $g(x)=\frac{x-2}{x+1}$

LABORATORIO No. 6 NOMBRE _____
REPASO CAPITULO 1 FECHA _____

1. Dada $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$

Calcula
a) f(0) b) f(-1) c) f(5) d) f(-2)

2. Dada $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si } x<0 \\ 2-x & \text{si } 0\le x<2 \end{cases}$

Encuentra cada uno de los valores siguientes
a) f(-2) b) f(0) c) f(1) d) f(-4)

3. Encuentra la ecuación y dibuja la gráfica de la línea que pasa por los puntos (-5,-4) y (7,2)

4. Función de costo
Las aerolíneas del Pacífico tienen una tarifa de $6.00 por transporte cada kilogramo de mercancía 900 kilómetros y de $10.00 por transportar cada kilogramo 1700 kilómetros. Determina la función de costo, suponiendo que es una función lineal de la distancia.

5. Cuotas de estacionamiento
Un céntrico estacionamiento tiene una tarifa de $2.00 por la primera hora de estacionamiento y $1.00 por cada hora adicional o porción de ella hasta un máximo de $6.00 al día. Expresa las tarifas de estacionamiento totales P (en pesos) como función del número de horas en que el automóvil se encuentra estacionado al día.

6. Para las siguientes funciones determina los dominios y bosqueja sus gráficas
a) $f(x)=x^2+3x-1$
b) $f(x)=\frac{x}{3-x}$

7. Calcula "f+g", "f-g", "(f)(g)" y "f/g" dado $f(x)=x^2+1$ y $g(x)=3x^2-1$

8. Dado $f(x)=2x2$ y $g(x)=4x+3$ evalúa
a) $(f\circ g)2$ b) $(g\circ f)\ 3/5$

9. Determina $(f\circ g)(x)$ y $(g\circ f)(x)$ dado $f(x)=5/x$ y $g(x)=x+2$

10. Función de ingreso
La demanda "x" de cierto artículo está dado por $x=1500-10p$, en donde p es el precio por unidad del artículo. El ingreso mensual R obtenido de las ventas de este artículo está dado por $R=1500-15p^2$. ¿Cómo depende R de "x"?

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 7 NOMBRE _____

SECCIÓN 2.1 FECHA _____

Evaluar el límite dado

1. $\lim_{x\to 1} 2x+3$

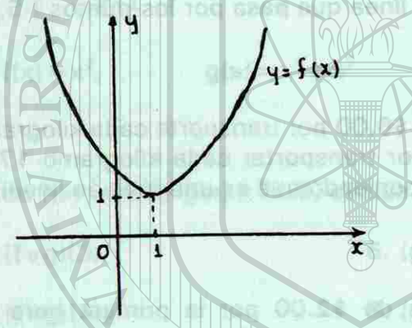
2. $\lim_{x\to 0} x^3$

3. $\lim_{x\to -3} \sqrt{x^2+3}$

4. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

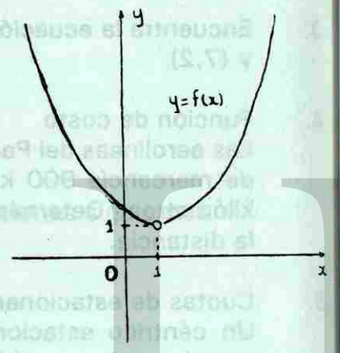
Utilizar la gráfica para encontrar el límite, si es que existe

5.



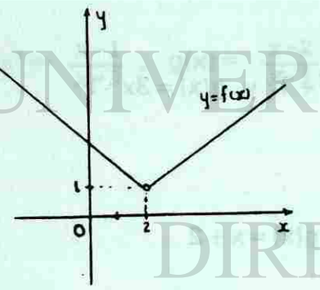
$\lim_{x\to 1} f(x)$

6.



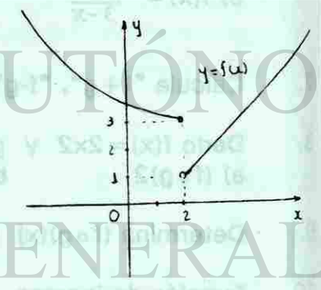
$\lim_{x\to 1} f(x)$

7.



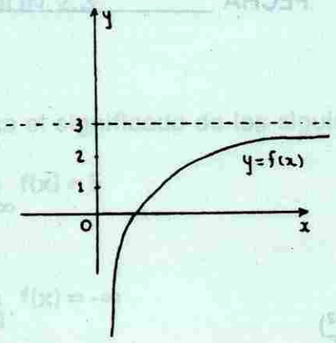
$\lim_{x\to 2} f(x)$

8.



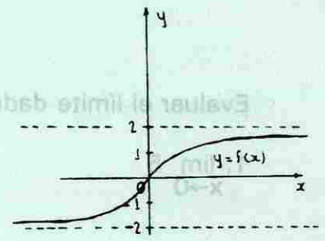
$\lim_{x\to 2} f(x)$

9.



$\lim_{x\to \infty} f(x)$

10.



a) $\lim_{x\to \infty} f(x)$ b) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 8 NOMBRE _____
SECCIÓN 2.2 FECHA _____

Evaluar el límite dado

1. $\lim_{x\to 0} 5$

2. $\lim_{x\to 1} \pi$

3. $\lim_{x\to 3} (x-1)(x+2)$

4. $\lim_{x\to 2} (x + \frac{x^2}{2})$

Transforma la expresión dentro del límite y evalúalo

5. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2-16}{x+4}$

6. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3}$

7. $\lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x+4}$

8. $\lim_{x\to 1} \frac{x^6-x^3}{x^4-x^3}$

9. $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9}$

10. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-x-6}{x^2+2x-15}$

LABORATORIO No. 9 NOMBRE _____
SECCIÓN 2.3 FECHA _____

Explica el significado de los siguientes límites

1. $\lim_{x\to \infty} f(x) = 5$

2. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \infty$

3. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$

4. $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -3$

Explica el comportamiento de la función, cuando x tiende al valor dado

5. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

6. $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$

7. $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$

8. $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x^2-1}$

Evalúa los siguientes límites

9. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2}$

10. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2+3}{x^2}$

11. $\lim_{x\to \infty} \frac{x+3}{x^2+2x}$

12. $\lim_{x\to \infty} \frac{4x^2+2x-3}{2x^2+x}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 10 NOMBRE _____
SECCIÓN 2.4 FECHA _____

Determina el dominio de la función y los puntos donde la función es discontinua

1. $f(x) = x^2 + 1$

2. $f(x) = \frac{1}{x-3}$

3. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

4. $f(x) = \frac{(x-3)}{x^2-x-6}$

5. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Determina si la función dada es continua en los intervalos indicados

7. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

a) (-1;1), b)[-1;1]

8. $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

(1;5)

9. $f(x) = \frac{1}{x^2-x-12}$

a) [0;4), b) (-3;4)

10. $f(x) = \sqrt{x+3}$

[-3;∞); (-3;∞)

LABORATORIO No. 11 NOMBRE _____
REPASO CAPITULO 2 FECHA _____

Evalúa los siguientes límites

1. $\lim_{x\to 1} \sqrt{x-1}$

2. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+1}$

3. $\lim_{x\to 3} \frac{4x-12}{x^2-x-6}$

4. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-x^2}{x^2-x}$

5. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2-1}$

6. $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^3-2x+3}{x^3-x}$

Determina el dominio de la función y señala los puntos donde la función es discontinua

7. $f(x) = \frac{x^4-x^2}{x^2-x}$

8. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Determina si la función dada es continua en los intervalos indicados

9. $f(x) = \sqrt{x}$

a) (0;∞), b)[0;∞)

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

(4;∞), [4;∞)

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 12 NOMBRE _____
SECCIÓN 3.1 FECHA _____

Determina los incrementos de las funciones siguientes para los intervalos dados

1. $f(x) = x^2\text{-}1$ $x = 3,\ \Delta x = 0.5$

2. $f(x) = 3x\text{-}5$ $x = 2,\ \Delta x = 1$

3. $f(t) = t^2\text{-}t$ $t = 2,\ \Delta t = 0.5$

4. $f(x) = x^2 + 2x$ "x" a "$x + \Delta x$"

Determina la razón de cambio promedio de cada función en el intervalo dado

5. $f(x) = x^2 + x\text{-}6$; con $x = 3,\ \Delta x = 3$

6. $f(x) = 5\text{-}2x$; con $x = 2,\ \Delta x = 1$

7. $f(x) = x^3$; desde "x" a "$x + \Delta x$"

8. $f(x) = x^2 + 3x$; desde "x" a "$x + \Delta x$"

Una partícula que se lanza hacia arriba con una velocidad de 50 m/seg., alcanza una altura "h" después de "t" segundos, en donde $h = 50t\text{-}5t^2$. Calcula la velocidad ascendente promedio en cada caso

9. Entre $t = 2$ y $t = 3$ seg.

10. Entre $t = 3$ y $t = 4$ seg.

LABORATORIO No. 13 NOMBRE _____
SECCIÓN 3.2 FECHA _____

Determina las derivadas de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes, según el caso

1. $f(x) = 3x\text{-}1$

2. $f(s) = 4s^2$

3. $f(t) = t^2\text{-}3t$

4. $f(u) = u^2 + 5u + 6$

Si $g(x) = x^2\text{-}4$, calcula

5. $g'(4)$

6. $g'(\text{-}1)$

Determina la pendiente de la recta tangente a las gráficas de las funciones siguientes en los puntos indicados. Encuentra la ecuación de la recta tangente en cada caso

7. $y = 9\text{-}x^2$; en $x = 2$

8. $y = x^2\text{-}2x + 1$; en $x = 3$

Cierta población crece de acuerdo con la fórmula

$$p(t) = 15000t + 30t^2$$

en donde "t" se mide en años. Calcula la tasa de crecimiento cuando

9. $t = 2$

10. $t = 5$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 14 NOMBRE _____
SECCIÓN 3.3 FECHA _____

Determina dy/dx si

1. $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 7$

2. $y = \sqrt{x} + 3x^2 - 2/x$

3. $y = (x+3)(x-4)$

4. $y = \sqrt[3]{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}$

5. $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x^2}$

6. $y = 3x^{2/3} - 2x^{1/2}$

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las funciones siguientes en los puntos indicados

7. $f(x) = x^2 - 2x - 8$ en (2,-8)

8. $f(x) = 6/x$ en (3,2)

La distancia recorrida por un móvil al tiempo "t" es igual a $d = 3t^2 - 2t^{1/2}$. Calcula la velocidad instantánea

9. Al tiempo t

10. En el instante $t = 3$

LABORATORIO No. 15 NOMBRE _____
SECCIÓN 3.4 FECHA _____

Determina el costo marginal de las funciones de costo siguientes

1. $C(x) = 30 + 5x$

2. $C(x) = 0.4x^2 + 13x + 850$

Determina el ingreso marginal de las funciones de ingreso siguientes

3. $R(x) = 5x - 0.03x^2$

4. $R(x) = x - 0.02x^{3/2}$

Cuando en un puesto de hamburguesas fija un precio de $8 por hamburguesa, advierte que el número de hamburguesas que vende en una semana es de 120 en promedio. Al elevar el precio a $10 el número de hamburguesas que vende por semana baja a 90. Suponiendo que la ecuación de demanda entre el precio y el número de hamburguesas vendidas es lineal, determina

5. La función del ingreso marginal

6. El precio que produce un ingreso marginal igual a cero

Si la ecuación de demanda es $x + 2p = 66$ y la función de costo es $C(x) = 3x + 250$, determina

7. El ingreso marginal

8. La utilidad marginal

9. La utilidad marginal si $x = 30$

10. La utilidad marginal si $p = 25$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 16 NOMBRE _____
SECCIÓN 3.5 FECHA _____

Usando la regla del producto, determina las derivadas de las funciones siguientes

1. $f(x) = (x^2-3x+5)(3x^2-4)$

2. $f(x) = (x^2-1)(x+1/x)$

3. $g(x) = (x^3+8)(x^2-2x)$

4. $y = (x^2+3)(x^2+4x-7)(5x-2)$

Usando la regla del cociente, determina las derivadas de las funciones siguientes

5. $y = \frac{x^3}{x-2}$

6. $f(t) = \frac{3t^2}{1-2t}$

7. $f(x) = \frac{x^2-5x}{x^2+2}$

8. $g(x) = \frac{7-3x}{x^2-4}$

Usando la regla de la cadena, determina las derivadas de las funciones siguientes

9. $y = \sqrt{3-5x}$

10. $f(x) = (x^2+3x+10)^5$

11. $y = \sqrt[3]{(x^2-x)^2}$

12. $f(x) = \frac{x^2}{(x^2-4)^2}$

13. La distancia recorrida por un móvil al tiempo "t" está dada por

$$d = (2t-3)^2 \sqrt[3]{(t+2)^2}$$

Determina la velocidad instantánea en el instante "t"

14. El tamaño de cierta población al tiempo "t" es

$$P = \left(\frac{t^2+10}{t+5}\right)^4$$

Determina la tasa de crecimiento de la población

15. Encuentra el costo marginal de la función de costo siguiente

$C(x) = \frac{4+5x}{\sqrt{x^2-1}}$

LABORATORIO No. 17 NOMBRE _____
SECCIÓN 3.6 FECHA _____

Determina d^2y/dx^2

1. $y = 3x^4-2x^3+x^2-1$

2. $y = (2x+5)^3$

3. $y = (x-9)^2$

Calcula $f''(3)$

4. $f(x) = x^3-8x^2+4x-1$

5. $f(x) = \frac{x}{x+2}$

Un objeto arrojado verticalmente hacia arriba tiene una altura $h = 80+20t-5t^2$ en metros, después de "t" segundos

6. ¿Cuándo alcanza su altura máxima?

7. ¿Cuál es su altura máxima?

8. ¿Cuándo cae al piso?

9. ¿Con qué velocidad llega al piso?

10. ¿Con qué aceleración llega al piso?

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 18 NOMBRE _____
REPASO CAPITULO 3 FECHA _____

Determina la razón de cambio promedio de cada función en el intervalo dado

1. $f(x) = 8-x^2$; con $x = 1$ y $\Delta x = 0.2$

2. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$; desde "x" a "$x + \Delta x$"

Determina las derivadas de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes

3. $f(x) = x^2 + 3x + 1$

4. $g(u) = u^2 - 3u$

5. $h(x) = 5x^2 - 3/x + \sqrt{x}$

6. $f(x) = (2x-1)(x^2 + 3x - 2)$

7. $g(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 - 2}$

8. $h(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$

Si la ecuación de demanda es $2x + 3p = 90$ y la función de costo es $C(x) = 0.1x^2 + 15x + 50$, determina

9. El ingreso marginal

10. La utilidad marginal

LABORATORIO No. 19 NOMBRE _____
SECCIÓN 4.1 FECHA _____

Determina los valores de x en los cuales las siguientes funciones son:
a) crecientes, b) decrecientes, c) cóncava hacia arriba, d) cóncava hacia abajo. También encuentra los puntos de inflexión si los hay.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$

2. $f(x) = -2x^2 + 6x + 5$

3. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x - 10$

4. $f(x) = 2x^3 + 1$

5. $f(x) = 1 - 2x^3$

6. $f(x) = x^3 - 27x + 4$

7. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

8. $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

9. $f(x) = x^4 + 4x^3$

10. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 20 NOMBRE _____
SECCIONES 4.2, 4.3, 4.4 FECHA _____

Encuentra los puntos críticos de las siguientes funciones

1. $f(x) = x^3 - 12x$

2. $f(x) = x^3 - 3/2x^2 - 18x + 8$

3. $f(x) = x^2 - x^3$

4. $f(x) = x^3/30 + 5/4x^2 + 2$

En los ejercicios del 1 al 4, distingue entre los puntos críticos los que son máximos o mínimos.

Bosqueja la gráfica de cada una de las siguientes funciones después de hacer lo siguiente: Encuentra todos los puntos máximos y mínimos, encuentra los intervalos donde f(x) es creciente y aquellos en los que es decreciente, encuentra los intervalos en que f(x) es cóncava hacia abajo o hacia arriba y localiza los puntos de inflexión

5. $f(x) = 1/3x^3 - x^2 - 6x + 3$

6. $f(x) = -x^3 + 3x - 5$

LABORATORIO No. 21 NOMBRE _____
SECCIÓN 4.5 FECHA _____

1. Suponga que una función de utilidad (P) está dada por
$P(x) = -x^2 + 8x - 5 \quad 0 < x < 8$
Demuestra que la ganancia máxima se obtiene cuando $x = 4$ y determina la ganancia máxima.

2. Una función de costos promedios está dada por

$$C(x) = \frac{\frac{1}{10}x^2 + 7x + 10}{x} \qquad 0 < x \leq 30$$

3. Se debe construir una caja rectangular sin tapa, de la siguiente manera: A una hoja de lámina de 10x16cm se le hará un pequeño corte cuadrado en cada esquina y luego se doblarán los bordes verticalmente. ¿Cuál debe ser el tamaño de los cuadrados recortados para que el volumen de la caja sea máximo?

4. El dueño del rancho "El girasol" tiene 100m. de tela de alambre con la cual planea construir dos corrales rectangulares adyacentes idénticos, ¿cuáles son las dimensiones del cercado total para que el área sea máxima?

5. Se va a cortar una viga rectangular de un tronco de sección transversal circular de 50 cm. de diámetro. Si la resistencia de una viga es proporcional al producto de su anchura por el cuadrado de su altura, encuentra las dimensiones de la sección transversal que da la viga de mayor resistencia

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 24 NOMBRE _____
SECCIÓN 5.2 FECHA _____

Evalúa las siguientes integrales definidas

1. $\int_1^2 (2x^2-4x+6)dx$

2. $\int_{-1}^{2} t^4 dt$

3. $\int_{-1}^{3} 4x^2\,dx$

4. $\int_o^4 (t^3+t^2+t+1)\,dt$

Calcula las áreas bajo las gráficas de las funciones siguientes entre los valores de x dados

5. $y=x^2+2x-3$, $x=0$ y $x=3$

6. $y=x^3-5x^2+2x+8$, $x=-1$ y $x=2$

Resuelve los siguientes problemas

7. Incremento en el costo
El costo marginal de producir la unidad número x de cierto artículo es 6-0.02x. Encuentra el cambio en el costo total de producción si el nivel de producción se incrementa de 150 a 200

8. Incremento en el precio
El precio marginal de un artículo está dado por $p'(x)=15-x$. Determina el cambio en el precio por unidad si la demanda se incrementa de $x=10$ a $x=15$

LABORATORIO No. 25 NOMBRE _____
SECCIÓN 5.3 FECHA _____

Determina el área de la región acotada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las líneas $x=a$ y $x=b$.

1. $y=2x-1$; $x=0$, $x=1$
2. $y=x^2$; $x=1$, $x=3$
3. $y=4x-x^2$; $x=0$, $x=4$

Encuentra el área entre los pares de curvas siguientes y entre las líneas verticales dadas

4. $y=x^3$, $y=3x-2$; $x=0$, $x=2$
5. $y=x^2$, $y=0$; $x=2$, $x=5$
6. $y=4x-x^2$, $y=0$; $x=1$, $x=3$

Determina el área de la región encerrada entre los pares de curvas siguientes

7. $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$
8. $y=2-x^2$, $y=-x$
9. $y=6x-x^2$, $y=x^2-2x$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS

LABORATORIO No. 26 NOMBRE _____

REPASO DEL CAPITULO 5 FECHA _____

Determina las integrales de las siguientes funciones

1. $\sqrt[3]{x}$

2. $(x+5)(x-5)$

Evalúa las siguientes integrales

3. $\int (2x^2-5x+3)dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

Resuelve el siguiente problema

4. Costo marginal
El costo marginal de cierta empresa es $C'(x) = 3-0.001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es $995. ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?

Evalúa las siguientes integrales definidas

5. $\int_{-1}^{1} (2x^2-x^3)dx$

6. $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Resuelve el siguiente problema

7. Incremento en el ingreso
La función de ingreso marginal de una empresa está dada por $R'(x) = 10.5-0.002x$. Determina el incremento en el ingreso total de la empresa cuando el nivel de ventas se incrementa de 90 a 180 unidades.

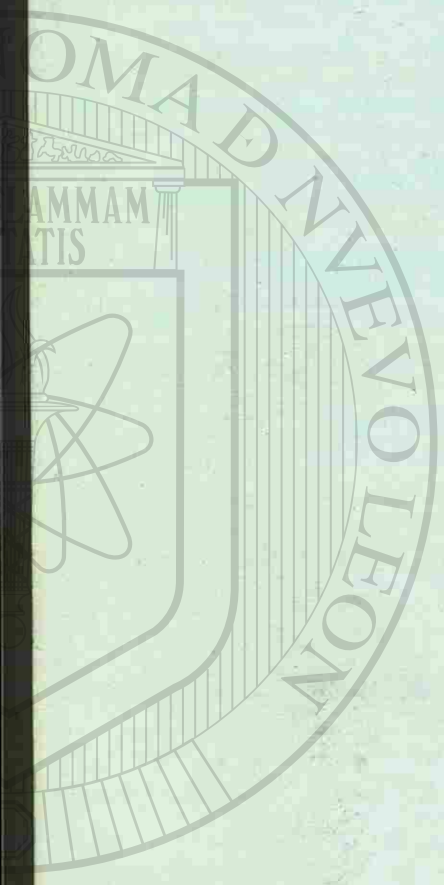
Hallar el área limitada por las curvas y rectas que se te indican

8. $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=3$
9. $y=9-x^2$, $y=x+3$
10. $y^2=4x$, $y=2x-4$

CAPILLA ALFONSINA
U. A. N. L.

Esta publicación deberá ser devuelta antes de la última fecha abajo indicada.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN ®
DIRECCIÓN GENERAL DE BIBLIOTECAS



UAN
SIDAD AUTÓNOMA DE NUEV
CCIÓN GENERAL DE BIBLIOTE